Rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale ordinare

Prof.dr.ing. Gabriela Ciuprina

Universitatea "Politehnica" Bucureşti, Facultatea de Inginerie Electrică

Suport didactic pentru disciplina *Metode numerice*, 2017-2018

Cuprins

Ecuaţie diferenţială ordinară (ODE)

Se dau

$$f : \mathbb{R} \times [t_0, T] \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$

Se cere

$$x : [t_0, T] \to \mathbb{R}$$

care satisface

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Ecuaţie diferenţială ordinară (ODE)

Se dau

$$f : \mathbb{R} \times [t_0, T] \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$

Se cere

$$x : [t_0, T] \to \mathbb{R}$$

care satisface

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Problemă cu o valoare iniţială

Ecuaţie diferenţială ordinară (ODE)

Metoda numerică va furniza un tabel de valori:

t_0	t_1	t_2	$\cdots$	t_n
x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n

unde $t_n = T$

Obs:

- De multe ori t reprezintă *timp* şi se poate considera $t_0 = 0$;
- Vom nota: $x(t_j)$ soluţia exactă şi x_j aproximaţia ei

$$x_j \approx x(t_j)$$

- În cele ce urmează vom pp: $t_j - t_{j-1} = h \quad \Leftrightarrow \quad t_k = t_0 + jh$

Metoda Euler explicită

Dezvoltarea în serie Taylor în jurul lui t_j

$$x(t_j + h) = x(t_j) + \frac{h}{1!}x'(t_j) + \frac{h^2}{2!}x''(t_j) + \cdots \tag{3}$$

Formula Taylor

$$x(t_j + h) = x(t_j) + \frac{h}{1!}x'(t_j) + \frac{h^2}{2!}x''(\zeta) \tag{4}$$

$$x(t_j + h) = x(t_j) + hf(x(t_j), t_j) + \mathrm{O}(h^2) \tag{5}$$

Dacă am presupune că valoarea la iteraţia j a fost calculată exact $x_j = x(t_j)$ atunci

$$x(t_j + h) = x_j + hf(x_j, t_j) + \mathrm{O}(h^2) \tag{6}$$

Metoda Euler explicită

Dacă am presupune că valoarea la iteraţia j nu este afectată de erori $x_j = x(t_j)$ atunci

$$x(t_j + h) = x_j + hf(x_j, t_j) + \mathrm{O}(h^2)$$

Dacă adoptăm ca formulă de calcul (Euler explicit)

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \tag{7}$$

atunci *eroarea locală* la iteraţia j este

$$e_l = |x(t_{j+1}) - x_{j+1}| = \mathrm{O}(h^2) \tag{8}$$

Metoda Euler explicită

Dacă am presupune că valoarea la iteraţia j nu a fost calculată exact $x(t_j) = x_j + e_{x_j}$ atunci

$$x(t_j + h) = x_j + e_{x_j} + hf(x_j, t_j) + \mathrm{O}(h^2)$$

Dacă adoptăm ca formulă de calcul (Euler explicit)

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \tag{9}$$

atunci *eroarea locală* este

$$e_{x_{j+1}} = |x(t_{j+1}) - x_{j+1}| = e_{x_j} + \mathrm{O}(h^2) \tag{10}$$

Metoda Euler explicită

Eroarea globală este eroarea la ultimul moment de timp

$$\begin{aligned} e_g &= |x(t_n) - x_n| = e_{x_n} + \mathrm{O}(h^2) = e_{x_{n-1}} + \mathrm{O}(h^2) + \mathrm{O}(h^2) = \\ &= n\mathrm{O}(h^2) = \frac{T - t_0}{h}\mathrm{O}(h^2) = \mathrm{O}(h) \end{aligned} \quad (11)$$

Metoda Euler explicită

O altă variantă de deducere a relaţiei de calcul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{12}$$

- Se scrie ecuaţia la momentul de timp discret t_j;
- Pentru derivată: formulă de diferenţe finite progresive de ordinul 1

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{h} = f(x_j, t_j) \quad \Rightarrow \tag{13}$$

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \tag{14}$$

Metoda Euler explicită

O altă variantă de deducere a relaţiei de calcul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{12}$$

- Se scrie ecuaţia la momentul de timp discret t_j;
- Pentru derivată: formulă de diferenţe finite progresive de ordinul 1

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{h} = f(x_j, t_j) \quad \Rightarrow \tag{13}$$

$$x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j) \tag{14}$$

Folosirea seriei Taylor este utilă pentru estimarea erorii de trunchiere.

Metoda Euler explicită - algoritm

procedură Euler_explicit (xinit,$t0$,T,h,x)
real xinit
real $t0$, T
real h
$n = [(T - t0)/h]$
tablou real $t[n+1]$
tablou real $x[n+1]$
$t_0 = \mathrm{t0}$
$x_0 = \mathrm{xinit}$
pentru $j = 0, n-1$
    $x_{j+1} = x_j + hf(x_j, t_j)$
    $t_{j+1} = t_j + h$
•
retur

Metoda Euler implicită

Derivata: formulă de diferenţe finite regresive de ordinul 1

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{15}$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j, t_j) \quad \Rightarrow \tag{16}$$

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \tag{17}$$

Metoda Euler implicită

Derivata: formulă de diferenţe finite regresive de ordinul 1

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{15}$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j, t_j) \quad \Rightarrow \tag{16}$$

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \tag{17}$$

Relaţia este implicită, la fiecare pas se rezolvă o ecuaţie algebrică neliniară pentru determinarea mărimii x_j

Metoda Euler implicită

Metoda Euler implicită

Derivata: formulă de diferenţe finite regresive de ordinul 1

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x(t), t) \tag{15}$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j, t_j) \quad \Rightarrow \tag{16}$$

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \tag{17}$$

Relaţia este implicită, la fiecare pas se rezolvă o ecuaţie algebrică neliniară pentru determinarea mărimii x_j

Metoda Euler implicită

Şi în acest caz

$$e_l = \mathrm{O}(h^2) \qquad e_g = \mathrm{O}(h)$$

Metoda Euler implicită

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \tag{18}$$

Ecuaţia neliniară de rezolvat: $F(x) = 0$, unde

$$F(x) = x - x_{j-1} - hf(x, t_j)$$

- Iteraţii simple:

$$x^{(n)} = x^{(v)} + cF(x^{(v)}) \quad \text{aici} \quad x^{(n)} = x_j^{(n)} \quad x^{(v)} = x_j^{(v)}$$

$$x_j^{(n)} = x_j^{(v)} + c(x_j^{(v)} - x_{j-1} - hf(x_j^{(v)}, t_j))$$

De exemplu, dacă $c = -1$

$$x_j^{(n)} = x_{j-1} + hf(x_j^{(v)}, t_j))$$

Metoda Euler implicită

$$x_j = x_{j-1} + hf(x_j, t_j) \tag{18}$$

Ecuaţia neliniară de rezolvat: $F(x) = 0$, unde

$$F(x) = x - x_{j-1} - hf(x, t_j)$$

- Newton:

$$x^{(n)} = x^{(v)} + cF(x^{(v)}) \quad \text{aici} \quad x^{(n)} = x_j^{(n)} \quad x^{(v)} = x_j^{(v)}$$

$c = -1/F'(x^{(v)})$ unde $F'(x) = 1 - h\frac{\partial f}{\partial x}(x, t_j)$

$$x_j^{(n)} = x_j^{(v)} - \frac{x_j^{(v)} - x_{j-1} - hf(x_j^{(v)}, t_j)}{1 - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_j^{(v)}, t_j)}$$

Metoda Euler implicită

- La fiecare pas de timp se rezolvă o ecuaţie neliniară;
- Iniţializarea rezolvării ecuaţiei neliniare - de exemplu cu soluţia de la Euler explicit;
- Eroarea şi numărul maxim admis de iteraţii pentru procedura neliniară - trebuie să fie parametri de intrare pentru Euler implicit;
- Dacă f este o funcţie liniară, atunci $F(x) = 0$ este o ecuaţie liniară, soluţia se poate calcula explicit.
- Metoda Euler este o metodă într-un pas, de ordinul 1.
  Metoda într-un pas = valoarea la un moment de timp se calculează în funcţie de o valoare la un singur moment de timp anterior;
  Ordinul metodei = se referă la ordinul erorii globale, aici $e_g = \mathrm{O}(h)$.

Metoda Euler implicită

procedură Euler_implicit (xinit,$t0$,T,h,err,maxit,x)
real xinit
real $t0$, T
real h
real err
întreg maxit
$n = [(T - t0)/h]$
tablou real $t[n+1]$
tablou real $x[n+1]$
$t_0 = $ t0
$x_0 = $ xinit
....

Metoda Euler implicită

procedură Euler_implicit (xinit,$t0$,T,h,err,maxit,x)

....

pentru $j = 0, n-1$

  $xn = x_j + hf(x_j, t_j)$; iniţializare ca la Euler explicit

  ; iteratii simple (c=-1)

  $k = 0$

  repetă

    xv = xn

    $xn = x_j + hf(xv, t_j)$

    $k = k + 1$

    $d = |xv - xn|$

  până când ($d <$ err) **sau** $k >$ maxit

  dacă $k >$ maxit **scrie** procedura neliniară neconvergentă

  $t_{j+1} = t_j + h$

  $x_{j+1} = xn$

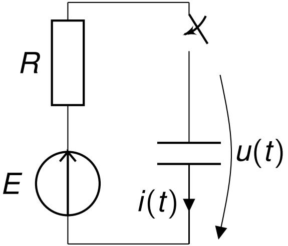
retur

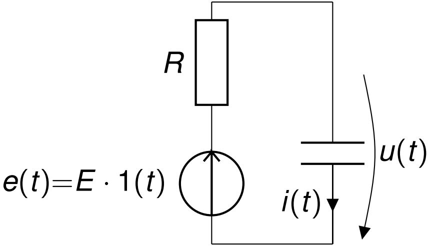
sau cu Newton:

Metoda Euler implicită

procedură Euler_implicit (xinit,$t0$,T,h,err,maxit,x)
....
pentru $j = 0, n-1$
    $xn = x_j + hf(x_j, t_j)$; iniţializare ca la Euler explicit
    ; Newton
    $k = 0$
    repetă
        xv = xn
        $xn = x_j - (xv - x_{j-1} - hf(xv, t_j))/(1 - h \cdot \mathrm{fder}(xv, t_j))$
        $k = k + 1$
        $d = |xv - xn|$
    până când ($d <$ err) **sau** $k >$ maxit
    dacă $k >$ maxit **scrie** procedura neliniară neconvergentă
    $t_{j+1} = t_j + h$
    $x_{j+1} = xn$
retur

Exemplu



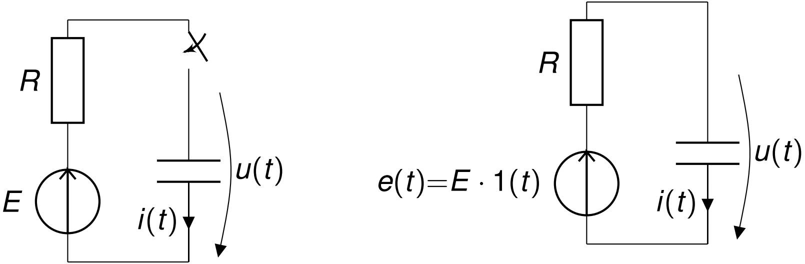


$C = 4\mu\text{F}$, $E = 20$ mV, $R = 10\ \Omega$, $u(0) = 0$.

$$Ri(t) + u(t) = E \qquad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{19}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t) = E. \qquad u(0) = u_0 = 0. \tag{20}$$

Exemplu



Soluţie analitică

$$u(t) = (u_0 - E)\exp(-t/\tau) + E. \tag{19}$$

unde $\tau = RC$ este *constanta de timp* a circuitului.

Exemplu

Ecuaţia (20) o rescriem ca

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \tag{20}$$

Vom urmări calculul numeric în intervalul de timp $[0, t_{max}]$ unde $t_{max} = 10\tau$ într-o reţea echidistantă de N puncte t_k, unde pasul de discretizare h este

$$t_{k+1} - t_k = h, \quad \text{pentru} \quad k = 1, \ldots, N-1. \tag{21}$$

Vom nota valorile discrete obţinute prin rezolvare numerică cu u_k. Ele vor fi aproximaţii ale mărimii reale u.

$$u_k \approx u(t_k). \tag{22}$$

Exemplu

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \tag{23}$$

Varianta I - Euler explicit (dif. finite progresive de ord. 1)

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{h} + \frac{1}{\tau}u_k = \frac{1}{\tau}E, \tag{24}$$

$\Rightarrow$ u_{k+1} poate fi calculată explicit cu formula

$$u_{k+1} = u_k\left(1 - \frac{h}{\tau}\right) + \frac{h}{\tau}E. \tag{25}$$

Exemplu

$$u_{k+1} = u_k \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) + \frac{h}{\tau} E. \tag{26}$$

```
procedură euler_explicit_RC(u0,E,tau,h,N,u)
; rezolvă ecuaţia du(t)/dt + (1/τ) u(t) = (1/τ) E cu metoda diferenţelor finite
; d/dt se discretizează folosind diferenţe progresive de ordinul 1
real u0                       ; condiţia iniţială - dată
real E                        ; coeficient în ecuaţie - dată
real tau                      ; constantă de timp - dată
real h                        ; pas de discretizare al intervalului de timp - dat
întreg N                      ; număr de valori de timp - dat
tablou real u[N]              ; soluţia discretă - rezultat
u(1) = u0
pentru k = 1,N-1
        u(k+1) = u(k)*(1-h/tau) + h*E/tau
•
retur
```

Această metodă, este instabilă pentru $h > \tau$.

Exemplu

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \tag{27}$$

Varianta a II-a - Euler implicit (dif. finite regresive de ord. 1)

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} + \frac{1}{\tau}u_k = \frac{1}{\tau}E, \tag{28}$$

$\Rightarrow$ u_k poate fi calculată explicit:

$$u_k = \left(u_{k-1} + \frac{h}{\tau}E\right) / \left(1 + \frac{h}{\tau}\right). \tag{29}$$

Exemplu

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{1}{\tau}E. \tag{27}$$

Varianta a II-a - Euler implicit (dif. finite regresive de ord. 1)

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} + \frac{1}{\tau}u_k = \frac{1}{\tau}E, \tag{28}$$

$\Rightarrow$ u_k poate fi calculată explicit:

$$u_k = \left(u_{k-1} + \frac{h}{\tau}E\right) / \left(1 + \frac{h}{\tau}\right). \tag{29}$$

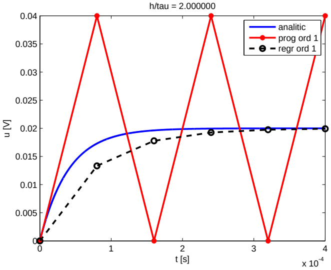
În acest caz nu este nevoie de rezolvarea unei ecuaţii neliniare

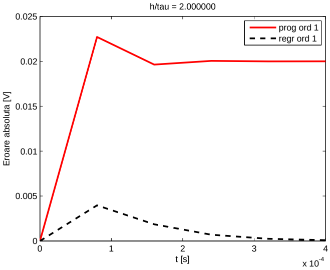
Exemplu

$$u_k = \left(u_{k-1} + \frac{h}{\tau}E\right) / \left(1 + \frac{h}{\tau}\right). \tag{30}$$

```
procedură euler_implicit_RC(u0,E,tau,h,N,u)
; rezolvă ecuaţia du(t)/dt + (1/τ) u(t) = (1/τ) E cu metoda diferenţelor finite
; d/dt se discretizează folosind diferenţe regresive de ordinul 1
real u0                  ; condiţia iniţială - dată
real E                   ; coeficient în ecuaţie - dată
real tau                 ; constantă de timp - dată
real h                   ; pas de discretizare al intervalului de timp - dat
întreg N                 ; număr de valori de timp - dat
tablou real u[N]         ; soluţia discretă - rezultat
u(1) = u0
pentru k = 2,N
        u(k) = (h*E/tau + u(k-1))/(1 + h/tau)
• retur
```

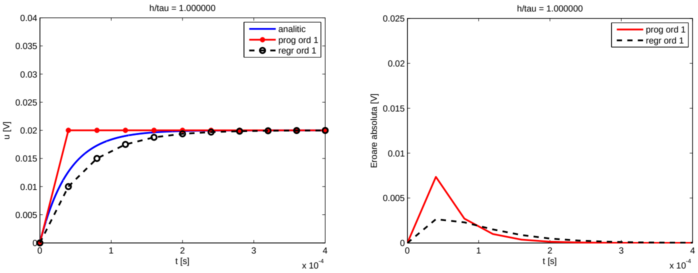
Exemplu





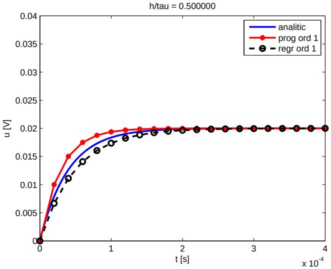
Cazul $h = 2\tau$.

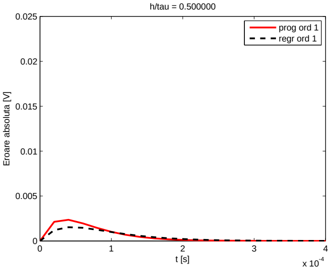
Exemplu



Cazul $h = \tau$.

Exemplu





Cazul $h = \tau/2$.

Formularea problemei

Se dau

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^n \qquad \mathbf{x0} \in \mathbb{R}^n$$

Se cere

$$\mathbf{x} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$$

care satisface

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \tag{31}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x0} \tag{32}$$

unde de exemplu $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$, iar **A** şi **B** sunt date

Metode în m paşi

Axa timpului se discretizează în momente discrete: $t_0, t_1, t_2, \ldots,$ şi se calculează aproximări $\mathbf{x}_n$ ale soluţiei necunoscute $\mathbf{x}(t_n)$

$$\mathbf{x}_n \approx \mathbf{x}(t_n). \tag{33}$$

O metodă generală în m paşi aproximează soluţia la un moment discret t_{n+m} în funcţie de soluţiile obţinute în m paşi anteriori $t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+m-1}$:

$$\sum_{i=0}^{m} \rho_i \mathbf{x}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{m} \sigma_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+i}, t_{n+i}) \tag{34}$$

unde $h = t_{n+m} - t_{n+m-1}$.

Metode în *m* paşi

$$\sum_{i=0}^{m} \rho_i \mathbf{x}_{n+i} = h \sum_{i=0}^{m} \sigma_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+i}, t_{n+i}), \tag{35}$$

unde $h = t_{n+m} - t_{n+m-1}$.
$\rho_m = 1$, iar coeficienţilor ρ_i şi σ_i sunt aleşi astfel încât procedeul să fie convergent.

- Dacă $\sigma_m = 0$, atunci calculul valorii noi x_{n+m} se face explicit;
- Dacă $\sigma_m \neq 0$, atunci calculul valorii noi x_{n+m} se face implicit şi necesită rezolvarea unei ecuaţii algebrice, în general neliniare.

Metode într-un pas

Metode într-un pas: $m = 1$

$$-\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = h\left[\sigma_0 \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n) + \sigma_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1})\right], \qquad (36)$$

unde $\rho_0 = -1$ din motive de convergenţă.

Dacă notăm $\sigma_0 = \theta$ şi $\sigma_1 = 1 - \theta$, aceste metode cu un pas se numesc metode θ.
In particular, şi renotând n cu $k - 1$, există următoarele scheme de calcul celebre

Metode într-un pas - metode θ

- Metoda Euler explicită (sau progresivă) $\theta = 1$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) \tag{37}$$

unde $h = t_k - t_{k-1}$. (Derivata din sistemul de ecuaţii: diferenţe finite progresive de ordinul 1).

- Metoda Euler implicită (sau regresivă) $\theta = 0$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \tag{38}$$

unde $h = t_k - t_{k-1}$. (Derivata din sistemul de ecuaţii: diferenţe finite regresive de ordinul 1.)

- Metoda trapezelor $\theta = 1/2$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \frac{h}{2}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, t_{k-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right) \tag{39}$$

unde $h = t_k - t_{k-1}$.

Metode într-un pas - metode θ

Justificarea numelui metodei trapezelor.

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t'), t')\, \mathrm{d}t'. \tag{40}$$

Considerând momentele discrete t_{k-1} şi t_k are loc

$$\mathbf{x}(t_k) = \int_{t_0}^{t_{k-1}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)\, \mathrm{d}t + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)\, \mathrm{d}t. \tag{41}$$

Schema de calcul va înlocui valorile exacte cu unele aproximative, în consecinţă

Metode într-un pas - metode θ

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + I, \tag{42}$$

unde I reprezinta o aproximare pentru integrala $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)\,\mathrm{d}t$.
Dacă **f** - funcţie scalară $\rightarrow$ cea mai simplă aproximare a integralei = aria trapezului corespunzător intervalului $[t_{k-1}, t_k] \rightarrow$ (39).
Metoda trapezelor este de ordinul 2.

Metode într-un pas de ordin superior

Dacă pentru I se aleg scheme numerice mai rafinate şi mai eficiente, care conduc la iteraţii în timp de tipul

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h \sum_{j=1}^{\nu} b_j \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k-1} + c_j h), t_{k-1} + c_j h). \qquad (43)$$

Într-o astfel de formulă, valorile $\mathbf{x}(t_{k-1} + c_j h)$ nu sunt cunoscute. Aproximarea lor prin combinaţii liniare ale unor valori calculate succesiv conduce la scheme de tip *Runge-Kutta* cu ν etape.

Metode multi-pas de ordin superior

O altă variantă a schemelor multipas date de (35) este cea în care $\sigma_i = 0$ pentru orice $i < m$.
Se numesc scheme BDF (*backward differentiation formula*):

$$\sum_{i=0}^{m-1} \rho_i \mathbf{x}_{n+i} + \mathbf{x}_{n+m} = h\sigma_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+m}, t_{n+m}) \quad (44)$$

unde $h = t_{n+m} - t_{n+m-1}$.
Renotând $n + m$ cu k, modul de calcul al soluţiei la iteraţia k în funcţie de m paşi anteriori este

$$\mathbf{x}_k - h\sigma_m \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) = -\sum_{i=0}^{m-1} \rho_i \mathbf{x}_{k-m+i} \quad (45)$$

Lectură obligatorie

- Cap.10 din

[1] Gabriela Ciuprina, Mihai Rebican, Daniel Ioan - Metode numerice in ingineria electrica - Indrumar de laborator pentru studentii facultatii de Inginerie electrica, Editura Printech, 2013, disponibil la http://mn.lmn.pub.ro/indrumar/IndrumarMN_Printech2013.pdf