

DANIEL C. IOAN
Universitatea "Politehnica" București

**BAZELE TEORETICE ALE
INGINERIEI ELECTRICE**

Editura
2000

DANIEL C. IOAN
BAZELE TEORETICE ALE INGINERIEI ELECTRICE

Referenți științifici: Conf.dr.ing. Irina Munteanu
Ș.l. dr. ing. Gabriela Ciuprina

Editura, 2000
București



Cuprins

0	Introducere	1
1	Mărimile fizice ale electromagnetismului	5
1.1	Mărimile fizice locale ale electromagnetismului	5
1.2	Mărimile fizice globale ale electromagnetismului	6
2	Legile câmpului electromagnetic	9
2.1	Legea fluxului electric	9
2.2	Legea fluxului magnetic	14
2.3	Legea inducției electromagnetice	17
2.4	Legea circuitului magnetic	28
2.5	Legea legăturii dintre inducția și intensitatea câmpului electric . .	34
2.6	Legea legăturii dintre inducția intensitatea câmpului magnetic . .	36
2.7	Legea condukției electrice	44
2.8	Clasificarea mediilor din punctul de vedere al legilor de material .	52
2.9	Legea transferării energiei în conductoare	54
2.10	Legea transferului de masă	57
2.11	Sistemul legilor câmpului electromagnetic	60
3	Teoremele fundamentale ale electromagnetismului. Bazele fizice ale teoriei circuitelor electrice	67
3.1	Teorema conservării sarcinii electrice	67
3.2	Teorema energiei electromagnetice.	73
3.3	Teorema condensatorului liniar.	75
3.4	Teorema rezistorului liniar	77
3.5	Teorema bobinei liniare.	77
3.6	Teoremele forțelor generalizate	81
3.7	Circuite electrice cu elemente filiforme în regim staționar. Teoremele lui Kirchhoff.	83
3.8	Circuite electrice cu parametri concentrați.	87
3.9	Circuite electrice formate din elemente cu parametrii distribuiți .	90
3.10	Elemente ideale de circuit electric	96
3.10.1	Modelarea circuitelor electrice	96

3.10.2	Elemente dipolare liniare	98
3.10.3	Elemente dipolare neliniare	106
3.11	Elemente dipolare parametrice	115
3.12	Elemente multipolare liniare	118
3.13	Bobine ideale cuplate magnetic	127
3.14	Elemente multipolare neliniare	131
3.15	Modelarea elementelor reale liniare de circuit	136
3.16	Modelarea cu elemente neliniare ideale	150
3.17	Modele pentru mici variații	162
4	Circuite electrice simple. Teorema de echivalență	167
4.1	Relația de echivalență a elementelor de circuit	167
4.2	Teorema generatoarelor echivalente	174
4.3	Conexiunea serie a elementelor dipolare	175
4.4	Conexiunea paralel a elementelor dipolare	183
4.5	Conexiunea mixtă	184
4.6	Conexiunile stea, triunghi, poligon complet	187
4.7	Teoreme de echivalare pentru bobine cuplate	193
4.8	Analiza prin transfigurare a circuitelor electrice. Metoda genera- toarelor echivalente	200
4.9	Folosirea similitudinii în analiza circuitelor electrice	205
4.10	Analiza circuitelor rezistive neliniare simple. Metoda dreptei de sarcină	207
4.10.1	Metode numerice pentru analiza circuitelor rezistive cu un element neliniar	210
4.11	Circuite electrice cu un singur element acumulator de energie. . .	217
4.12	Circuite electrice liniare cu două elemente acumulative de energie	239
5	Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice	
	Analiza topologică a circuitelor	253
5.1	Independența ecuațiilor lui Kirchhoff. Forme matriceale	253
5.1.1	Teorema lui Tellegen. Conservarea puterilor	261
5.1.2	Analiza circuitelor electrice. Problema fundamentală . . .	261
6	Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice	267
6.1	Puteri. Relații de conservare	267
6.2	Teoreme de existență și unicitate a soluției	270
6.3	Teorema privind invarianța soluției	273
6.4	Teoreme privind comportarea soluției	276

A	Legile câmpului electromagnetic	281
A.1	Legea fluxului electric.	281
A.2	Legea fluxului magnetic.	281
A.3	Legea inducției electromagnetice	282
A.4	Legea circuitului magnetic.	283
A.5	Teorema conservării sarcinii electrice.	284
A.6	Legea legăturii dintre D și E	285
A.7	Legea legăturii dintre B și H	287
A.8	Legea conducției.	288
A.9	Legea transformării energiei în conductoare.	290

Capitolul 0

Introducere

Disciplină “Bazele teoretice ale ingineriei electrice” analizează fenomenele electrice și magnetice, folosind caracterizările lor cantitative, și implicit modelarea matematică a acestor fenomene, în vederea aplicațiilor lor **tehnice**.

Ea are două mari subdiviziuni:

- Teoria câmpului electromagnetic
- Teoria circuitelor electrice

Teoria câmpului electromagnetic analizează fenomenele electromagnetice, în regimuri staționare sau variabile, acordând o atenție deosebită repartiției spațiale a acestor fenomene. Conceptul principal al acestei teorii este câmpul electromagnetic, caracterizat de vectori variabili în spațiu și eventual în timp, deci de funcții vectoriale de mai multe variabile scalare.

Fenomenele electromagnetice sunt descrise în această teorie prin sisteme de ecuații diferențiale cu derivate parțiale, care se referă la componentele câmpurilor vectoriale.

În anumite ipoteze simplificatoare, sistemele fizice electromagnetice pot fi caracterizate printr-un număr finit de mărimi scalare variabile sau constante în timp. Teoria asociată acestor sisteme, numite circuite electrice, se bazează pe ecuații diferențiale ordinare sau chiar algebrice, deci este mult mai simplă. Din acest motiv ea este intens folosită în practică.

Fenomenele electromagnetice se pot clasifica în:

- fenomene electrice;
- fenomene magnetice;
- fenomene galvanice,

corespunzând stărilor de electrizare, magnetizare, respectiv electrocinetică a corpurilor. Aceste fenomene au fost evidențiate cu mai multe secole în urmă, dar

studiul lor sistematic a fost elaborat în secolul trecut. Legătura intimă între cele trei categorii de fenomene a fost pusă în evidență abia la sfârșitul secolului al XVIII - lea.

Fenomenele electrice au fost studiate sistematic de Coulomb folosind efectele mecanice ale acestora. S-a constatat că anumite corpuri își modifică starea prin frecare, fenomen numit de electrizare. Deoarece electrizarea poate fi de două tipuri (convențional numită "pozitivă", respectiv "negativă"), pentru caracterizarea stării de electrizare a unui corp s-a introdus o mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) notată cu q și numită sarcină electrică.

Corpurile electrizate interacționează mecanic. Asupra fiecărui corp dintr-o pereche de corpuri punctiforme electrizate se exercită forțe egale în modul dar de sens contrar, care sunt proporționale cu sarcinile și invers proporționale cu pătratul distanței dintre corpuri. S-a presupus, în mod greșit, că interacțiunea mecanică între cele două corpuri se realizează instantaneu, de la distanță. Teoria acțiunii la distanță a fost infirmată de teoria acțiunii prin contiguitate ("din aproape în aproape"), care are la bază ipoteza că fiecare corp electrizat determină în jurul său o modificare a stării materiei, numită câmp electric. Forța care se exercită asupra celui de-al doilea corp fiind datorată interacțiunii acestuia cu câmpul electric produs de primul corp. Introducerea câmpului electric, ca element intermediar al interacțiunii între corpuri a reprezentat un mare progres în înțelegerea fenomenelor electromagnetismului. Câmpul electric este caracterizat de intensitatea sa \mathbf{E} , care este un vector proporțional cu forța pe care acesta o exercită asupra unui mic corp electrizat pozitiv. S-a constatat că prezența corpurilor, chiar neelectrizate modifică intensitatea câmpului electric. Din acest motiv caracterizarea completă a câmpului electric în corpuri se realizează cu perechea de vectori: intensitatea \mathbf{E} și inducția \mathbf{D} a câmpului electric.

Așa cum în mecanică, integrala forței de-a lungul unui drum determină o mărime scalară importantă numită lucrul mecanic, în electromagnetism integrala intensității câmpului electric de-a lungul unei curbe determină tensiunea electrică u , mărime fizică scalară ce caracterizează câmpul electric.

O altă categorie de fenomene studiată distinct de Volta, Galvani, Ohm și Kirchhoff se referă la cele galvanice. Aceste fenomene apar în anumite sisteme de corpuri metalice puse în contact cu pilele și acumulatele electrochimice și au căpătat denumirea generică de "curent electric". S-au constatat experimental mai multe efecte ale curentului electric, dintre care menționăm efectul termic, chimic, fiziologic și cel mecanic, toate cu o multitudine de aplicații practice. Despre conductoarele parcurse de curent electric se spune că sunt în stare electrocinetică. Pentru caracterizarea globală a acestei stări s-a introdus mărimea fizică scalară, notată cu i și numită intensitatea curentului electric. Local, starea electrocinetică este caracterizată de densitatea de curent \mathbf{J} .

Între starea electrocinetică și cea electrostatică s-a stabilit o relație bazată pe observația că două corpuri electrizate diferit, unite printr-un corp metalic, aduc pentru scurt timp acest corp în stare electrocinetică. S-a tras concluzia

că starea electrocinetică reprezintă o deplasare a sarcinii electrice în interiorul corpului metalic, numit din aceste motive conductor. Curentul electric depinde proporțional de tensiunea u între extremitățile conductorului, dar și de forma și de materialul din care este confecționat conductorul. Relațiile simple dintre tensiuni și curenți, valabile în regim staționar și determinate inițial de Kirchhoff pe cale experimentală au fost ulterior extinse în cazul curenților variabili, constituind baza teoriei circuitelor electrice, o teorie aplicată intens și în prezent atât pentru curenți slabi (electronică), cât și pentru curenți tari (electroenergetică).

Fenomenele magnetice au fost evidențiate mai întâi prin interacțiunile de natură mecanică între corpuri aflate într-o anumită stare, numită de magnetizare. Aceste corpuri au fost numite magneti. Faptul că Pământul în ansamblul său este un magnet, și-a găsit aplicație la busola magnetică. Pentru explicarea corectă a interacțiunii prin contiguitate și nu de la distanță a fost necesară introducerea conceptului de câmp magnetic. Acesta este conceput ca o stare specială a materiei, capabilă să intermedieze acțiunile mecanice. Pentru caracterizarea locală a câmpului magnetic în corpuri se folosește perechea de vectori: inducție magnetică \mathbf{B} și intensitatea câmpului magnetic \mathbf{H} . S-a constatat că orice conductor parcurs de curent produce în jurul lui câmp magnetic. Mai mult s-a demonstrat că un magnet este echivalent cu un conductor înfășurat parcurs de curent electric. Echivalența este valabilă atât din punctul de vedere al câmpului magnetic produs, cât și din punctul de vedere al acțiunilor mecanice exercitate asupra corpului respectiv. În acest fel s-a evidențiat legătura strânsă între starea electrocinetică și cea magnetică.

Atât câmpul electric, cât și cel magnetic sunt capabile să acumuleze energie, chiar și în absența corpurilor.

Cercetările experimentale efectuate de Faraday care urmăreau validarea ipotezei greșite că și câmpul magnetic este capabil să producă curent electric au condus la descoperirea unuia dintre fenomenele cele mai importante ale electromagnetismului, și anume fenomenul de inducție electromagnetică. Această constă în faptul că orice câmp magnetic variabil în timp produce (induce) câmp electric. Inducția electromagnetică are în prezent mai multe aplicații, dintre care menționăm generatoarele de curent alternativ, care produc energia electrică în întreaga lume și transformatoarele electrice, folosite printre altele la transportul acestei energii.

Ultimul fenomen fundamental al electromagnetismului a fost evidențiat de Maxwell pe cale teoretică și ulterior confirmat experimental de Hertz. Această constă în faptul că un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic. Astfel s-a evidențiat legătura intimă între componenta electrică și cea magnetică a câmpului electromagnetic.

Faptul că cele două componente ale câmpului electromagnetic se generează reciproc, atunci când sunt variabile în timp a condus la explicația fenomenului de propagare a undelor electromagnetice, capabile să transporte energie inclusiv în vid.

Toate aceste fenomene au pus în evidență faptul că pe lângă substanță, mai există o altă componentă a realității fizice numită câmp electromagnetic, câmp care interacționează cu substanța (este produs de corpuri și modifică starea acestora), dar poate exista și independent de acestea.

Capitolul 1

Mărimile fizice ale electromagnetismului

1.1 Mărimile fizice locale ale electromagnetismului

Pentru caracterizarea locală a câmpului electric se folosește o pereche de vectori:

- $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ - intensitatea câmpului electric
- $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ - inducția electrică

Fiecare dintre aceștia sunt funcție de punct (caracterizat de vectorul de poziție \mathbf{r}) și timpul t . Într-un sistem de coordonate cartezian vectorul de poziție în spațiul fizic este caracterizat de cele trei coordonate ale punctului:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.1)$$

iar fiecare vector de câmp are trei componente:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}, \quad (1.2)$$

unde:

$$\begin{aligned} E_x &= E_x(x, y, z, t); \\ E_y &= E_y(x, y, z, t); \\ E_z &= E_z(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

În mod asemănător se exprimă și:

$$\mathbf{D} = D_x\mathbf{i} + D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k} \quad (1.4)$$

Pentru caracterizarea stării locale a câmpului magnetic se utilizează altă pereche de vectori tridimensionali:

- $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ - inducția magnetică;
- $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ - intensitatea câmpului magnetic.

Câmpul electromagnetic este o stare specială de existență a materiei, care poate exista și în absența substanței (în vid), caracterizată prin vectorii \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} și \mathbf{H} . Această stare este capabilă să exercite acțiuni ponderomotoare asupra corpurilor, să acumuleze și să transporte energie.

Pentru a caracteriza modificarea stării corpurilor în urma interacțiunii cu câmpul electromagnetic se utilizează o altă pereche de mărimi fizice locale:

- $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ - densitatea sarcinii electrice;
- $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ - densitatea curentului electric.

Prima este o mărime scalară (pozitivă sau negativă) ce caracterizează local starea de electrizare, iar a doua este o mărime vectorială tridimensională ce caracterizează local starea electrocinetică:

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k} \quad (1.5)$$

În consecință, în fiecare punct din spațiu pentru a caracteriza complet starea câmpului electromagnetic și a corpurilor din punct de vedere electromagnetic este nevoie de nu mai puțin de 16 mărimi scalare (componente ale celor patru vectori caracteristici câmpului, și perechii scalar-vector ce caracterizează corpurile). Pentru a sintetiza această cantitate enormă de informație se introduc mărimile globale ale câmpului, respectiv ale corpurilor.

1.2 Mărimile fizice globale ale electromagnetismului

Mărimile globale ale câmpului se obțin prin integrarea mărimilor locale. Domeniul de integrare reprezintă o mulțime de puncte din spațiul fizic. Se deosebesc trei tipuri de astfel de mulțimi numite varietăți: curbe, suprafețe și domenii de volum nenul. Fiecare din mărimile locale se integrează pe o anumită varietate. Chiar dacă matematic fiecare mărime locală s-ar putea integra pe oricare din cele trei varietăți, obținându-se în final 18 mărimi, dintre acestea doar 6 au semnificație fizică. Ele sunt:

1. Tensiunea electrică:

$$u = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.6)$$

mărime fizică scalară obținută prin integrarea intensității câmpului electric pe o curbă orientată;

2. Fluxul electric:

$$\psi = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.7)$$

mărime fizică scalară obținută prin integrarea inducției electrice pe o suprafață orientată;

3. Tensiunea magnetică:

$$u_m = \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.8)$$

mărime fizică scalară obținută prin integrarea intensității câmpului magnetic pe o curbă orientată;

4. Fluxul magnetic:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.9)$$

mărime fizică scalară obținută prin integrarea inducției magnetice pe o suprafață orientată;

5. Sarcina electrică:

$$q = \int_D \rho dv, \quad (1.10)$$

mărime fizică scalară obținută prin integrarea densității de sarcină pe un domeniu de volum nenul;

6. Intensitatea curentului electric:

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.11)$$

mărime fizică scalară obținută prin integrarea densității de curent electrică pe o suprafață orientată.

În afară de sarcina electrică, toate celelalte mărimi sunt definite pe varietăți orientate (curbe sau suprafețe). Orientarea unei varietăți se realizează convențional, prin alegerea unui sens de referință. Pentru a asigura coerența internă a teoriei se adoptă următoarele reguli de orientare:

- suprafețele închise se orientează din interior spre exterior;
- suprafețele deschise se orientează în conformitate cu regula burghiului față de orientarea curbei pe care acestea se sprijină;
- curbele se orientează arbitrar, cu excepția curbelor închise pe care se sprijină suprafețe deschise orientate, caz în care se aplică regula anterioară .

Introducerea mărimilor globale, care toate sunt funcții scalare de timp, asociate varietății pe care au fost definite, dar independente de punct, permite caracterizarea globală, în medie a câmpului electromagnetic pe mulțimea de puncte precizate. Aceasta simplifică mult caracterizarea câmpului electromagnetic și analiza lui.

Capitolul 2

Legile câmpului electromagnetic

Pentru înțelegerea profundă a fenomenelor specifice câmpului electromagnetic, acestea trebuie caracterizate nu numai calitativ ci și cantitativ, prin intermediul ecuațiilor între mărimile fizice caracteristice. Dintre mulțimea relațiilor matematice între mărimile fizice, relații stabilite pe baza observațiilor experimentale, s-a ales un număr redus de relații fundamentale, numite legi, care se bucură de proprietățile de independență, noncontradicție și completitudine.

Legile câmpului electromagnetic vor caracteriza fenomenele fundamentale ale electromagnetismului. Ele nu necesită demonstrație matematică ci sunt obținute printr-un proces de inducție, pornind de la observații experimentale.

În continuare vor fi enunțate legile electromagnetismului, evidențiindu-se semnificația lor fizică, dar fără a se prezenta argumentația care a condus la formularea lor.

2.1 Legea fluxului electric

Enunțul legii fluxului electric

Fluxul electric pe orice suprafață închisă Σ este egal cu sarcina electrică din domeniul D_Σ mărginit de aceasta:

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \quad (2.1)$$

sau explicit (fig. 2.1)

$$\oint_\Sigma \mathbf{D} = \int_{D_\Sigma} \rho dv. \quad (2.2)$$

Semnificația fizică a legii fluxului electric

Corpurile electrizate produc în jurul lor câmp electric.

Înconjurând un corp electrizat cu o suprafață închisă Σ , conform legii trebuie ca fluxul electric pe aceasta să fie nenul, ceea ce evidențiază prezența câmpului electric.

Pentru a stabili forma și orientarea liniilor de câmp electric se consideră două corpuri încărcate cu sarcini opuse (fig. 2.2). Pe o suprafață închisă Σ_1 , care

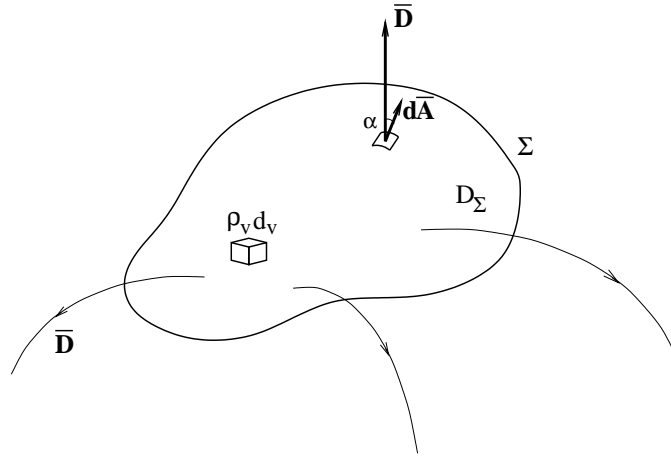


Figura 2.1: Referitoare la legea fluxului electric

înconjoară corpul cu sarcina $q_1 > 0$, fluxul electric este pozitiv ceea ce determină $D_{nmed} > 0$, deci liniile de câmp electric vor părăsi în medie această suprafață. Pe suprafața Σ_2 care înconjoară corpul cu sarcina $q_2 < 0$, fluxul este negativ, deci liniile de câmp electric vor intra în acest corp. În schimb, pe o suprafață Σ_3 în interiorul căreia sarcina este nulă, fluxul este tot nul. Pe o astfel de suprafață $D_{nmed} = 0$, deci liniile de câmp electric, care intră în Σ_3 trebuie să și iasă, din aceasta.

Se constată că fluxul electric pe o suprafață închisă nu depinde de sarcina electrică din exteriorul suprafeței.

În concluzie, se poate afirma că *liniile inducției electrice sunt curbe deschise care părăsesc sarcinile pozitive și se îndreaptă spre cele negative, fiind continue în zonele neelectrizate.*

Forma locală a legii fluxului electric.

Aplicând relația Gauss-Ostrogradski, fluxul electric se exprimă ca:

$$\psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \text{div} \mathbf{D} dv = \int_{D_{\Sigma}} \rho dv. \quad (2.3)$$

Deoarece ultima egalitate este valabilă oricare ar fi domeniul D_{Σ} , rezultă că integranzii trebuie să fie egali:

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (2.4)$$

Această relație cunoscută sub numele de forma locală a legii fluxului electric este o ecuație diferențială cu derivate parțiale, liniară și de ordinul întâi. Utilizând operatorul vectorial-diferențial ∇ , care într-un sistem de coordonate carteziene are forma:

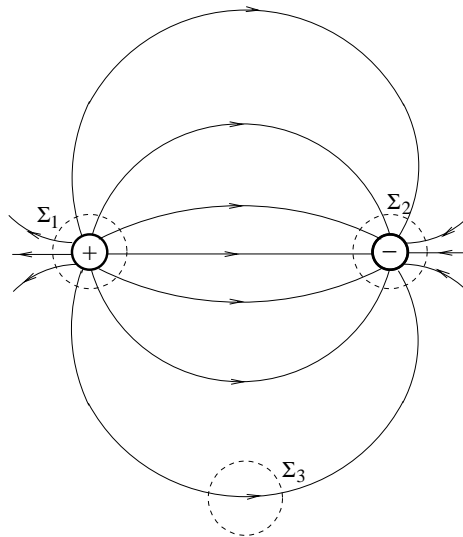


Figura 2.2: Spectrul câmpului electric

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.5)$$

forma locala a legii devine $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ sau explicit:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (2.6)$$

Ea este o ecuație diferențială care leagă componentele D_x , D_y și D_z ale inducției din fiecare punct cu densitatea de sarcină din acel punct. Semnificația operatorului divergență este dată de faptul că acest scalar este proporțional cu “productivitatea în linii de câmp a unui punct”. În consecință, punctele electrizate pozitiv au divergența pozitivă a inducției și sunt deci surse ale liniilor de câmp electric, cele negative “absorb” liniile de câmp, iar prin cele neelectrizate liniile de câmp trec în mod continuu. Pentru ca relația (2.6) să aibă loc în sens clasic este necesar ca inducția electrică \mathbf{D} să fie o funcție derivabilă, iar sarcina electrică să fie distribuită exclusiv volumetric, cu valori mărginite ale densității de sarcină $\rho = \rho_v$.

Forma pe suprafețe de discontinuitate a legii fluxului electric

Forma integrală (2.1) a fluxului electric are un caracter general presupunând doar integrabilitatea inducției electrice \mathbf{D} , pe când forma locală (2.6) poate fi aplicată doar în punctele în care inducția \mathbf{D} este continuă și derivabilă spațial. În practică se întâlnesc situații în care această condiție nu este îndeplinită, deci forma locală are un caracter particular. De exemplu, suprafața de separație între două medii omogene, cu proprietăți diferite poate fi suprafață de discontinuitate pentru inducția electrică. Din acest motiv este necesară stabilirea unei forme a

legii fluxului, aplicabilă pe astfel de suprafețe. Se consideră două domenii \mathcal{D}_1 și \mathcal{D}_2 separate prin suprafața de discontinuitate S_d , eventual electrizată superficial (fig 2.3) dar suficient de netedă pentru ca în fiecare punct să se poată defini o normală \mathbf{n}_{12} unică.

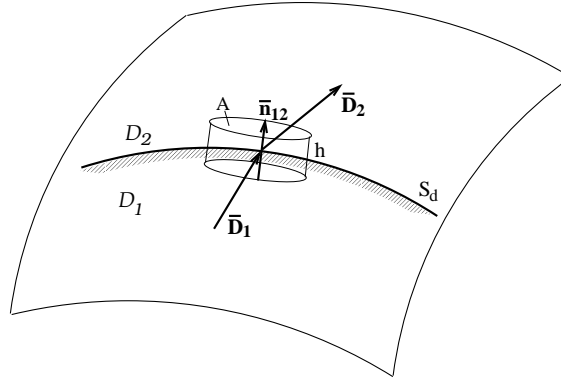


Figura 2.3: Suprafață de discontinuitate pentru câmpul electric

Atât în domeniul \mathcal{D}_1 cât și în domeniul \mathcal{D}_2 se presupune că inducția electrică are o variație spațială continuă, astfel încât în orice punct $P_1 \in S_d$ se pot defini doi vectori $\mathbf{D}_1 = \lim_{P_1 \rightarrow P} \mathbf{D}(P_1)$ cu $P_1 \in \mathcal{D}_1$ și $\mathbf{D}_2 = \lim_{P_2 \rightarrow P} \mathbf{D}(P_2)$ cu $P_2 \in \mathcal{D}_2$. Aplicând legea fluxului electric pe un cilindru Σ de înălțime h și aria bazei A , ales astfel încât cele două baze să se afle în domenii diferite (fig. 2.3) se obține:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \rho_{vmed} Ah + \rho_{smed} A, \quad (2.7)$$

în care ρ_{vmed} este valoarea medie a densității de volum a sarcinii din interiorul cilindrului, iar ρ_{smed} este valoarea medie a densității de suprafață a sarcinii de pe aria A , a suprafeței de discontinuitate. Fluxul electric:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = (\mathbf{D}_{2med} - \mathbf{D}_{1med}) \mathbf{n}_{12} A + D_{nmed} A_l. \quad (2.8)$$

se exprima în funcție de componenta normală medie a inducției pe suprafața laterală ($D_{nmed} A_l$) și de pe cele două baze ale cilindrului Σ .

Prin împărțire la A a relațiilor (2.7) și (2.8) se obține:

$$(\mathbf{D}_{2med} - \mathbf{D}_{1med}) \mathbf{n}_{12} + D_{nmed} \frac{A_l}{A} = \rho_{vmed} h + \rho_{smed}, \quad (2.9)$$

relație care prin trecere la limită $h \rightarrow 0$ și $A \rightarrow 0$ astfel încât A_l/A să tindă către zero devine:

$$\mathbf{n}_{12} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s. \quad (2.10)$$

Folosind notația:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{D} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \quad (2.11)$$

relația 2.10 devine:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{D} = \rho_s, \quad (2.12)$$

cunoscută sub numele de forma locală a legii fluxului electric pe suprafețe de discontinuitate.

În consecință la trecerea prin suprafața de discontinuitate, componenta normală a inducției electrice $D_n = \mathbf{nD}$ are un salt egal cu densitatea superficială de sarcină ρ_s din acel punct.

În cazul particular în care suprafața de discontinuitate S_d este neelectrizată superficial ($\rho_s = 0$):

$$\operatorname{div}_s \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0, \quad (2.13)$$

componenta normală a inducției electrice se conservă la trecerea prin această suprafață ($D_{n1} = D_{n2}$).

Aplicație

Inducția electrică produsă de o sferă uniform electrizată.

Se consideră o sferă omogenă de rază a , plasată în vid și încărcată uniform cu sarcină având densitatea de volum ρ_v (fig. 2.4)

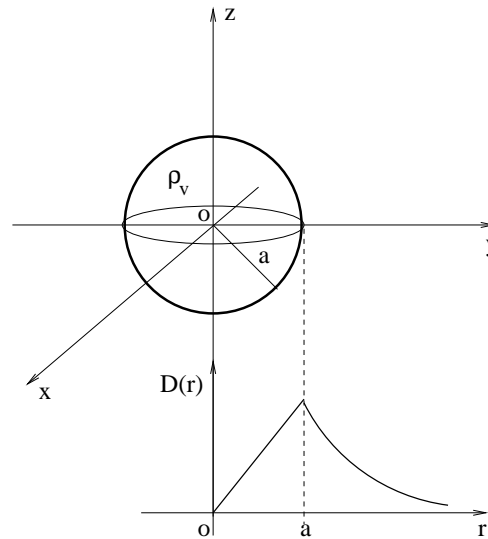


Figura 2.4: Sfera electrizată

Din considerente de simetrie, liniile de câmp electric, care părăsesc sfera pentru $\rho_v > 0$ trebuie să fie orientate radial. Pentru calculul inducției electrice

într-un punct situat la distanța $r < a$ de centrul sferei se consideră o suprafață sferică Σ , de rază r_0 pe care se aplică legea fluxului electric (2.1), în care:

$$\psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{\Sigma} DdA = D \int_{\Sigma} dA = 4\pi r^2 D, \quad (2.14)$$

$$q_{D\Sigma} = \int_{D\Sigma} \rho dv = \int_{D\Sigma} \rho_v dv = \rho_v \int_{D\Sigma} dv = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}, \quad (2.15)$$

deci modulul inducției electrice are expresia $D = \rho_v r/3$.

În cazul în care $r > a$, fluxul electric are aceeași expresie, dar sarcina electrică este

$$q_{D\Sigma} = \int_{D\Sigma} \rho dv = \int_{D_a} \rho_v dv = \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} = q, \quad (2.16)$$

în care s-a notat cu D_a domeniul sferei de rază a , a cărei sarcină este q . Aplicând din nou legea fluxului electric rezultă expresia inducției în afara sferei electrizate $D = \rho_v a^3/3r^2$

Deoarece inducția este orientată radial rezultă că $\mathbf{D} = D\mathbf{r}/r$, deci

$$\mathbf{D}(r) = \begin{cases} \rho_v \mathbf{r}/3 = q\mathbf{r}/4\pi a^3 & \text{pentru } r \leq a; \\ \rho_v a^3 \mathbf{r}/3r^3 = q\mathbf{r}/4\pi r^3 & \text{pentru } r > a. \end{cases}$$

Se constată că în centrul sferei câmpul este nul, inducția electrică având o variație liniară după rază în interiorul sferei. Câmpul este maxim la suprafața sferei, iar în exteriorul ei inducția scade invers proporțional cu pătratul distanței r față de centrul sferei. Dacă sfera este electrizată pozitiv, atunci liniile de câmp sunt drepte care pornesc din interiorul sferei și sunt orientate radial spre infinit, unde se presupune că se află sarcina negativă "pereche". În cazul sferei electrizate negativ, liniile de câmp sunt orientate invers.

Dacă sfera de rază a este electrizată cu sarcina q distribuită uniform nu volumetric ci superficial, atunci inducția exterioară are aceeași expresie $D = q/4\pi r^2$, independentă de raza sferei. În schimb în interior ea este nulă. În acord cu forma locală a legii fluxului electric, inducția are un salt la suprafața sferei, salt egal cu $\rho_s = q/4\pi a^2$.

2.2 Legea fluxului magnetic

Enunțul legii fluxului magnetic

Fluxul magnetic pe orice suprafață închisă Σ este nul:

$$\varphi_{\Sigma} = 0, \quad (2.17)$$

sau explicit (fig. 2.5)

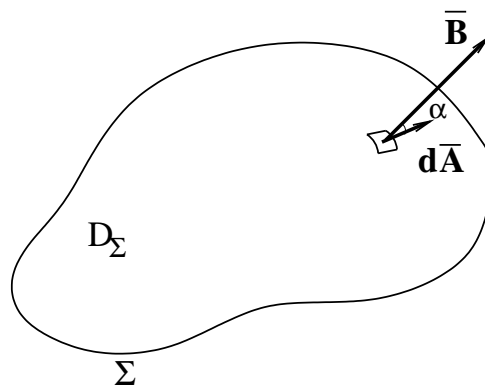


Figura 2.5: Referitoare la legea fluxului magnetic

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0. \quad (2.18)$$

Semnificație fizică a legii fluxului magnetic

Dacă se compară legea fluxului magnetic cu cea a fluxului electric, rezultă că *nu există sarcini magnetice*, similare celor electrice, capabile să fie surse pozitive sau negative ale câmpului magnetic.

În consecință, liniile inducției magnetice nu pot avea puncte din care să izvo-rască sau în care să se concentreze, ceea ce face ca liniile câmpului magnetic să nu poată fi curbe deschise cu puncte inițiale sau finale. Liniile inducției magnetice sunt curbe continui, închise.

Liniile de câmp magnetic care intră într-o parte a unei suprafețe închise trebuie să părăsească suprafața prin cealaltă parte a ei.

Forma locală a legii fluxului magnetic

Aplicând relația Gauss-Ostrogradski, fluxul magnetic de pe o suprafață închisă se exprimă ca:

$$\varphi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \operatorname{div} \mathbf{B} dv = 0. \quad (2.19)$$

Deoarece ultima egalitate este valabilă pentru orice domeniu D_{Σ} , rezultă

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.20)$$

ecuație care reprezintă forma locală a legii fluxului magnetic.

Relația 2.20 evidențiază faptul că prin orice punct din spațiu, liniile inducției magnetice trec continuu, fără să apară sau să dispară.

Într-un sistem de coordonate carteziene relația 2.20 devine,

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \nabla \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (2.21)$$

ecuație diferențială cu derivate parțiale, liniare de ordinul întâi satisfăcută de componentele inducției magnetice în orice punct din spațiu și la orice moment de timp.

Forma pe suprafețe de discontinuitate a legii fluxului magnetic

Se consideră două domenii \mathcal{D}_1 și \mathcal{D}_2 separate prin suprafața de discontinuitate S_d (fig 2.6) suficient de netedă pentru ca în orice punct al ei să se poată defini normala unică \mathbf{n}_{12} . Considerând inducția magnetică un câmp vectorial continuu în fiecare din cele două domenii, se pot defini în fiecare punct al suprafeței S_d o pereche de vectori \mathbf{B}_1 și \mathbf{B}_2 , ca limite ale inducției către acel punct venind din domeniul \mathcal{D}_1 , respectiv din \mathcal{D}_2 .

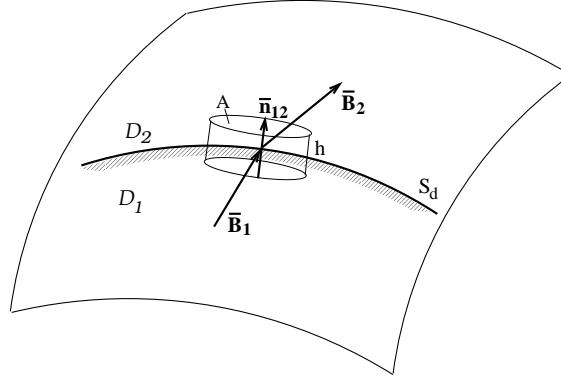


Figura 2.6: Suprafață de discontinuitate pentru câmpul magnetic

Aplicând legea fluxului magnetic pe un cilindru Σ cu arie laterală A_l și aria bazei A , plasat ca în figura 2.6 se obține

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = (\mathbf{B}_{2_{med}} - \mathbf{B}_{1_{med}}) \mathbf{n}_{12} A + \mathbf{B}_{n_{med}} A_l = 0, \quad (2.22)$$

sau după împărțire la A :

$$(\mathbf{B}_{2_{med}} - \mathbf{B}_{1_{med}}) \mathbf{n}_{12} + \mathbf{B}_{n_{med}} \frac{A_l}{A} = 0, \quad (2.23)$$

relație care tinde către

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (2.24)$$

dacă A și A_l tind către zero astfel încât A_l/A să tindă către zero.

Folosind notația $div_s \mathbf{B} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)$, rezultă *forma pe suprafețe de discontinuitate a legii fluxului magnetic*:

$$div_s \mathbf{B} = 0, \quad (2.25)$$

care evidențiază conservarea componentelor normale ale inducției magnetice ($B_{n1} = B_{n2}$) la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate.

2.3 Legea inducției electromagnetice

Fenomenul de inducție electromagnetică, descoperit de Faraday în 1831 reprezintă unul din fenomenele fundamentale ale electromagnetismului, pe care se bazează multe din aplicațiile actuale ale electronicii, electrotehnicii și electroenergeticii. În esență, acest fenomen constă în producerea câmpului electric, ca urmare a variației în timp a câmpului magnetic. Legea care descrie acest fenomen este legea inducției electromagnetice, care are următorul **enunț**.

Tensiunea electrică pe orice curbă închisă Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic de pe orice suprafață S_Γ , care se sprijină pe curba Γ :

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt}, \quad (2.26)$$

sau explicit (fig. 2.7)

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} \, d\mathbf{A} \quad (2.27)$$

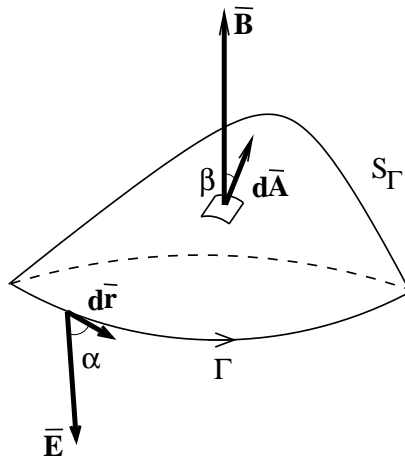


Figura 2.7: Referitoare la legea inducției electromagnetice

În teoria Maxwell-Hertz, atât punctele curbei Γ cât și cele ale suprafeței S_Γ se consideră antrenate de corpuri în mișcarea lor.

Semnificația fizică a legii inducției electromagnetice

Variația în timp a fluxului magnetic pe o suprafață atrage după sine apariția unei tensiuni electrice nenule pe curba ce mărginește suprafața respectivă, ceea ce indică apariția unui câmp electric în zona acestei curbe. În consecință, *câmpul magnetic variabil determină apariția unui câmp electric* numit câmp indus.

Inducția electromagnetică se poate datora variației inducției magnetice în timp $\mathbf{B}(t)$ sau mișcării corpurilor într-un câmp magnetic cu inducție \mathbf{B} eventual constantă în timp. Primul tip de inducție se numește “de transformare”, iar al doilea se numește “de mișcare”.

Forma locală a legii inducției electromagnetice

Pentru a stabili o formă locală a legii este necesară efectuarea unei derivate de flux de tipul:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{G} \, d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{G}(t) \, d\mathbf{A} \quad (2.28)$$

în care atât integrantul $\mathbf{G}(t)$, cât și domeniul de integrare $S_\Gamma(t)$ sunt funcții de timp. O astfel de derivată se poate separa în doi termeni:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{G}(t) \, d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{G}(t) \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma(t)} \mathbf{G} \, d\mathbf{A} \quad (2.29)$$

urmând ca în primul termen S_Γ să se considere invariant în timp iar în al doilea termen \mathbf{G} să se considere constant în timp. Dacă domeniul de integrare nu variază în timp, se poate scrie:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{G} \, d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \, d\mathbf{A}. \quad (2.30)$$

Pentru a calcula cel de al doilea termen din 2.29 se consideră două momente succesive de timp t și $t + \Delta t$, în care domeniul de integrare este $S_\Gamma = S_\Gamma(t)$ și respectiv $S'_\Gamma = S_\Gamma(t + \Delta t)$. Pe suprafața închisă $\Sigma = S_\Gamma \cup S'_\Gamma \cup S_l$ formată din S_Γ , S'_Γ și suprafața laterală S_l , generată de mișcarea curbei Γ în intervalul Δt (fig. 2.8), fluxul vectorului \mathbf{G} este:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{G} \, d\mathbf{A}' = - \int_{S_\Gamma} \mathbf{G} \, d\mathbf{A} + \int_{S'_\Gamma} \mathbf{G} \, d\mathbf{A}' + \int_{S_l} \mathbf{G} \, d\mathbf{A}'. \quad (2.31)$$

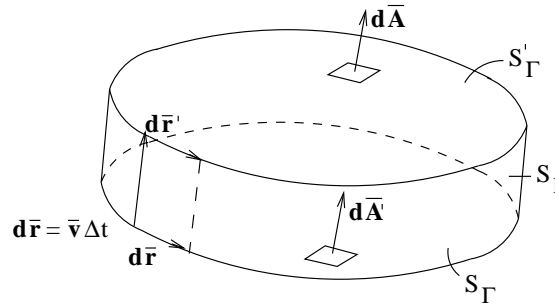


Figura 2.8: Referitoare la densitatea de flux

Semnul minus al primului termen se datorește faptului că elementul de arie $d\mathbf{A} = -d\mathbf{A}'$ este orientat spre interiorul și nu spre exteriorul suprafeței închise Σ .

Fluxul de pe suprafața închisă Σ se exprimă folosind relația Gauss - Ostrogradski:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{G} \, d\mathbf{A}' = \int_{D_\Sigma} \text{div } \mathbf{G} \, dv = \Delta t \int_{S_\Gamma} \mathbf{v} \, \text{div } \mathbf{G} \, d\mathbf{A}, \quad (2.32)$$

în care elementul de volum se exprimă ca $dv = d\mathbf{A}ds = \mathbf{v}d\mathbf{A}\Delta t$, iar fluxul de pe suprafața laterală S_l este:

$$\int_{S_l} \mathbf{G} d\mathbf{A} = \Delta t \int_{\Gamma} \mathbf{G} (\mathbf{dr} \times \mathbf{v}), \quad (2.33)$$

deoarece $d\mathbf{A} = \mathbf{dr} \times \mathbf{s} = \Delta t(\mathbf{dr} \times \mathbf{v})$.

În consecință,

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}(t)} \mathbf{G} d\mathbf{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_{\Gamma}} \mathbf{G} d\mathbf{A} - \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{G} d\mathbf{A} \right] = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{G} d\mathbf{A} - \int_{\Gamma} \mathbf{G} (\mathbf{dr} \times \mathbf{v}) \quad (2.34)$$

și aplicând relația lui Stokes:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{G} (\mathbf{dr} \times \mathbf{v}) = - \int_{\Gamma} \mathbf{G} (\mathbf{v} \times \mathbf{dr}) = - \int_{\Gamma} (\mathbf{G} \times \mathbf{v}) \mathbf{dr} = - \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot} (\mathbf{G} \times \mathbf{v}) d\mathbf{A} \quad (2.35)$$

rezultă:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}(t)} \mathbf{G} d\mathbf{A} = \int_{S_{\Gamma}} [\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{G} + \operatorname{rot} (\mathbf{G} \times \mathbf{v})] d\mathbf{A}. \quad (2.36)$$

În consecință, derivata de flux are expresia:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{G} d\mathbf{A} = \int_{S_{\Gamma}} \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{G} + \operatorname{rot} (\mathbf{G} \times \mathbf{v}) \right] d\mathbf{A} = \int_{S_{\Gamma}} \frac{d_f \mathbf{G}}{dt} d\mathbf{A}, \quad (2.37)$$

în care s-a folosit notația:

$$\frac{d_f \mathbf{G}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{G} + \operatorname{rot} (\mathbf{G} \times \mathbf{v}). \quad (2.38)$$

Aplicând această dezvoltare în cazul legii inducției electromagnetice, rezultă conform relației lui Stokes:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \mathbf{dr} = \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{A} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{d_f \mathbf{B}}{dt} d\mathbf{A} \quad (2.39)$$

deci

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{d_f \mathbf{B}}{dt} \quad (2.40)$$

în care $\frac{d_f \mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v})$, deoarece conform legii fluxului magnetic $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

Relația obținută:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (2.41)$$

poartă numele de *forma locală a legii inducției electromagnetice*.

Prin integrarea acestei relații pe o suprafață deschisă S_Γ se obține *forma integrală dezvoltată a legii inducției electromagnetice*:

$$\int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} - \int_\Gamma (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r} \quad (2.42)$$

Se constată că tensiunea electrică indusă pe orice curbă închisă se separă în două părți, $u_\Gamma = u_1 + u_2$, prima datorată variației propriu-zise a inducției magnetice în timp, numită *tensiune indusă prin transformare*:

$$u_1 = - \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A}, \quad (2.43)$$

iar a doua datorată deplasării curbei Γ :

$$u_2 = - \int_\Gamma (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r}, \quad (2.44)$$

numită *tensiune indusă prin mișcare*.

Forma locală a legii reprezintă o ecuație diferențială vectorială liniară cu derivate parțiale de ordinul întâi, care prin proiecție pe axe determină un sistem de trei ecuații diferențiale scalare.

În cazul particular al mediilor imobile ($\mathbf{v}=0$) legea inducției electromagnetice are următoarea formă locală:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.45)$$

cunoscută sub numele de *a doua ecuație a lui Maxwell*.

În cazul coordonatelor carteziene operatorul rotor admite dezvoltarea:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}, \quad (2.46)$$

deci cele trei ecuații cu derivate parțiale devin:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = - \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

În general, rotorul unui câmp vectorial \mathbf{E} este un nou câmp vectorial, definit prin:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{n} \lim_{\mathbf{A}_{S_\Gamma} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbf{A}_{S_\Gamma}} \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} \quad (2.47)$$

în care versorul \mathbf{n} reprezintă acea orientare a ariei $\mathbf{A}_{S_\Gamma} = \mathbf{n} \mathbf{A}_{S_\Gamma}$, care asigură valoarea maximă pentru $\mathbf{n} \text{rot} \mathbf{E}$.

Semnificația operatorului rotor este dată de faptul că aplicat câmpului de viteze al unui fluid determină un vector proporțional cu viteza unghiulară a unui mic corp antrenat de fluid. În consecință, ele reprezintă tendința de rotație a liniilor de câmp.

Forme pe suprafețe de discontinuitate a legii inducției

Se consideră două medii \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 separate prin suprafața S_d (fig. 2.9) astfel încât în orice punct al acesteia există o normală unică \mathbf{n}_{12} . Atât în domeniul \mathcal{D}_1 , cât și în domeniul \mathcal{D}_2 , se presupune că intensitatea câmpului electric are variație spațială continuă, astfel încât în orice punct $P \in S_d$ se pot defini doi vectori $\mathbf{E}_1 = \lim_{P_1 \rightarrow P} \mathbf{E}(P_1)$, cu $P_1 \in D_1$ și $\mathbf{E}_2 = \lim_{P_2 \rightarrow P} \mathbf{E}(P_2)$ cu $P_2 \in D_2$. În mod asemănător se definesc \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2 , care reprezintă inducțiile magnetice și respectiv vitezele pe cele două fețe ale suprafeței S_d . Aplicând pe o curbă închisă Γ , de forma unui dreptunghi cu laturile s și h , cuprins în planul normalei \mathbf{n}_{12} legea inducției în formă integrală dezvoltată 2.42 se obține:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A}, \quad (2.48)$$

în care s-a notat $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}$.

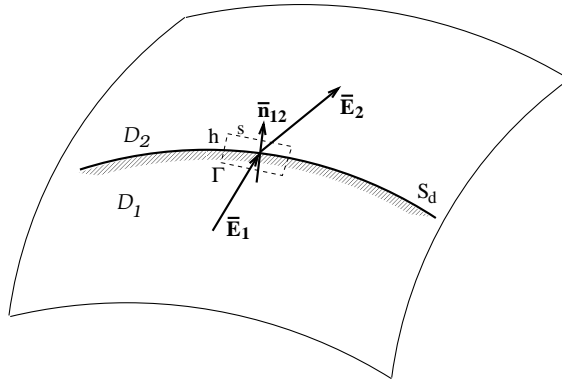


Figura 2.9: Suprafața de discontinuitate pentru câmpul electric

Notând cu B_{nmed} componenta normală a inducției magnetice mediată pe suprafața S_{Γ} se constată că integrala:

$$\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{A} = \frac{\partial B_{nmed}}{\partial t} \mathbf{h}s \quad (2.49)$$

ține către zero atunci când $h \rightarrow 0$ sau $s \rightarrow 0$. Integrala pe curba Γ este:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = -\mathbf{F}_{1med} \mathbf{t}s + \mathbf{F}_{2med} \mathbf{t}s + \mathbf{h}(\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b)_{med}, \quad (2.50)$$

în care s-a notat cu \mathbf{t} versorul tangent la suprafața de discontinuitate cuprins în planul S_{Γ} , iar cu \mathbf{F}_a și \mathbf{F}_b componentele vectorului \mathbf{F} tangențiale la cele două laturi de lungime h ale dreptunghiului Γ .

După împărțire la s se obține relația:

$$(\mathbf{F}_{2med} - \mathbf{F}_{1med})\mathbf{t} + \frac{h}{s}(\mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b)_{med} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{nmed}}{\partial t}h \quad (2.51)$$

care tinde către:

$$(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1)\mathbf{t} = 0, \quad (2.52)$$

dacă $h \rightarrow 0$ și $s \rightarrow 0$ astfel încât $h/s \rightarrow 0$. Deoarece egalitatea $\mathbf{F}_1\mathbf{t} = \mathbf{F}_2\mathbf{t}$ se păstrează pentru orice orientare a tangentei \mathbf{t} la S_d , rezultă că are loc conservarea componentei tangențiale a vectorului $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate.

Prin proiectarea vectorului \mathbf{F} pe direcția normalei și pe planul tangențial la S_d se obține descompunerea $\mathbf{F} = (\mathbf{n}\mathbf{F})\mathbf{A} + (\mathbf{n} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}$ care permite scrierea relației de conservare sub forma: $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = 0$.

Folosind notația:

$$rot_s \mathbf{F} = \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1), \quad (2.53)$$

legea inducției electromagnetice capătă următoarea *formă pe suprafețele de discontinuitate*:

$$rot_s(\mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (2.54)$$

În cazul particular al mediilor imobile:

$$rot_s \mathbf{E} = 0, \quad (2.55)$$

ceea ce evidențiază conservarea componentei tangențiale a intensității câmpului electric ($\mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E} = \mathbf{n}_{12} \times \mathbf{E}$) la trecerea prin orice suprafață de discontinuitate.

Observații privind legea inducției

- a) Separarea tensiunii electrice induse în doi termeni unul de transformare și altul de mișcare *este convențională*, fiind relativă la sistemul de referință ales, în schimb suma lor este invariantă la referențialul ales. Tensiunea electrică într-o spirală conductoare închisă indusă de un magnet permanent vecin este aceeași indiferent dacă spira se deplasează spre magnet sau magnetul spre spirală. Folosind referențialul laboratorului, în primul caz inducția este de mișcare iar în al doilea caz ea este de transformare dar prin folosirea unui referențial atașat corpului mobil interpretările se inversează.
- b) În cazul în care corpurile se deplasează de-a lungul liniilor de câmp $\mathbf{B} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, rezultă că tensiunea indusă prin mișcare este nulă. Din acest motiv se spune că fenomenul de inducție prin mișcare are loc atunci *când corpurile taie liniile de câmp* în mișcarea lor.
- c) *Liniile de câmp electric indus sunt curbe închise*, orientate astfel încât să înconjoare liniile câmpului magnetic variabil în timp care le-a produs

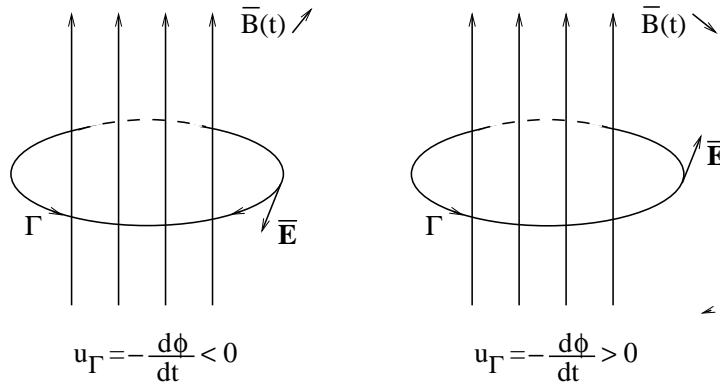


Figura 2.10: Sensul câmpului electric indus

Sensul câmpului electric indus depinde nu numai de sensul câmpului magnetic dar și de modul în care variază acesta în timp (fig. 2.10).

Teorema potențialului electric staționar.

În regim staționar corpurile sunt imobile ($v=0$), iar mărimile câmpului electromagnetic sunt constante în timp. În acest caz legea inducției electromagnetice degenează în:

$$u_{\Gamma} = 0, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = 0 \quad (2.56)$$

relație cunoscută sub numele de *teorema potențialului electric staționar*, care se enunță astfel: *tensiunea electrică pe orice curbă închisă este nulă în regim staționar.*

În cazul regimului staționar liniile câmpului electric nu pot fi curbe închise deoarece altfel ar contrazice relația 2.56.

Forma locală a teoremei potențialului vector:

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (2.57)$$

justifică numele ei. Intensitatea câmpului electric având un caracter irotational rezultă că ea poate fi reprezentată printr-un *potențial electric scalar* V , astfel încât:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V. \quad (2.58)$$

Într-un sistem de coordonate carteziene această relație se exprimă ca:

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V = -\nabla V = -\left(\mathbf{i}, \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}, \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (2.59)$$

Această expresie este justificată de faptul că rotorul oricărui gradient este nul:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\text{rot}(\text{grad} V) = -\nabla \times (\nabla V) = 0. \quad (2.60)$$

Gradientul unui câmp scalar V este un câmp scalar definit în general prin:

$$\text{grad}V = \lim_{v_{D_\Sigma} \rightarrow 0} \frac{1}{v_{D_\Sigma}} \int_{D_\Sigma} V d\mathbf{A} \quad (2.61)$$

în care v_{D_Σ} este volumul domeniului D_Σ .

Gradientul unui câmp scalar este un vector care indică direcția și sensul în care câmpul are variația cea mai rapidă, modulul gradientului indicând "viteza de variație spațială" a câmpului scalar.

Se constată că toți cei trei operatori de derivare spațială *rot*, *div* și *grad* se pot exprima folosind operatorul vectorial-diferențial ∇ , aplicat în produs vectorial, produs scalar și respectiv produsul cu un scalar.

O altă formă echivalentă a teoremei potențialului electric se poate exprima astfel: *tensiunea electrică între două puncte în regim staționar nu depinde de drumul ales, ci doar de punctele extreme.*

Pentru demonstrarea acestei afirmații se consideră două curbe C_1 și C_2 care unesc punctele A și B:

$$u_1 = \int_{C_1} \mathbf{E} d\mathbf{r}_1, \quad u_2 = \int_{C_2} \mathbf{E} d\mathbf{r}_2 \quad (2.62)$$

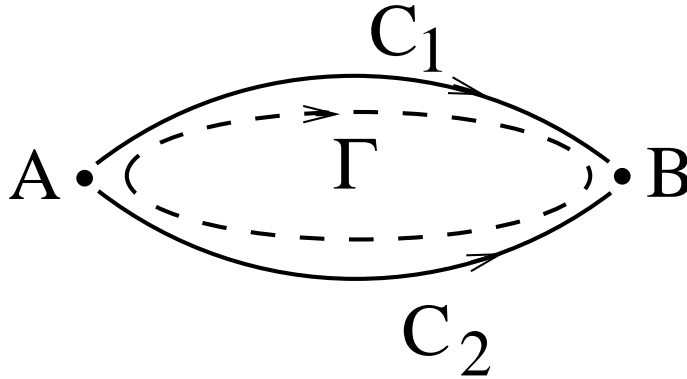


Figura 2.11: Independența tensiunii de drum

și curba închisă $\Gamma = C_1 \cup C_2$ (fig. 2.11) pe care

$$u_\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E} d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E} d\mathbf{r}_1 - \int_{C_2} \mathbf{E} d\mathbf{r}_2 = u_1 - u_2 = 0, \quad (2.63)$$

deci

$$u_1 = u_2. \quad (2.64)$$

Această formulare permite determinarea potențialului electric al unui punct ca fiind tensiunea electrică de la acel punct la un punct de referință, la care se

presupune în mod convențional potențialul nul:

$$V(P) = \int_{C_{PP_0}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r}, \quad (2.65)$$

integrala fiind dependentă doar de punctul P , dar nu și de curba C care leagă punctul P de P_0 (2.12).

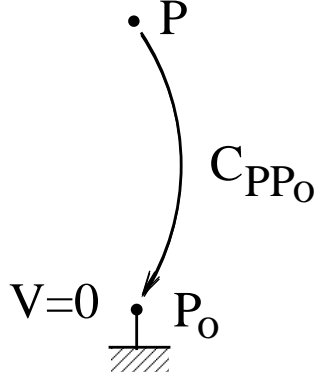


Figura 2.12: Calculul potențialului

Această definiție este în concordanță cu relația $\mathbf{E} = -grad V$, deoarece:

$$\begin{aligned} \int_{C_{PP_0}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} &= - \int_{C_{PP_0}} grad V \, d\mathbf{r} = - \int_{C_{PP_0}} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \\ &= - \int_{C_{PP_0}} dV = V(P) - V(P_0) = V(P). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Potențialul electric este definit până la o constantă aditivă C deoarece $grad(V + C) = grad V$, fixarea acesteia fiind echivalentă cu alegerea punctului de referință în care potențialul este convențional nul.

Relația 2.65 permite calculul potențialului electric pornind de la intensitatea câmpului, prin integrarea acesteia, pe când relația 2.58 asigură operația inversă de calcul al câmpului pornind de la potențial, prin derivare.

Potențialului scalar V simplifică reprezentarea câmpului electric deoarece se utilizează în acest sens o funcție scalară și nu una vectorială de punct, iar tensiunea poate fi calculată nu printr-o integrală ci printr-o operație algebrică: tensiunea electrică între două puncte fiind egală cu potențialul punctului inițial minus potențialul punctului final:

$$u_{AB} = V_A - V_B \quad (2.67)$$

Pentru demonstrarea acestei afirmații se calculează tensiunea pe un drum care trece prin punctul de referință O (fig. 2.13).

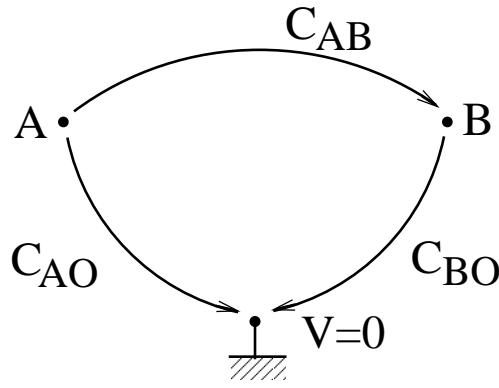


Figura 2.13: Tensiunea electrică în regim staționar

$$u_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_{C_{A0} \cup C_{0B}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_{C_{A0}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} - \int_{C_{0B}} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = V_A - V_B. \quad (2.68)$$

Trebuie remarcat că oricare din relațiile echivalente 2.56, 2.57, 2.58, 2.64, 2.65 și 2.67 este îndreptățită să fie forma matematică a teoremei potențialului electrostatic.

Aplicații ale legii inducției electromagnetice

- [1.] **Tensiunea indusă prin transformare.**

Se consideră un câmp magnetic uniform, variabil sinusoidal în timp:

$$\mathbf{B}(t) = k\mathbf{B}_0 \sin(\omega t) \quad (2.69)$$

iar într-un plan perpendicular pe direcția acestuia o spiră circulară de rază a (fig. 2.14).

Tensiunea indusă în spiră este:

$$u_{\Gamma} = -\frac{d\varphi_{S_{\Gamma}}}{dt} = -\pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t). \quad (2.70)$$

Se constată că valoarea efectivă a tensiunii induse este cu atât mai mare cu cât frecvența câmpului este mai ridicată ceea ce justifică afirmația că fenomenul de inducție este favorizat de frecvențele înalte.

- [2.] **Tensiunea indusă prin mișcare**

Se consideră un câmp magnetic uniform și constant în timp \mathbf{B} în care se rotește un cadru dreptunghiular cu viteza unghiulară ω , în jurul propriei sale axe plasată perpendicular pe câmp (fig. 2.15).

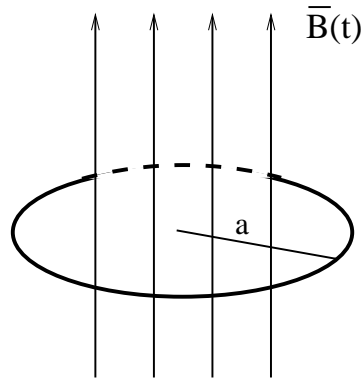


Figura 2.14: Tensiune indusă prin transformare

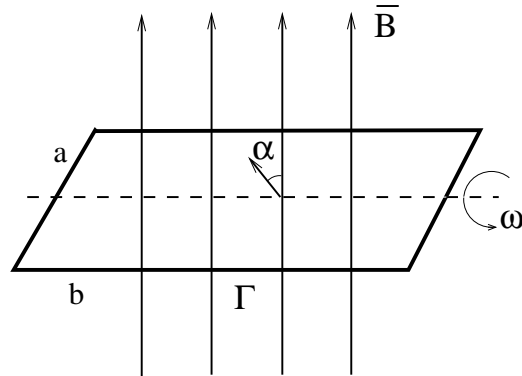


Figura 2.15: Tensiune indusă prin mișcare

Fluxul magnetic de pe suprafața cadrului:

$$\varphi_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} d\mathbf{A} = BA \cos(\omega t) \quad (2.71)$$

este variabil în timp, ceea ce determină inducerea unei tensiuni electrice în cadru:

$$u_{\Gamma} = -\frac{d\varphi_{S_{\Gamma}}}{dt} = +BA\omega \sin(\omega t). \quad (2.72)$$

Valoarea efectivă acestei tensiuni este cu atât mai ridicată cu cât viteza unghiulară a cadrului este mai mare.

Tensiunea indusă poate fi calculată și cu ajutorul relației integrale dezvoltate:

$$u_{\Gamma} = -\int_{\Gamma} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r} = 2\mathbf{B}\omega \frac{\mathbf{a}}{2} \mathbf{b} \sin(\omega t), \quad (2.73)$$

ținând cont că integrantul este nenul doar pe cele două laturi de lungime b ale dreptunghiului, pe care $v = \omega a/2$.

2.4 Legea circuitului magnetic

Enunț legii

Tensiunea magnetică pe orice curbă închisă Γ este egală cu suma dintre intensitatea curentului electric ce străbate orice suprafață S_Γ , care se sprijină pe curba Γ , plus viteza de variație a fluxului electric pe acea suprafață:

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \quad (2.74)$$

sau explicit (figura 2.16)

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{D} d\mathbf{A}. \quad (2.75)$$

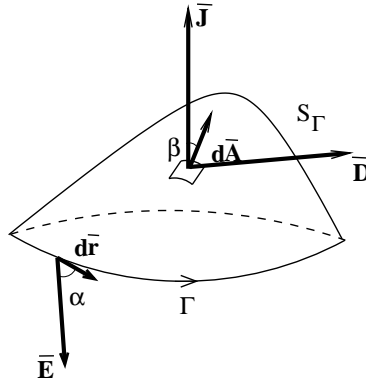


Figura 2.16: Referitoare la legea circuitului magnetic

În teoria Maxwell-Hertz, atât punctele curbei Γ cât și cele ale suprafeței S_Γ se consideră antrenate de corpuri în mișcarea lor.

Semnificația fizică a legii circuitului magnetic

Prin cei doi termeni din membrul drept ai relației 2.74, legea pune în evidență două cauze distincte ale câmpului magnetic și anume curentul electric și variația în timp a câmpului electric. Deoarece produce același efect magnetic ca și curentul de conducție, viteza de variație a fluxului electric este cunoscută sub numele de intensitate a curentului de deplasare, nume dat de Maxwell. Curentul de deplasare se poate datora pe de o parte variației propriu zise a inducției electrice în timp (efect evidențiat de Maxwell pe argumente teoretice obținute în urma studiului câmpului electromagnetic în medii imobile) sau pe de altă parte el se poate datora deplasării corpurilor în câmp electric (efect evidențiat de Hertz).

În vecinătatea oricărui conductor aflat în stare electrocinetică apare un câmp magnetic produs de curentul electric ce străbate conductorul. Liniile câmpului

magnetic sunt curbe închise care înconjoară curentul electric ce le produce. Sensul lor se determină cu regula burghiului drept față de sensul curentului.

Considerând în jurul unui conductor parcurs de curent un cerc orientat după regula burghiului rezultă aplicând legea circuitului magnetic că $U_{m_r} = H_{t_{med}} 2\pi r > 0$, deci că intensitatea câmpului magnetic are o componentă tangențială cu medie pozitivă ceea ce justifică orientarea liniei de câmp.

Câmpul electric variabil în timp produce în mod asemănător un câmp magnetic ale cărui linii de câmp sunt curbe închise ce înconjoară liniile câmpului electric. La stabilirea sensului liniilor câmpului magnetic se ia în considerare nu numai sensul liniilor de câmp electric dar și felul în care acesta variază în timp, deoarece semnul curentului de deplasare depinde derivata funcție de timp a fluxului electric.

Dacă $D(t)$ este funcție crescătoare, atunci câmpul magnetic are sensul dat de regula burghiului drept, în schimb el are sens contrar în cazul în care $D(t)$ scade în timp.

Forma locală a legii circuitului magnetic.

Ca și în cazul legii inducției electromagnetice pentru obținerea formei locale a legii este necesară efectuarea unei derivate de flux de tipul:

$$\frac{d\psi_{S_r}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S_r(t)} \mathbf{D}(t) d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \int_{S_r} \mathbf{D}(t) d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_r(t)} \mathbf{D} d\mathbf{A}, \quad (2.76)$$

în care primul termen reprezintă intensitatea curentului maxwellian de deplasare, iar al doilea reprezintă intensitatea curentului hertzian de deplasare.

Folosind expresia derivatei de flux (2.37) obținută în paragraful 2.3 se obține:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_r} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{S_r} \frac{d_1 \mathbf{D}}{dt} d\mathbf{A} = \int_{S_r} \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \right] d\mathbf{A}. \quad (2.77)$$

Transformând expresia tensiunii magnetice prin relația lui Stokes rezultă egalitatea:

$$\int \mathbf{H} dr \int_{S_r} \operatorname{rot} \mathbf{H} d\mathbf{A} = \int_{S_r} \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \right] d\mathbf{A}, \quad (2.78)$$

valabilă pentru orice suprafață S_r . În consecință, luând în considerare forma locală a legii fluxului electric ($\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$), rezultă relația:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + \operatorname{rot} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \quad (2.79)$$

care este forma locală a legii circuitului magnetic.

Această relație evidențiază din punct de vedere local patru vectori distincți, surse ale câmpului magnetic:

- \mathbf{J} – densitatea curentului electric de conducție;

- $\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ – densitatea curentului electric de deplasare, datorat variației propriuzise a inducției electrice în timp);
- $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$ – densitatea curentului electric de convecție, datorat deplasării corpurilor electrizate, și
- $\mathbf{J}_R = \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$ – densitatea curentului Röntgen, datorat rotirii corpurilor polarizate.

Cei patru vectori au aceeași unitate de măsură și sunt echivalenți din punctul de vedere al efectului lor magnetic. Ultimii trei alcătuiesc curentul de deplasare global

$$\mathbf{J}_{dg} = \mathbf{J}_d + \mathbf{J}_v + \mathbf{J}_R = \frac{d_f \mathbf{D}}{dt},$$

alcătuit din curentul de deplasare maxwellian (\mathbf{J}_d) și din cel hertzian ($\mathbf{J}_v + \mathbf{J}_R$). Prin integrare se obțin:

- $i_{S_\Gamma} \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A}$ – intensitatea curentului de conducție;
- $i_{d_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}_d d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{A}$ – intensitatea curentului de deplasare;
- $i_{v_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}_v d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}$ – intensitatea curentului de convecție;
- $i_{R_{S_\Gamma}} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J}_R d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) d\mathbf{A} = \int_\Gamma (\mathbf{D} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r}$ – intensitatea curentului Röntgen.

Aceste patru mărimi scalare permit scrierea legii în următoarea formă integrală dezvoltată:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + i_{d_{S_\Gamma}} + i_{v_{S_\Gamma}} + i_{R_{S_\Gamma}}. \quad (2.80)$$

În cazul particular al mediilor imobile ($v = 0$), legea circuitului magnetic are următoarea formă locală:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.81)$$

cunoscută sub numele de prima ecuație a lui Maxwell. Exprimând rotorul intensității câmpului magnetic în coordonate carteziene:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (2.82)$$

rezultă următoarea formă locală a legii circuitului magnetic, exprimată sub forma a trei ecuații diferențiale cu derivate parțiale, scalare, liniare și de ordinul întâi:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases} \quad (2.83)$$

Aceste ecuații leagă cele trei componente ale intensității câmpului magnetic produs de mărimile caracteristice surselor acestuia: densitatea de curent de conducție și cea de deplasare.

Forma pe suprafețe de discontinuitate a legii circuitului magnetic.

Se consideră două medii \mathcal{D}_1 și \mathcal{D}_2 , în care mărimile caracteristice câmpului electromagnetic sunt funcții continue de spațiu. Presupunem că acestea sunt separate printr-o suprafață de discontinuitate S_d suficient de netedă, astfel încât în orice punct $P \in S_d$ există o normală unică \mathbf{n}_{12} (figura 2.17).

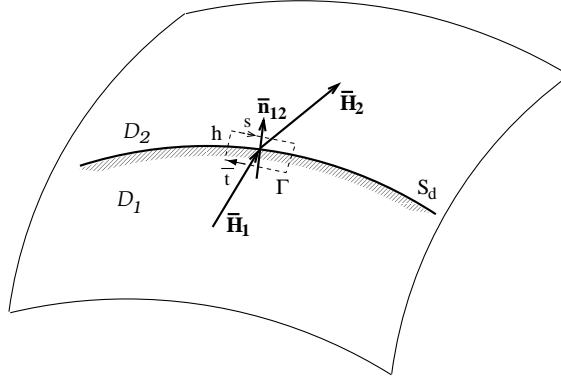


Figura 2.17: Suprafața de discontinuitate

În fiecare punct $P \in S_d$ se pot defini limitele dinspre domeniul \mathcal{D}_1 și respectiv dinspre domeniul \mathcal{D}_2 ale mărimilor:

$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$ – intensitatea câmpului magnetic;

$\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ – inducția electrică;

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – vitezele locale ale celor două medii.

Se consideră că suprafața de discontinuitate S_d este parcursă de o pânză de curent, caracterizată de densitatea \mathbf{J}_s și că unul din cele două domenii este electrizat superficial cu densitățile de sarcină ρ_s urmând ca acesta să aibă viteza locală \mathbf{v} .

Pentru a demonstra forma locală a legii se consideră o curbă închisă Γ de forma unui dreptunghi situat în planul normalei \mathbf{n}_{12} și al cărui centru este punctul $P \in S_d$, pe care se aplică forma globală dezvoltată a legii circuitului magnetic sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{G} d\mathbf{r} = \int_{S_{\Gamma}} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \right) d\mathbf{A} \quad (2.84)$$

unde $\mathbf{G} = \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \mathbf{v}$. Integrala lui \mathbf{G} este:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{G} d\mathbf{r} = (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \mathbf{t}s + ht_{nd}G_{tnd} \quad (2.85)$$

iar integrala pe suprafața dreptunghiului este:

$$\left[\mathbf{J}_{med} + \frac{\partial \mathbf{D}_{med}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}_{med}) \right] h s \mathbf{n} + [\mathbf{J}_S \mathbf{n}_{12} + \rho_S \mathbf{v}]_{med} \mathbf{n} S, \quad (2.86)$$

deci

$$(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1)_{med} \mathbf{t} + \frac{h}{s} \mathbf{G} = s \left[J_{nmed} + \frac{\partial D_{nmed}}{\partial t} + (\rho_v \mathbf{v})_{med} \right] + \mathbf{n} (\mathbf{J}_S + \rho_{S2} \mathbf{v}_2 - \rho_{S1} \mathbf{v}_1), \quad (2.87)$$

unde $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{12} \times \mathbf{t}$ este normala la S_Γ . Dacă h și S tind către zero astfel încât $W_S \rightarrow 0$ rezultă:

$$(\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) \mathbf{t} = \mathbf{n} (\mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v}). \quad (2.88)$$

Deoarece această egalitate este valabilă oricare ar fi orientarea versorului tangent \mathbf{t} la suprafața S_d în punctul P rezultă că saltul componente tangențiale a vectorului \mathbf{G} este egal cu $\mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{V}$ deci:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) = \mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v} \quad (2.89)$$

sau în formă compactă $rot_S \mathbf{G} = \mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v}$, sau echivalent:

$$rot_S \mathbf{H} = \mathbf{J}_S + \rho_S \mathbf{v} + rot_S (\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \quad (2.90)$$

care este forma pe suprafețe de discontinuitate a legii circuitului magnetic.

În cazul mediilor imobile ($v=0$), rezultă că saltul componente tangențiale a intensității câmpului magnetic este egală cu densitatea pânzei de curent

$$rot_s \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad (2.91)$$

iar în cazul particular în care suprafața de discontinuitate nu este parcursă de curent suplimentar $rot_s \mathbf{H} = 0$, ceea ce asigură conservarea componente tangențiale a intensității câmpului magnetic, deoarece $\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$ implică egalitatea ($\mathbf{H}_{t_1} = \mathbf{H}_{t_2}$).

Teorema lui Ampère.

În cazul regimului staționar legea circuitului magnetic se reduce la:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma}, \quad (2.92)$$

sau explicit:

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad (2.93)$$

relație cunoscută sub numele de teorema lui Ampère. În forma locală această teoremă se exprimă prin:

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (2.94)$$

Observații privind legea circuitului magnetic

- a) Deoarece viteza corpurilor este relativă la sistemul de referință adoptat, rezultă că separarea curentului de deplasare în componentele sale are un caracter convențional, depinzând de referențialul ales, în schimb suma acestor componente este invariantă la alegerea sistemului de coordonate. Se consideră de exemplu două corpuri, din care unul este electrizat și altul neelectrizat în mișcare relativă unul față de celălalt. Dacă se atașează sistemul de referință corpului electrizat curentul de convecție este nul în schimb curentul Röntgen este nenul ceea, ce explică apariția câmpului magnetic în corpul neelectrizat. Dacă în schimb se atașează sistemul de referință corpului neelectrizat, curentul Röntgen este nul dar curentul de convecție este nenul.
- b) Efectele magnetice au fost verificate experimental și s-a constatat concordanță deplină cu legea circuitului magnetic, exceptând curentul Röntgen pentru care s-a constatat experimental, că are densitatea $\mathbf{J}_R = \text{rot}(\mathbf{P} \times \mathbf{v})$. Inadvertența între valoarea teoretică și cea experimentală a curentului Röntgen se explică prin faptul că în teoria Maxwell-Hertz s-a adoptat ipoteza eterului antrenat. Deoarece curbele și suprafețele sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor, chiar dacă acestea sunt tot mai rarefiate, această ipoteză trebuie adoptată și în cazul vidului, care este conceput ca un gaz extrem de rarefiat. Explicația expresiei corecte a curentului Röntgen a fost dată de electrodinamica Einstein-Minkowski, stabilită pe baza teoriei relativității restrânse. Deoarece la viteze mici nerelativiste, teoria Maxwell-Hertz explică satisfăcător și în mod simplu marea majoritate a efectelor întâlnite în aplicațiile practice fiind cea mai bună aproximare nerelativistă a electrodinamicii relativiste a fost adoptată ca bază teoretică a ingineriei electrice.

Aplicații ale legii circuitului magnetic

Câmpul magnetic produs de un conductor cilindric parcurs de curent

Se consideră un conductor omogen rectiliniu infinit lung cu secțiune cilindrică de rază a , plasat în vid și parcurs longitudinal de un curent de conducție cu densitatea \mathbf{J} , constantă în timp (figura 2.18).

Din considerente de simetrie liniile, câmpului magnetic sunt cercuri plasate în plan perpendicular pe axa cilindrului cu centrele plasate pe aceasta și orientate conform regulii burghiului. Pentru calculul câmpului magnetic într-un punct plasat la distanța $r < a$ de axă se consideră curba Γ de forma unui cerc cu rază r cu centrul pe axă.

Tensiunea magnetică pe acest cerc este:

$$u_{m\Gamma} = \oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{x} = \oint_{\Gamma} H dr = H \oint_{\Gamma} dr = H2\pi r, \quad (2.95)$$

iar curentul ce străbate suprafața S_{Γ} este:

$$i_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{S_{\Gamma}} J dA = J \int_{S_{\Gamma}} dA = J\pi r^2. \quad (2.96)$$

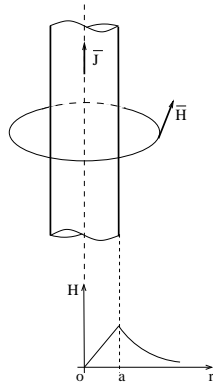


Figura 2.18: Câmpul magnetic produs de un conductor

Conform teoremei lui Ampère $u_{m\Gamma} = i_{S\Gamma}$, rezultă:

$$H = \frac{Jr}{2}. \quad (2.97)$$

Dacă se consideră un punct exterior conductorului ($r > a$), tensiunea magnetică are aceeași valoare dar intensitatea curentului este:

$$I_{S\Gamma} = \int_{S\Gamma} \mathbf{J}d\mathbf{A} = \int_{S\Gamma_a} JdA = J\pi a^2 = I, \quad (2.98)$$

în care s-a notat cu I intensitatea curentului ce străbate o secțiune transversală prin întreg conductorul S_{Γ_a} . Conform teoremei lui Ampère:

$$H = \frac{Ja^2}{2r} = \frac{J}{2\pi r}. \quad (2.99)$$

În consecință:

$$H(r) = \begin{cases} Jr/2 & = Ir/2\pi a^2 & \text{pentru } r \leq a; \\ Ja^2/2r & = I/2\pi r & \text{pentru } r > a. \end{cases}$$

Intensitatea câmpului magnetic are o variație liniară cu distanța față de axă în interiorul conductorului pornind de la zero până la valoarea maximă a intensității câmpului magnetic, care este obținută la suprafața conductorului $H_{max} = I/2\pi a$.

În exteriorul conductorului câmpul magnetic are o variație invers proporțională cu distanța față de axă $h = I/2\pi r$, independentă de raza conductorului.

2.5 Legea legăturii dintre inducția și intensitatea câmpului electric

Enunțul legii legăturii dintre \mathbf{D} și \mathbf{E}

2.5. LEGEA LEGĂTURII DINTRE INDUCȚIA ȘI INTENSITATEA
CÂMPULUI ELECTRIC

Inducția electrică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct (nu și de intensitatea câmpului electric din alte puncte):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \quad (2.100)$$

Relația de dependență dintre \mathbf{D} și \mathbf{E} impusă de această lege poate fi extrem de complicată și ea este funcție de tipul substanței în care se consideră perechea $\mathbf{D} - \mathbf{E}$.

O formă echivalentă a acestei relații este următoarea:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.101)$$

în care s-au pus în evidență $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} F/m$ constanta universală numită permittivitatea vidului și $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ polarizația corpului. Aceasta poate fi descompusă într-o componentă *permanentă* $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}(0)$ și una *temporară* \mathbf{P}_t , existentă doar în prezența câmpului electric ($\mathbf{E} \neq 0$), astfel încât $\mathbf{P} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p$. Din acest motiv această lege mai poartă și numele de legea polarizației (temporare).

În absența corpurilor polarizația este nulă ($\mathbf{P} = 0$), deci în vid $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, ceea ce evidențiază faptul că în vid este suficient un singur câmp vectorial pentru a caracteriza câmpul electric. Deosebirea dintre inducție și intensitate are relevanță doar în corpuri, urmând ca diferența $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$ să poată fi considerată definiția polarizației acestora.

O semnificație posibilă a acestei legi constă în faptul că intensitatea câmpului electric este evidențiată ca o cauză a polarizării corpurilor și că un corp polarizat produce câmp electric sau perturbă câmpul electric preexistent.

De multe ori relația $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ se aproximează cu o dependență afină (obținută de exemplu prin reținerea doar a primilor doi termeni din seria Taylor) de tipul:

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.102)$$

în care \mathbf{P}_p este chiar polarizația permanentă iar $\bar{\epsilon}$ este tensorul permittivităților absolute care de multe ori are valorile principale egale, deci degenerază într-un scalar. Se constată că legea pune în evidență o nouă cauză a câmpului electric și anume polarizația permanentă \mathbf{P}_p , care dacă este nenulă (cum se întâmplă în cazul electreților) este capabilă să producă un câmp electric $E \neq 0$, chiar dacă $D = 0$ și invers.

Figura 2.19 prezintă spectrele intensității și inducției electrice și se constată că \mathbf{D} are liniile de câmp închise (în acord cu legea fluxului electric), în schimb \mathbf{E} are liniile de câmp deschise (în acord cu legea inducției). În aer cele două spectre se suprapun ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$) pe când în electric \mathbf{D} și \mathbf{E} au sensuri opuse.

Capacitatea corpurilor polarizate permanent de a produce câmp electric poate fi considerată un alt fenomen fizic fundamental, care evidențiază a treia cauză posibilă a câmpului electric.

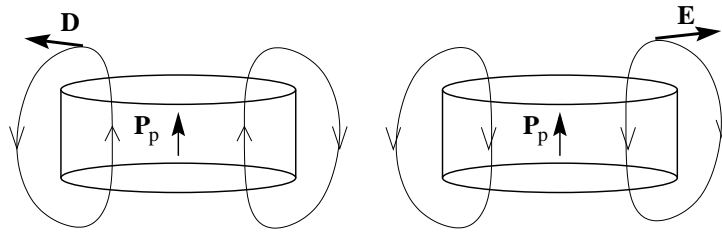


Figura 2.19: Spectrele \mathbf{E} , \mathbf{D} produse de un electret

Mai mult, introducerea oricărui corp într-un câmp electric aflat initial în vid modifică acest câmp atât în interiorul corpului cât și în vecinătatea sa, datorită polarizării temporare a corpului.

2.6 Legea legăturii dintre inducția intensitatea câmpului magnetic

Enunțul legii legăturii dintre \mathbf{B} și \mathbf{H}

Inducția câmpului magnetic dintr-un punct este dependentă de intensitatea câmpului magnetic din acel punct

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}),$$

forma concretă a acestei relații fiind în funcție de natura mediului în care se află punctul.

În cazul vidului relația dintre intensitatea și inducția câmpului magnetic este de coliniaritate și proporționalitate:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.103)$$

Constanta de proporționalitate μ_0 , numită **permeabilitatea vidului** are caracterul unei constante universale, a cărei valoare este dependentă doar de sistemul unităților de măsură adoptat. În cazul sistemului internațional al unităților de măsură valoarea acestei constante este:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{H}{m}. \quad (2.104)$$

În cazul vidului nu se justifică utilizarea a doi vectori \mathbf{H} și \mathbf{B} pentru caracterizarea stării câmpului magnetic dintr-un punct. În schimb acest lucru este necesar în cazul corpurilor, pentru a caracteriza fenomenele specifice care au loc în acestea în urma interacțiunii cu câmpul magnetic.

Ca și în cazul dielectricilor, mediile se împart din punct de vedere magnetic în medii liniare și neliniare, izotrope și anizotrope, cu efecte de ereditate (postefect sau histerezis) sau fără astfel de efecte.

Mediile liniare și izotrope sunt medii în care relația dintre \mathbf{B} și \mathbf{H} este asemănătoare vidului, respectiv de proporționalitate și coliniaritate:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad (2.105)$$

și la care constanta de proporționalitate μ , numită *permeabilitate* este un scalar care depinde de natura mediului.

Pentru caracterizarea proprietăților magnetice ale unui mediu se poate utiliza mărimea adimensională:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (2.106)$$

numită *permeabilitate relativă* obținută prin reportarea permeabilității mediului la cea a vidului.

Majoritatea substanțelor au o comportare magnetică de tipul (2.105). Mai mult, valoarea permeabilității relative este foarte aproape de unitate, deosebirea survenind doar la a cincea cifră semnificativă ($\mu_{r_{Cu}} = 1 - 10^{-5}$, $\mu_{r_{Al}} = 1 + 2210^{-6}$), ceea ce este neesențial din punct de vedere practic. Excepție fac fierul, nichelul, cobaltul și anumite combinații ale acestora. Aceste materiale neliniare se numesc feromagnetice și se pot clasifica în două mari categorii.

Materiale feromagnetice moi, dintre care tipic este oțelul electrotehnic (puternic aliat cu siliciu, în proporție 2 – 4%). Modul în care variază inducția în funcție de intensitatea câmpului magnetic:

$$B = f(H)$$

are reprezentarea tipică din figura 2.20

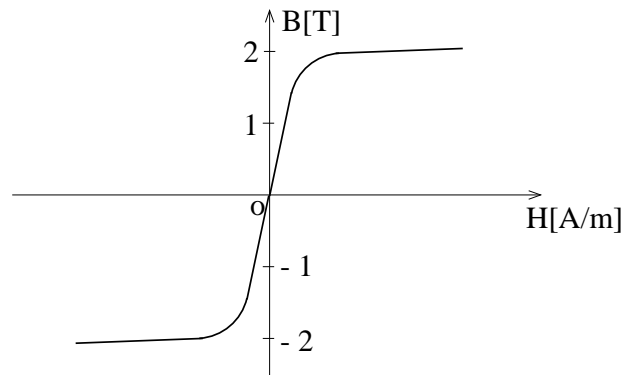


Figura 2.20: Caracteristica de magnetizare

Pe o astfel de curbă, numită caracteristică de magnetizare se constată o porțiune practic liniară, aflată în jurul originii, pentru care $B = \mu_r\mu_0H$, cu valori mari ale permeabilității relative $\mu_r = 10^3 - 10^5$. La câmpuri magnetice intense

După o saturație prealabilă, scăderea inducției nu mai urmărește caracteristica de primă magnetizare, obținându-se ramura descendentă B, C, D, E a ciclului de histerezis. Se constată că la anularea intensității câmpului magnetic, inductivitatea are o valoare nenulă, \mathbf{B}_r numită *inducție remanentă*. Pentru anularea inducției este necesară aplicarea unui câmp magnetic de sens opus, \mathbf{H}_c numit *câmp magnetic coercitiv*. După o saturație inversă (punctul E în ciclul de histerezis) revenirea la saturația directă se realizează prin creșterea intensității câmpului magnetic pe ramura ascendentă E, F, G, B similară ramurii descendente (simetrica acesteia față de origine).

Ciclul fundamental de magnetizare, obținut prin variații ciclice ale intensității câmpului magnetic între două limite extreme, care asigură saturația puternică în cele două sensuri, delimitează multimea punctelor din planul $B - H$ accesibile perechilor (B, H) . Dacă variația în timp a intensității câmpului magnetic nu atinge nivelul de saturație, atunci caracteristica de magnetizare formează cicluri minore, incluse în ciclul fundamental. În consecință, pentru o valoare a intensității câmpului magnetic, inducția magnetică poate lua orice valoare cuprinsă între limitele extreme $B \in [B_{min}, B_{max}]$, valoare dependentă de evoluția anterioară în timp a intensității câmpului magnetic. Pentru demagnetizarea unui astfel de material se revine la starea $B = 0, H = 0$, prin aplicarea unui câmp magnetic oscilant, a cărui amplitudine scade progresiv spre zero. În acest fel sunt parcurse ciclurile minore cu arie din ce în ce mai mică, cuprinse unul în altul până la atingerea originii.

Caracteristica de histerezis poate fi aproximată pe porțiuni (mai ales în cadranul doi) prin relația:

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \mathbf{M}_p). \quad (2.109)$$

în care vectorul \mathbf{M}_p numit de **magnetizație permanentă** pune în evidență fenomenul de magnetizație permanentă datorat unei magnetizări anterioare. Materialele feromagnetice dure sunt utilizate în practică la construcția magneților permanenți.

În afara inducției magnetice remanente și a intensității câmpului magnetic coercitiv (tabelul 2.1 materialele magnetice dure mai sunt caracterizate de:

- permeabilitatea relativă statică : $\mu_s = \frac{B}{\mu_0 H}$;
- permeabilitatea diferențială relativă pentru creșteri ΔH pozitive :

$$\mu_{dif} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \Big|_{\Delta H > 0} = tg\alpha$$

- permeabilitatea reversibilă relativă obținută:

$$\mu_{rev} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \Big|_{\Delta H < 0} = tg\beta$$

În particular, pentru variații ale câmpului magnetic în jurul originii se obține permeabilitatea relativă inițială:

$$\mu_{in} = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\mu_o \Delta H} \Big|_{H=0, B=0}. \quad (2.110)$$

Variația tipică a permeabilității în funcție de intensitatea câmpului magnetic este reprezentată grafic în (fig. 2.22)

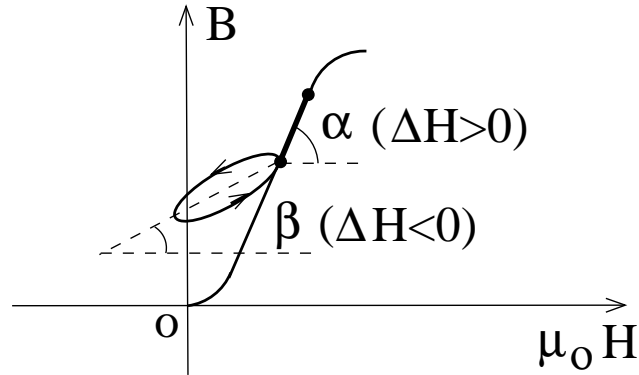


Figura 2.22: Variația permeabilității

Caracteristicile magnetice ale materialelor feromagnetice sunt influențate de presiune și temperatură respectiv de starea de tensiune mecanică din interiorul corpului și de tratamentul termic la care acesta a fost supus.

Fenomenul de histerezis este întâlnit nu numai la materialele feromagnetice dure ci și la cele moi, dar într-o măsură mult mai mică, de exemplu fierul pur are câmpul magnetic coercitiv de circa o mie de ori mai mic decât al oțelului dur cu 1%*C*. Mediile neliniare pot avea o comportare anizotropă de exemplu, în cazul unui cristal de fier relația $B(H)$ depinde de orientarea intensității câmpului magnetic \mathbf{H} (fig. 2.22)

Și în cazul materialelor magnetice, inducția magnetică nu urmărește cu fidelitate variațiile rapide ale intensității câmpului magnetic datorită fenomenului de *vâscozitate magnetică* (postefect). Acest efect poate fi modelat utilizând relația:

$$\mathbf{B}(t) = \int_0^\infty \mu'(\tau) \mathbf{H}(t - \tau) d\tau, \quad (2.111)$$

în care funcția ereditară de pondere $\mu'(\tau)$ este o funcție monoton descrescătoare, definită pe intervalul $(0, \infty)$. Prezența postefectului face pe de o parte ca aria ciclului de histerezis să crească o dată cu frecvența și pe de altă parte ca permeabilitatea reversibilă definită în câmp variabil (numită permeabilitate dinamică) să scadă cu creșterea frecvenței.

Tabela 2.1: Caracteristici ale unor materiale magnetice

Material	μ_{in}	$B_r [T]$	$H_c [A/m]$
Fier pur	25000	14	4
Oțel electrotehnic (4 % Si)	500	1,8	40
Permalloy (78,5 % Ni, 21,5 % Fe)	10000	0,6	4
Ferită moale (mangan-zinc)	2000	0,15	20
Oțel 1% <i>C</i>	40	0,7	5000
Alnico	4	0,73	34000
Ferită dură	1,2	0,35	200000

Dacă pentru relația $B - H$ se adoptă modelul unui sistem liniar de ordinul întâi, atunci funcția ereditară de pondere are expresia $\mu'(\tau) = \frac{\mu}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$, iar permeabilitatea dinamică relativă este $\mu_d = \mu/\mu_0/\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}$.

Observații privind legea legăturii $B - H$ și semnificația ei fizică

- a) Materialele magnetice liniare cât și cele neliniare au o comportare echivalentă unor medii cu permeabilitatea vidului μ_0 , dar cu o magnetizație dependentă de intensitatea câmpului magnetic, numită magnetizație temporală $\mathbf{M}_t = \mathbf{M}_t(\mathbf{H})$, urmând ca:

$$\mathbf{B} = \mu_s(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t). \quad (2.112)$$

În cazul mediilor liniare, magnetizația temporală este proporțională cu intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{M}_t = \overline{\chi_m} \mathbf{H}$, factorul de proporționalitate $\overline{\chi_m}$ numit susceptibilitate magnetică fiind un scalar în cazul mediilor izotrope și un tensor de ordinul doi în cazul mediilor anizotrope. Între susceptibilitatea magnetică și permeabilitate există următoarea relație:

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t) = \mu_o(\mathbf{H} + \overline{\chi_m} \mathbf{H}) = \mu_o(\overline{\mathbb{I}} + \overline{\chi_m}) \mathbf{H}, \quad (2.113)$$

$$\overline{\mu} = \mu_o(\overline{\mathbb{I}} + \overline{\chi_m}). \quad (2.114)$$

În cazul mediilor neliniare cu magnetizație permanentă, relația dintre \mathbf{B} și \mathbf{H} se poate exprima prin relația:

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p). \quad (2.115)$$

în care suma vectorilor $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p$ poartă numele de **magnetizație**. Folosind magnetizația relația $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ se poate exprima în general prin:

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (2.116)$$

- b) legea legăturii dintre $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ descrie fenomenul de magnetizare, cunoscut și sub numele de polarizație magnetică.

Din punct de vedere microscopic, unele corpuri au moleculele polare din punct de vedere magnetic. Acestea sunt echivalente cu mici bucle de curent, a căror apariție se poate explica prin deplasarea electronilor în jurul nucleelor sau calitativ prin rotirea electronilor în jurul propriei axe (spin). Sub acțiunea câmpului magnetic buclele de curent, orientate inițial arbitrar se orientează după direcția câmpului exterior, contribuind la modificarea acestuia. Datorită agitației termice orientarea nu este perfectă ci are un caracter statistic, dispărând după anularea câmpului magnetic, exterior. În cazul corpurilor feromagnetice, apare o orientare spontană a spinilor după o direcție comună, în interiorul unor microdomenii, numite domenii Weiss. Inițial domeniile Weiss sunt orientate arbitrar, dar sub acțiunea câmpului magnetic extern acestea au tendința să se orienteze în direcția câmpului. Cu cât câmpul este mai intens cu atât orientarea este mai apropiată de cea a câmpului, urmând ca la atingerea saturației toate domeniile să aibă aceeași orientare. Fenomenul de histerezis se explică prin faptul că orientarea privilegiată a blocurilor Weiss se mențin și după dispariția câmpului extern.

Din punct de vedere macroscopic fenomenul de magnetizare se evidențiază prin faptul că introducerea unui corp în câmp magnetic atrage după sine modificarea câmpului. Mai mult corpurile magnetizate permanent sunt capabile să genereze câmp magnetic, chiar și în absența câmpului exterior, așa cum se întâmplă în cazul magneților permanenți.

Teorema tubului de flux magnetic.

Pentru determinarea formei globale a legii legăturii \mathbf{B} și \mathbf{H} se consideră un tub flux magnetic, mărginit de o suprafață laterală S_l pe care inducția magnetică este orientată longitudinal și două suprafețe externe S_1 și S_2 pe care intensitatea câmpului magnetic este orientată normal. (fig. 2.23)

O mărime globală caracteristică stării magnetice a unui tub de flux este fluxul transversal:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B}d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{B}d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{B}d\mathbf{A}, \quad (2.117)$$

care conform legii fluxului magnetic are aceeași valoare pe orice suprafață transversală.

Mărimea globală asociată intensității câmpului magnetic este tensiunea magnetică. Pentru ca aceasta să nu depindă de forma curbei considerate este necesar ca

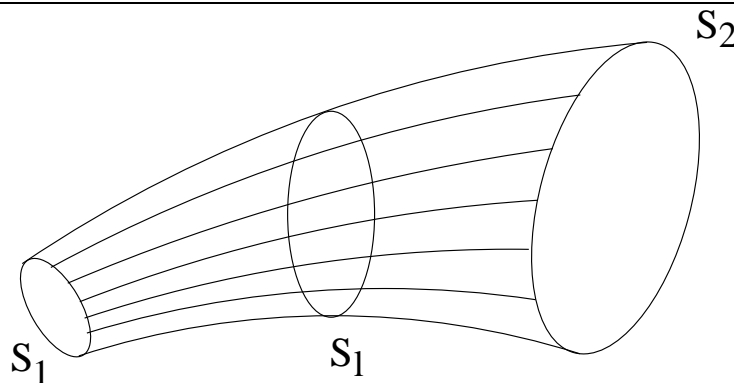


Figura 2.23: Tubul de flux magnetic

tensiunea magnetică pe orice curbă închisă să fie nulă. Acest lucru este asigurat în regim staționar, dacă tubul de flux nu este străbătut de curent electric. Dacă aceste condiții sunt îndeplinite, conform legii circuitului magnetic, tensiunea:

$$u_m = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{H} \, d\mathbf{r} \quad (2.118)$$

are aceeași valoare, indiferent care este $P_1 \in S_1$ și $P_2 \in S_2$.

În cazul mediilor liniare, relația locală de proporționalitate $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ se reflectă și la nivel global și conform teoremei tubului de flux magnetic, ea reprezintă forma globală a legii legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

Enunțul teoremei tubului de flux magnetic

Fluxul magnetic staționar ce străbate un tub de flux format într-un mediu liniar neparcurs de curent electric este proporțional cu tensiunea magnetică existentă între extremități:

$$\varphi = \Lambda_m \cdot u_m. \quad (2.119)$$

Constanta de proporționalitate Λ_m se numește *permeanța tubului de flux magnetic* și nu depinde de flux, ci doar de geometria acestuia și de natura materialului magnetic considerat. În particular, în cazul mediilor omogene din punct de vedere magnetic:

$$\Lambda_m = \mu \Lambda. \quad (2.120)$$

Permeanța magnetică fiind proporțională cu permeabilitatea mediului μ și cu permeanța geometrică Λ a tubului de flux.

Aplicații

1. Permeanța unui tub de flux în câmp magnetic uniform.

Datorită similitudinii matematice care există între ecuațiile câmpului electric și cele ale câmpului magnetic în ipotezele teoremelor tuburilor de flux,

permeanțele geometrice a două tuburi de flux de aceeași formă și dimensiune au valori egale, indiferent de natura tubului de flux. În consecință permeanța unui tub de flux magnetic în câmp uniform este:

$$\Lambda_m = \mu \cdot \Lambda = \mu \frac{A}{l}. \quad (2.121)$$

în care A este aria secțiunii transversale și l este lungimea tubului de flux.

2. Permeanța unui tub de flux din câmpul magnetic produs de un curent rectiliniu.

Un conductor rectiliniu infinit lung, plasat într-un mediu omogen cu permeabilitatea μ și parcurs de curentul I produce în exteriorul lui la distanța R un câmp magnetic cu intensitatea:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot R} \quad (2.122)$$

și inducția $B = \mu H = \mu I / (2\pi R)$. Liniile câmpului magnetic sunt cercuri cu centrele plasate pe axa firului. Un dreptunghi plasat în planul firului cu două laturi paralele cu firul situate la distanțele a și b de acestea, având înălțimea h generează un tub de flux a cărui deschidere este caracterizată de unghiul α (figura 2.24)

Tensiunea magnetică de-a lungul tubului de flux este:

$$u_m = \int_{C_{12}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} H \cdot dr = \frac{I}{2 \cdot \pi} \int_{C_{12}} \frac{dr}{R} = \frac{I}{2 \cdot \pi} \int_0^\alpha d\beta = \frac{I\alpha}{2 \cdot \pi}, \quad (2.123)$$

iar fluxul magnetic este:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_S B \cdot dA = \frac{\mu I}{2 \cdot \pi} \int_S \frac{dA}{R} = \frac{\mu I h}{2 \cdot \pi} \int_a^b \frac{dR}{R} = \frac{\mu I h}{2 \cdot \pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (2.124)$$

În consecință, permeanța tubului de flux magnetic are expresia:

$$\Lambda_m = \frac{\varphi}{u_m} = \frac{\mu h}{\alpha} \cdot \ln \frac{b}{a}. \quad (2.125)$$

2.7 Legea conducției electrice

Enunțul legii

Densitatea curentului electric dintr-un punct este dependentă de intensitatea câmpului electric din acel punct $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$, forma concretă a acestei relații fiind în funcție de natura corpului în care se consideră punctul respectiv.

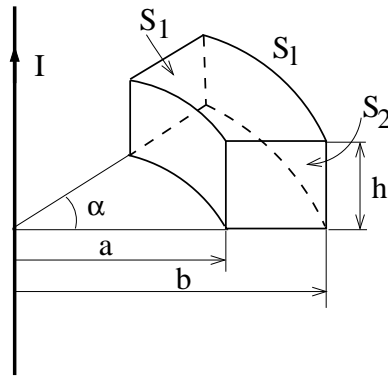


Figura 2.24: Tubul de flux produs de un fir

Din punctul de vedere al conducției, mediile se clasifică în liniare sau neliniare, izotrope sau anizotrope, efectele de ereditate locală fiind nesemnificative în cazul conducției.

Deoarece **în vid** fenomenul de conducție este inexistent, în acest caz legea conducției degenerează în:

$$\mathbf{J} = 0. \quad (2.126)$$

În majoritatea cazurilor întâlnite în aplicațiile practice densitatea de curent este proporțională și coliniară cu intensitatea câmpului electric:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2.127)$$

Aceste medii se numesc conductoare liniare și izotrope, iar constanta de proporționalitate σ , specifică fiecărei substanțe (dar dependentă de temperatură) poartă numele de *conductivitate electrică*. Mediile liniare și izotrope pot fi caracterizate din punctul de vedere al conducției folosind constanta $\rho = 1/\sigma$ numită *rezistivitate electrică* (a nu se confunda cu densitatea de sarcină !). Folosind rezistivitatea relația dintre J și E devine:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \quad (2.128)$$

În funcție de valoarea conductivității, substanțele se clasifică în trei mari categorii:

- izolante ($\sigma = 0, \rho \rightarrow \infty$);
- conductoare ($\sigma \neq 0, \rho \neq 0$);
- supraconductoare ($\sigma \rightarrow \infty, \rho = 0$).

În cazul corpurilor izolante, legea conducției are forma specifică vidului ($J = 0$), astfel de corpuri nefiind parcurse de curent electric. Dintre acestea se menționează

gazele uscate, uleiul mineral, sticla, ceramica, masele plastice, cartonul etc. Caracterul izolant al acestor corpuri este pierdut dacă intensitatea câmpului electric depășește o valoare limită E_{max} , specifică fiecărei substanțe și numită *rigiditate dielectrică*. La depășirea rigidității dielectrice, în corp au loc modificări fizico-chimice ireversibile, datorate fenomenului de străpungere electrică.

Corpurile supraconductoare (dintre care se menționează Nb la temperatura $T < 273K$) au o rezistivitate practic nulă, legea conducției electrice căpătând forma:

$$\mathbf{E} = 0. \quad (2.129)$$

Se constată că în corpurile supraconductoare intensitatea câmpului electric este nulă. Totuși, valori mari ale densității de curent determină câmpuri magnetice intense care fac ca starea de supraconductibilitate să dispară.

Corpurile conductoare se împart la rândul lor în trei categorii: bune conductoare, semiconductoare și slabe conductoare. Din categoria corpurilor bune conductoare fac parte în primul rând metalele dintre care în acest scop se folosesc în practica mai ales Cu, Al, Ag și Au a căror conductivitate este de circa $10^5 S/m$ (tabelul 2.2).

Tabela 2.2: Constantele de material ale conductoarelor metalice

Material	$\rho[\Omega mm^2/m]$	$\sigma[S/m]$	Coefficient de temperatură
Argint	0,0161	$0,621 \cdot 10^6$	0,004
Cupru	0,0172	$0,58 \cdot 10^6$	0,0044
Aur	0,0237	$0,422 \cdot 10^6$	0,004
Aluminiu	0,0278	$0,350 \cdot 10^6$	0,0038
Fier	0,0918	$0,109 \cdot 10^6$	0,0062

În cazul metalelor rezistivitatea crește cu creșterea temperaturii, relația putând fi aproximată liniar prin:

$$\rho(\theta) = \rho_0[1 + \alpha(\theta - \theta_0)] \quad (2.130)$$

în care α este coeficient de creștere cu temperatura a cărei valoare tipică este $5 \cdot 10^{-3} K^{-1}$, iar ρ_0 este rezistivitatea la temperatura de referință θ_0 .

Corpurile semiconductoare (tipice fiind Si și Ge) au o conductivitate mult mai mică decât a metalelor ($10^{-3} \div 10 S/m$) cu valoare puternic dependente de temperatură și de puritatea substanței. Spre deosebire de metale, în cazul semiconductoarelor rezistivitatea scade cu creșterea temperaturii, pentru caracterizarea acestei dependențe folosindu-se relația:

$$\rho(\theta) = \rho_0 e^{-\gamma(\theta - \theta_0)} \quad (2.131)$$

în care γ este coeficientul de variație cu temperatura, iar $\rho_0 = \rho(\theta_0)$ fiind rezistivitatea la temperatura de referință.

Corpurile slab conductoare au conductivități cuprinse în intervalul $10^{-5} \div 10^{-10} S/m$. Un exemplu în acest sens este apa distilată și în general electroliții slabi a căror conductivitate este puternic influențată de concentrația de săruri. În realitate și corpurile izolante au o conductivitate nenulă dar foarte mică ($10^{-10} \div 10^{-20} S/m$).

Se constată că rezistivitatea (și implicit conductivitatea) electrică este una din mărimile cu gama de valori extrem de amplă, care acoperă circa 25 de ordine de mărime, ceea ce face ca determinarea ei experimentală să ridice probleme extrem de dificile în tehnica măsurărilor electrice.

O altă categorie de corpuri o reprezintă conductoarele **liniare și anizotrope**, la care legea conducției are forma:

$$\mathbf{J} = \overline{\sigma}\mathbf{E}, \quad (2.132)$$

în care $\overline{\sigma}$ este tensor simetric de ordinul doi, numit tensorul conductivității. În cazul în care axele sistemului de coordonate cartezian sunt orientate după direcțiile principale, matricea tensorului se reduce la o matrice diagonală. Matricea prin care se reprezintă tensorul $\overline{\sigma}$ este inversabilă astfel încât conducția anizotropă în astfel de medii poate fi caracterizată și prin tensorul rezistivității $\overline{\rho} = \overline{\sigma}^{-1}$:

$$\mathbf{E} = \overline{\rho}\mathbf{J}. \quad (2.133)$$

Caracterul anizotrop al unui mediu se poate datora structurii sale interne sau unor cauze neelectrice, care generează o direcție privilegiată, cum se întâmplă în cazul efectelor galvano-magnetice, care constau în influența pe care câmpul magnetic o are asupra conducției $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Dintre aceste efecte cel mai important este efectul Hall, care poate fi modelat matematic printr-o relație $\mathbf{J} = \overline{\sigma}\mathbf{E}$ tensorială. În cazul în care se presupune că vectorul $\mathbf{B} = \mathbf{kB}$, tensorul conductivității are reprezentarea matriceală:

$$\overline{\sigma} = \sigma \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\beta^2} & \frac{1}{1+\beta^2} & 0 \\ \frac{\beta}{1+\beta^2} & \frac{1}{1+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

în care $\beta = C_H \cdot B$ este o mărime proporțională cu inducția magnetică, prin constanta Hall C_H , specifică materialului. Se constată că în absența câmpului magnetic ($B=0$) tensorul $\overline{\sigma}$ degenerază în pseudoscalarul $\overline{\sigma} = \sigma\overline{\mathbf{1}}$.

Nu toate corpurile asigură o relație de proporționalitate între \mathbf{J} și \mathbf{E} . Mediile în care relația de proporționalitate nu este îndeplinită se numesc **medii neliniare** din punctul de vedere al conducției. Cel mai simplu model de material pentru mediile neliniare este descris de relația:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i), \quad (2.134)$$

în care vectorul \mathbf{E}_i , caracteristic corpului se numește **câmp electric imprimat**, apariția lui având în general cauze neelectrice (neuniformități de temperatură sau concentrație, neomogenități, forțe de inerție). Prezența câmpurilor electrice imprimate face posibilă apariția fenomenului de conducție ($J \neq 0$) chiar și în absența câmpului electric ($E = 0$) sau reciproc apariția câmpului electric ($E \neq 0$) în conductoare nestrăbătute de curent ($J = 0$).

Se deosebesc următoarele tipuri de câmpuri imprimate:

- câmp imprimat de accelerație, în metale are o distribuție volumică dată de relația:

$$\mathbf{E}_i = -\frac{m_0}{e}\mathbf{a} \quad (2.135)$$

în care m_0 este masa electronului, e_0 este sarcina sa iar \mathbf{a} este accelerația corpului față de un sistem de referință inerțial;

- câmp electric imprimat datorat neuniformităților de temperatură (prin efect Thomson);
- câmp electric imprimat de concentrație, apare în electroliții cu concentrații neuniforme, datorită difuziei purtătorilor de sarcină;
- câmpuri electrice imprimate de contact (voltaice); la suprafața de contact între două corpuri metalice diferite apare un câmp electric de interfață distribuit normal la suprafață pe o adâncime mică ($10^{-10}m$) între cele două corpuri, datorită difuziei electronilor dintr-un corp în altul, aceste câmpuri sunt dependente de temperatura suprafeței de contact (efectul Peltier-Seebeck);
- câmp electric de natură galvanică, care apare la suprafața de contact dintre un metal și un electrolit;
- câmp fotovoltaic imprimat, care apare la suprafața de contact între un metal și un semiconductor, sub acțiunea luminii care cade pe această interfață.

Câmpurile electrice imprimate apărute în joncțiunile dintre două semiconductoare dopate diferit sau dintre un metal și un semiconductor explică funcționarea dispozitivelor semiconductoare (diode, tranzistoare, tranzistoare cu efect de câmp, fotodiode etc). În acest caz câmpul electric imprimat depinde de densitatea de curent.

O altă categorie de corpuri o reprezintă mediile cu conducție neliniară, la care $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$. De obicei acestea au o comportare izotropă, cu densitatea de curent coliniară cu intensitatea câmpului electric, deci pot fi caracterizate de funcția reală $J = J(E)$.

Conducția neliniară se datorește fie efectelor temperaturii, cum se întâmplă în cazul rezistoarelor termice (ca de exemplu în lămpile cu incandescență) fie neomogenităților microstructurale (ca în rezistorul cu carborund).

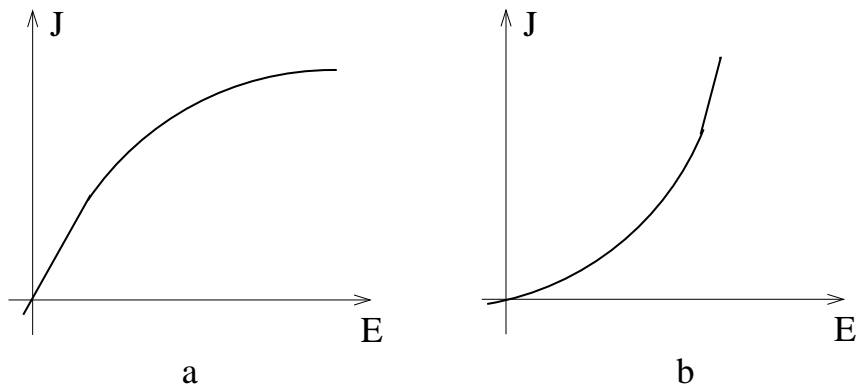


Figura 2.25: Caracteristici de conducție

În cazul rezistoarelor termice, trecerea curentului electric prin acestea determină încălzirea lor, ceea ce modifică rezistența electrică deci implicit valoarea densității de curent J , pentru o anumită intensitate a câmpului electric (fig. 2.25 *a*). Cum dependența dintre densitatea de curent și temperatură nu are un caracter local și instantaneu, modelarea fenomenelor din rezistoarele termice prin relația $J = J(E)$ are doar un caracter aproximativ, fiind valabilă cel mult în regim staționar.

Rezistorul cu carborund este format din granule fine de carbură de siliciu sintetizate într-o masă ceramică. Granulele sunt înconjurate într-o peliculă de SiO_2 iar la suprafața lor de contact se formează joncțiuni semiconductoare, cu caracteristică tensiune-curent neliniară. Din punct de vedere microscopic densitatea de curent J depinde neliniar de E conform graficului din figura 2.25 *b*.

Cu excepția rezistoarelor termice, mediile conductoare nu prezintă efecte de ereditate semnificative (la frecvențe sub 10^{15} Hz în cazul metalelor și 10^{10} Hz în cazul electroliților)

Interpretarea microscopică a legii conducției.

Metalele sunt alcătuite din atomi ale căror nuclee formează o rețea cristalină și care au o parte din electroni liberi, ce au o mișcare de agitație termică în tot volumul corpului. La un moment dat, datorită orientării arbitrare pe care o au vitezele electronilor liberi, media vectorială a vitezei acestora este nulă. Sub acțiunea unui câmp electric exterior electronii capătă o accelerație orientată în direcția acestuia. Energia cinetică suplimentară, căpătată de fiecare electron în intervalul dintre două ciocniri succesive este transmisă rețelei la următoarea ciocnire. Acest efect determină o creștere a temperaturii corpului, iar din punct de vedere al electronilor interacțiunea cu rețeaua cristalină se comportă ca o forță de frecare ce se opune mișcării ordonate a acestora. În cazul electroliților mecanismul conducției se deosebește prin faptul că de această dată purtătorii liberi de sarcină sunt ionii.

În consecință, fenomenul de conducție constă în deplasarea ordonată a purtătorilor liberi de sarcină sub acțiunea unui câmp electric exterior, deplasare suprapusă peste mișcarea naturală, de agitație termică a acestora.

Sub acțiunea aceluiași câmp electric, purtătorii liberi de sarcină pot căpăta viteze medii diferite. Mobilitatea mare a electronilor liberi din metale explică valoarea mare a conductivității acestora, iar mobilitatea mică a ionilor din electroliți explică slaba lor conductivitate. Din acest motiv, la valori comparabile ale densității de curent, viteza medie a electronilor din metale este mult mai mică decât cea a ionilor din electroliți.

Aparția câmpurilor electrice imprimare se explică prin forțe de natură ne-electrică ce acționează asupra purtătorilor de sarcină. De exemplu, câmpurile electrice imprimare de accelerație se datoresc forțelor de inerție care acționează asupra purtătorilor liberi de sarcină iar cele datorate neomogenităților se explică prin difuzia concentrației purtătorilor liberi de sarcină.

Semnificația fizică a legii conducției.

Legea conducției pune în evidență cauza principală a apariției curentului electric de conducție și anume câmpul electric.

În cazul mediilor cu câmp electric imprimat, acesta este evidențiat ca o nouă cauză posibilă a câmpului electric. În acest fel se explică, de exemplu, câmpul electric produs de elementele galvanice.

Teorema tubului de curent (Relația lui Ohm).

Pentru a determina forma globală a legii conducției se consideră un tub de curent, mărginit de o suprafață laterală S_l , pe care densitatea de curent \mathbf{J} este orientată tangențial și două suprafețe externe S_1 și S_2 pe care intensitatea câmpului electric este orientată perpendicular (fig. 2.26).

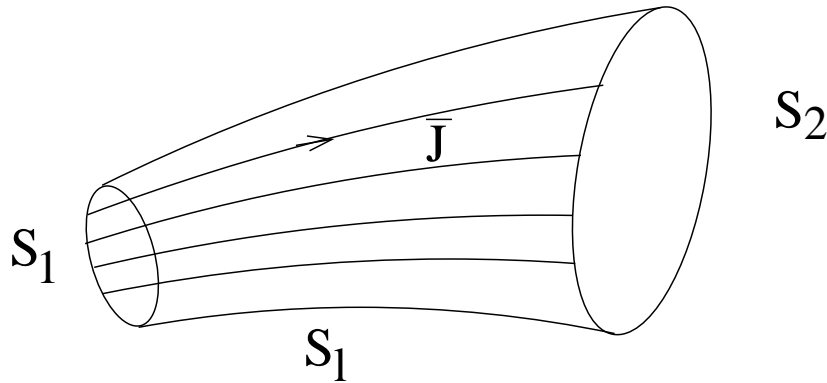


Figura 2.26: Tubul de curent

În regim staționar tensiunea electrică de-a lungul tubului de flux:

$$u = \int_{C_{12}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \tag{2.136}$$

nu depinde de forma curbei C_{12} , dacă punctele extreme ale acesteia P_1 și P_2 aparțin suprafeței S_1 și respectiv S_2 .

O altă mărime caracteristică tubului de curent în regim staționar este intensitatea curentului electric:

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} \quad (2.137)$$

ce străbate o suprafață transversală a tubului.

În regim staționar $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, de unde rezultă că $\text{div } \mathbf{J} = 0$, deci:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \text{div } \mathbf{J} dv = \mathbf{0}, \quad (2.138)$$

ceea ce asigură independența curentului față de secțiunea transversală considerată.

În cazul mediilor conductoare liniare, relația de proporționalitate $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ se reflectă la nivel global conform următoarei teoreme.

În regim staționar, intensitatea curentului electric al unui tub de curent ce ocupă un mediu conductor liniar este proporțională cu tensiunea electrică de-a lungul tubului:

$$i = G \cdot u. \quad (2.139)$$

Constanta de proporționalitate G , specifică tubului de flux, dar independentă de starea electrică a acestuia se numește conductanță electrică. În cazul conductoarelor liniare, izotrope și omogene conductanța electrică este proporțională cu conductivitatea σ a mediului:

$$G = \sigma \cdot \Lambda, \quad (2.140)$$

în care Λ este permeanța geometrică a tubului de flux.

Aplicații

1. Conductanța unui tub de curent în câmp electric uniform.

Se consideră un tub de curent de formă cilindrică având aria bazei A și înălțime l . Tensiunea electrică:

$$u = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \mathbf{E} l, \quad (2.141)$$

și intensitatea curentului:

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} = JA \quad (2.142)$$

permit calculul conductanței tubului de curent:

$$G = \frac{i}{u} = \frac{JA}{El} = \frac{\sigma A}{l}, \quad (2.143)$$

în funcție de conductivitatea σ a mediului.

2. Relația dintre tensiune și curent la un tub de curent cu câmp electric imprimat.

Se consideră un tub de curent cilindric de înălțime h și aria bazei A , în care există un câmp electric imprimat uniform orientat longitudinal E_i .

Relația de material $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$ proiectată pe axa cilindrului, capătă forma $J = \sigma(E + E_i)$, în condițiile în care câmpurile \mathbf{J} , \mathbf{E} și \mathbf{E}_i sunt continue și orientate paralel. În regim staționar tensiunea electrică longitudinală este:

$$u = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{R} = El, \quad (2.144)$$

iar intensitatea curentului electric este:

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} = JA. \quad (2.145)$$

În consecință, din relația de material rezultă:

$$\frac{i}{A} = \sigma\left(\frac{u}{l} + E_i\right), \quad (2.146)$$

sau luând în considerare conductanța tubului de curent în câmp uniform, rezultă:

$$i = Gu + j_0 \quad (2.147)$$

în care $j_0 = \sigma AE_i$ poartă numele de curent electric imprimat.

Tensiunea electrică de-a lungul tubului de curent este:

$$u = \frac{1}{G}(i - j_0) \quad (2.148)$$

sau folosind notațiile $R = 1/G$ pentru mărimea numită rezistență tubului de curent și $e = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \mathbf{E} \mathbf{l} = \mathbf{j}_0 / \mathbf{G}$ pentru mărimea numită tensiunea electromotoare imprimată, rezultă:

$$u = Ri - e \quad (2.149)$$

relație cunoscută sub numele de teorema lui Joubert.

2.8 Clasificarea mediilor din punctul de vedere al legilor de material

Din punctul de vedere al legilor de material corpurile se clasifică în liniare sau neliniare, izotrope sau anizotrope și cu sau fără efect de ereditate (postefect sau histeresis). Un corp este omogen în cazul în care are aceleași proprietăți de material în toate punctele sale. În caz contrar el este neomogen.

Cel mai simplu model de material este întâlnit în cazul corpurilor omogene, liniare, izotrope fără efecte de ereditate. În acest caz:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.150)$$

corpurile fiind caracterizate de trei constante de material ε , μ și σ , care sunt mărimi reale și pozitive, independente de punct și de starea electromagnetică a corpului prezentă sau trecută. Fiind izotrope, în aceste corpuri nu există direcții privilegiate relațiile de material având aceeași formă indiferent de direcția câmpului. Din această categorie fac parte gazele, lichidele și majoritatea corpurilor solide omogene, ca de exemplu metalele neferomagnetice.

În cazul corpurilor liniare, izotrope și fără efect de ereditate, dar neomogene, constantele de material ε , μ sau σ au tot caracter scalar, dar variază de la un punct la altul:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sigma(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.151)$$

În cazul mediilor liniar și anizotrope:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\varepsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\sigma}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \end{aligned} \quad (2.152)$$

relația de material este exprimată prin folosirea tensorilor de ordin doi. În cazul mediilor omogene acești tensori au un caracter independent de vectorul de poziție.

Dintre mediile neliniare, cea mai simplă relație de material are loc în mediile cu caracteristică afină:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_p(\mathbf{r}); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu \cdot (\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}_p(\mathbf{r})); \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sigma \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_i(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (2.153)$$

În cazul mediilor neliniare, izotrope și omogene, proprietățile de material pot fi caracterizate complet de funcțiile reale (monotone și impare):

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= \hat{D}(E(\mathbf{r}, t)); \\ B(\mathbf{r}, t) &= \hat{B}(H(\mathbf{r}, t)); \\ J(\mathbf{r}, t) &= \hat{J}(E(\mathbf{r}, t)). \end{aligned} \quad (2.154)$$

În cazul mediilor neliniare, izotrope și neomogene aceste funcții au ca parametru și vectorul de poziție:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= \hat{D}(E(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}); \\ B(\mathbf{r}, t) &= \hat{B}(H(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}); \\ J(\mathbf{r}, t) &= \hat{J}(E(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.155)$$

urmând ca în cazul mediilor anizotrope, relația de material să fie caracterizată prin funcții vectoriale de variabilă vectorială:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \hat{D}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \hat{B}(\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}); \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \hat{J}(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2.156}$$

Aceste clasificări pot fi făcute în mod independent din punct de vedere dielectric, magnetic sau al conducției. De exemplu, fierul pur este liniar din punct de vedere dielectric și al conducției dar neliniar din punct de vedere magnetic:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}(H(\mathbf{r}, t)) \cdot \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{H(\mathbf{r}, t)}; \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \sigma \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{2.157}$$

Ca toate metalele și fierul nu se polarizează, deci are permitivitate relativă unitară.

2.9 Legea transferării energiei în conductoare

Cele patru legi generale împreună cu cele trei legi de material, anterior prezentate alcătuiesc un sistem complet de ecuații care permit determinarea univocă a câmpului electromagnetic (\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} , \mathbf{H} și ρ). În ingineria electrică, cunoșterea câmpului electromagnetic este necesară dar nu suficientă pentru aplicațiile practice, în care interesează mai ales determinarea efectelor acestui câmp. Din acest punct de vedere cele șapte legi formează un sistem cu complectitudine internă, matematică, dar ele nu asigură complectitudinea fizică, deoarece nici una din aceste legi nu se referă la efectele neelectrice ale câmpului electromagnetic.

Pentru a asigura complectitudinea fizică a sistemului legilor este necesară adăugarea de relații noi, care să permită conexiunea electromagnetismului cu celelalte ramuri ale fizicii. Legile prezentate în continuare asigură această conexiune, permițând determinarea efectelor mecanice, termice sau de transfer de masă specifice câmpului electromagnetic.

Legea transferării energiei în conductoare descrie transferul energetic între câmpul electromagnetic și corpuri, în procesul de conducție.

Enunțul legii transferării energiei

Densitatea de volum a puterii transferate de câmpul electromagnetic corpurilor în procesul de conducție este egală cu produsul scalar dintre densitatea curentului electric și intensitatea câmpului electric:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}.\tag{2.158}$$

Densitatea de volum a puterii este o mărime scalară, măsurată în W/m^3 , ce caracterizează local și temporal transferul de energie, definită prin:

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} cu \Delta P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}, \quad (2.159)$$

în care ΔW reprezintă energia transferată în intervalul de timp Δt volumului ΔV .

Densitatea de volum a puterii are sensul convențional de câmp spre corp. Dacă $p > 0$ transferul are loc în sensul convențional, iar în cazul $p < 0$ transferul real de energie are loc în sens invers celui convențional, respectiv corpul este cel care transferă energie câmpului. În cazul $p = 0$ nu are loc transfer de energie între cele două sisteme (situație întâlnită în mediile supraconductoare, la care $\mathbf{E} = 0$, în mediile izolante la care $\mathbf{J} = 0$, sau în absența conducție).

Consecințele legii transferării

1. În cazul mediilor conductoare liniare.

Dacă mediul conductor este izotrop $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$, densitatea de putere are expresia:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot E^2 \geq 0, \quad (2.160)$$

care evidențiază caracterul pozitiv al acestuia. Folosind rezistivitatea ρ se obține aceeași concluzie:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \rho \cdot J^2 \geq 0, \quad (2.161)$$

indiferent de orientarea vectorilor \mathbf{E} sau \mathbf{J} .

În cazul conductoarelor anizotrope:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \bar{\sigma} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \bar{\rho} \cdot \mathbf{J} \geq 0, \quad (2.162)$$

ceea ce evidențiază caracterul pozitiv definit de tensorii $\bar{\sigma}$ și $\bar{\rho}$.

În consecință, în mediile conductoare transferul de energie are un caracter ireversibil, având loc de la câmp spre corp. Energia primită de corp în fenomenul de conducție duce la creșterea temperaturii sale, fenomen cunoscut sub numele de efect electrocaloric Joule-Lentz.

2. În cazul mediilor conductoare cu câmp imprimat.

Folosind relația de legătură $\mathbf{J} = \sigma \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$, rezultă:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 + \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}_i, \quad (2.163)$$

iar în cazul în care se exprimă $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} - \mathbf{E}_i$, în funcție de \mathbf{E} , rezultă:

$$p = \rho J^2 - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}. \quad (2.164)$$

Se constată că densitatea de putere se descompune într-o sumă de doi termeni, din care primul este pozitiv definit, reprezentând puterea transferată ireversibil corpurilor prin efectul Joule-Lentz:

$$p_J = \rho \cdot J^2 \geq 0 \quad (2.165)$$

și al doilea termen, datorită câmpului electric imprimat:

$$p_i = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J} \quad (2.166)$$

al cărui semn depinde de orientarea densității de curent \mathbf{J} față de \mathbf{E}_i , deci reprezintă un transfer energetic eventual reversibil. Sensul transferului este dat de sensul curentului.

De exemplu, în cazul unui acumulator electrochimic, la care densitatea de curent \mathbf{J} are același semn cu \mathbf{E}_i , termenul $p_i < 0$, ceea ce evidențiază că acumulatorul se descarcă, câmpul electromagnetic (curentul electric) primind energie de la corp (acumulator). Dacă se schimbă sensul curentului prin acumulator, atunci $p_i > 0$ și acumulatorul se încarcă (corpul este cel care primește energie de la câmp). Indiferent de sensul transferului, acesta este însoțit de efectul ireversibil Joule-Lentz, ceea ce explică randamentul subunitar al acumulatorilor.

Deoarece, în general $\sigma E^2 \neq \rho J^2$ și densitatea de putere transferată corpului prin intermediul câmpului imprimat are expresia $p_i = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{J}$, rezultă că puterea transferată prin efect Joule-Lentz are expresia $p_J = \rho J^2$ în cazul mediilor izotrope și $p_J = \mathbf{J} \bar{\rho} \mathbf{J}$ în cazul mediilor anizotrope.

Forma globală a legii transferării energiei

Puterea electrică transferată unui domeniu D_Σ se obține prin integrarea densității de volum a puterii:

$$P = \int_{D_\Sigma} p \cdot dv = \int_{D_\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv, \quad (2.167)$$

iar energia transferată într-un interval de timp (t_1, t_2) este:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dv = \int_{t_1}^{t_2} \int_{D_\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dt. \quad (2.168)$$

În cazul unui tub de curent, în regim staționar, parcurs de curentul $i = I$ și cu tensiunea $u = U$ la borne sunt valabile relațiile $\mathbf{E} = \text{grad } V$ și $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, ceea ce implică $\text{div } \mathbf{J} = 0$, iar folosind egalitatea:

$$\text{div}(\mathbf{J} \cdot V) = V \cdot \text{div } \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \text{grad } V = \mathbf{J} \cdot \text{grad } V \quad (2.169)$$

se obține:

$$P = \int_{D_\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = - \int_{D_\Sigma} \mathbf{J} \cdot \text{grad } V dv = - \int_{\Sigma} \mathbf{J} V d\mathbf{A}. \quad (2.170)$$

Deoarece pe frontiera tubului de curent $\Sigma = S_l \cup S_1 \cup S_2$ sunt îndeplinite condițiile $\mathbf{J}d\mathbf{A} = 0$ pe S_l , $V = V_1$ pe S_1 și $V = V_2$ pe S_2 , rezultă:

$$P = -V_1 \cdot \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} - V_2 \cdot \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = i(V_1 - V_2) = u \cdot i \quad (2.171)$$

S-a ținut cont că elementul de arie de pe suprafața S_1 este orientat spre exterior și nu în concordanță cu sensul de referință al curentului, deci $d\mathbf{A} = -d\mathbf{A}_1$ pe S_1 , dar $d\mathbf{A} = d\mathbf{A}_2$ pe S_2 .

În consecință se poate afirma că, puterea transferată de câmpul electromagnetic unui tub de curent în regim staționar este egală cu produsul dintre tensiunea de-a lungul tubului și intensitatea curentului ce străbate tubul.

$$P = ui \quad (2.172)$$

În demonstrarea acestei afirmații nu s-a folosit nici o ipoteză a supra relației de material din interiorul conductorului. În cazul conductoarelor liniare expresia puterii transferate tubului de curent în regim staționar are una din formele:

$$P = u \cdot i = G \cdot u^2 = R \cdot i^2 \geq 0 \quad (2.173)$$

în care $R = 1/G$. Fiind transferată ireversibil acesta se numește putere disipată.

În cazul unui tub de curent cu câmp imprimat $u = R \cdot i - e$, ceea ce determină puterea:

$$P = u \cdot i = R \cdot i^2 - e \cdot i, \quad (2.174)$$

în care se separă termenul pozitiv definit $R \cdot i^2$, caracteristic efectului Joule-Lentz și termenul $e \cdot i$, caracteristic câmpului imprimat, care reprezintă puterea transferată eventual corpurilor, într-un proces reversibil.

2.10 Legea transferului de masă

Un alt efect ce însoțește procesul de conducție este transferul de masă în interiorul corpurilor conductoare. Acest efect este caracterizat de legea transferului de masă, cunoscută mai ales sub numele de legea electrolizei.

Enunțul legii transferului de masă

În interiorul corpurilor conductoare, procesul de conducție este însoțit de un transfer de masă caracterizat de o densitate a fluxului de masă proporțională și coliniară cu densitatea de curent:

$$\delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} \quad (2.175)$$

Constanta de proporționalitate k are valori dependente de natura materialului conductor. În cazul metalelor valoarea acestei constante este practic nulă, dar în cazul electroliților ea este egală cu constanta electrochimică:

$$k = \begin{cases} 0 & \text{la metale;} \\ A/F_0z & \text{la electroliți,} \end{cases} \quad (2.176)$$

în care A este masa atomică a ionului disociat, z este valența sa, iar $F_0 = 96490C$ este constanta lui Faraday. Spre deosebire de metale, în cazul electroliților procesul de conducție este însoțit de reacții chimice, fenomen cunoscut sub numele de electroliză.

Pentru caracterizarea transferului de masă se utilizează mărimea vectorială numită densitatea fluxului de masă măsurată în Kg/m^2s , definită de relația:

$$\delta = \mathbf{n} \cdot \lim_{\Delta A \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A \cdot \Delta t} \quad (2.177)$$

în care Δm este masa transferată prin aria ΔA în intervalul de timp Δt , iar \mathbf{n} este un versor normal pe suprafața de arie ΔA , a cărei orientare este aleasă astfel încât să asigure valoarea maximă proiecției $\mathbf{n} \cdot \bar{\delta}$.

Interpretarea microscopică a legii transferului de masă

Fenomenul de conducție constă în deplasarea ordonată a purtătorilor liberi de sarcină (electroni sau ioni) din interiorul conductoarelor, deplasare suprapusă peste mișcarea dezordonată de agitație termică. Deoarece toate microparticulele purtătoare de sarcină electrică din interiorul conductorului au masă proprie (de repaus) nenulă, rezultă că deplasarea ordonată a acestora este în mod necesar însoțită de un transfer de masă, transfer ale cărui direcție și sens sunt date de deplasarea purtătorilor de sarcină.

În cazul metalelor, deoarece masa electronilor liberi care asigură conducția este mult mai mică decât cea a restului microparticulelor ce alcătuiesc corpul, iar viteza lor vectorială medie are valori mici, pentru densități uzuale de curent, transferul de masă are valori nesemnificative. În schimb, în cazul electroliților, deoarece fenomenul de conducție este asigurat de deplasarea ionilor, transferul de masă are valori mult mai importante.

Forma globală a legii electrolozei

Pentru determinarea formei globale se consideră o cuvă electrolitică, alcătuită din doi conductori metalici scufudați într-un electrolit lichid (figura 2.27).

Aplicând între cei doi electrozi o tensiune electrică, atât electrozii cât și electrolitul vor fi străbătuți de curent electric. Deoarece în electrolit transferul de masă are valori apreciabile, iar în electrozi acesta este practic nul, rezultă că pe suprafața acestora apare o depunere de substanță, cu debitul masic:

$$Q_m = \int_S \bar{\delta} d\mathbf{A} = \int_S k \cdot \mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad (2.178)$$

în care S este suprafața unui electrod (electrodul polarizat pozitiv - anodul, atunci când interesează depunerea metalică) scufundată în electrolit.

Pentru a calcula masa depusă se integrează debitul masic în timp:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} Q_m dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k \cdot \mathbf{J} d\mathbf{A} dt, \quad (2.179)$$

pe intervalul de timp (t_1, t_2) cât durează procesul.

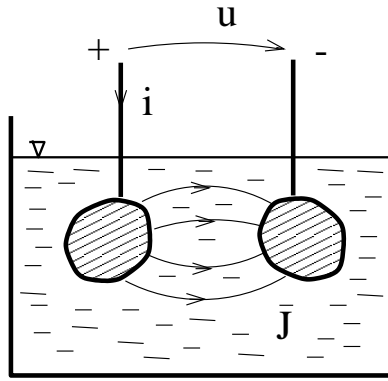


Figura 2.27: Cuva electrolitică

În condițiile în care electrolitul este omogen, debitul masic devine:

$$Q_m = k \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} = k \cdot i \quad (2.180)$$

în care i este intensitatea curentului care străbate cuva, iar dacă acest curent este constant în timp, $i = I$, atunci:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} k \cdot i dt = k \cdot I(t_2 - t_1) = k \cdot I \cdot t. \quad (2.181)$$

În consecință, legea electrolizei are următorul enunț în formă globală: *masa depusă prin electroliză este proporțională cu intensitatea curentului ce străbate cuva și cu timpul cât durează procesul, constanta de proportionalitate fiind egală cu constanta electrochimică ($k = A z \cdot F_0$) a elementului depus.*

Se constată că forma globală a legii se referă la masa totală depusă, fără să dea indicații asupra locului în care are loc depunerea și implicit asupra grosimii și uniformității stratului depus. Din acest motiv ea are un caracter particular, față de forma locală care evidențiază că grosimea stratului depus este proporțională cu densitatea de curent de la suprafața electrodului.

Aplicație la legea transferului de masă:

Se consideră o soluție apoasă de azotat de argint în care sunt scufundați doi electrozi parcurși de un curent cu intensitatea $I = 1A$. Masa de argint depusă într-o secundă este:

$$m = k \cdot I \cdot t = \frac{A}{z \cdot F_0} I \cdot t = \frac{107.7}{96490} = 1.1186 \cdot 10^{-3} \text{Kg} = 1118,6 \text{ mg}. \quad (2.182)$$

Această valoare a fost folosită o vreme pentru definiția unitații de măsură a intensității curentului electric, și a fost numită Amper internațional.

2.11 Sistemul legilor câmpului electromagnetic

Cele nouă legi ale câmpului electromagnetic se împart în trei mari categorii: legi generale, legi de material și legi de conexiune.

Legile generale în număr de patru sunt două de stare (legea fluxului electric și cea a fluxului magnetic, care nu conțin derivate față de timp) și două de evoluție (legea inducției și legea circuitului magnetic, care evidențiază derivata față de timp a tensiunii electrice și respectiv a tensiunii magnetice pe curbe închise).

Legile de material, în număr de trei, evidențiază legătura care există între mărimile locale caracteristice ale câmpului electric (între inducție și intensitatea câmpului electric), ale câmpului magnetic (între inducție și intensitatea câmpului magnetic) și procesului de conducție (între densitatea de curent și intensitatea câmpului electric). Aceste legi caracterizează comportarea corpurilor în interacțiunea lor cu câmpul electromagnetic. În cazul mediilor cu efecte ereditare, legile de material au caracter de evoluție, iar în caz contrar ele au un caracter de stare, asigurând o legătură independentă de evoluția în timp a mărimilor.

Legile de conexiune, în număr de două, evidențiază mărimi care nu sunt caracteristice numai câmpului electromagnetic, asigurând conexiuni între teoria electromagnetismului și celelalte ramuri ale fizicii. Aceste legi permit determinarea efectelor câmpului electromagnetic în urma interacțiunii acestuia cu corpurile. Legea transformării energiei în conductoare are un caracter general, independent de natura corpurilor, iar legea electrolizei are un caracter de material, deoarece în enunțul ei intervin mărimi caracteristice mediilor în care aceasta se aplică. Ambele legi de conexiune au un caracter de stare.

Fiecare din legile câmpului electromagnetic au o formă globală (integrală) și una locală, una din aceste forme fiind generală și cealaltă particulară (dedusă din forma generală în anumite ipoteze restrictive). Legile generale ale câmpului electromagnetic au formă locală ca o formă particulară, cea globală având un caracter general. În schimb, legile de material și cele de conexiune au formele globale cu caracter particular, iar cele locale cu caracter general.

Următoarele relații sintetizează diferitele forme ale legilor câmpului electromagnetic și semnificațiile acestora.

1. Legea fluxului electric (lege generală de stare)

$$\text{Forma globală:} \quad \psi_{\Sigma} = q_{D_{\Sigma}};$$

$$\text{Forma integrală:} \quad \int_{\Sigma} \mathbf{D} \, d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \rho \, dv;$$

$$\text{Forma locală:} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

$$\text{Forma pe suprafețe de discontinuitate:} \quad \operatorname{div}_s \mathbf{D} = \rho_s.$$

Semnificația fizică: corpurile electrizate produc în jurul lor câmp electric (cu linii deschise orientate de la sarcinile pozitive spre cele negative).

2. **Legea fluxului magnetic** (lege generală de stare)

Forma globală: $\varphi_{\Sigma} = 0;$

Forma integrală: $\int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0;$

Forma locală: $div \mathbf{B} = 0;$

Forma pe suprafețe de discontinuitate: $div_s \mathbf{B} = 0.$

Semnificația fizică: nu există sarcini magnetice (liniile câmpului magnetic sunt curbe închise).

3. **Legea inducției electromagnetice** (lege generală de evoluție)

Forma globală: $u_{\Gamma} = -\frac{d\varphi_{S_{\Gamma}}}{dt};$

Forma integrală dezvoltată: $\int_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} - \int_{\Gamma} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r};$

Forma locală: $rot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - rot(\mathbf{B} \times \mathbf{v});$

Forma pe suprafețe de discontinuitate: $rot_s \mathbf{E} = rot_s(\mathbf{B} \times \mathbf{v}).$

Semnificație fizică: câmpul magnetic variabil în timp induce un câmp electric (liniile câmpului electric indus înconjoară liniile câmpului magnetic inductor). Fenomenul de inducție se poate datora și mișcării corpurilor în câmp magnetic.

4. **Legea circuitului magnetic** (lege generală de evoluție)

Forma globală: $u_{m_{\Gamma}} = i_{S_{\Gamma}} + \frac{d\psi_{S_{\Gamma}}}{dt};$

Forma integrală dezvoltată: $\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_{\Gamma}} (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v}) d\mathbf{A} + \int_{\Gamma} (\mathbf{D} \times \mathbf{v});$

Forma locală: $rot \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + rot(\mathbf{D} \times \mathbf{v});$

Forma pe suprafețe de discontinuitate: $rot_s \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \rho_s \mathbf{v} + rot_s(\mathbf{D} \times \mathbf{v}).$

Semnificația fizică: corpurile în stare electrocinetică și câmpul electric variabil în timp generează câmp magnetic (liniile acestuia sunt curbe închise care înconjoară curenții sau liniile câmpului electric ce le-au produs). Câmpul magnetic apare datorită curentului de conducție, dar și datorită variației propriu-zise a câmpului electric în mediile imobile (curent de deplasare), a mișcării corpurilor electrizate (curent de convecție) sau deplasării corpurilor în câmp electric (curent Röntgen).

5. **Legea legăturii în câmp electric** (lege de material)

Forma locală: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ sau $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p;$

în particular: $\mathbf{D} = \bar{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p;$

Forma globală: $\psi = \Lambda_e \cdot u$.

Semnificație fizică: sub acțiunea câmpului electric mediile dielectrice se polarizează, urmând ca polarizația permanentă (electreții) să reprezinte o cauză posibilă a câmpului electric. Câmpul electric este perturbat de prezența dielectricilor, liniile de câmp fiind concentrate în corpurile de mare permitivitate.

6. **Legea legăturii în câmp magnetic** (lege de material)

Forma locală: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ sau $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p)$;

în particular: $\mathbf{B} = \bar{\mu}(\mathbf{H} + \mathbf{M}_p)$;

Forma globală: $\varphi = \Lambda_m \cdot u_m$.

Semnificație fizică: sub acțiunea câmpului electric, mediile se magnetizează, urmând ca magnetizația permanentă (magneții permanenți) să reprezinte o cauză posibilă a câmpului magnetic.

Câmpul magnetic este perturbat de corpurile feromagnetice, liniile de câmp magnetic fiind concentrate și dirijate de aceste corpuri.

7. **Legea conducție** (lege de material)

Forma locală: $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$;

în particular: $\mathbf{J} = \bar{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$;

Forma globală: $i = G \cdot u$.

Semnificația fizică: apariția stării electrocinetice este determinată de prezența câmpului electric. Câmpul electric imprimat reprezintă o altă cauză posibilă a câmpului electric.

8. **Legea transferării energiei în conductoare** (lege generală de conexiune)

Forma locală: $p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$;

Forma globală: $P = u \cdot i$.

Semnificație fizică: în procesul de conducție are loc un transfer de energie între câmpul electromagnetic și corpurile conductoare. Acest transfer are o componentă ireversibilă, de la câmp la corp, care determină încălzirea corpurilor în stare electrocinetică.

9. **Legea transferării masei** (lege de conexiune cu caracter de material)

Forma locală: $\delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}$;

Forma globală: $m = k \cdot I \cdot t$.

Semnificație fizică: procesul de conducție este însoțit de transfer de masă.

Fenomenele menționate în semnificațiile fizice ale celor nouă legi reprezintă fenomenele fundamentale ale electromagnetismului.

Ecuțiile lui Maxwell

Formele locale ale legilor câmpului electromagnetic în mediile imobile:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.183)$$

alcătuiesc un sistem de ecuații diferențiale parțiale liniare și de ordinul întâi, cunoscute sub numele de ecuațiile lui Maxwell. Dacă aceste ecuații se completează cu legile de material în medii liniare și izotrope:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.184)$$

se obține un sistem de ecuații care determină univoc câmpul electromagnetic în condițiile menționate. Deoarece această soluție există și este unică, rezultă că sistemul legilor câmpului electromagnetic este necontradictoriu și complet, din punct de vedere matematic.

Deoarece nici una din legile electromagnetismului nu poate fi determinată pornind de la celelalte, rezultă că sistemul de legi are un caracter independent. Completitudinea fizică a sistemului de legi prezentat este asigurată de faptul că practic toate fenomenele electromagnetice întâlnite în ingineria electrică pot fi explicate și modelate matematic folosind acest sistem de ecuații.

Relațiile impuse în medii imobile de legile câmpului electromagnetic între mărimile caracteristice ale acestui câmp sunt reprezentate grafic în figura 2.28:

Fiecare dependență cauză - efect a fost reprezentată printr-o săgeată pe care s-a marcat numărul legii ce evidențiază această relație. Relațiile de stare, existente atât în regim staționar cât și variabil au fost reprezentate prin săgeată dublă, iar relațiile de evoluție, caracteristice regimului dinamic au fost reprezentate printr-o săgeată simplă.

Relațiile reprezentate evidențiază cele trei cauze statice sau dinamice ale câmpului electric (polarizația permanentă \mathbf{P}_p , câmpul electric imprimat \mathbf{E}_i , și

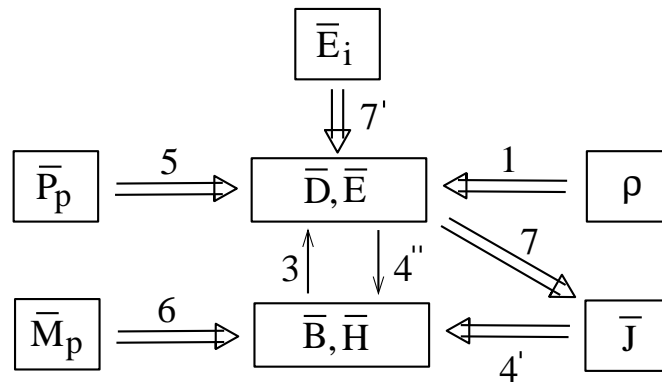


Figura 2.28: Reprezentarea schematică a fenomenelor fundamentale ale electromagnetismului

electrizarea ρ) și cauza sa exclusiv dinamică (variația în timp a câmpului magnetic \mathbf{B}). În timp ce câmpul magnetic are două cauze statice sau (magnetizația permanentă \mathbf{M}_p , curentul electric \mathbf{J}) și o cauză dinamică (variația în timp a câmpului electric \mathbf{D}).

Regimurile câmpului electromagnetic

Se constată că variația în timp a câmpului electric generează câmp magnetic și reciproc, variația în timp a câmpului magnetic generează câmp electric. În consecință, nu poate exista câmp electric variabil neînsoțit de câmp magnetic și invers, ceea ce evidențiază caracterul unitar al câmpului electromagnetic care este o singură entitate fizică. Caracterul ciclic al acestor relații, impus de legea inducției și legea circuitului magnetic, evidențiază faptul că în regim dinamic, câmpul electromagnetic, generat succesiv se poate desprinde de corpurile care l-au produs, propagându-se inclusiv în vid. Acest fenomen specific **regimului dinamic, general variabil** poartă numele de *undă electromagnetică*.

Dacă variația câmpului electromagnetic este suficient de lentă în timp, fenomenul de propagare al undei electromagnetice este nesemnificativ. Această situație are loc, spre exemplu în conductoare masive, în care curentul de deplasare este mult mai mic decât cel de conducție, iar relația $4'$ poate fi eliminată. Regimul câmpului electromagnetic în care curentul de deplasare este neglijabil, iar $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ poartă numele de **regim cvasistaționar inductiv** (figura 2.29 a). În acest regim, câmpul magnetic se calculează în funcție de curentul electric, folosind relațiile din regim staționar. Deoarece fenomenul de inducție electromagnetică joacă un rol fundamental în acest regim, câmpul magnetic variabil produs de curenții de conducție influențează distribuția câmpului electric și implicit a curentului electric. În consecință, în regim cvasistaționar inductiv, distribuția cu-

rentului electric în conductoarele masive se deosebește de cea în regim staționar, efect numit pelicular sau de refulare. Datorită efectului pelicular, curentul electric se distribuie de preferință pe suprafața conductoarelor și mai puțin în miezul lor. Un alt efect specific regimului cvasistaționar inductiv îl reprezintă curenții turbionali, care constituie curenții induși în conductoarele masive introduse în câmp magnetic variabil. Datorită fenomenului de inducție electromagnetică, în interiorul conductorului se generează un câmp electric, care pe baza legii conducție produce curent electric. Prezența curentului indus modifică distribuția câmpului magnetic, care se deosebește în acest regim de cea din regim staționar. Se constată că și în regim cvasistaționar apare ca o relație ciclică. Dar spre deosebire de cazul general variabil, în care relația (3, 4'') determină fenomenul de propagare (datorită caracterului hiperbolic al acestor ecuații cu derivate parțiale, viteza de propagare este finită), în cazul regimului cvasistaționar relația ciclică (7, 4', 3) reprezintă o ecuație cu derivate parțiale de tip parabolic, care determină un fenomen de difuzie a câmpului electromagnetic în interiorul conductorului (fără front de undă cu viteză de propagare finită).

În cazul corpurilor slab conductoare, în condițiile în care variația câmpului este suficient de lentă fenomenul de difuzie s câmpului electromagnetic poate fi descris neglijând fenomenul de inducție electromagnetică și considerând satisfăcută relația:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (2.185)$$

specifică regimului staționar. Acest regim poartă numele de **regimul cvasistaționar capacitiv** al câmpului electromagnetic și are relațiile reprezentate în figura 2.29 b. Se constată că în acest regim câmpul magnetic nu influențează distribuția curentului electric și respectiv a câmpului electric.

Un regim particular, interesant din punct de vedere practic este regimul staționar (figura 2.30).

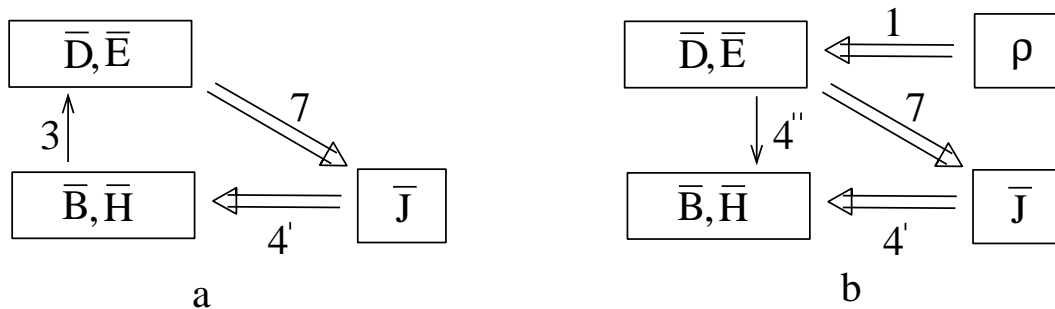


Figura 2.29: Reprezentarea schematică a fenomenelor în regimuri cvasistaționare

În acest regim câmpul magnetic nu influențează câmpul electric. În schimb câmpul electric este cel care determină curentul electric și implicit câmpul magnetic. Dintre cele trei cauze ale câmpului electric (\mathbf{P}_p , \mathbf{E}_i și ρ), doar câmpul

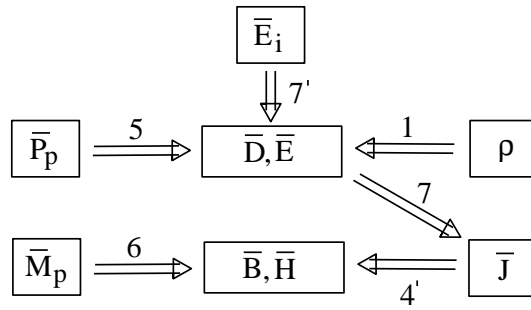


Figura 2.30: Regimul staționar

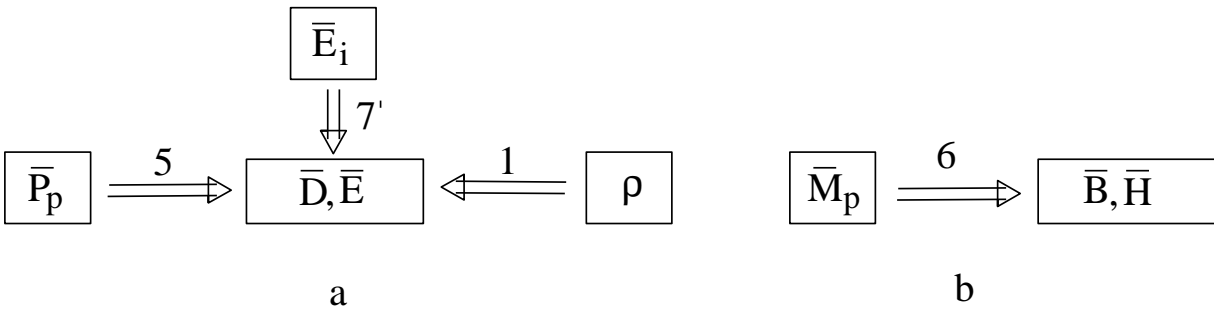


Figura 2.31: Regimuri statice

electric imprimat este capabil să determine curent electric de conducție, deoarece este singurul capabil să producă tensiune electromotivă nenulă. În consecință, în regim staționar se ridică două categorii de probleme. Una constă în determinarea distribuției curenților electrici și implicit a câmpului electric în conductoare masive (relația 7) iar a doua se referă la determinarea repartiției câmpului magnetic (relația 4'). Prima categorie de probleme reprezintă obiectul **regimului electrocinetic staționar** iar a doua reprezintă obiectul **regimului magnetic staționar**.

O separare netă a câmpului magnetic de cel electric se obține în cazul în care lipsește procesul de conducție ($J = 0$). În acest caz, deoarece nu au loc transformări de energie ($p = \mathbf{J}\mathbf{E} = 0$) regimurile obținute se numesc statice. Se constată că ecuațiile câmpului electric, specifice **regimului electrostatic** (figura 2.31 a) sunt complet independente de ecuațiile câmpului magnetic, specifice **regimului magnetostatic** (figura 2.31 b).

În regim magnetostatic, cauzele câmpului magnetic se reduc la una singură și anume \mathbf{M}_p , problema fundamentală a acestui regim fiind determinarea câmpului magnetic produs de magnetii permanenți.

În regim electrostatic câmpul electric poate fi produs de corpurile electrizate (ρ), polarizate permanent ($\mathbf{P}_p \neq 0$) sau de câmpurile electrice imprimate (\mathbf{E}_i).

Capitolul 3

Teoremele fundamentale ale electromagnetismului. Bazele fizice ale teoriei circuitelor electrice

3.1 Teorema conservării sarcinii electrice

Enunțul teoremei conservării sarcinii

Intensitatea curentului electric ce părăsește orice suprafață închisă Σ este egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice din domeniul D_Σ închis de acea suprafață:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt}, \quad (3.1)$$

sau explicit:

$$\int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{D_\Sigma} \rho dv. \quad (3.2)$$

Datorită caracterului ei general, această afirmație este cunoscută și sub numele de legea conservării sarcinii.

În teoria Maxwell-Hertz suprafața Σ este antrenată de corpuri în mișcarea lor.

Demonstrația teoremei conservării sarcinii

Se consideră o suprafață deschisă S_Γ , care se sprijină pe curba închisă Γ . Legea circuitului magnetic aplicată pe această curbă este:

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}. \quad (3.3)$$

Dacă diametrul curbei Γ tinde către zero, aceasta se reduce la un punct P , iar suprafața deschisă S_Γ tinde către o suprafață închisă Σ , cu $P \in \Sigma$ (figura 3.1).

Tensiunea magnetică pe curba Γ :

$$u_{m\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = H_{tmed} \cdot l_{\Gamma} \quad (3.4)$$

tinde spre zero, deoarece l_{Γ} se anulează. În consecință, deoarece $S_{\Gamma} \rightarrow \Sigma$, din legea circuitului magnetic rezultă:

$$i_{\Sigma} + \frac{d\psi_{\Sigma}}{dt} = 0. \quad (3.5)$$

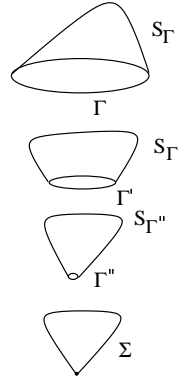


Figura 3.1: Referitoare la teorema conservării sarcinii

Deoarece fluxul electric ψ_{Σ} , pe orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică $q_{D\Sigma}$, din domeniul mărginit de acesta, conform legii fluxului electric, rezultă:

$$i_{\Sigma} + \frac{dq_{D\Sigma}}{dt} = 0, \quad (3.6)$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Forma locală cu teoremei conservării sarcinii electrice

Pornind de la forma locală a legii circuitului magnetic:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \quad (3.7)$$

și aplicând acestei egalități vectoriale operatorul diferențial divergență, rezultă:

$$\text{div}\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\mathbf{D}) + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.8)$$

deoarece $\text{div}(\text{rot}\mathbf{G}) = 0$ pentru orice câmp \mathbf{G} suficient de neted. Pe baza formei locale a legii fluxului electric, $\text{div}\mathbf{D} = \rho$, deci:

$$\text{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \text{div}(\rho \mathbf{v}), \quad (3.9)$$

care este forma locală a teoremei conservării sarcinii electrice, în medii mobile. Deoarece $\mathbf{J}_v = \rho \mathbf{v}$ reprezintă densitatea curentului de convecție, această relație se poate scrie sub forma

$$\operatorname{div}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_v) = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.10)$$

În cazul mediilor imobile ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), rezultă:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Integrând această relație pe un domeniu D_Σ , rezultă pe baza teoremei Gauss-Ostrogradski:

$$\int_\Sigma (\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) \mathbf{dA} = \int_{D_\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{dv}, \quad (3.12)$$

care este forma integrală dezvoltată a teoremei.

Spre deosebire de forma globală, în forma integrală dezvoltată, suprafața Σ nu este antrenată de corpuri în mișcarea lor.

Forma pe suprafețe de discontinuitate a teoremei conservării sarcinii electrice

Se consideră două domenii \mathcal{D}_∞ și \mathcal{D}_ϵ în interiorul cărora mărimile caracteristice câmpului electromagnetic sunt funcții continue de punct, condiție care nu este în mod necesar satisfăcută pe suprafața de separație S_d dintre cele două medii. Presupunând că suprafața de discontinuitate este suficient de netedă, astfel încât să aibă normală unică și că în fiecare punct se poate defini pentru orice $P \in S_d$ o pereche de vectori \mathbf{J}_1 și \mathbf{J}_2 care reprezintă limitele densității de curent, dinspre domeniul \mathcal{D}_∞ și respectiv \mathcal{D}_ϵ (figura 3.2).

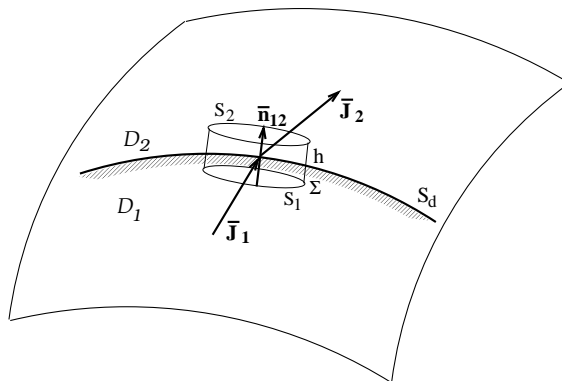


Figura 3.2: Suprafața de discontinuitate pentru curent

Pentru început se va presupune că suprafața S_d este electricizată cu densitatea superficială de sarcină ρ_s , dar cu densitate superficială de curent nulă, iar mediile sunt imobile. Punctul P se consideră centrul unui cilindru Σ de înălțime h și

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

aria barei A , orientat cu axa după normala \mathbf{n}_{12} . Separând suprafețele bazelor S_1 și S_2 de suprafața laterală a cilindrului S_l se obține intensitatea curentului ce părăsește suprafața $\Sigma = S_l \cup S_1 \cup S_2$:

$$i_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{J}d\mathbf{A} = J_{nmed}hl - J_{1nmed}A + J_{2nmed}A, \quad (3.13)$$

în care l este perimetrul bazei. Sarcina electrică din domeniul D_Σ este:

$$\int_{D_\Sigma} \rho dv = \rho_{vmed}Ah + \rho_{smed}A. \quad (3.14)$$

Aplicând forma integrală dezvoltată a teoremei se obține:

$$J_{nmed} \frac{hl}{A} + J_{2nmed} - J_{1nmed} = \frac{d}{dt} \rho_{vmed}h - \frac{d\rho_{smed}}{dt} \quad (3.15)$$

relație care pentru $h \rightarrow 0$ devine $J_{2nmed} - J_{1nmed} = \frac{d\rho_{smed}}{dt}$, iar considerând ulterior că $A \rightarrow 0$, rezultă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \quad (3.16)$$

sau sub formă compactă:

$$div_s \mathbf{J} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (3.17)$$

în care s-a folosit notația $div_s \mathbf{J} = \mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1)$, cu referire la saltul componenteii normale a densității de curent.

În cazul particular în care $J_s = 0$, rezultă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = 0, \quad div_s \mathbf{J} = 0, \quad (3.18)$$

ceea ce garantează conservarea componentelor normale ale densității de curent $J_{n1} = J_{n2}$ la trecere prin suprafața de deschidere.

În condițiile în care suprafața de discontinuitate S_d este străbătută de curent de conducție distribuit superficial, cu densitatea \mathbf{J}_s , curentul pe suprafața laterală S_Γ nu se anulează, atununci când $h \rightarrow 0$:

$$\int_{S_\Gamma} \mathbf{J}d\mathbf{A} = J_{nmed}hl + \int_{\Gamma=\Sigma \cap S_d} \mathbf{J}_s \mathbf{n}dl. \quad (3.19)$$

Suprafața de discontinuitate S_d poate fi descrisă folosind ecuația parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu)$, fiecare punct $P \in S_d$ fiind caracterizat de perechea de coordonate locale (λ, μ) . Aplicând teorema Gauss-Ostrogradski, cu referire la curba închisă Γ , rezultă:

$$\int_{\Gamma=\Sigma \cap S_d} \mathbf{J}_s \mathbf{a}dl = \int_{S_\Gamma=D_\Sigma \cap S_d} div_2 \mathbf{J}_s dA = (div_2 \mathbf{J}_s)_{med}A, \quad (3.20)$$

în care:

$$\operatorname{div}_2 \mathbf{J}_s = \frac{1}{h_\lambda h_\mu} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (h_\mu J_\lambda) + \frac{\partial}{\partial \mu} (h_\lambda J_\mu) \right], \quad (3.21)$$

unde h_λ și h_μ sunt parametrii Lamé asociați parametrilor λ și μ . În particular, în cazul în care suprafața S_d este plană și orientată spre exemplu paralel cu planul $z = 0$, se pot utiliza coordonatele carteziene iar divergența bidimensională devine:

$$\operatorname{div}_2 \mathbf{J}_s = \frac{\partial J_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial J_{sy}}{\partial y}. \quad (3.22)$$

Aplicând teorema conservării sarcinii, rezultă în acest caz:

$$J_{nmed} \frac{hl}{P} + J_{2nmed} - J_{1nmed} + (\operatorname{div}_2 \mathbf{J}_s)_{med} = \frac{d\rho_{vmed}}{dt} h - \frac{d\rho_{smed}}{dt} \quad (3.23)$$

Trecând de limită, pentru $h \rightarrow 0$ și $A \rightarrow 0$, astfel încât $h/A \rightarrow 0$ se obține:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) + \operatorname{div}_2 \mathbf{J}_s = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \quad (3.24)$$

sau sub formă compactă:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \quad (3.25)$$

în care s-a folosit notația $\operatorname{div}_s \mathbf{G} = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1) + \operatorname{div}_2 \mathbf{G}$. În cazul mediilor imobile, utilizând în locul densității de curent \mathbf{J} curentul total $\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}$, iar în locul densității superficiale de curent \mathbf{J}_s suma $\mathbf{J}_s + \rho_s \mathbf{v}$, în care \mathbf{v} este viteza domeniului hincărcat cu ρ_s , aplicând forma integrală dezvoltată a teoremei conservării sarcinii, rezultă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot [(\mathbf{J}_2 + \rho_2 \mathbf{v}_2) - (\mathbf{J}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_1)] + \operatorname{div}_2 (\mathbf{J}_s + \rho_s \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}, \quad (3.26)$$

sau în formă compactă:

$$\operatorname{div}_s (\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \quad (3.27)$$

În **cazul regimului staționar**, teorema conservării sarcinii devine:

- în forma globală

$$i_\Sigma = 0, \quad (3.28)$$

- în forma integrală

$$\int_\Sigma \mathbf{J} d\mathbf{A} = 0, \quad (3.29)$$

- în forma locală

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (3.30)$$

- în forma pe suprafețe de discontinuitate

$$\operatorname{div}_s \mathbf{J} = 0. \quad (3.31)$$

În acest regim, *curentul electric ce străbate orice suprafața închisă este nul*, afirmație cunoscută sub numele de **teorema conservării curentului**. La trecerea prin suprafețele de discontinuitate, componenta normală a densității de curent se conservă, dacă aceasta nu este parcursă de curent distribuit superficial și respectiv are un salt egal cu divergența bidimensională a densității superficiale a curentului în caz contrar:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\operatorname{div}_2 \mathbf{J}_s \quad (3.32)$$

Aceste relații evidențiază faptul că în regim staționar liniile de curent nu pot fi curbe deschise, neexistând surse de pe care acestea să pornească sau pe care să se oprescă. În particular, în cazul unui tub de curent, intensitatea curentului are aceeași valoare indiferent de secțiunea considerată (figura 3.3). Suprafața de separație dintre un domeniu conductor și un mediu izolat este suprafața de câmp pentru liniile curentului electric, deoarece în mediul izolat $J = 0$, iar conform conservării componente normale a densității de curent $J_n = 0$ și în conductor, la suprafața sa. În consecință orice corp conductor cufundat într-un izolat reprezintă un tub de curent.

O altă consecință, care justifică numele teoremei se obține în cazul în care domeniul D_Σ este **izolat electric** (este înconjurat de un perete izolat în care $i_\Sigma = 0$), ceea ce implică invarianța în timp a sarcinii din acest domeniu

$$\rho_{D_\Sigma} = ct. \quad (3.33)$$

Dacă întreg mediul este izolat, forma locală a acestei relații este:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.34)$$

cu următoarea formă integrală dezvoltată:

$$\int_\Sigma \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{v}, \quad (3.35)$$

relații similare celor care evidențiază conservarea masei din mecanica fluidelor.

Semnificația fizică a teoremei conservării sarcinii.

Se consideră un corp conductor \mathcal{D}_\pm înconjurat de un mediu izolat, exceptând un fir conductor (figura 3.4). Aplicând teorema conservării sarcinii pe suprafața Σ a conductorului se obține:

$$i = -\frac{dq}{dt},$$

în care i este intensitatea curentului ce străbate firul iar q este sarcina corpului. În consecință, atunci când sarcina q a corpului scade în timp $i > 0$, iar curentul electric părăsește corpul. Dacă în schimb sarcina conductorului crește în timp $i < 0$, iar curentul electric este injectat în corp. Teorema pune în evidență drept cauză a electrizării corpurilor curentul electric (de conducție sau convecție), curent care "transportă" sarcini pe corp. Legătura strânsă între curent și sarcina electrică este în acord cu interpretarea microscopică a fenomenului de conducție, ca fiind datorat deplasării ordonate a purtătorilor microscopici de sarcină din interiorul corpurilor.

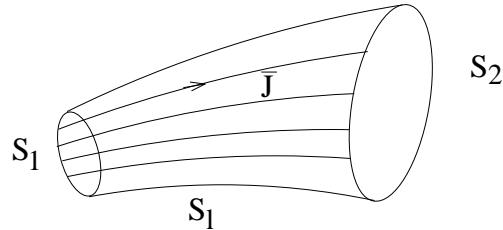


Figura 3.3: Tubul de curent

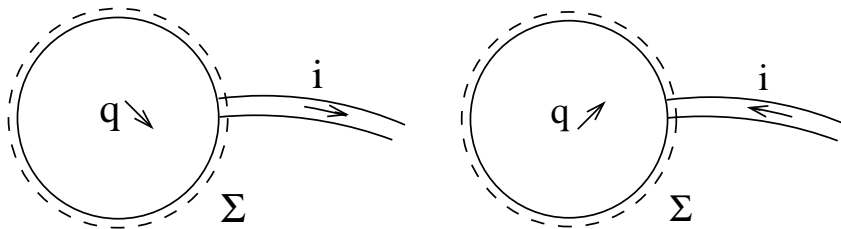


Figura 3.4: Conservarea sarcinii electrice

3.2 Teorema energiei electromagnetice.

Enunțul teoremei energiei electromagnetice

Puterea transferată de câmpul electromagnetic unui domeniu imobil prin frontiera acestuia D_Σ este egală cu puterea transferată corpurilor din domeniul P_{D_Σ} plus viteza de creștere a energiei câmpului electromagnetic W_{em} din domeniu:

$$P_\Sigma = P_{D_\Sigma} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Demonstrația teoremei energiei electromagnetice

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

Pentru demonstrarea acestei afirmații se consideră un domeniu D_Σ , mărginit de suprafața închisă Σ , în care se află un sistem de corpuri imobile și liniare din punct de vedere dielectric ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) și magnetic ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$). Formele locale ale legilor inducției electromagnetice și circuitului magnetic:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

permit stabilirea consecinței:

$$\mathbf{E}\text{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{J}\mathbf{E} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right) + \nabla\left(\mathbf{E} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{H}}\right) = \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) - \\ &\quad - \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H}\text{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\text{rot}\mathbf{H} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{E}\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial\mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2}\right), \\ \mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2}\right), \end{aligned}$$

rezultă că:

$$-\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J}\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2}\right), \quad (3.37)$$

în care: $p = \mathbf{E}\mathbf{J}$ reprezintă conform legii transformării energiei în conductoare densitatea de volum a puterii transferată de câmpurilor, iar

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ reprezintă vectorul Paynting, măsurat în W/m^2 ;

$w_e = \mathbf{D}\mathbf{E}/2$ reprezintă densitatea de volum a energiei electrice, măsurată în J/m^3 ;

$w_m = \mathbf{B}\mathbf{H}/2$ reprezintă densitatea de volum a energiei magnetice, măsurată în J/m^3 .

Notând cu $w_{em} = w_e + w_m$ densitatea de volum a energiei câmpului electromagnetic, rezultă că:

$$-\text{div}\mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}, \quad (3.38)$$

relație cunoscută sub numele de forma locală a teoremei energiei electromagnetice.

Prin integrarea acestei relații diferențiale locale pe domeniul D_Σ se obține:

$$-\int_{D_\Sigma} \operatorname{div} \mathbf{S} dv = -\int_\Sigma \mathbf{S} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} p dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_\Sigma} w_{em} dv$$

Notând cu $P_\Sigma = -\int_\Sigma \mathbf{S} d\mathbf{A} = \int_\Sigma \mathbf{S} d\mathbf{A}_{int}$, puterea transferată prin suprafața Σ de la exterior spre interior;

$P_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} p dv$, puterea transferată corpurilor din domeniul D_Σ și

$W_{em} = W_e + W_m$, energia electromagnetică din domeniul D_Σ cu componentele:

$W_e = \int_{D_\Sigma} w_e dv$, energia câmpului electric și

$W_m = \int_{D_\Sigma} w_m dv$, energia câmpului magnetic,

rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

3.3 Teorema condensatorului liniar.

Un dispozitiv folosit frecvent în aplicațiile electromagnetismului îl reprezintă condensatorul electric. Acesta este alcătuit din două armături conductoare separate de un izolanț, numit și dielectric. Acest dispozitiv capabil să producă în dielectric un câmp electric, atunci când armăturile sunt încărcate cu sarcină, poate fi utilizat ca acumulator de sarcină electrică și implicit de energie. Se spune că un condensator este încărcat, atunci când o armătură are sarcina Q iar cealaltă are sarcina $-Q$. Pentru caracterizarea stării electrice a unui condensator, în afara sarcinii Q se utilizează și tensiunea între armături:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r},$$

în care C_{12} este o curbă ce unește două puncte plasate pe cele două armături. În regim staționar și absența stării electrocinetice fiecare din cele două armături este echipotențială, deci tensiunea U nu depinde de poziția celor două puncte pe armături. Presupunând prima armătură încărcată cu sarcina $Q_1 = Q$, rezultă conform legii fluxului electric că $\Psi_{\Sigma_1} = Q_1$, în care

$$\Psi_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{D} d\mathbf{A}$$

este fluxul electric de pe suprafața Σ_1 ce înconjoară strâns prima armătură.

Teorema condensatorului liniar afirmă că *un condensator realizat cu un dielectric liniar ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$) are sarcina proporțională cu tensiunea:*

$$Q = CU. \quad (3.39)$$

Această afirmație rezultă din teorema tubului de flux electric. Parametrul C , numit capacitatea condensatorului caracterizează sistemul de armături fiind independent de starea sa electrică.

Capacitatea unui condensator se definește prin:

$$C = \frac{Q_1}{U_{12}}, \quad (3.40)$$

definiție care poate fi aplicată și condensatoarelor cu dielectric neliniar, dar în acest caz capacitatea depinde de tensiunea la bornele condensatorului. Respectând orientarea curbei C_{12} conform definiției, capacitatea condensatorului rezultă ca o mărime pozitivă.

Ca aplicație a teoremei se va considera cazul condensatorului plan, la care armăturile au suprafețele plane și paralele. Considerând dimensiunile armăturilor mult mai mari decât distanța dintre ele se poate presupune că intensitatea câmpului electric este constantă în dielectric, neglijând în acest fel efectele de margine. Dielectricul reprezintă un tub de flux electric, cu câmp uniform. Dacă se notează cu A aria armăturilor, cu d distanța dintre ele (lungimea dielectricului) și cu ε permitivitatea dielectricului presupus omogen se obține:

$$Q_1 = \Psi_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{D} d\mathbf{A} = DA,$$

$$U_{12} = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} E dr = \int_{C_{12}} \frac{D}{\varepsilon} dr = \frac{Dd}{\varepsilon}.$$

Aplicând definiția capacității se obține:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}, \quad (3.41)$$

care este relația de calcul a capacității condensatorului plan.

Funcționarea unui condensator în regim dinamic, cu tensiunea la borne $u = u(t)$ și sarcină $q = q(t)$ variabile presupune prezența unor conductoare, care alimentează cu curent armăturile. Conform legii conservării sarcinii electrice, intensitatea curentului prin aceste conductoare de aducție este:

$$i = -i_{\Sigma} = \frac{dq_{D\Sigma}}{dt} = \frac{dq}{dt}. \quad (3.42)$$

Presupunând satisfăcută relația $q = CU$ (ceea ce presupune că efectele inducției electromagnetice sunt neglijate), rezultă că:

$$i = C \frac{du}{dt}, \quad (3.43)$$

relație care evidențiază legătura dintre tensiune și curent impusă de un condensator liniar în regim variabil. În cazul condensatoarelor cu dielectric neliniar ecuația de funcționare a acestuia în regim variabil are forma:

$$i = \frac{dq(u)}{dt} \quad (3.44)$$

în care funcția $q = q(u)$ este specifică fiecărui condensator. În stabilirea acestei relații s-a presupus că dielectricul este izolant perfect, ceea ce nu este întotdeauna real. Dacă se ia în considerare și curentul de pierderi prin dielectric, a cărui conductanța va fi notată cu G , rezultă:

$$i = Gu + C \frac{du}{dt}, \quad (3.45)$$

ecuație specifică unui condensator liniar cu izolant imperfect.

3.4 Teorema rezistorului liniar

3.5 Teorema bobinei liniare.

Dispozitivul tipic pentru producerea câmpului magnetic în electrotehnică este bobina. Aceasta este alcătuită dintr-un conductor filiform înfășurat în jurul unui miez magnetic sau în aer. Pentru caracterizarea stării unei bobine în regim staționar în afară intensității curentului I ce străbate bobina se mai folosește și fluxul magnetic total al acesteia:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad (3.46)$$

suprafața S sprijinindu-se pe curba mediană Γ a firului. În regim staționar, conform teoremei lui Ampere, tensiunea magnetică pe o curbă Γ' , care înconjoară strâns cele n spire ale bobinei are valoarea:

$$u_{m_{\Gamma'}} = \int_{\Gamma'} \mathbf{H} d\mathbf{r} = nI. \quad (3.47)$$

Teorema bobinei liniare afirmă că *o bobină cu miez magnetic liniar ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$) are fluxul total proporțional cu intensitatea curentului ce o străbate:*

$$\Phi = LI, \quad (3.48)$$

Această relație se demonstrează folosind liniaritatea relațiilor $\Phi - \mathbf{B}$, $I - \mathbf{H}$ și $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ sau implicit pe baza teoremei tubului de flux liniar. Parametrul L poartă numele de inductivitatea bobinei iar în cazul bobinei liniare acest parametru nu depinde de starea magnetică a bobinei ci doar de datele geometrice și de material. Definiția inductivității:

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (3.49)$$

poate fi aplicată și în cazul bobinelor neliniare, cu observația că atunci L depinde de intensitatea curentului ce străbate bobina. Dacă se respectă regula burghiului drept pentru asocierea sensurilor de referință pentru Φ și I , inductivitatea bobinelor este o mărime pozitivă.

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI. BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

Ca aplicație a acestei teoreme se va considera cazul *solenoidului*, care este o bobină la care diametrul este mult mai mare decât lungimea sa. Această ipoteză definitorie permite să se considere câmpul magnetic din miez ca fiind uniform, cu liniile de câmp drepte și paralele. Dacă se notează cu A aria secțiunii transversale a miezului bobinei, cu l lungimea lui și cu μ permeabilitatea miezului, presupus omogen, atunci fluxul total al bobinei este:

$$\Phi = n\Phi_f = n \int_{S_1} \mathbf{B}d\mathbf{A} = nBA = n\mu HA, \quad (3.50)$$

în care s-a notat cu Φ_f fluxul de pe o spiră arbitrară S_1 a bobinei, numit flux fascicular.

Tensiunea magnetică pe un dreptunghi ce înconjoară toate spirele bobinei este:

$$U_{m_{\Gamma'}} = \int_{\Gamma'} \mathbf{H}d\mathbf{r} = Hl = nI, \quad (3.51)$$

presupunând că în afara bobinei câmpul este nul. În consecință:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu n^2 A}{l} \quad (3.52)$$

Aceasta este relația de calcul a inductivității unui solenoid.

În condițiile în care se consideră două bobine învecinate, fluxul magnetic dintr-o bobină nu depinde numai de propriul curent ci și de cel din bobina vecină. Dacă mediul este liniar din punct de vedere magnetic, liniaritatea dependenței dintre flux și curenți este menținută:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2; \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sistemul de două bobine este caracterizat de patru parametri:

L_{11}, L_{22} - inductivitățile proprii ale celor două bobine,

L_{12}, L_{21} - inductivitățile mutuale ale bobinelor.

Valorile acestor parametri nu depind de valorile curenților, dar semnul lor depinde de sensul de referință ales pentru curenți. Dacă se respectă regula burghiului drept, L_{11} și L_{22} sunt pozitive. În schimb $L_{12} = L_{21}$ poate avea o valoare pozitivă sau negativă. Pentru a evita ambiguitatea asupra semnului inductivităților mutuale se marchează câte o bornă a fiecărei bobine (borna marcată se numește bornă polarizată). Relația între fluxuri și curenți este valabilă sub forma prezentată, dacă se presupune că ambii curenți I_1 și I_2 au sensurile de referință astfel încât să intre în bobine prin bornele polarizate. La modificarea unei borne

polarizate se schimbă semnul inductivității mutuale. Relațiile stabilite pentru două bobine pot fi generalizate la cazul unui sistem de n bobine:

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 + \dots + L_{1n}I_n \\ \Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 + \dots + L_{2n}I_n \\ \dots \\ \Phi_n = L_{n1}I_1 + L_{n2}I_2 + \dots + L_{nn}I_n \end{cases} \quad (3.54)$$

Aceste relații numite ecuațiile lui Maxwell pentru inductivități pot fi scrise sub formă compactă

$$\Phi = LI, \quad (3.55)$$

folosind notația matriceală:

- $\Phi = [\Phi_1; \Phi_2; \dots; \Phi_n]^T$ - vectorul fluxurilor;
- $I = [I_1; I_2; \dots; I_n]^T$ - vectorul curenților;
- matricea inductivităților (proprie și mutuale)

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix}$$

Aceasta este o matrice simetrică ($L_{ij} = L_{ji}$). Inductivitățile proprii se definesc prin:

$$L_{ii} = \left. \frac{\Phi_i}{I_i} \right|_{I_j=0, j \neq i} \geq 0,$$

iar cele mutuale prin:

$$L_{ij} = \left. \frac{\Phi_i}{I_j} \right|_{I_k=0, k \neq j} \geq 0.$$

Funcționarea unei bobine în regim dinamic presupune apariția fenomenului de inducție electromagnetică. Dacă se neglijează curentul de deplasare în comparație cu cel de conducție, relațiile de proporționalitate între flux și curent $\varphi = Li$ își mențin valabilitatea pentru mediile liniare și în regim dinamic. Presupunând înfășurarea bobinei ca fiind supraconductoare, tensiunea la bornele bobinei u este egală cu tensiunea indusă, dată de legea inducției electromagnetice, luată cu sens schimbat:

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt} = -u = -\int_{C_{ext}} \mathbf{E} d\mathbf{r}.$$

Deoarece $\varphi_{S_\Gamma} = \varphi = Li$, rezultă relația dintre tensiune și curent impusă de o bobină ideală:

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (3.56)$$

Dacă bobina are miezul neliniar, atunci:

$$u = \frac{d\varphi(i)}{dt} \quad (3.57)$$

în care $\varphi = \varphi(i)$ este o funcție caracteristică bobinei.

În realitate, înfășurările bobinelor nu sunt supraconductoare și prezintă o rezistență nenulă:

$$u_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = Ri - u = -\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ecuția de funcționare a bobinei reale fiind:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (3.58)$$

în cazul bobinei liniare și

$$u = Ri + \frac{d\varphi(i)}{dt} \quad (3.59)$$

în cazul bobinei neliniare.

În cazul unei perechi de bobine, prin aplicarea legii inducției electromagnetice, se obține sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1; \\ u_2 &= L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

care dau expresiile tensiunilor de la bornele bobinelor în funcție de curenții ce le străbat. Aceste relații se generalizează ușor pentru cazul a n bobine.

Relațiile obținute presupun neglijarea curenților de deplasare în interiorul bobinelor. În realitate, o bobină la frecvențe foarte înalte poate prezenta efecte capacitive între spirele ei, ceea ce conduce la fenomene de propagare de-a lungul conductorului, relațiile 3.58 - 3.60 nefiind riguros valabile. În teoria circuitelor electrice fenomenele de propagare nu sunt luate în considerație, ceea ce presupune că vitezele de variație a mărimilor sunt suficient de mici, pentru ca acestea să fie neglijabile sau echivalent că lungimile circuitelor sunt mult mai mici decât lungimile undelor electromagnetice ce pot apare. Din acest motiv se spune că elementele de circuit au parametri concentrați.

Aprecierea dimensiunilor unui circuit are un caracter relativ. De exemplu, în cazul frecvenței industriale $f = 50Hz$, lungimea de undă este $\lambda = c/f = (3 \cdot 10^8 m/s) / (50Hz) = 6 \cdot 10^6 m$ urmând ca circuitele cu lungimea mai mică de 60 km să fie considerate cu parametri concentrați. Cu toate că această dimensiune pare foarte mare trebuie menționat că există multe linii de înaltă tensiune care depășesc această lungime, ceea ce face ca acestea să nu poată fi considerate ca circuite electrice. Dacă frecvența are în schimb valoarea 1 GHz lungimea de undă devine mult mai mică $\lambda = c/f = 300mm$. Chiar și în acest caz circuitele integrate cu dimensiuni de ordinul milimetrilor pot fi considerate circuite cu parametri concentrați.

3.6 Teoremele forțelor generalizate

Teorema forței generalizate în câmp electric

Enunțul teoremei forței generalizate în câmp electric

Forța generalizată X_k cu care câmpul electric acționează asupra sistemelor de corpuri, este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_{\psi=ct}, \quad (3.61)$$

în care

$$W_e = \int_D w_e dv \quad (3.62)$$

cu

$$w_e = \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} \quad (3.63)$$

este energia câmpului electric din sistem iar x_k este coordonata generalizată asociată forței X_k .

Se constată că la flux (sarcină) constant(ă) sistemul evoluează în sensul minimizării energiei sale (figura 3.5).

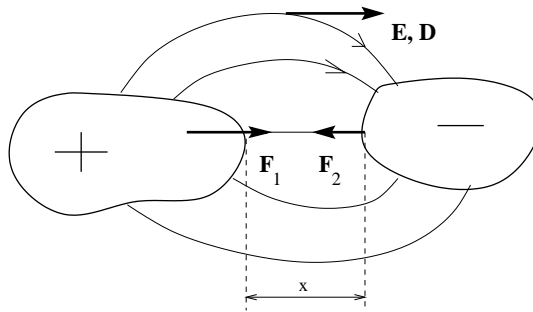


Figura 3.5: Efectul mecanic al câmpului electric

Tabelul 3.1 prezintă câteva exemple de perechi de forțe și coordonate generalizate.

Tabela 3.1: Exemple de perechi de forțe și coordonate generalizate

X_k	x_k
Forța $[N]$	deplasarea $[m]$
Cuplu $[N/m]$	unghi $[rad]$
Presiunea $[N/m^2]$	volumul $[m^3]$

În cazul mediilor liniare la care $\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E}$ și $\mathbf{P}_p = 0$, energia electrică are expresia:

$$W_e = \int_D \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} dv. \quad (3.64)$$

Teorema forței generalizate în câmp magnetic

Enunțul teoremei forței generalizate în câmp magnetic

Forța generalizată X_k cu care câmpul magnetic acționează asupra unui sistem de corpuri este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x_k} \right|_{\phi=ct} \quad (3.65)$$

în care

$$W_m = \int_D w_m dv \text{ cu } w_m = \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} \quad (3.66)$$

este energia câmpului magnetic din sistem iar x_k este coordonata generalizată asociată forței X_k .

În cazul mediilor la care $\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H}$ și $\mathbf{M}_p = 0$, energia magnetică are expresia.

$$W_m = \int_D \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dv \quad (3.67)$$

Se constată că și în acest caz sistemul de corpuri tinde să evolueze astfel încât să se minimizeze energia câmpului magnetic (figura 3.6).

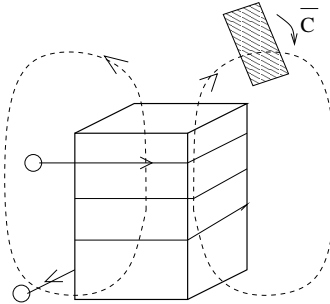


Figura 3.6: Efectul mecanic al câmpului magnetic

În multe dispozitive electromagnetice fenomenele mecanice joacă un rol important, mai ales atunci când acestea au piese în mișcare. Chiar și în cazul dispozitivelor statice (cu părți imobile) *solicitările mecanice* pot determina limitele regimurilor normale de funcționare. De obicei analiza efectelor mecanice se face ulterior rezolvării problemei de câmp electromagnetic. Există totuși situații în care cele două probleme nu pot fi separate ci trebuie rezolvate simultan, ca o problemă cuplată electromagnetică – mecanică. Acesta este mai ales cazul

dispozitivelor cu părți mobile (mașini electrice, dispozitive de acționare, pompe magneto – hidrodinamice etc.) indiferent că acestea sunt rigide, deformabile, plastice, sau fluide.

3.7 Circuite electrice cu elemente filiforme în regim staționar. Teoremele lui Kirchhoff.

Teorema lui Joubert

Cele mai simple circuite electrice sunt cele realizate cu conductoare filiforme, care sunt conectate pe la borne (au bornele puse în contact) și care funcționează în regim staționar. Pentru a caracteriza starea unui astfel de element de circuit se utilizează două mărimi fizice scalare asociate unor sensuri de referință:

I - intensitatea curentului electric, și

U - tensiunea electrică.

s-a demonstrat că relația impusă de un astfel de element de circuit între mărimile caracteristice este:

$$U = RI - E, \quad (3.68)$$

în care R este rezistența firului iar E este tensiunea sa electromotoare. Dacă sensul de referință al tensiunii electrice sau al curentului electric se modifică, atunci se schimbă și semnul mărimii respective, deci în general:

$$U = \pm RI \pm E, \quad (3.69)$$

în care semnele se aleg în funcție de sensurile de referință. Această relație este cunoscută sub numele de relația lui Joubert. În particular, atunci când $E = 0$, rezultă pentru cazul rezistorului filiform liniar $U = \pm RI$, cunoscută sub numele de relația lui Ohm.

Topologia circuitelor

Se constată că ecuația caracteristică a fiecărui element și implicit starea întregului circuit nu depind de forma conductorului filiform ci doar de lungimea sa și de modul în care elementul este conectat. Prin modificarea traseului conductorului, fără a schimba conexiunea bornelor acestuia starea circuitului nu se modifică. Din acest motiv se spune că circuitul are o structură topologică și nu una metrică (nu au importanță distanțele între borne sau unghiurile între elemente). În consecință în ecuațiile teoriei circuitelor electrice nu intervin variabilele spațiale x, y, z , coordonate ale punctelor. Structura unui circuit este descrisă de schema sa electrică sau din punct de vedere matematic de graful circuitului.

Prin graful unui circuit se înțelege o mulțime de puncte, numite noduri și care reprezintă bornele elementelor de circuit unite printr-o mulțime de arce de curbă, numite laturi, care reprezintă elementele circuitului.

Deoarece graful unui circuit descrie topologia circuitului și nu geometria acestuia, forma laturilor nu corespunde în mod necesar formei conductoarelor filiforme corespunzătoare. Pentru a permite identificarea sensului în care sunt conectate elementele de circuit, laturile se consideră curbe orientate. În consecință, structura topologică a unui circuit este descrisă de un graf orientat.

În continuare se va nota cu: N - numărul total de noduri din graf (circuit); L - numărul total de laturi din graf (circuit). Pentru a permite identificarea lor laturile și nodurile vor fi numerotate, folosind indicii $l = 1, 2, \dots, L$ și respectiv $n = 1, 2, \dots, N$. Pentru a evita confuziile indicii nodurilor se închid în paranteze rotunde (n).

Un concept topologic important în teoria circuitelor este cel de *cale*. Aceasta reprezintă o mulțime de laturi ce alcătuiesc o curbăconexă, simplă (fără ramificații). O cale este o curbă ce unește două noduri, unul inițial cu altul final. Dacă cele două noduri extreme sunt confundate (curba este închisă), calea se numește *bucă*. Dacă buclele unui circuit sunt numerotate $b = 1, 2, \dots$, atunci pentru a evita confuziile simbolul buclei se închide între paranteze pătrate [b].

Fiecare latură are două noduri la care aceasta concură. Această relație între o latură l și un nod n se notează $l \in (n)$ și se citește "latura l concură la nodul n ". Relația de incidență a laturilor la noduri definesc complet structura topologică a unui circuit. Faptul că o anumită latură l aparține unei bucle [b] se scrie sub forma $l \in [b]$.

Topologia unui circuit impune anumite relații între curenți și respectiv între tensiuni, relații independente de caracteristicile fiecărei laturi. Aceste relații sunt cunoscute sub numele de teoremele lui Kirchhoff

Prima teoremă a lui Kirchhoff

Afirmă că suma algebrică a intensităților curenților din laturile care concură la orice nod al unui circuit este nulă:

$$\sum_{k \in (n)}^A I_k = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.70)$$

Prin suma algebrică:

$$\sum_{i=1,m}^A x_i = \sum_{i=1,n} \varepsilon_i x_i \quad (3.71)$$

se înțelege o sumă în care fiecare termen este ponderat cu un factor de semn ε_i , factor care poate avea fie valoarea +1 fie valoarea -1 conform unei reguli de semn.

În prima teoremă a lui Kirchhoff se adoptă următoarea *regulă de semn*: curențul I_k se trece cu plus dacă sensul lui de referință părăsește nodul curent (n) și cu

minus în caz contrar. Este evident că această regulă are un caracter convențional, relația 3.70 fiind valabilă și în cazul adoptării convenției inverse.

Demonstrația primei teoreme a lui Kirchhoff în acest caz al regimului staționar se bazează pe teorema conservării curentului (formă particulară a legii conservării sarcinii în regim staționar) aplicată pe o suprafață închisă Σ ce înconjoară nodul (n) , conform căreia:

$$i_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_{k \in (n)} \int_{S_k} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_{k \in (n)} I_k = 0.$$

În această relație s-a presupus că toți curenții I_k părăsesc nodul (n) . Dacă un curent are sensul de referință orientat spre nodul (n) , pentru ca relația să fie corectă, intensitatea va trebui considerată cu semn schimbat, ceea ce explică necesitatea introducerii regulii de semn.

A doua teoremă a lui Kirchhoff

Afirmă că suma algebrică a tensiunilor din laturile oricărei bucle din circuit este nulă:

$$\sum_{k \in [b]}^A U_k = 0. \quad (3.72)$$

Regula de semn care definește suma algebrică în acest caz este dată de comparația între semnul de referință al tensiunii și semnul de parcurs al buclei considerată orientată. Tensiunea U_k se consideră cu semnul plus, atunci când sensul ei de referință este orientat în sensul buclei $[b]$ și cu minus în sens contrar.

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe teorema potențialului electric staționar (formă particulară a legii inducției în regim staționar), aplicată pe curba Γ alcătuită din laturile buclei $[b]$:

$$u_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sum_{k \in [b]} \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sum_{k \in [b]} U_k = 0.$$

În această relație s-a presupus că toate tensiunile U_k au sensurile de referință orientate în sensul de parcurs al buclei. Dacă o tensiune are sensul de referință orientat invers, atunci va trebui considerată cu semn schimbat de unde rezultă caracterul algebric al sumei .

O consecință imediată a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff este afirmația că tensiunea electrică între două noduri nu depinde de calea ce unește nodurile A și B . Tensiunea electrică pe bucla $b = C_1 \cup C_2$, în care C_1 și C_2 sunt două căi ce unesc nodurile A și B este nulă

$$u_b = \sum_{k \in [b]}^A U_k = U_1 - U_2 = 0, \quad (3.73)$$

în consecință $U_1 = U_2 = U_{AB}$.

Starea unui circuit electric poate fi caracterizată folosind potențialele nodurilor. În acest scop se alege un nod de referință (0), pentru care potențialul se consideră în mod convențional nul, iar potențialul unui nod oarecare (k) se definește ca tensiunea de la nodul (k) la nodul de referință (0), care conform afirmației anterioare este invariantă la calea adoptată:

$$V_k = U_{k0} = \int_{C_{k0}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (3.74)$$

Utilizarea potențialului facilitează calculul tensiunii:

$$U_{AB} = U_{A0} + U_{0B} = U_{A0} - U_{B0} = V_A - V_B, \quad (3.75)$$

care se exprimă ca o diferență de potențiale, mai exact potențialul inițial minus cel final:

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad (3.76)$$

Se constată că schimbarea sensului de referință al tensiunii determină modificarea semnului acesteia $U_{AB} = -U_{BA}$.

Caracterizarea energetică

O altă relație importantă în teoria circuitelor electrice se referă la **puterea transferată** pe la bornele unui element de circuit:

$$P = UI. \quad (3.77)$$

Pentru a determina sensul puterii transferate se interpretează semnul acestei mărimi. Deoarece semnul lui P depinde de modul în care sunt alese sensurile de referință ale tensiunii U și curentului I , este necesară introducerea unor reguli de interpretare.

Regula de asociere a sensurilor de la receptoare se aplică atunci când tensiunea U și intensitatea I au sensuri de referință orientate similar față de bornele elementului (ambele de la A spre B sau invers, ambele de la B spre A), conform regulii de la receptoare, puterea $P = UI$ este transferată de la circuit spre element, când $P > 0$ și transferată de la element spre circuit, când $P < 0$. Se constată că în acest caz, sensul convențional al puterii $P = UI$ este de la circuit spre element.

Regula de asociere a sensurilor de la generatoare se aplică atunci când tensiunea U și intensitatea I au sensurile de referință orientate opus (una de la A spre B și cealaltă de la B spre A). În regula de la generatoare sensul convențional al puterii $P = UI$ este de la element spre circuit. Sensul real al puterii coincide cu cel convențional, atunci când $P = UI > 0$ și este invers acestuia atunci când $P = UI < 0$.

Teoria circuitelor electrice în regim staționar se bazează pe cele două teoreme ale lui Kirchhoff în formă topologică 3.70 și 3.72, ecuațiile constitutive caracteristice elementelor de circuit și date de relația Joubert 3.69 și pe expresia puterii transferate de la bornele elementului de circuit 3.77. În toate aceste relații sensurile de referință au un rol foarte important.

În concluzie, se poate afirma că relațiile fundamentale ale teoriei circuitelor electrice în regim staționar au un caracter algebric finit, starea electrică a circuitului fiind caracterizată de $2L$ mărimi scalare, câte o tensiune și câte un curent pentru fiecare latură.

3.8 Circuite electrice cu parametri concentrați.

Încercarea de a stabili ecuațiile fundamentale ale circuitelor electrice în regim variabil se izbește de mai multe dificultăți. În primul rând, tensiunea electrică în regim variabil depinde nu numai de punctele extreme ci și de forma curbei, ceea ce nu permite exprimarea tensiunii ca o diferență de potențial. O altă dificultate constă în apariția fenomenului de propagare datorită căruia este posibil ca un element de circuit să aibă valori diferite ale intensității curentului la cele două borne ale sale.

Aceste dificultăți pot fi evitate prin adoptarea unor ipoteze simplificatoare, care evidențiază aproximațiile teoriei circuitelor electrice cu parametri concentrați:

- Energia câmpului magnetic se consideră localizată exclusiv în miezul bobinelor, în care se neglijează în schimb curentul de deplasare (densitatea de energie electrică este neglijabilă față de densitatea energiei magnetice);
- Energia câmpului electric se consideră localizată exclusiv în dielectricul condensatoarelor, în care se neglijează în schimb fenomenul de inducție electromagnetică (densitatea energiei magnetice este neglijabilă față de densitatea energiei electrice);
- În interiorul conductoarelor, presupuse filiforme sau nu se neglijează atât curentul de deplasare cât și fenomenul de inducție electromagnetică;
- Spațiul exterior elementelor de circuit se consideră izolant și nu poate fi locul unor curenți de deplasare (deci implicit al undelor electromagnetice), atât inducția magnetică dar și inducția electrică presupunându-se nule în aceste zone.

În consecință, circuitele cu parametri concentrați pot avea trei tipuri de elemente: rezistiv, inductiv și capacitiv. Fenomenul de inducție magnetică este limitat la elementele inductive (bobine), curenții de deplasare sunt localizați doar în elementele capacitive (condensatoare), urmând ca elementele rezistive (conductoarele filiforme) să fie sediul exclusiv al fenomenelor galvanice, de conducție.

Această separare elimină posibilitatea apariției fenomenelor specifice câmpurilor variabile (propagări, efect pelicular, curenți turbionari, etc.).

În ipotezele menționate, fiecare element dipolar (cu două borne) de circuit poate fi caracterizat printr-o pereche de mărimi scalare:

i - intensitatea curentului ce străbate elementul;

u - tensiunea electrică la borne.

Mai mult, forma topologică a teoremelor lui Kirchhoff, stabilită în paragraful anterior, rămâne valabilă și în acest caz.

Prima teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a curenților ce concură la un nod este nulă:

$$\sum_{k \in (n)}^A i_k = 0, \quad (3.78)$$

cu observația că în acest caz $i_k = i_k(t)$ poate fi variabil în timp.

Demonstrația teoremei se bazează pe legea conservării sarcinii electrice, aplicate pe o suprafață închisă Σ ce înconjoară nodul (n) :

$$i_\Sigma = \sum_{k \in (n)} i_k = \frac{dq_{D\Sigma}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = 0, \quad (3.79)$$

aceasta, deoarece suprafața Σ străbate doar conductoare de aducție sau spațiul exterior elementelor în care $D = 0$, deci sarcina care poate fi acumulată în oricare nod al circuitului este nulă.

Această teoremă garantează faptul că valorile intensităților curenților în cele două borne ale unui element dipolar de circuit electric cu parametri concentrați sunt egale.

A doua teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a tensiunilor de pe laturile unei bucle este nulă:

$$\sum_{k \in [b]}^A u_k = 0, \quad (3.80)$$

cu observația că tensiunile $u_k = u_k(t)$ pot fi variabile în timp.

Demonstrația teoremei se bazează pe legea inducției electromagnetice aplicte pe o curbă Γ ce urmărește laturile buclei $[b]$, dar trecând de la o bornă la alta prin exteriorul elementelor de circuit:

$$u_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sum_{k \in [b]} \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \sum_{k \in [b]} u_k = -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0.$$

Deoarece în exteriorul elementelor inducția magnetică \mathbf{B} este nulă rezultă că fluxul magnetic $\varphi_{S_T} = 0$.

Utilizând pentru fiecare element, tensiunea la borne (determinată pe o curbă ce trece prin exteriorul elementului), rezultă că tensiunea între două noduri nu depinde de calea pe care aceasta este determinată și în consecință tensiunea electrică se poate exprima ca diferență de potențial:

$$u_{AB} = v_A - v_B. \quad (3.81)$$

Potențialul unui nod (k) se definește și de această dată ca tensiunea de la acel nod la nodul de referință (0):

$$v_k = u_{k0}. \quad (3.82)$$

După cum s-a arătat în capitolul anterior, ecuațiile caracteristice elementelor cu parametri concentrați sunt:

- pentru rezistoare filiforme:

$$u = \pm Ri \pm e; \quad (3.83)$$

- pentru condensatoare cu dielectric imperfect:

$$i = \pm Gu \pm C \frac{du}{dt}; \quad (3.84)$$

- pentru bobine necuplate:

$$u = \pm Ri \pm L \frac{di}{dt}, \quad (3.85)$$

în care R este rezistența firului, e tensiunea electromotoare, G conductanța de pierderi a dielectricului, C este capacitatea condensatorului și L inductivitatea bobinei. Semnele \pm se aleg funcție de modul în care au fost alese sensurile de referință pentru u și i . Se constată că spre deosebire de cazul circuitelor în regim staționar unde ecuațiile au caracter algebric, în regim variabil ecuațiile circuitelor au caracter diferențial.

Și în cazul circuitelor electrice cu parametri concentrați puterea transferată pe la bornele unui element bipolar se calculează ca produsul dintre tensiune și curent:

$$p = ui \quad (3.86)$$

interpretarea sensului făcându-se după regula de asociere adoptată (receptoare sau generatoare).

Teoria care are la bază aceste relații fundamentale poate fi generalizată, luând în considerare și elemente multipolare de circuit cum sunt bobinele cuplate sau domeniile conductoare cu mai multe borne, numite rezistoare multipolare.

3.9 Circuite electrice formate din elemente cu parametrii distribuiți

În general, circuitele electrice reprezintă sisteme electromagnetice, la care structura internă și proprietățile de material fac posibilă separarea în subsisteme, numite elemente de circuit, și care au proprietatea că interacțiunea dintre ele poate fi caracterizată printr-un număr finit de variabile scalare. În teoria circuitelor se renunță la structura metrică a spațiului fizic, păstrându-se doar structura topologică. Pentru a realiza această simplificare majoră, câmpul electromagnetic de pe suprafața de frontieră a oricărui element de circuit trebuie să satisfacă anumite condiții, evidențiate de următoarea definiție.

Elementul multipolar de circuit electric.

Un domeniu spațial D_Σ se numește element de circuit dacă pe frontiera sa Σ (numită și suprafața tensiunilor la borne) se separă n suprafețe disjuncte S_1, S_2, \dots, S_n , numite borne (sau terminale), astfel încât:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{E}(M, t) = 0, \quad M \in \Sigma; \quad (3.87)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot}\mathbf{H}(M, t) = 0, \quad M \in \Sigma - \bigcup_{k=1}^n S_k; \quad (3.88)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(M, t) = 0, \quad M \in S_k, k = 1, n. \quad (3.89)$$

Condiția 3.87 evidențiază absența efectului de inducție electromagnetică în toate punctele suprafeței Σ , respectiv absența cuplajelor magnetice dintre elementul de circuit și exteriorul acestuia. Această condiție este îndeplinită dacă pe suprafața Σ , componenta normală a inducției magnetice \mathbf{nB} este nulă sau constantă în timp.

Condiția 3.88 impune absența curenților de conducție și de deplasare, în punctele frontierei exterioare bornelor, respectiv impune ca interacțiunea elementului de circuit cu exteriorul, prin cuplaje capacitive sau galvanice să fie realizată exclusiv prin intermediul bornelor. În ipoteza neglijării curenților de deplasare de pe Σ , această condiție este îndeplinită, dacă elementul de circuit este înconjurat de un izolanț străpuns de conductoarele de acces la borne.

Condiția 3.89 impune ca, pe suprafața bornelor, câmpul electric să fie orientat normal, ceea ce va asigura caracterul echipotențial al fiecărei borne în parte.

Definiția elementului multipolar de circuit electric impune condiții doar asupra comportării câmpului electromagnetic de pe frontiera elementului și nu se referă la structura sa internă sau la regimul în care acesta funcționează, având un caracter de maximă generalitate. Pe baza acestei definiții se pot caracteriza, folosind limbajul teoriei circuitelor nu numai elemente cu parametrii concentrați

ci și elemente conductoare nefiliforme, cu pierderi suplimentare prin curenți turbionari sau de natură dielectrică, deci elemente cu parametrii distribuiți.

Pentru a caracteriza interacțiunea electromagnetică a unui element de circuit cu exteriorul, fiecărei borne i se asociază o pereche de mărimi scalare și anume intensitatea curentului electric și potențialul electric.

Intensitatea curentului electric ce străbate borna $k = 1, 2, \dots, n$ este o mărime scalară asociată unui sens de referință, definită prin:

$$i_k(t) = \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{r}, \quad k = \overline{1, n} \quad (3.90)$$

în care curba închisă $\Gamma_k = \partial S_k \subset \Sigma$ este frontiera suprafeței bornei S_k . Orientarea curbei Γ_k în conformitate cu regula burghiului drept, față de normala exterioară a suprafeței Σ este echivalentă cu alegerea pentru curentul i_k a sensului de referință orientat de la interior spre exterior.

Potențialul electric al bornei $k = 1, 2, \dots, n$ este o mărime fizică scalară definită prin:

$$v_k(t) = \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad (3.91)$$

în care $C_k \subset \Sigma$ este o curbă deschisă, inclusă în suprafața tensiunilor la borne, al cărui punct inițial $M \in S_k$ aparține bornei k iar punctul final aparține bornei de referință (de exemplu borna n).

Condiția 3.87 din definiția elementului de circuit garantează caracterul irotational al componente tangențiale a intensității câmpului electric, asigurând invarianța valorii potențialului V_k față de forma curbei C_k , cu condiția ca aceasta să nu părăsească suprafața Σ , a tensiunii la borne. Condiția 3.89 asigură independența valorii potențialului unei borne față de alegerea punctelor $M \in S_k, N \in S_n$ în interiorul bornelor.

Deoarece punctul final al curbei C_k este ales convențional, rezultă că potențialele bornelor sunt relative la alegerea bornei de referință, fiind diferite până la o constantă aditivă arbitrară.

Interacțiunea unui element de circuit cu exteriorul este caracterizată complet prin doi vectori n -dimensionali:

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, \quad i = [i_1, i_2, \dots, i_n]^T,$$

ale căror componente sunt potențialele respectiv intensitățile curenților din borne.

Următoare teoremă evidențiază faptul că acești doi vectori sunt suficienți pentru a caracteriza interacțiunea elementului de circuit cu exteriorul.

Teorema puterii transferate pe la bornele unui element multipolar de circuit electric

Puterea electrică ce traversează frontiera unui element de circuit electric este

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

egală cu produsul scalar al vectorilor potențialelor v și intensităților curenților i :

$$p(t) = v^T i. \quad (3.92)$$

Sensul convențional al puterii $p(t)$ este în concordanță cu sensurile de referință adoptate pentru curenți. Dacă intensitățile curenților au sensurile orientate de la exterior spre interior, atunci puterea $p(t)$ este convențional consumată de element. Această alegere, cunoscută sub numele de *regula de la receptoare*, afirmă că dacă $p(t) > 0$, atunci sensul real al puterii coincide cu cel convențional, deci este orientat spre element iar dacă $p(t) < 0$, atunci sensul real este opus celui convențional și deci părăsește elementul.

Dacă intensitățile curenților au sensurile de referință orientate spre exterior, atunci puterea $p(t)$ este convențional produsă de element. Această alegere este cunoscută sub numele de *regula de la generatoare*.

Pentru demonstrarea teoremei se exprimă vectorul Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -(\text{grad}V) \times \mathbf{H} = V \text{rot}\mathbf{H} - \text{rot}(V\mathbf{H})$$

în funcție de potențialul electric scalar V , definit pe suprafața Σ astfel încât $\mathbf{E}_t = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n} = -\text{grad}V$.

Conform teoremei energiei electromagnetice, puterea transferată elementului de circuit este:

$$p(t) = - \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} = - \oint_{\Sigma} V \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{A} = - \sum_{k=1}^n v_k \int_{S_k} \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n v_k(t) i_k(t),$$

deoarece

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \text{rot}(v\mathbf{H}) d\mathbf{A} &= \int_{D\Sigma} \text{div}\text{rot}(V\mathbf{H}) dv = 0, \\ \int_{S_k} \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{A} &= \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{r} = -i_k, \end{aligned}$$

presupunând că s-a adoptat regula de la receptoare deci curentul i_k are sensul de referință opus sensului elementului de arie $d\mathbf{A}$ (orientat de la interior spre exterior).

Cele n componente ale vectorilor v și i nu sunt independente, impunând fiecărui vector câte o restricție. Fluxul nul a vectorului $\text{rot}\mathbf{H}$ pe suprafața închisă Σ (deoarece $\text{div}\text{rot}\mathbf{H}$) impune:

$$\int_{\Sigma} \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \int_{S_k} \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{A} = - \sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (3.93)$$

ca suma intensităților curenților oricărui element să fie nulă. Această condiție asigură invariația valorii puterii transferate pe la borne, față de alegerea bornei de referință pentru potențial:

$$p'(t) = \sum_{k=1}^n (v_k + C) i_k = \sum_{k=1}^n v_k i_k + C \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n v_k i_k = p(t), \quad (3.94)$$

în care p' este puterea calculată folosind valoarea potențialelor transferată cu constanta arbitrară C .

Pe de altă parte, pentru borna de referință, potențialul are valoare nulă ($v_n = 0$), ceea ce impune ca cel puțin o componentă a vectorului v este identic nulă. În consecință, se poate renunța la câte o componentă atât din vectorul i cât și din vectorul v , cele $2(n-1)$ mărimi scalare rămase caracterizând complet interacțiunea elementelor cu exteriorul.

Un caz particular important este elementul dipolar de circuit electric la care numărul de borne este $n = 2$. Interacțiunea cu exteriorul a acestui element este caracterizată de intensitatea curentului electric $i(t) = i_1 = -i_2$ și de tensiunea la borne $u(t) = v_1 - v_2 = v_1$, deoarece $v_2 = 0$, puterea translatată pe la borne este:

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Conceptul de element de circuit (în special cel de element dipolar) este un concept primar al teoriei circuitelor electrice, așa cum rezultă din următoarea definiție. Se numește **circuit electric** o mulțime de elemente de circuit conectate la borne.

Prin punerea în contact a două borne, suprafețele bornelor se identifică și intensitățile curenților din cele două elemente sunt egale (cu condiția ca acestea să aibă orientări diferite, altfel suma celor două intensități e nulă).

Topologia unui circuit electric este descrisă prin modul în care sunt conectate elementele de circuit. Aceasta poate fi reprezentată printr-un graf. Fiecare element dipolar de circuit va fi reprezentat printr-o latură în graful circuitului iar fiecare element multipolar de circuit (cu n borne) va fi reprezentat prin $n - 1$ laturi, care leagă primele $n - 1$ borne ale sale cu borna de referință. Acest mod de reprezentare este în acord cu observația că pentru caracterizarea completă a interacțiunii elementului cu exteriorul sunt suficiente doar mărimile asociate la $n - 1$ borne. Curenții prin laturile asociate unui element de circuit permit determinarea univocă a curentului prin borna n , a cărei intensitate este egală cu minus suma curenților din aceste laturi.

Topologia unui circuit impune anumite restricții curenților și tensiunilor la bornele elementelor. Acestea sunt evidențiate de următoarele teoreme aplicate pe graful circuitului, numite din acest motiv formele topologice ale teoremelor lui Kirchhoff.

Prima teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a intensităților curenților din laturile care concură la un nod este nulă:

$$\sum_{k \in (n)}^A i_k = 0.$$

Pentru demonstrarea acestei afirmații în cazul general, se consideră domeniul D_Σ obținut prin reuniunea tuturor domeniilor elementelor, care sunt în contact cu borna reprezentată prin nodul (n). Acest domeniu este un element de circuit, deoarece pe suprafața Σ astfel obținută sunt îndeplinite condițiile din definiția elementului multipolar de circuit electric. În consecință, suma intensităților curenților prin bornele acestui nou element este nulă, ceea ce trebuia demonstrat.

A doua teoremă a lui Kirchhoff

Suma algebrică a tensiunilor din laturile oricărei bucle a circuitului este nulă:

$$\sum_{k \in [b]}^A u_k = 0.$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme se pornește de la observația că tensiunea electrică u_k poate fi exprimată ca diferența potențialelor bornelor extreme k_1, k_2 :

$$u_k = \int_{C_{k_1 k_2}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{k_1 k_0}} \mathbf{E} d\mathbf{r} - \int_{C_{k_2 k_0}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = v_{k_1} - v_{k_2}$$

deoarece tensiunea determinată pe o curbă, aparținând suprafeței tensiunilor la borne nu depinde de drumul de integrare. În consecință, presupunând că pe bucla $[b]$ toate tensiunile au sensul de referință orientat în concordanță cu sensul de parcurs al buclei, rezultă după reindexare:

$$\sum_{k \in [b]}^A u_k = \sum_{k=1}^m u_k = \sum_{k=1}^m (v_{k_1} - v_{k_2}) = 0,$$

deoarece prin contact $v_{k_2} = v_{(k+1)_1}$ pentru orice $k = 1, (m-1)$ și $v_{11} = v_{m2}$.

În concluzia acestui capitol se poate afirma că teoremele lui Kirchhoff sunt satisfăcute pentru orice circuit electric, indiferent de structura acestuia sau de caracterul elementelor de circuit. Mai mult, dacă un sistem satisface relațiile lui Kirchhoff, el poate fi analizat cu metodele teoriei circuitelor electrice, deci poate fi considerat un circuit. Un sistem care nu satisface aceste relații nu este un circuit. În consecință, relațiile lui Kirchhoff au un caracter axiomatic pentru teoria circuitelor electrice, nefiind necesare alte considerente legate de teoria câmpului electromagnetic. Pentru caracterizarea energetică a elementelor de circuit și implicit a circuitelor electrice se utilizează relația 3.92, sau dezvoltat:

$$p = \sum_{k=1}^n v_k i_k, \quad (3.95)$$

relație care dă puterea transferată pe la borne de un element de circuit electric.

În teoria circuitelor electrice, relațiile constitutive, impuse de fiecare element de circuit între curenți și tensiuni nu se stabilesc pe cale structurală (a analizei structurii interne a elementului) ci sunt date pe cale axiomatică, problema analizei și modelării elementelor concrete de circuit depășind cadrul teoriei circuitelor electrice (aparținând teoriei câmpului electromagnetic).

3.10 Elemente ideale de circuit electric

3.10.1 Modelarea circuitelor electrice

Printr-un circuit fizic se înțelege o interconexiune a unor dispozitive și componente concrete cum sunt: rezistoare, bobine, condensatoare, diode, tranzistoare, amplificatoare operaționale sau alte circuite integrate, baterii, transformatoare, motoare sau generatoare electrice, etc. Scopul teoriei circuitelor este de a prezice comportarea electrică a circuitelor fizice, în vederea îmbunătățirii performanțelor acestora.

Teoria circuitelor este o disciplină inginerescă fundamentală, pe care își bazează aplicațiile multe alte discipline ingineresti, cum sunt electroenergetica, electronica pentru telecomunicații sau instrumentație, construcția calculatoarelor și altele. Pentru a evidenția avantajul larg al aplicațiilor acestei teorii trebuie menționat că în practică, tensiunile pot varia de la μV (în instrumente de măsură de precizie) la MV (în energetică), iar intensitățile curenților au valori între pA (curenții din antene) și MA (în cazul scurtcircuitelor din izolațiile electroenergetice), frecvența ia valori cuprinse între 0 (în curent continuu) și GHz (circuite cu microunde) și puterea electrică variind între $fW = 10^{-15}W$ (semnalele radio de la galaxii îndepărtate) la MW (puterea generatoarelor din sistemele electroenergetice). În ciuda gamei extinse a aplicațiilor, fenomenele fizice din interiorul acestor sisteme se supun aceluiași relații. Pentru ca aceste fenomene să fie studiate în limbaj uman este necesară idealizarea comportării diferitelor elemente concrete de circuit, prin reținerea numai a unora dintre proprietățile magnetice sau electrice, care se consideră esențiale și neglijarea celorlalte. Astfel se obțin elemente de circuit ideale, care reprezintă concepte abstracte și nu componente fizice. Trebuie făcută distincția dintre o bobină concretă, realizată dintr-un conductor filiform înfășurat în jurul unui miez magnetic și modelul acestei bobine alcătuit dintr-un rezistor inseriat cu o bobină ideală. Această operație, prin care componentelor fizice le sunt asociate scheme cu elemente ideale de circuit poartă numele de modelare. În teoria circuitelor electrice nu se operează cu componente fizice concrete ci cu elemente ideale de circuit, care alcătuiesc modele ale acestora. Stabilirea modelelor pentru diferite componente concrete nu reprezintă obiectul teoriei circuitelor electrice, ci al altor discipline ingineresti, cum sunt electronica, teoria mașinilor electrice, teoria aparatelor electrice, etc.

Abaterile pe care le poate avea comportarea unui circuit cu elemente ideale față de circuitul fizic real pe care acesta îl modelează se pot datora:

- aproximării cu care sunt satisfăcute ipotezele teoriei circuitelor electrice, respectiv neîndeplinirea exactă a condițiilor din definiția elementului multipolar de circuit electric;
- deficiențelor în modelarea componentelor circuitului; ca orice model, și modelele componentelor sunt aproximative.

De obicei cea de a doua categorie de abateri este mai importantă, situație în care se îmbunătățește modelul prin adăugare de noi elemente ideale în schema echivalentă operație cunoscută sub numele de succesivă.

Definiția elementelor ideale de circuit se face într-o manieră funcțională, prin specificarea dependenței impuse între tensiunea u și curentul i și nu într-o manieră structurală (prin specificația structurii interne). Evident că se acceptă cele mai simple relații posibile între u și i . De exemplu, pornind de la observația că în multe situații tensiunea la bornele unui conductor filiform, este proporțională cu intensitatea curentului $u = Ri$ se preia această relație ca definiție a unui element ideal de circuit numit rezistor ideal. În realitate nu există nici un element care să satisfacă această relație pentru orice valoare a intensității.

Orice conductor are o valoare a intensității curentului a cărei depășire duce la distrugerea componentei. Mai mult în cazul componentei, concrete variația foarte rapidă a tensiunii la borne face ca intensitatea curentului să nu mai aibă valoare instantanee proporțională cu cea a tensiunii, apărând abateri față de comportarea ideală.

Elementele ideale de circuit electric au un dublu statut față de componentele fizice. Pe deoparte ele reprezintă idealizări ale unor componente fizice dar pe de altă parte sunt elemente cu care se modelează componentele fizice. se presupune că inventarul elementelor ideale este suficient de amplu, pentru ca prin combinarea lor să se obțină o schemă care să aproximeze oricât de bine este necesar comportarea componentei concrete.

Elementele ideale de circuit se pot clasifica după mai multe criterii în mai multe categorii. După numărul de borne se deosebesc:

- elemente dipolare cu două borne;
- elemente multipolare cu $n > 2$ borne, dintre acestea un rol important îl au elementele cuadripolare la care $n = 4$.

După tipul relației $u - i$ se deosebesc:

- elemente liniare la care relația dintre intensitatea curentului și tensiune are un caracter liniar;
- elemente neliniare, la care dependența $u - i$ nu mai are un caracter liniar.

După comportarea în timp a elementelor ideale de circuit se deosebesc:

- elemente invariante în timp, la care comportarea nu se modifică în timp;
- elemente parametrice, la care relația $u - i$ se modifică în timp.

După comportarea energiei se deosebesc:

- elemente pasive, la care puterea consumată este pozitivă;
- elemente active, capabile să producă energie electrică.

Relația $u - i$ poate avea un caracter algebric sau diferențial ceea ce determină clasificarea în:

- elemente rezistive, la care relația $u - i$ poate fi caracterizată printr-o funcție;
- elemente reactive (acumulatoare de energie sau cu memorie), la care relația $u - i$ este caracterizată printr-un operator integro-diferențial.

3.10.2 Elemente dipolare liniare

1. Rezistorul liniar ideal este prin definiție un element dipolar de circuit electric la care tensiunea la borne este proporțională cu intensitatea curentului ce străbate elementul. Ecuația constitutivă (de funcționare) este:

$$u = Ri,$$

în care parametrul R , caracteristic rezistorului poartă numele de rezistență. Această ecuație este valabilă pentru asocierea sensurilor de referință, în regula de la receptoare. Prin modificarea sensului de referință pentru u sau i semnul mărimii respective se modifică, ceea ce corespunde următoarei ecuații constitutive:

$$u = -Ri,$$

valabilă în cazul adoptării regulii de asociere a sensurilor de la generator. De obicei, rezistență este o mărime pozitivă, dar nu este interzis cazul în care $R < 0$, întâlnit mai ales în modelarea pe porțiuni sau cu mici variații a elementelor neliniare de circuit. Semnul minus din cea de a doua formă a ecuației constitutive se datorează regulii de asociere și nu trebuie interpretată ca o rezistență negativă.

Pentru caracterizarea rezistorului se poate folosi și parametrul $G = 1/R$, numit conductanță. Ecuația constitutivă având în acest caz una din formele:

$$i = -Gu, \quad i = -Gu,$$

după cum s-a adoptat regula de asociere a sensurilor tensiunii la receptoare, respectiv generatoare.

Relația constitutivă admite o reprezentare grafică în planul $u - i$, ca o dreaptă ce trece prin origine.

Cazuri particulare. Următoarele două cazuri particulare corespund unor rezistoare degenerate, extrem de importante în teoria circuitelor electrice:

- conductorul perfect, la care $R = 0$, ceea ce impune $u = 0$

– izolatorul perfect, la care $G = 0$, ceea ce impune $i = 0$

Caracterizarea energetică. Folosind regula de asociere a sensurilor de la receptoare, puterea transferată la borne este:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2,$$

și satisface inegalitatea $p \geq 0$, dacă $R > 0$. Aceste rezistoare consumă sistematic energie electrică, motiv pentru care ele se numesc elemente pasive disipative, transferul energetic fiind ireversibil de la circuite la element.

2. Bobina liniară ideală este prin definiție un element dipolar de circuit electric, la care tensiunea la borne este proporțională cu derivata față de timp a intensității curentului ce străbate elementul.

Adoptând regula de la receptoare, ecuația constitutivă are forma :

$$u = L \frac{di}{dt},$$

în care constanta de proporționalitate L este un parametru (de obicei pozitiv) caracteristic elementului, numit inductivitatea bobinei.

Adoptând regula de la generatoare, ecuația constitutivă are forma :

$$u = -L \frac{di}{dt},$$

se constată că în acest caz, relația $u - i$ nu este o funcție deci nu admite o reprezentare în planul $u - i$. La aceeași valoare a curentului pot corespunde care depind de viteza de variație în timp a intensității în acel moment.

Cazuri particulare. În cazul regimului staționar $i - 1 = ct$ ecuația constitutivă degenerază în ecuația conductorului perfect ($u = 0$). În consecință, bobina ideală nu opune nici un fel de rezistență trecerii curentului continuu. Aceasta reprezintă principala idealizare a bobinei reale.

Tot într-un conductor perfect ($u = 0$), degenerază și bobina a cărei inductivitate este nulă ($L = 0$).

Caracterizare energetică. Puterea transferată la borne la o bobină la care mărimile sunt asociate conform regulii de la receptoare, deci puterea convențional consumată este:

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} (Li^2).$$

În acest caz puterea se poate exprima ca derivata față de timp a unei funcții de stare $w = Li^2/2$, numită energia bobinei.

După cum modelul intensității crește sau scade în timp, puterea consumată este pozitivă sau negativă. Pornind de la o valoare inițială nulă a curentului,

creșterea monotonă a curentului la valoarea I_{max} în timpul t_0 , determină un consum energetic ($p > 0$):

$$W = \int_0^{t_0} p(t) dt = \frac{LI^2}{2}.$$

Dacă intensitatea curentului scade monoton de la I la zero puterea electrică $|p| = -p$ este generată și corespunde unei energii:

$$W = \int_0^{t_0} p(t) dt = 0 - \frac{LI^2}{2},$$

egală în modul cu cea consumată. În consecință, o bobină ideală poate acumula energie $w = Li^2/2$, ea fiind capabilă să returneze circuitului toată energia consumată. Randamentul acumulării este de 100%, spre deosebire de cazul bobinelor reale la care acest randament este subunitar. Din acest motiv se spune despre bobină că este un element acumulator de energie. Deoarece energia produsă nu poate depăși energia consumată, bobina este considerat un element pasiv de circuit. Totuși, în anumite momente ($p < 0$), motiv pentru care bobina este considerată un element reactiv, spre deosebire de rezistor care este un element disipativ.

3. Condensatorul liniar ideal, este prin definiție un element dipolar de circuit electric, la care intensitatea curentului este proporțională cu derivata față de timp a tensiunii la borne.

Adoptând regula de la receptoare, ecuația de funcționare are expresia:

$$i = C \frac{du}{dt},$$

în care parametrul C (de obicei pozitiv), caracteristic elementului se numește capacitatea condensatorului.

Adoptând regula de la generatoare, ecuația constitutivă are expresia:

$$i = -C \frac{du}{dt}.$$

Și în acest caz relația $u - i$ nu are un caracter funcțional ci unul operațional.

Cazuri particulare. În regim staționar ($u = U = ct$), relația constitutivă a condensatorului degenerază în $i = 0$, relație definitorie pentru izolatorul perfect. Se spune că din acest motiv un condensator ideal nu poate fi străbătut de curentul continuu. Un condensator ideal este străbătut de curent, doar în condițiile în care tensiunea la bornele sale variază în timp. Valoarea reală a conductanței unui condensator în regim staționar este una din principalele idealizări.

Se constată că dacă $C = 0$, condensatorul se comportă tot ca un izolator perfect ($i = 0$).

Caracterizare energetică. Puterea transferată pe la bornele unui condensator cu mărimile asociate cu regula de la receptoare:

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Cu^2}{2} \right) = \frac{dW}{dt},$$

permite determinarea energiei acumulate

$$W = \frac{Cu^2}{2},$$

mărimă pozitiv definită pentru cazul în care $i > 0$.

Această relație evidențiază caracterul pasiv reactiv ($p \geq 0$) și acumulator de energie al condensatorului. Spre deosebire de bobină la care energia se exprima în funcție de curentul i , la condensator se exprimă în funcție de tensiunea la borne. Din acest motiv se spune că variabila de stare a unei bobine este intensitatea curentului (i) iar variabila de stare a unui condensator este tensiunea la borne (u). Creșterea în timp a modului variabilei de stare determină creșterea energiei acumulate, pe seama puterii $p > 0$ consumată de element iar scăderea acestui modul determină scăderea energiei acumulate, puterea $p < 0$, fiind în acest caz, în realitate, generată de element și consumată de circuit.

4. Sursa ideală de tensiune este prin definiție un element dipolar de circuit la care tensiunea la borne nu depinde de intensitatea curentului ce-l străbate.

Ecuatia constitutivă a sursei ideale de tensiune are forma:

$$u = e,$$

în care e este un parametru specific sursei (măsurat tot în V) numit tensiune electromotoare (prescurtat t.e.m.). Tensiunea electromotoare nu depinde de variația curentului, dar poate fi funcție de timp.

Cu toate că cele două mărimi fizice u și e sunt egale, se face deosebire între tensiunea la bornele sursei (măsurată cu un voltmetru conectat la borne) și tensiunea electromotoare internă, specifică sursei și independentă de modul de conexiune al voltmetrului.

La schimbarea sensului de referință al tensiunii, ecuația de funcționare își modifică forma:

$$u = -e,$$

indiferent care este sensul de referință al curentului.

În cazul rezistorului, bobinei sau condensatorului liniar, modificarea simultană a sensurilor de referință pentru tensiune și curent lasă invariantă ecuația de funcționare, motiv pentru care se spune că aceste elemente au bornele nepolarizate. Spre deosebire de acestea sursa ideală de tensiune are bornele polarizate.

Pentru a deosebi cele două borne ale sursei, una se marchează cu "+" iar cealaltă cu "-". Tensiunea la borne este egală cu tensiunea electromotoare doar

dacă ea are sensul de referință orientat de la borna ”+” la borna ”-”: $u = v_+ - v_- = e$. În caz contrar tensiunea la borne este minus t.e.m. $u = -v_+ + v_- = -e$. Se constată că forma ecuației constitutive nu depinde de regula de asociere a sensurilor (curentul neavând nici un rol în definiția acestui element) ci de felul în care este orientată tensiunea față de bornele polarizate (sau față de săgeata internă, specifică t.e.m.).

În planul $u - i$ relația constitutivă a sursei ideale de tensiune se reprezintă ca o dreaptă orizontală, care nu trece în mod necesar prin origine.

Cazuri particulare. În regim staționar, tensiunea electromotoare a sursei se notează cu E , ecuația de funcționare fiind $v = \pm E$, conform sensului de referință al tensiunii la borne.

Dacă $e = 0$, sursa degenerază într-un conductor perfect ($u = 0$), caz în care se spune că sursa este pasivizată.

Valoarea nulă a rezistenței interne a unei surse ideale de tensiune pasivizate reprezintă idealizarea principală specifică acestui element.

Caracterizare energetică. Puterea transferată pe la borne de o sursă ideală de tensiune este:

$$p = ui = ei.$$

Presupunând că $u = e > 0$ și $i > 0$ sunt asociate în regula de la receptoare, rezultă că $p > 0$ este o putere reală consumată de sursă. Dacă intensitatea curentului își modifică semnul, atunci $p < 0$ iar sursa trece din regim de consumator în regim de generator. În consecință la acest element $p \gtrless 0$, ceea ce evidențiază caracterul lui activ. Trecerea de la un regim la altul este dictată de sensul curentului.

5. Sursa ideală de curent este prin definiție un element dipolar de circuit electric, la care intensitatea curentului nu depinde de tensiunea la bornele sale.

Sursa ideală de curent este un element cu bornele polarizate, a cărui relație constitutivă are forma:

$$i = j,$$

atunci când intensitatea curentului este orientată de la borna ”-” la borna ”+” prin element și

$$i = -j,$$

în caz contrar. Parametrul j specific elementului este numit curent electromotor (prescurtat c.e.m.) și nu depinde de tensiunea la borne, fiind del mult funcție de timp.

Se constată că atunci când sensul de referință al curentului coincide cu sensul curentului electromotor, relația are forma $i = j$ și respectiv forma $i = -j$ în caz contrar. Forma relației nu depinde de sensul tensiunii la borne, nu depinde nici de regula de asociere adoptată.

În planul $u - i$ relația constitutivă a sursei ideale de curent se reprezintă ca o dreaptă verticală, care nu trece în mod necesar prin origine.

Cazuri particulare. În regim staționar curentul electromotor se notează cu J , ecuația de funcționare având una din formele $I = \pm J$, în funcție de sensul de referință al curentului.

Dacă $j = 0$, sursa degenerează într-un izolator perfect ($i = 0$), caz în care se spune că sursa este pasivizată.

Valoarea reală a conductanței interne a unei surse de curent pasivizată reprezintă idealizarea principală a acestui element de circuit electric.

Caracterizare energetică. Puterea transferată pe la borne de o sursă ideală de curent este:

$$p = ui = uj.$$

Deoarece aceasta poate avea atât valori pozitive cât și negative, elementul poate consuma sau genera energie electrică. Din acest motiv sursa ideală de curent intră în categoria elementelor active. Regimul energetic al acestei surse (consumator sau generator) este dictat de semnul tensiunii la borne. Dacă $u > 0$ și $i = j > 0$ sunt asociate în regula de la generatoare atunci $p = u \cdot j$ este o putere real generată iar dacă $u < 0$, atunci $|p| = |u|j = -p$ este puterea consumată de element.

Cele cinci elemente anterior definite reprezintă cele mai frecvent utilizate elemente în aplicațiile practice ale teoriei circuitelor electrice. Circuitele electrice constituite cu acestea se numesc **circuite electrice liniare** cu elemente dipolare (sau circuite RLCEJ).

Aplicația 1: Modelarea generatorului real.

Se consideră un element dipolar de circuit electric numit generator real a cărui caracteristică în planul $u-i$ se reprezintă printr-o dreaptă ce nu trece prin origine. Se presupune că dreapta caracteristică a acestui element intersectează axele în punctele U_0 și I_0 . Aceste valori corespund tensiunii de mers în gol ($i = 0$) și respectiv curentului de scurtcircuit ($u = 0$) ale generatorului. Se pune problema determinării modelului acestui element, ca un circuit cu elemente ideale dipolare liniare.

Ecuația dreptei în planul $u - i$:

$$u = U_0 - \frac{U_0}{I_0}i,$$

permite identificarea a două tensiuni:

$$u_1 = U_0, \quad u_2 = -\frac{U_0}{I_0}i,$$

astfel încât $u = u_1 + u_2$.

Prima tensiune $u_1 = U_0$ fiind independentă de intensitatea curentului corespunde unei surse ideale de tensiune, cu t.e.m. $E = U_0$, iar a doua tensiune $u_2 = -(U_0i)/I_0$ fiind proporțională cu intensitatea i a curentului prin element corespunde unui rezistor liniar ideal cu rezistența $R = U_0/I_0$, la care U_0 și I_0

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI. BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

sunt asociate în regula de la generatoare. Relația $u = u_1 + u_2$ corespunde conexiunii serie a celor două elemente (R, E) ideale. În consecință un generator real admite o schemă echivalentă formată dintr-o sursă ideală de tensiune înseriată cu un rezistor liniar. Această schemă se numește sursă reală de tensiune. Tensiunea electromotoare E a sursei ideale este egală cu tensiunea de mers în gol și se numește tensiunea electromotoare a generatorului. Rezistența $R = U_0/I_0$ egală cu raportul dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit al generatorului se numește rezistența internă a generatorului.

Schema echivalentă obținută nu este singura schemă cu două elemente. Dacă se exprimă ecuația de funcționare a generatorului sub forma:

$$i = I - 0 - \frac{I_0}{U_0}u,$$

atunci se pot deosebi termenii $i_1 = I - 0$ și $i_2 = -(I_0u)/U_0$, care satisfac relația $i = i_1 + i_2$. Primul termen $i_1 = I - 0$, fiind independent de valoarea tensiunii la borne corespunde unei surse ideale de curent, cu c.e.m. egal cu curentul de scurtcircuit al generatorului $J = I_0$. Al doilea curent $i_2 = -(I_0u)/U_0$ fiind proporțională cu tensiunea la borne corespunde unui rezistor în regula de la generatoare având conductanța $G = I_0/U_0$, egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit și tensiunea de mers în gol ale generatorului. Relația $i = i_1 + i_2$ impune ca cele două elemente ideale (G, I) să fie conectate în paralel. Această schemă echivalentă este cunoscută sub numele de sursă reală de curent. Cei doi parametri ai sursei reale de curent sunt J - curentul electromotor și G - conductanța internă.

În consecință un generator real de curent admite două scheme echivalente între ele și echivalente cu generatorul, una de tip sursă reală de tensiune (cu parametrii $E = U_0, R = U_0/I_0$) și alta de tip sursă reală de curent (cu parametrii $J = I_0, G = 1/R = I_0/U_0$).

Se constată că sursele ideale sunt idealizări ale generatorului real. Sursa ideală de tensiune corespunde cazului în care rezistența internă este nulă (iar curentul de scurtcircuit tinde către infinit) pe când sursa ideală de curent corespunde cazului în care conductanța internă este nulă (rezistența internă tinde spre infinit o dată cu tensiunea de mers în gol).

Aplicația 2: Modelarea condensatorului cu tensiune inițială nenulă.

Fie un condensator care la momentul inițial $t = 0$ are valoarea tensiunii la borne $u_0 = u(0)$.

Integrând ecuația de funcționare a condensatorului

$$i = C \frac{du}{dt},$$

pe intervalul $(0, t)$ se obține:

$$\int_0^t i(t')dt' = C \int_0^t \frac{du}{dt'}dt' = Cu(t) - Cu(0),$$

deci,

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t')dt'.$$

Notând $u_1 = u_0$ și $u_2 = \frac{1}{C} \int_0^t i(t')dt'$, rezultă că $u(t) = u_1 + u_2$, ceea ce corespunde conexiunii serie a unei surse ideale de tensiune cu t.e.m. u_0 și un condensator inițial descărcat, cu ecuația $i = C \frac{du_2}{dt}$, în care $u_2(0) = 0$, deci inițial neîncărcat.

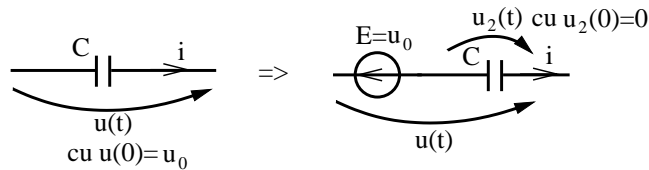


Fig. 3.1.

Aplicația 3: Modelarea bobinei cu curenți inițial nenuli.

Fie o bobină care la momentul inițial $t = 0$ are intensitatea curentului $i(0) = i_0$.

Integrând ecuația de funcționare a bobinei:

$$u = L \frac{di}{dt},$$

pe intervalul $(0, t)$ se obține:

$$\int_0^t u(t')dt' = L \int_0^t \frac{di}{dt'}dt' = Li(t) - Li(0).$$

Notând $i_1 = i(0) = i_0$ și $i_2 = \frac{1}{L} \int_0^t u(t')dt'$, rezultă că $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, ceea ce corespunde conexiunii paralele a unei surse ideale de curent cu c.e.m. i_0 și o bobină cu ecuația $u = L \frac{di_2}{dt}$, la care $i_2(0) = 0$, deci inițial neparcursă de curent.

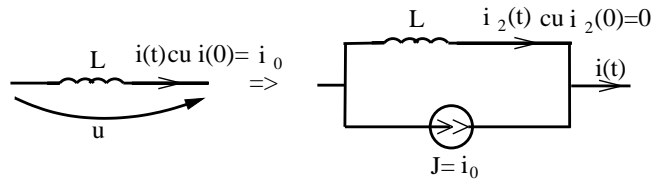


Fig. 3.2.

3.10.3 Elemente dipolare neliniare

1. **Rezistorul ideal neliniar** este un element dipolar de circuit la care valoarea intensității curentului de la un moment de timp este într-o relație algebrică cu tensiunea din acel moment de timp. Ecuația de funcționare a rezistorului neliniar poate fi scrisă sub forma:

$$F(i, u) = 0.$$

În planul $u-i$ relația constitutivă a rezistorului neliniar se reprezintă de regulă printr-o curbă.

Se deosebesc două cazuri particulare importante.

Rezistorul controlat în curent, este un element dipolar de circuit la care tensiunea la borne este funcție (în sens matematic) de intensitatea curentului ce străbate elementul. Considerând adoptată regula de asociere a sensurilor de la receptoare, ecuația de funcționare a rezistorului controlat în curent are forma:

$$u = f(i),$$

în care $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția caracteristică $u - i$ a elementului.

Rezistorul controlat în tensiune, este un element dipolar de circuit la care intensitatea curentului este funcție (în sens matematic) de tensiunea la borne. Asociind a sensurile de referință în regula de la receptoare, ecuația de funcționare a rezistorului controlat în tensiune are forma:

$$i = g(u),$$

în care $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția caracteristică $i - u$ a elementului.

Dacă funcția caracteristică este bijectivă, atunci $f = g^{-1}$ și rezistorul neliniar este controlat atât în tensiune cât și în curent.

Spre deosebire de rezistorul liniar, care are bornele nepolarizate cel neliniar are, în general, bornele polarizate. Simbolul ales pentru acest element evidențiază această proprietate, nefiind simetric față de un plan transversal (fig. 3).

Totuși, dacă funcția caracteristică este simetrică $f(-i) = -f(i)$ sau $g(-u) = -g(u)$, cele două borne ale rezistorului neliniar sunt echivalente iar polarizarea bornelor nu are semnificație.

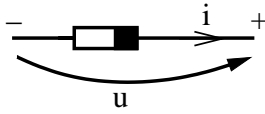


Fig. 3.3.

Rezistoarele liniare sunt cazuri particulare ale rezistoarelor neliniare. Excepând cazurile degenerate rezistoarele liniare sunt controlate atât în tensiune cât și în curent. În schimb, conductorul perfect este controlat în curent, iar izolatorul perfect este controlat în tensiune. Sursa reală poate fi considerată și ea un rezistor neliniar controlat atât în curent cât și în tensiune. În particular, sursa ideală de tensiune este un rezistor neliniar controlat în curent, iar sursa ideală de curent este un rezistor neliniar controlat în tensiune.

Comportarea unui rezistor neliniar poate fi descrisă cu ajutorul funcțiilor caracteristice, dar și folosind următoarele funcții.

Rezistența statică a unui rezistor:

$$R_s = \frac{u}{i},$$

care este o funcție de intensitatea curentului $R_s = R_s(i) = f(i)/i$ sau de tensiunea la borne $R_s = R_s(u) = u/g(u)$.

Conductanța statică a unui rezistor:

$$G_s = \frac{i}{u},$$

care este inversa rezistenței statice.

Rezistența diferențială (dinamică):

$$R_d = \frac{du}{di},$$

definită ca derivata funcției caracteristice $f(i)$.

Conductanța diferențială (dinamică):

$$G_d = \frac{di}{du},$$

definită ca derivata funcției caracteristice $g(u)$.

În cazul particular, al rezistorului liniar, $R_s = R_d = R = 1/G = 1/G_d = 1/G_s$ cu valori constante, independente de u sau i .

În cazul sursei reale $R_d = R(G_d = 1/R)$, rezistența dinamică este egală cu cea internă. În cazul particular al sursei ideale rezistența dinamică este nulă (pentru sursa de tensiune) sau conductanța dinamică este nulă (pentru sursa de curent).

Rezistoare neliniare tipice

Dioda semiconductoră este un element dipolar de circuit frecvent întâlnit în electronică. Aceasta poate fi modelată suficient de bine printr-un rezistor neliniar, cu caracteristica (fig. 4)

$$i = I_s [e^{u/V_T} - 1],$$

în care I_s și V_T sunt constante numite curent de saturație respectiv tensiune termică. Acest rezistor este controlat în tensiune, funcția caracteristică:

$$e^{u/V_T} = \frac{i}{I_s} + 1 \Rightarrow u = V_T \ln \left(\frac{i}{I_s} + 1 \right),$$

nefiind definită pe întreaga axă reală $i \in \mathbb{R}$.

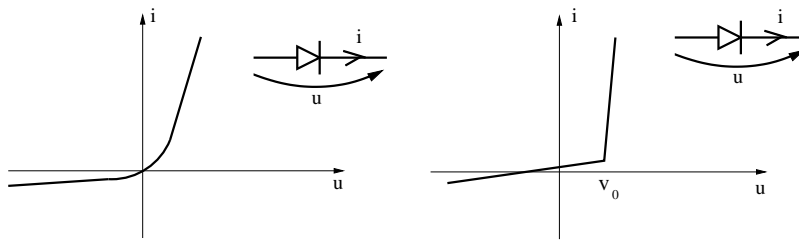


Fig. 3.4.

Conductanța dinamică a diodei semiconductoră are valori foarte mici pentru tensiuni negative

$$G_d = \frac{I_s}{V_T} e^{u/V_T},$$

dar valori tot mai mari pe măsură ce tensiunea crește. Graficul relației $u - i$ depinde de felul în care au fost alese sensurile de referință pentru u și i . Un mod uzual de exprimare a caracteristicii diodei semiconductoră corespunde aproximării liniare pe porțiuni:

$$i = \begin{cases} G_i u, & u \leq U_0 \\ G_i V_0 + G_d (u - v_0), & u > v_0. \end{cases}$$

Un astfel de model este caracterizat de trei parametri: conductanța în polarizare inversă G_i , conductanța în polarizare directă G_d și tensiunea de stingere v_0 . Se constată că spre deosebire de modelul anterior, noul model poate fi considerat comandat atât în curent cât și în tensiune. În polarizare inversă, dioda se comportă ca un rezistor liniar cu rezistența foarte mare, iar în polarizare directă ($u > v_0$) o sursă reală cu rezistența internă mică. Neglijând conductanța inversă $G_i = 0$ și rezistența directă $R_d = 1/G_d = 0$, rezultă un alt model caracterizat doar prin tensiunea de stingere v_0 (fig. 5)

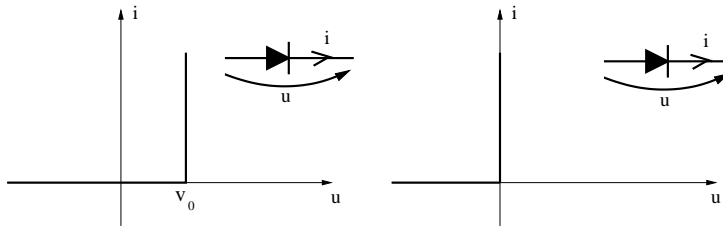


Fig. 3.5.

Dacă se consideră tensiunea de frângere nulă $v_0 = 0$, atunci se obține cel mai simplu model pentru dioda semiconductoră, numită diodă perfectă, descris prin:

$$i = 0 \text{ pentru } u < 0$$

$$u = 0 \text{ pentru } i > 0$$

Ultimele două modele ce reprezintă rezistoare neliniare nu sunt controlate nici în curent nici în tensiune. În polarizare inversă, aceste rezistoare se comportă ca izolatoare perfecte. Curentul electric nu poate străbate aceste diode decât într-un singur sens, cel evidențiat de simbolul diodei.

Dioda stabilizatoare de tensiune (zener) este un element dipolar de circuit a cărui caracteristică $u - i$ este prezentată în (fig. 6). Se constată că acesta este comandat atât în tensiune cât și în curent.

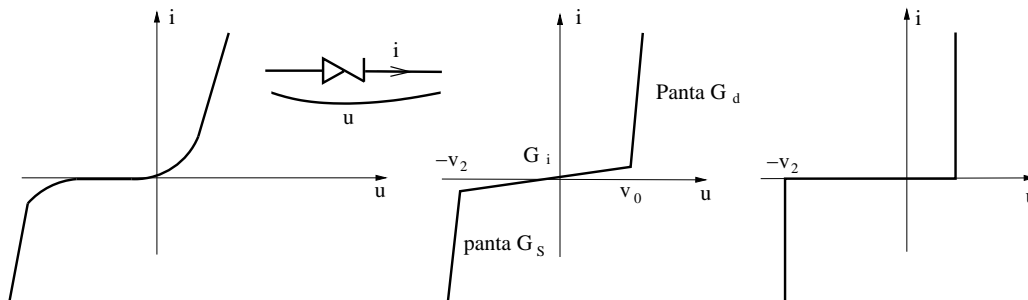


Fig. 3.6.

Caracteristica sa are trei zone, două în polarizare inversă, zona Zener (cu rezistență dinamică neglijabilă), zona de blocare (cu conductanță dinamică neglijabilă) și o zonă de polarizare directă, cu rezistență dinamică neglijabilă. Folosind aproximări liniare pe porțiuni caracteristica diodei zener capătă forma din (fig. 6.b). Prin idealizare, se poate considera $R_2 = 1/G_2 = 0$, $G_i = 0$, $R_d = 1/G_d = 0$ și $v_0 = 0$, observându-se caracteristica din (fig. 6.c). În zona Zener ($i < 0$) acest

model perfect se comportă ca o sursă ideală de tensiune $u = -v_2$, în zona de blocare ($-v_2 < u < 0$) el se comportă ca un izolator perfect ($i = 0$).

Dioda tunel este un element dipolar cu o caracteristică de tipul celei din (fig. 7)

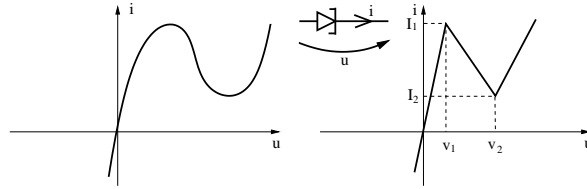


Fig. 3.7.

Se constată că elementul este controlat în tensiune și prezintă trei zone pe caracteristică, în zona a doua rezistența dinamică fiind negativă.

Dioda tiristor este un element dipolar de circuit cu o caracteristică de tipul celei din figură 8.

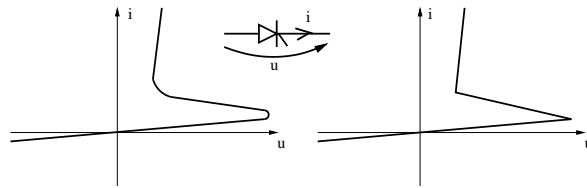


Fig. 3.8.

Se constată că acest element este un rezistor neliniar comandat în curent. Caracteristica sa conține trei zone, prima în care elementul este blocat (prezintă o conductanță neglijabilă), o zonă cu rezistență negativă și o zonă de conducție, în care rezistența dinamică neglijabilă, caracteristica sa poate fi aproximată liniar pe porțiuni, ca în figura 8.b.

Tubul fluorescent cu neon este un element dipolar de circuit cu o caracteristică de tipul celei din figură 9.

Acest element este comandat tot în curent, dar are caracteristica simetrică față de origine, deci bornele nepolarizate.

Caracteristica energetică a rezistoarelor neliniare Puterea transferată pe la borne de un rezistor neliniar este:

$$p = ui.$$

Dacă această putere este pozitivă, în regula de la receptoare, elementul dipolar este pasiv.

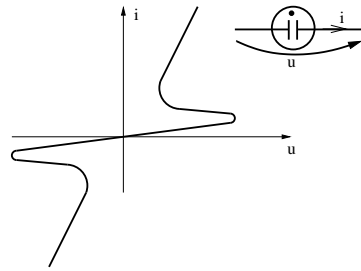


Fig. 3.9.

În acest caz tensiunea u și curentul i trebuie să aibă în fiecare moment același semn. Rezultă că rezistoarele neliniare ale căror caracteristică în regula de la receptoare, este cuprins exclusiv în cadranele 1 și 3 ale planului $u-i$, sunt elemente pasive. Această condiție obligă ca la tensiune nulă $u = 0$ să corespundă un curent nul $i = 0$ (originea face parte din spațiu caracteristicii).

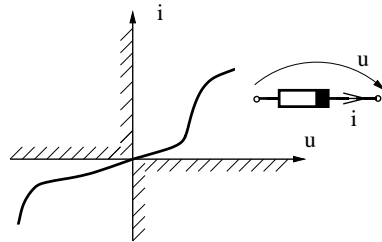


Fig. 3.10.

Dacă aceeași proprietate $\Delta u \cdot \Delta i > 0$ este satisfăcută pentru orice punct M de pe caracteristica (fig. 11) se spune că rezistorul este local pasiv. Un astfel de rezistor trebuie să aibă în plus caracteristica monotonă (conductanța sau rezistența dinamică trebuie să fie pozitive în orice punct).

2. **Bobina ideală neliniară** este un element bipolar de circuit caracterizat în regula de asociere a sensurilor de la receptoare prin ecuația:

$$u = \frac{d\varphi}{dt},$$

în care φ este o variabila numită fluxul bobinei, aflată într-o relație $f(\varphi, i) = 0$ cu intensitatea curentului din bobină. Se deosebesc două cazuri particulare:

- Bobina controlată în curent la care:

$$\varphi = \hat{\varphi}(i).$$

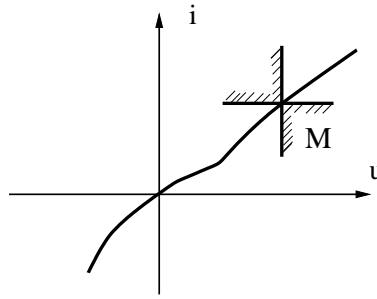


Fig. 3.11.

– Bobina controlată în flux:

$$i = \hat{i}(\varphi).$$

Bobinele a căror caracteristică $\varphi - i$ este simetrică față de origine $f(-\varphi, -i) = f(\varphi, i)$ au bornele nepolarizate. Simbolul general al bobinei neliniare este cel din figura 12.

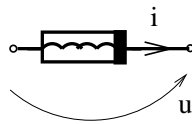


Fig. 3.12.

În afara funcțiilor $f(\varphi, i)$, $\hat{\varphi}(i)$ sau $\hat{i}(\varphi)$, pentru caracterizarea bobinelor neliniare se mai folosesc:

- inductivitatea statică: $L_s = \frac{\varphi}{i} = \frac{\hat{\varphi}(i)}{i}$;
- inductivitatea dinamică: $L_d = \frac{d\varphi}{di} = \hat{\varphi}'(i)$;
- inductivitatea reciprocă statică: $\Gamma_s = \frac{i}{\varphi} = \frac{\hat{i}(\varphi)}{\varphi}$;
- inductivitatea reciprocă dinamică: $\Gamma_d = \frac{di}{d\varphi} = \hat{i}'(\varphi)$.

Bobina liniară este un caz particular al bobinei neliniare, la care $L_s = L_d = 1/\Gamma_s = 1/\Gamma_d = L$.

Elementul dipolar neliniar cu caracter inductiv este bobina cu miez feromagnetic, la care neliniaritatea se datorește dependenței $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ specifice acestor materiale.

În cazul mediilor feromagnetice moi, dependența $\varphi - i$ are forma tipică din figura 13.a, care poate fi aproximată prin una din relațiile:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{L}{a + b(i)}, \\ i &= a\varphi + b\varphi^3, \\ \varphi &= a + h(bi),\end{aligned}$$

sau liniar pe cele trei porțiuni (13.b)

$$\varphi = \begin{cases} L_1(i + i_0) - L_0i_0, & i < -i_0 \\ L_0i, & -i_0 \leq i \leq i_0 \\ L_1(i - i_0) + L_0i_0 & i > i_0. \end{cases}$$

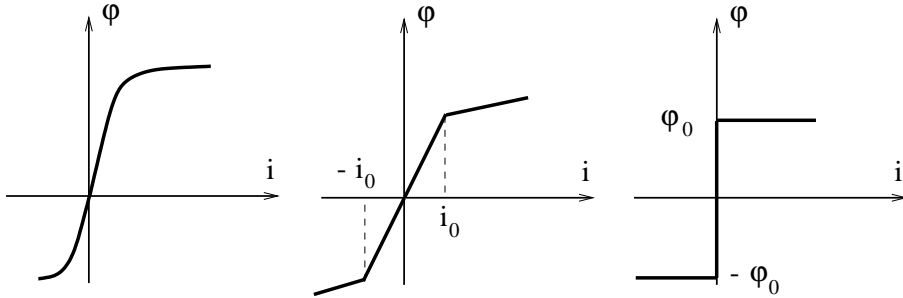


Fig. 3.13.

Această caracteristică de magnetizație poate fi simplificată considerând $L_1 = 0$, $i_0 = 0$ cu $\varphi_0 = L_0i_0$ finit, ceea ce corespunde relației $\varphi = \varphi \cdot \text{sgn}(i)$, reprezentat grafic în figura 13.c.

Un alt element de circuit care poate fi modelat printr-o bobină neliniară este joncțiunea supraconductoare (Josephson), la care $i = I_0 \sin k_0\varphi$, elementul fiind controlat în flux. Un fenomen mai dificil de modelat este fenomenul de histerzis, specific bobinelor cu miez feromagnetic dur. În acest caz, relația $\varphi - i$ nu poate fi reprezentată printr-o funcție univoca (figura 14).

Pentru caracterizarea energetică, atunci bobina se va calcula puterea consumată de bobină:

$$p = ui = i \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.96)$$

Considerând o bobină care la momentul $t = 0$ are starea inițială caracterizată prin $i = i_0$ și $\varphi = \varphi_0$, rezultă că energia transferată bobinei în intervalul $(0, t)$ este:

$$W = \int_0^t p dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \hat{i}(\varphi') d\varphi',$$

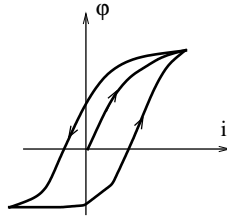


Fig. 3.14.

pentru cazul bobinei controlate în flux și:

$$W = \int_0^t p dt = i\varphi - i_0\varphi_0 - \int_{i_0}^i \widehat{\varphi}(i') di',$$

în cazul bobinei controlate în curent.

Se constată că dacă starea finală este identică cu cea inițială ($i = i_0$, $\varphi = \varphi_0$) energia transferată este nulă, ceea ce evidențiază caracterul pasiv, nedisipativ, acumulator de energie al bobinei ideale neliniare. Această afirmație nu este valabilă în cazul bobinelor cu histerezis care au un caracter disipativ.

3. **Condensatorul ideal neliniar** este un element dipolar de circuit, caracterizat în regula de asociere de la rezistoare prin ecuația:

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (3.97)$$

în care q este o variabilă numită sarcina condensatorului, aflată într-o relație $f(q, u) = 0$ cu tensiunea de la bornele elementului. Se deosebesc două cazuri particulare:

– condensatorul controlat în tensiune, la care:

$$q = \widehat{q}(u), \quad (3.98)$$

– condensatorul controlat în sarcină, la care:

$$u = \widehat{u}(q), \quad (3.99)$$

Condensatoarele la care caracteristica $q - u$ este simetrică față de origine au bornele nepolarizate. Simbolul general al condensatorului neliniar este prezentat în figura 15

Condensatorul neliniar mai poate fi caracterizat prin următoarele funcții:

– capacitatea statică: $C_s = \frac{q}{u} = \frac{\widehat{q}(u)}{u}$,

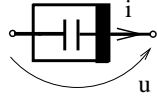


Fig. 3.15.

- capacitate statică reciprocă: $S_s = \frac{u}{q} = \frac{\hat{u}(q)}{q}$,
- capacitate dinamică: $C_d = \frac{dq}{du} = \hat{q}'(u)$,
- capacitate dinamică reciprocă: $S_d = \frac{du}{dq} = \hat{u}'(q)$.

În cazul particular al condensatorului linear $C = C_s = C_d = 1/S_s = 1/S_d$.

Dintre elementele reale, cel care se poate modela printr-un condensator neliniar este dioda caricap, la care:

$$q(u) = -\frac{3}{2}C_0U_0 \left(1 - \frac{u}{U_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad u < U_0.$$

În practică se întâlnesc și condensatoare cu dielectrice prezentând fenomenul de histerezis, care nu pot fi caracterizate printr-o funcție biunivocă $q - u$.

Energia transferată unui condensator în intervalul $(0, t)$ este:

$$W = \int_0^t p dt = \int_{q_0}^q \hat{u}(q) dq, \quad q_0 = q(0), \quad (3.100)$$

pentru condensatoarele controlate în sarcina, și:

$$W = \int_0^t p dt = qu - q_0u_0 - \int_{u_0}^u \hat{q}(u) du, \quad u_0 = u(0), \quad (3.101)$$

pentru condensatoarele controlate în tensiune. În cazul transformărilor ciclice ($u = u_0$, $q = q_0$) se constată că energia totală transferată este nulă $W = 0$, ceea ce evidențiază caracterul pasiv, nedisipativ și acumulator de energie al acestor elemente.

3.11 Elemente dipolare parametrice

1. Rezistorul parametric este un element dipolar de circuit a cărui relație tensiune - curent este dependentă de timp. Relația caracteristică a acestui element are forma:

$$F(u, i, t) = 0. \quad (3.102)$$

Rezistorul neliniar parametric controlat în curent are ecuația:

$$u = f(i, t), \quad (3.103)$$

iar rezistorul neliniar parametric controlat în tensiune are ecuația:

$$i = g(u, t). \quad (3.104)$$

Simbolul general al unui rezistor neliniar parametric este reprezentat în figura 16

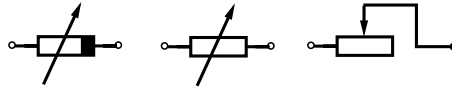


Fig. 3.16.

Dacă funcția caracteristică este simetrică față de origine $F(-u, -i) = F(u, i)$ atunci elementul are bornele nepolarizate. În particular, rezistorul liniar parametric are ecuația:

$$u = R(t) - i, \quad i = G(t) - u, \quad (3.105)$$

și simbolul din figura 16.

Un exemplu tipic de rezistor liniar parametric este rezistorul (figura 16) realizat dintr-un rezistor cu cursor, a cărui rezistență depinde de poziția cursorului. Dacă se presupune o mișcare oscilatorie, cu pulsația ω , a cursorului, rezistența reostatului este:

$$R(t) = R_0 + R_m \sin \omega t.$$

Un alt exemplu tipic de rezistor parametric este întrerupătorul ideal (figura 17), care poate avea două stări:



Fig. 3.17.

- închis, caz în care este echivalent cu un conductor perfect ($R = 0, U = 0$);
- deschis, caz în care este echivalent cu un izolator perfect ($G = 0, i = 0$).

Acest element este important deoarece prezența lui în circuit poate modifica topologia rețelei, deoarece în funcție de poziția sa adaugă sau elimină laturi din circuit.

2. Bobina parametrică este un element dipolar de circuit electric a cărui relație flux - curent este dependentă de timp. Relațiile constitutive ale bobinei sunt:

$$u = \frac{d\varphi}{dt}, F(\varphi, i, t) = 0. \quad (3.106)$$

Dacă funcția caracteristică F poate fi adusă sub forma: $\varphi = \widehat{\varphi}(i, t)$ se spune ca elementul este controlat în curent. Dacă funcția caracteristică F poate fi adusă sub forma: $i = \widehat{i}(\varphi, t)$ se spune ca bobina este controlată în flux. Simbolul general al bobinei neliniare parametrică este prezentat în figura 18.

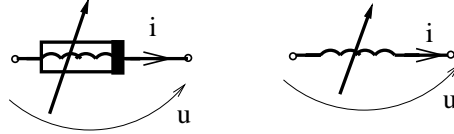


Fig. 3.18.

În cazul particular al bobinei parametrică liniare, fluxul depinde liniar de intensitatea curentului: $\varphi = L(t) \cdot i$, constanta de proporționalitate, numită inductivitate parametrică, fiind dependentă de timp. (figura 18)

Funcția de funcționare are, în acest caz forma:

$$u = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}. \quad (3.107)$$

Se constată că tensiunea la bornele bobinei parametrică are față de tensiunea la bornele bobinei liniare invariante, un termen suplimentar de natură parametrică.

Un exemplu tipic de bobină parametrică este bobina cu miez mobil, folosită însuși ca traductor de poziție. Modificarea poziției miezului determină modificarea inductivității. De exemplu, dacă miezul are mici oscilații armonice, de pulsație ω :

$$L(t) = L_0 + L_m \sin \omega t.$$

O astfel de bobină, chiar străbătută de un curent continuu $i = I$, are o tensiune nenulă la borne:

$$u(t) = IL_m \omega \cos \omega t.$$

3. Condensatorul parametric este un element dipolar de circuit a cărui relație sarcina - tensiune este dependentă de timp. Relațiile constitutive ale acestui element are forma:

$$i = \frac{dq}{dt}, F(q, u, t) = 0. \quad (3.108)$$

Condensatorul neliniar parametric controlat în tensiune are funcția caracteristică F de forma:

$$q = \hat{q}(u, t), \quad (3.109)$$

iar condensatorul neliniar parametric controlat în sarcină are funcția caracteristică F de forma:

$$u = \hat{u}(q, t). \quad (3.110)$$

Simbolul general al condensatorului neliniar parametric este reprezentat în figura 19.

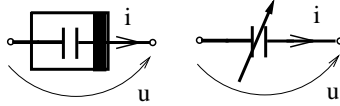


Fig. 3.19.

În cazul particular al condensatorului liniar parametric, sarcina depinde liniar de tensiune $q = C(t) \cdot u$, constanta de proporționalitate, numită capacitate parametrică, fiind variabilă în timp (figura 19). Ecuația de funcționare are în acest caz forma:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt} + u \frac{dC}{dt}, \quad (3.111)$$

conținând un termen suplimentar $u \frac{dC}{dt}$, de natură parametrică.

Un exemplu tipic de condensator liniar parametric îl reprezintă condensatorul cu armături mobile. Prin modificarea poziției unei armături se modifică și capacitatea condensatorului.

3.12 Elemente multipolare liniare

Cel mai simplu element multipolar este elementul tripolar, cu trei borne. Totuși, pentru a asigura o maximă flexibilitate în modelarea elementelor multipolare reale, se preferă ca elementele multipolare ideale să aibă patru borne. La aceste elemente cuadripolare, bornele se grupează în două perechi numite porți, astfel încât $i_1 = i'_1 = i''_1$ și $i_2 = i'_2 = i''_2$ (figura 20).

În consecință, poarta de intrare va fi caracterizată prin perechea tensiune - curent (u_1, i_1) , iar poarta de ieșire prin perechea (u_2, i_2) . Cuadripolii diporți se reprezintă în graful circuitului prin două laturi, corespunzătoare celor două porți (figura 20).

Elementele cuadripolare de circuit impun anumite relații între cele patru mărimi caracteristice u_1, u_2, i_1, i_2 . În cazul elementelor liniare aceste relații au un caracter liniar.

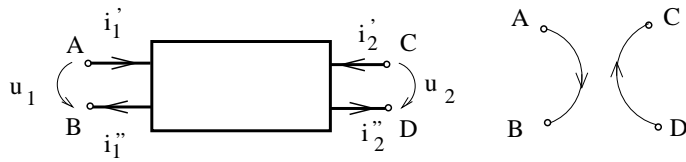


Fig. 3.20.

Următoarele patru elemente multipolare, numite surse comandate alcătuiesc un set complet, cu care se poate modela funcționarea elementelor reale multipolare liniare.

Sursa de tensiune comandată în tensiune este un element diport de circuit la care poarta de intrare se comportă ca un izolator perfect, iar tensiunea la poarta de ieșire este proporțională cu tensiunea de intrare.

Simbolul sursei de tensiune comandată în tensiune este reprezentată în figura 21, iar ecuațiile ei constitutive sunt:

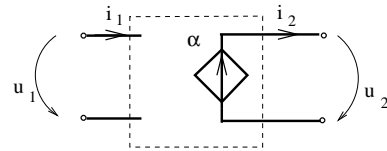


Fig. 3.21.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ u_2 = \alpha u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Parametrul acestui element $\alpha = u_2/u_1$ se numește factorul de transfer în tensiune și are un caracter adimensional.

Sursa de curent controlată în curent (figura 22) este un element diport de circuit, la care poarta de intrare se comportă ca un conductor perfect, iar curentul de ieșire este proporțional cu curentul de intrare.

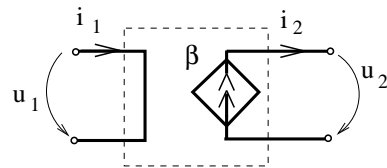


Fig. 3.22.

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Parametrul caracteristic $\beta = i_2/i_1$ se numește factorul de transfer în curent și este adimensional.

Sursa de tensiune controlată în curent (figura 23) este un element diport de circuit la care poarta de intrare se comportă ca un conductor perfect, iar tensiunea de ieșire este proporțională cu curentul de intrare:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \rho i_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

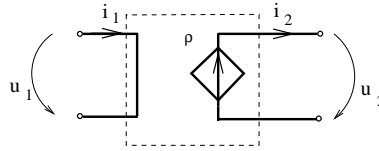


Fig. 3.23.

Parametrul caracteristic $\rho = u_2/u_1$ se măsoară în Ohmi și se numește rezistență de transfer.

Sursa de curent controlată în tensiune (figura 24) este un element diport de circuit la care poarta de intrare se comportă ca un izolator perfect, iar curentul de ieșire este proporțional cu tensiunea de intrare.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = \gamma u_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

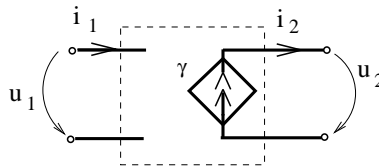


Fig. 3.24.

Parametrul caracteristic $\gamma = i_2/u_1$ se măsoară în Siemens și se numește conductanță de transfer.

Cele patru tipuri de surse comandate nu au un caracter primitiv. Se poate constata ușor sursele α și β se pot modera prin înlocuirea surselor ρ și γ . (figura 25).

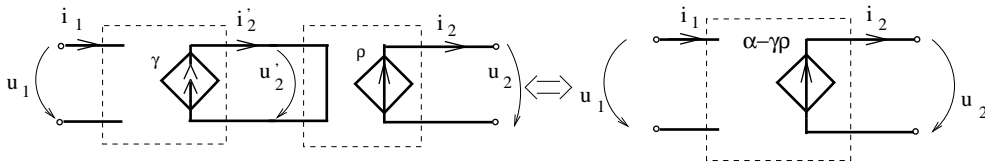


Fig. 3.25.

Sursele comandate sunt surse la care parametrii depind liniar de curenți sau tensiuni din circuitul din care acestea fac parte. Având un caracter liniar, ele nu pot reprezenta excitații ale circuitului, deoarece dacă mărimile de comanda sunt nule atunci și cele comandate sunt tot nule. Din acest punct de vedere, sursele comandate au o comportare similară rezistoarelor liniare. Totuși, din punct de vedere energetic aceste elemente au un caracter activ, deoarece puterea transferată pe la borne

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = u_2 i_2, \quad (3.112)$$

poate fi pozitivă sau negativă. O componentă electronică uzuală a cărei funcționare poate fi modelată cu surse comandate este amplificatorul operațional. Acesta este un element cuadripol de circuit electric, (figura 26) care admite în prima aproximare o schemă echivalentă cu cea din figura 27.

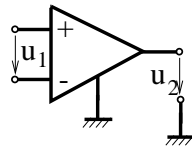


Fig. 3.26.

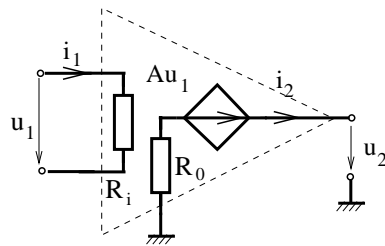


Fig. 3.27.

Poarta de intrare a acestui element se comportă ca un rezistor cu rezistența de ordinul sutelor de $k\Omega$, iar tensiunea la poarta de ieșire este $u_2 = Au_1 - R_0 i_2$,

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

în care constanta A , numită amplificare în buclă deschisă este de ordinul 10^5 , iar rezistența de ieșire R_0 este de ordinul zecilor de Ohmi. Această comportare poate fi și ea idealizată, presupunând $R_i \rightarrow \infty$ și $R_o = 0$,

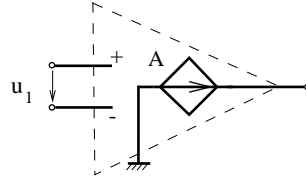


Fig. 3.28.

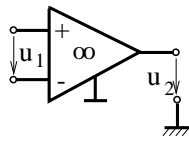


Fig. 3.29.

cea ce corespunde modelării pentru amplificatorul operațional printr-o sursă de tensiune comandată în tensiune cu parametrul $\alpha = A$. În unele situații se poate presupune că A este ceea ce corespunde modelului perfect al amplificatorului operațional.

Pentru a obține o tensiune de ieșire $u_2 = Au_1$ finită, este necesar ca tensiunea de intrare u_1 să fie nulă. Ecuațiile constitutive ale amplificatorului operațional perfect sunt:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Și se constată că nu este nici un parametru caracteristic.

Deoarece la terminalele de intrare tensiunea este sistematic nulă se spune că ele asigură un scurtcircuit virtual. Dar, spre deosebire de scurtcircuitul real curentul este și el nul $i_1 = 0$.

Datorită ecuațiilor sale foarte simple și datorită faptului că idealizează comportarea unui element real, amplificatorul operațional perfect reprezintă cel mai important element multipolar liniar ideal.

Aplicația 1: Amplificatorul inversor

Dintre circuitele electronice cu amplificatoare operaționale unul dintre cele mai des utilizate este circuitul din figura 20, cunoscut sub numele de amplificator inversor. Pentru a stabili relația impusă de acest circuit între tensiunea de intrare u_1 și cea de ieșire se constată că cele două rezistoare R_1 și R_2 sunt parcurse de

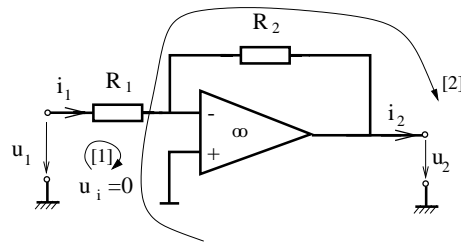


Fig. 3.30.

curenți egali, deoarece curentul de intrare în amplificatorul operațional este nul. Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff și considerând $u_i = 0$, rezultă:

$$[1]: u_1 = R_1 i_1,$$

$$[2]: u_2 = -R_2 i_1,$$

și în consecință:

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1},$$

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1} u_1.$$

Se constată că tensiunea de ieșire are semn opus celei de intrare, ceea ce explică numele adoptat pentru acest circuit. Dacă $R_2 > R_1$, atunci acest circuit realizează amplificarea tensiunii de intrare, în caz contrar ele produs o atenuare a ei.

Aplicația 2: Amplificatorul neinversor

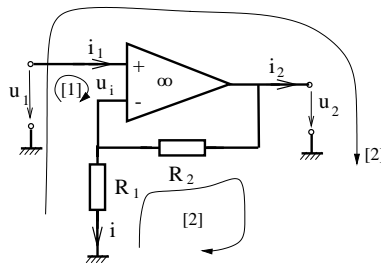


Fig. 3.31.

În acest caz se constată că $i_1 = 0$ și dacă $u_i = 0$, rezultă:

$$[1]: u_1 = R_1 i.$$

Și în acest caz, deoarece curentul de intrare este nul cele două rezistoare vor fi parcurse de același curent i , iar

$$[2]: u_2 = (R_2 + R_1)i.$$

În consecință:

$$u_2 = \frac{R_2 + R_1}{R_1} u_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_1.$$

Tensiunea de ieșire are același semn cu tensiunea de intrare, dar este amplificată. În particular, în cazul în care $R_1 \rightarrow \infty$ se obține circuitul din figura 32, la care:

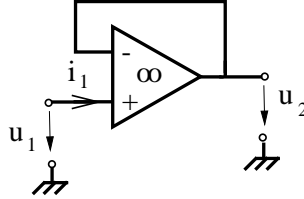


Fig. 3.32.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ u_2 = u_1, \end{cases}$$

indiferent de valoarea rezistenței R_2 , motiv pentru care acest circuit se numește repetor de tensiune.

Se constată că amplificatorul neinversor are ecuațiile identice cu cele ale sursei de tensiune comandate în tensiune, factorul de transfer în tensiune fiind $\alpha = (1 + R_2/R_1) \geq 1$.

Pentru realizarea unei surse de tensiune comandată în tensiune cu un factor de transfer negativ se poate folosi amplificatorul inversor, precedat de un repetor de tensiune, care asigură izolarea circuitului, respectiv condiția $i_1 = 0$ (figura 33)

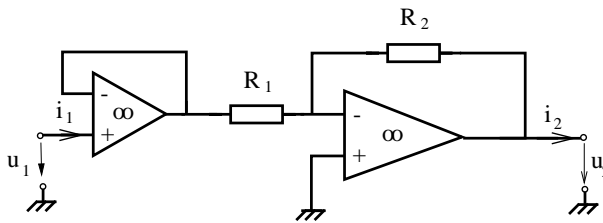


Fig. 3.33.

Aplicația 3: Realizarea surselor comandate cu amplificatoare operaționale. Circuitul din figura 34 are ecuațiile:

$$u_1 = 0, u_2 = -Ri_1,$$

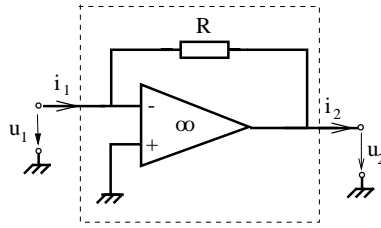


Fig. 3.34.

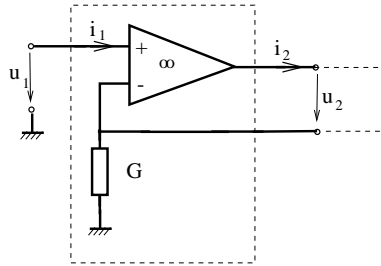


Fig. 3.35.

corespunzatoare sursei de tensiune comandată în curent, la care rezistența de transfer $\rho = -R$. Circuitul din figura 35 are ecuațiile:

$$i_1 = 0, \quad i_2 = Gu_1,$$

corespunzatoare unei surse de curent comandate în curent la care conductanța de transfer $\gamma = G$. Prin conectarea acestor circuite ca în figura 36 se obține un circuit, la care:

$$u_1 = 0, \quad i_2 = RGi_1,$$

deci are o comportare de tipul unei surse de curent comandate în curent, având factorul de transfer $\beta = RG$.

Aplicația 4: Circuite de derivare și integrare.

Prin utilizarea elementelor reactive, cum sunt bobinele și condensatoarele în locul rezistoarelor folosite în circuitele anterioare se obțin circuite care pot asigura derivarea sau integrarea în timp a tensiunii sau intensității curentului de la intrare.

De exemplu, circuitul din figura 37, numit circuit de derivare, va absorbi la intrare curentul:

$$i_1 = C \frac{du_1}{dt},$$

deci va avea tensiunea de ieșire:

$$u_2 = -Ri_1 = -RC \frac{du_1}{dt},$$

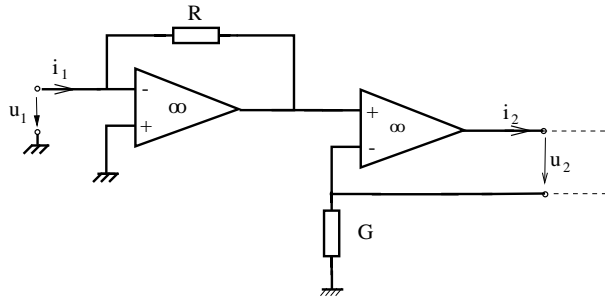


Fig. 3.36.

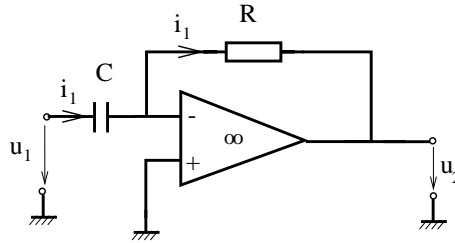


Fig. 3.37.

proporțională cu derivata față de timp a tensiunii de intrare. În schimb, în circuitul din figura 38, numit circuit de integrare, are ecuațiile:

$$i_1 = \frac{u_1}{R},$$

$$u_2 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_1(t') dt' = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_1(t') dt'.$$

Circuitul din figura 39 are tensiunea de ieșire:

$$u_2 = -L \frac{di_1}{dt},$$

proporțională cu derivata curentului de intrare.

Aplicația 5: Convertoarele de negativare.

Analizând circuitul din figura 40, rezultă că $i_1 = i_2$ și $u_1 = Ri$, $u_2 = -Ri$, deci:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 \\ u = -u_1, \end{cases}$$

motiv pentru care acest circuit se numește convertor pentru negativarea tensiunii (UNIC). Dacă la bornele de ieșire ale acestui circuit se conectează o rezistență de sarcină pozitivă $R_s > 0$, se constată că față de bornele de intrare, circuitul se comportă ca un element dipolar rezistiv, la care $u_1 = -u_2 = -R_s i_2 = -R_s i_1$, ceea

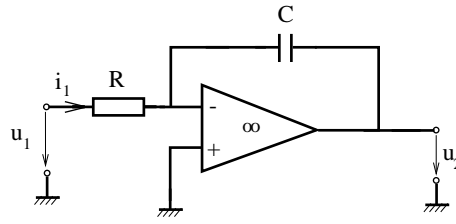


Fig. 3.38.

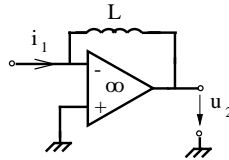


Fig. 3.39.

ce corespunde unei rezistențe negative. (bornele de intrare (u_1, i_1) sunt asociate după regula de la receptoare !). Dacă la bornele de ieșire ale cuadripolului UNIC se conectează o bobină cu $L_s > 0$ elementul se comportă față de bornele de la intrare ca o bobină cu inductivitatea negativă egală cu $-L_s$. Pentru realizarea unui condensator cu capacitate negativă la bornele de ieșire se conectează un condensator cu $C_s > 0$. Circuitul din figura 41, numit convertizor de negativare a curentului (INIC) are ecuațiile:

$$u_1 = u_2, \quad i_1 = -i_2,$$

rezultate din ecuațiile Kirchhoff scrise pe buclele [1] și [2].

Și în acest caz, dacă la bornele de ieșire se conectează un rezistor cu rezistența R_s pozitivă, $u_2 = R_s i_2$, rezultă ca față de bornele de intrare $u_1 = u_2 = R_s i_2 = -R_s i_1$ circuitul se comportă ca un rezistor cu rezistență negativă.

3.13 Bobine ideale cuplate magnetic

Perechea de bobine ideale cuplate magnetic reprezintă un element de circuit cuadripolar diport cu bornele polarizate (figura 42) caracterizat prin relațiile:

$$u_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}. \quad (3.113)$$

Acestea sunt valabile în următoarele două condiții:

- ambele porți au tensiunea asociată în regula de la receptoare față de intensitate;

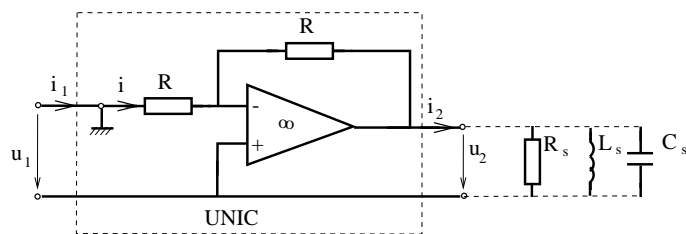


Fig. 3.40.

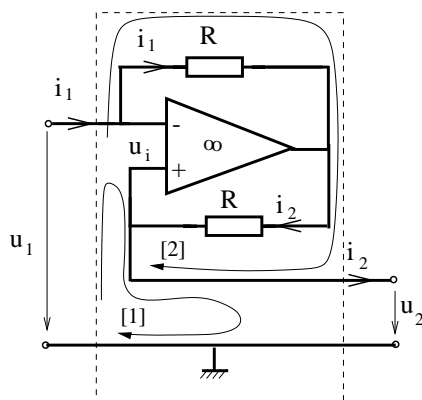


Fig. 3.41.

- ambii curenți au aceeași poziție față de bornele polarizate (ori ambii întră în bobine prin bornele polarizate, ori ambii ies din bobine prin aceste borne).

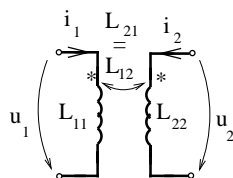


Fig. 3.42.

La schimbarea unui sens de referință față de aceasta situație considerată standard, se modifică semnul mărimii respective din ecuație. Perechea de bobine cuplate magnetic este caracterizată de matricea inductivităților:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

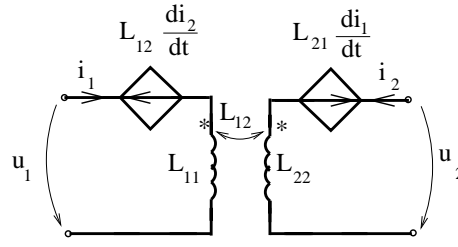


Fig. 3.43.

care se presupune simetrică. Elementele diagonale ale acestei matrice (L_{11}, L_{22}) se numesc inductivități proprii, iar cele nediagonale ($L_{12} = L_{21}$) se numesc inductivități mutuale. Elementul ideal astfel definit poate fi generalizat, prin considerarea a n bobine cuplate magnetic, care alcătuiesc un circuit multipolar n -port, cu ecuațiile:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + \dots + L_{1n} \frac{di_n}{dt}, \\ &\dots \\ u_n &= L_{n1} \frac{di_1}{dt} + L_{n2} \frac{di_2}{dt} + \dots + L_{nn} \frac{di_n}{dt}, \end{aligned}$$

în condițiile standard evidențiate anterior. Folosind notația matriceală:

$$i = [i_1, i_2, \dots, i_n]^T, \quad u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, \quad (3.114)$$

rezultă ecuațiile constitutive:

$$u = L \frac{di}{dt}, \quad (3.115)$$

în care $L = [L_{ij}]$ este o matrice pătrată și simetrică, independentă de starea electrică a sistemului de bobine. La bobinele cuplate se constată că tensiunea la bornele unei bobine conține în afara unui termen proporțional cu derivata curentului din propria bobina și alți termeni proporționali cu vitezele de variație ale curenților din bobinele cu care acestea este cuplată, termeni numiți tensiuni induse prin cuplaj. Folosând surse de tensiune comandate în derivata curentului, perechea de bobine cuplate admite schema echivalentă din figura 43.

Este evident că bobinele necuplate sunt cazuri particulare ale bobinelor cuplate, la care inductivitățile mutuale sunt nule ($L_{ij} = 0$, pentru $i \neq j$).

Pentru a caracteriza comportarea energetică a unui sistem de bobine se calculează puterea transferată pe la borne:

$$p = \sum_{k=1}^n u_k i_k = \sum_{k=1}^n i_k \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_j}{dt} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} i_k \frac{di_j}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} L_{kj} i_k i_j.$$

Se constată că energia unui sistem de bobine este:

$$w = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} i_k i_j = \frac{1}{2} i^T L i.$$

În particular, în cazul unei perechi de bobine se obține:

$$\begin{aligned} p &= u_1 i_1 + u_2 i_2 = i_1 \left(L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \right) + i_2 \left(L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2 \right] = \frac{dw}{dt}, \end{aligned}$$

deci:

$$w = \frac{L_{11} i_1^2}{2} + \frac{L_{22} i_2^2}{2} + L_{12} i_1 i_2.$$

Condiția necesară și suficientă pentru ca această energie să fie nenegativă pentru orice valori ale curenților este ca matricea inductivităților să fie pozitiv definită. Această condiție este îndeplinită pentru toate bobinele reale, la care inductivitățile proprii sunt pozitive $L_{11} > 0$, $L_{22} > 0$, iar determinantul matricei L este pozitiv, respectiv $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$.

În consecință inductivitatea mutuală $M = L_{12} = L_{21}$, satisface inegalitatea

$$M^2 < L_{12}L_{21}.$$

La limită, valoarea maximă a inductivității poate fi cel mult media geometrică a inductivităților proprii, $M = \sqrt{L_{11}L_{22}}$, în acest caz se spune că bobinele sunt cuplate perfect.

3.14 Elemente multipolare neliniare

Un element neliniar rezistiv cu n borne este caracterizat prin $n - 1$ funcții caracteristice de tot atâtea variabile reale. De exemplu, aceste funcții pot exprima intensitățile curenților în funcție de potențiale:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}); \\ i_2 &= g_2(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}); \\ &\dots \\ i_{n-1} &= g_{n-1}(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}). \end{aligned}$$

urmând ca i_n să fie suma acestor curenți luată cu semn schimbat iar $V_n = 0$. Dacă bornele se cuplează în perechi, numite porți, la care $i' = i''$, atunci caracterizarea elementului multiport este posibilă folosind $m = n/2$ funcții reale. Acestea pot exprima, de exemplu, curenții din porți în funcție de tensiunile la bornele porților:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(u_1, u_2, \dots, u_n); \\ i_2 &= g_2(u_1, u_2, \dots, u_n); \\ &\dots \\ i_n &= g_{n-1}(u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

În particular, în cazul cuadripolilor, dacă:

$$\begin{aligned} i_1 &= g_1(u_1, u_2), \\ i_2 &= g_2(u_1, u_2). \end{aligned}$$

se spune că elementul este diport controlat în tensiune.

Dacă elementul este controlat în curent, el va fi caracterizat prin ecuațiile:

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(i_1, i_2), \\ u_2 &= f_2(i_1, i_2). \end{aligned}$$

În afara acestor două moduri de caracterizare se mai pot concepe încă alte patru distincte, după cum mărimile de control sunt (i_1, u_1) , (i_2, u_2) , (i_1, u_2) și respectiv (i_2, u_1) , numite moduri hibride.

Pentru modelarea elementelor multipolare neliniare sunt utile sursele comandate neliniar, care sunt elemente ideale de tip cuadripol diport, ce generalizează comportarea surselor comandate liniar.

Sursa de tensiune comandată neliniar în tensiune are ecuațiile constitutive:

$$i_1 = 0, u_2 = f(u_1).$$

Sursa de curent comandată neliniar în curent are ecuațiile constitutive:

$$u_1 = 0, i_2 = g(i_1).$$

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

Sursa de tensiune comandată neliniar în curent are ecuațiile constitutive:

$$u_1 = 0, u_2 = e(i_1).$$

Sursa de curent comandată neliniar în tensiune are ecuațiile constitutive:

$$i_1 = 0, i_2 = h(u_1).$$

Se constată că fiecare din aceste patru elemente ideale este caracterizat de câte o funcție caracteristică, $f, g, e, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Aceste elemente ideale nu sunt elemente primitive deoarece ele pot fi modelate prin surse comandate liniar și rezistoare neliniare, după cum rezultă din exemplul dat în figura 44.

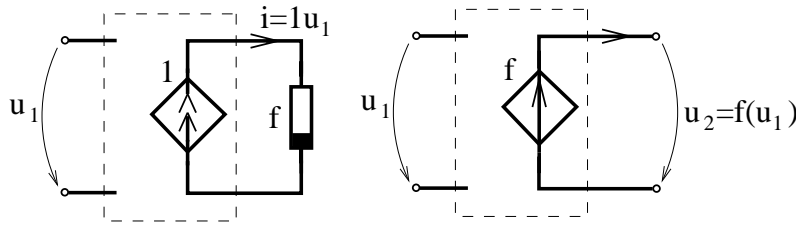


Fig. 3.44.

Un element ideal util în modelarea circuitelor electronice ideale îl reprezintă modelul neliniar al amplificatorului operațional.

Modelul liniar al amplificatorului liniar, prezentat anterior, are dezavantajul că tensiunea de ieșire poate lua valori oricât de mari, ceea ce nu corespunde realității.

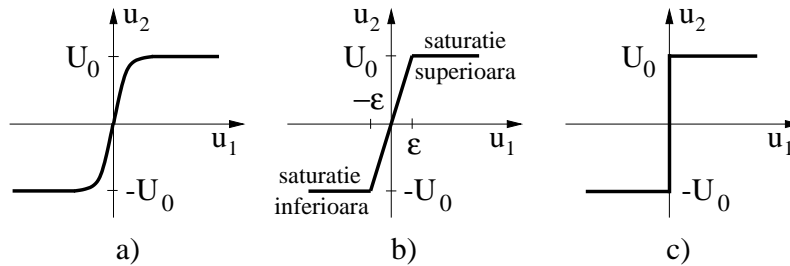


Fig. 3.45.

Dependența tensiunii de ieșire u_2 în funcție de cea de intrare u_1 are în cazul amplificatoarelor reale o comportare de tipul celei reprezentate în figura 45.a. Aceasta poate fi aproximată liniar pe porțiuni (fig. 45.b) prin funcția:

$$u_2 = \begin{cases} u_0, & u_1 < -\varepsilon \\ Au_1, & -\varepsilon < u_1 < \varepsilon \\ u_0, & u_1 > \varepsilon \end{cases}$$

în care $\varepsilon = A/u_0$. Se constată că tensiunea de ieșire în acest model este limitată $|u_2| \leq u_0$, modelul linear al amplificatorului linear fiind acceptabil doar pentru tensiunii suficient de mici aplicate la intrare $|u_2| \leq \varepsilon$. Dacă se consideră că amplificarea în buclă deschisă este nemărginită $A \rightarrow \infty$ și implicit $\varepsilon \rightarrow \infty$ se obține modelul ideal al amplificatorului operațional cu limitare. Acest element ideal este o sursă de tensiune comandată neliniar în tensiune, cu ecuația caracteristică $u_2 = U_0 \cdot \text{sgn}(u_1)$.

Aplicația 1: Circuitul comparator.

Un exemplu tipic de circuit în care modelul perfect al amplificatorului operațional nu poate fi utilizat este circuitul comparator (fig. 46).

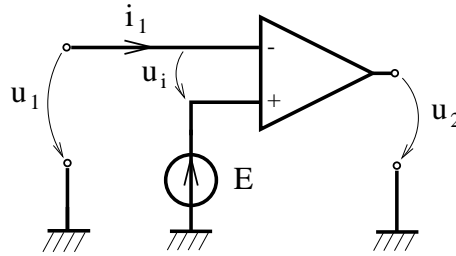


Fig. 3.46.

Se va presupune că $E < U_0$. Aplicând la intrare o tensiune $u_1 = u_1(t)$, se constată ca tensiunea $u_i = u_1(t) - E \neq 0$, și în consecință amplificatorul se saturează superior sau inferior, în funcție de semnul mărimii $u_1 - E$. Tensiunea de ieșire $u_2 = U_0 \cdot \text{sgn}(u_1(t) - E)$ este pozitivă și egală cu U_0 , dacă $u_1(t) > E$ și este negativă și egală cu $-U_0$, dacă $u_1(t) < E$.

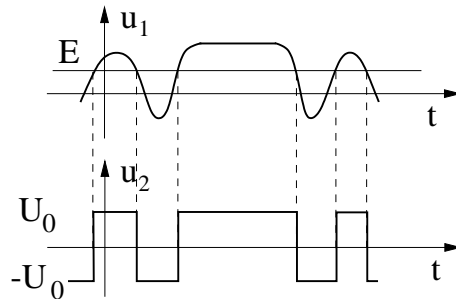


Fig. 3.47.

Se realizează în acest fel compararea între $u_0(t)$ și E . Dacă $u_1 < 0$, atunci amplificatorul operațional se saturează superior iar dacă $u_1 < E$, atunci amplificatorul operațional se saturează inferior.

Folosind acest circuit se detectează situațiile în care tensiunea de intrare $u_1(t)$ depășește un anumit prag E (fig. 47).

Aplicația 2: Reacția negativă și pozitivă.

Exceptând cazul comparatorului, în toate circuitele cu amplificatoare operaționale prezentate anterior, se constată că borna de ieșire este conectată cu intrarea inversoare printr-un element dipolar de circuit. Această situație este cunoscută sub numele de reacție negativă. Reacția negativă face posibilă funcționarea amplificatorului în zona liniară, pentru o gamă largă de tensiuni de intrare, și permite adoptarea modelului perfect pentru amplificatorul operațional. Utilizarea modelului liniar perfect al amplificatorului operațional nu este permisă în cazul reacției pozitive, deoarece în acest caz tensiunea de intrare u_i nu mai este obligatoriu nulă, circuitul evoluând către starea de saturație, ceea ce impune folosirea modelului cu limitare.

De exemplu, circuitul din figura 48 este un circuit cu reacție pozitivă.

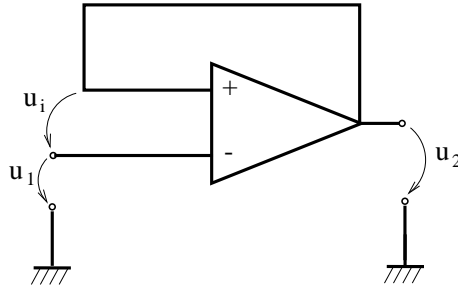


Fig. 3.48.

Dacă de presupune că amplificatorul operațional se află în starea de saturație superioară $u_2 = U_0$, el va rămâne în această stare cât timp $u_i = u_2 - u_1 = U_0 - u_1 > 0$, deci dacă $u_1(t) < U_0$ (fig. CEVA).

Dacă $u_1 > U_0$, atunci amplificatorul basculează în starea de saturație inferioară și tensiunea de ieșire devine $u_2(t) = -U_0$. El se va menține în această stare atât timp cât $u_i = u_2 - u_1 = -U_0 - u_1 < 0$, deci pentru $u_1 > -U_0$.

Se constată că în planul $u_1 - u_2$, caracteristica acestui circuit prezintă fenomenul de histerezis (fig. 49).

Aplicația 3: Convertoarele de negativare în regiunea de saturație.

Convetoarele de negativare UNIC și INIC, realizate cu amplificatoare operaționale, satisfac relațiile $u_2 = -u_1$, $i_2 = i_1$ și respectiv $u_2 = u_1$, $i_2 = -i_1$ pentru valori ale tensiunii de intrare $|u_1| < U_0$. Deoarece tensiunea de ieșire nu poate depăși în modul valoarea U_0 , rezultă că dacă $|u_1| > U_0$, amplificatoarele operaționale se saturează și $u_2 = \pm U_0$.

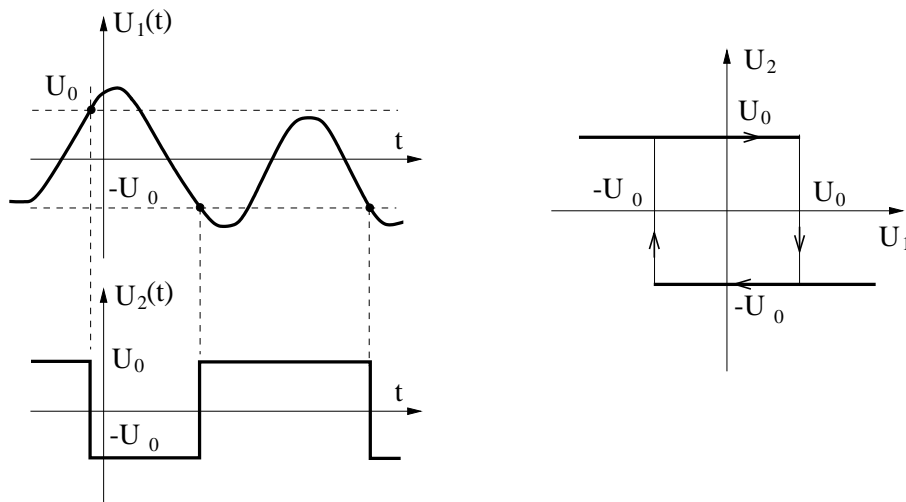


Fig. 3.49.

De exemplu, circuitul INIC cu sarcină rezistivă (fig. 50.a) aflat în saturație superioară admite schema echivalentă din figura 50.b, (cu $u_2 = U_0$), cât timp

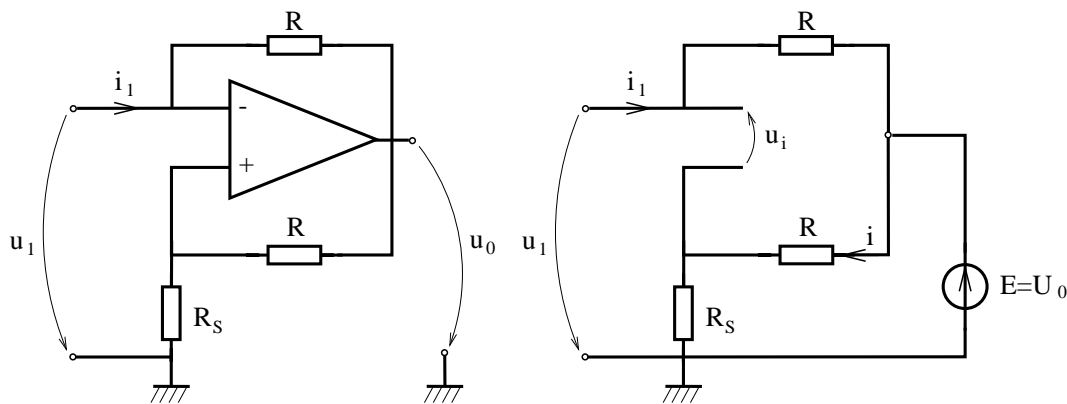


Fig. 3.50.

$u_i = R_s i_1 - u_1 > 0$, ceea ce corespunde condiției $u_1 < R_s i_1 = R_s U_0 / (R + R_s)$. În această stare $u_1 = R i_1 + E = R i_1 + U_0$. Dacă amplificatorul operațional este saturat inferior, tensiunea de ieșire este $u_0 = -U_0$ (fig. CEVA) și va rămâne în această stare cât timp $u_i = R_s i_1 - u_1 < 0$, ceea ce corespunde condiției $u_1 > R_s i_1 = -R_s U_0 / (R + R_s)$. În această stare $u_1 = R i_1 + E' = R i_1 U_0$.

În regiunea liniară, amplificatorul operațional asigură o relație $u_1 = -R_s i_1$, valabilă pentru $|u_0| < U_0$, deci pentru $|(R + R_s) i_1| < U_0$ respectiv $|u_1| (R + R_s) / R_s < U_0$.

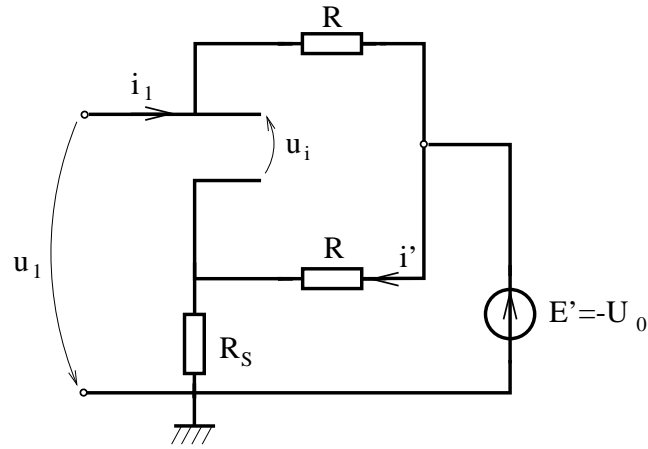


Fig. 3.51.

În consecință caracteristica tensiune-curent corespunzătoare bornelor de intrare are graficul din figura 52.

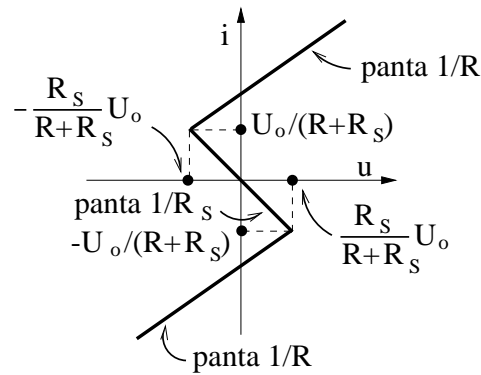


Fig. 3.52.

Față de aceste borne circuitul se comportă ca un rezistor neliniar controlat în curent, care are o zonă cu conductață dinamică negativă $G = -1/R_s$.

3.15 Modelarea elementelor reale liniare de circuit

Elementele reale de circuit electric sunt concepute și realizate în vederea îndeplinirii anumitor funcții. Acestea funcționează în mod normal într-un domeniu limitat de tensiuni, intensități, puteri sau frecvențe. Depășirea acestor domenii

determină distrugerea componentei sau are loc o modificare sensibilă a comportării lor. De obicei, depășirea unui curent limită, specific componentei, determină fenomene ireversibile de avalanșe, depășirea unei tensiuni limită determină apariția fenomenului de străpungere, care este însoțit de modificări fizico-chimice ireversibile, depășirea puterii limită determină apariția solicitărilor termice care pot duce la distrugere termică a componentei iar depășirea frecvenței limită determină apariția unor efecte de pierderi suplimentare (prin efect pelicular sau curenți turbionari) sau a unor efecte de propagare, care fac ca elementul real să se comporte cu totul diferit. Aceste fenomene nu pot avea loc în cazul elementelor ideale, definite prin ecuațiile constitutive, la care $i \in R$, $u \in R$.

În consecință modelarea elementelor reale prin elemente ideale nu poate fi făcută cu rezultate satisfăcătoare decât într-un domeniu limitat.

Este evident că pentru a studia comportarea unei componente în regimurile anormale de funcționare, modelarea nu poate fi limitată doar la domeniul normal de funcționare.

De exemplu, spre deosebire de rezistoarele ideale, cele reale satisfac relația $u = Ri$, doar pentru valori limitate ale intensității curentului electric ($i \leq i_{max}$), la depășirea căreia puterea disipată ($P > P_{max} = Ri_{max}^2$) determină distrugerea termică a componentei. La frecvență suficient de mare fenomenul de inducție electromagnetică devine important în funcționarea componentei, astfel încât aceasta trebuie modelată ca în figura 53.a cu o schemă echivalentă conținând pe lângă rezistorul ideal și o bobină (cu o inductivitate neglijabilă numită parazită).

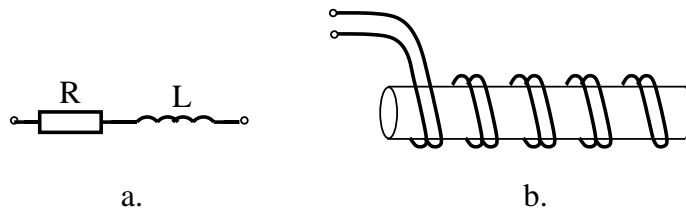


Fig. 3.53.

Pentru a micșora inductivitatea parazită și a extinde domeniul de frecvență admisibil se iau măsuri speciale în construirea rezistoarelor. De exemplu, rezistoarele antiinductive sunt construite dintr-un fir dublu (fig. 53.b) astfel încât aria suprafeței definite de curba conductorului să fie mai mică. Prin această metodă inductivitatea parazită se micșorează sensibil, dar nu este eliminată complet. Considerând un tronson de lungime Δx din perechea de fire se constată că acesta prezintă în afara rezistenței ΔR și o inductivitate ΔL precum și o capacitate ΔC între cele două fire. Cu cât tronsonul de conductoare este mai mare, cu atât comportarea acestui model se apropie mai mult de comportarea componentei reale. La frecvențe mici se poate adopta un singur tronson, dar la frecvențe foarte mari trebuie să se considere că $\Delta x \rightarrow 0$, ceea ce permite modelarea undelor ce se

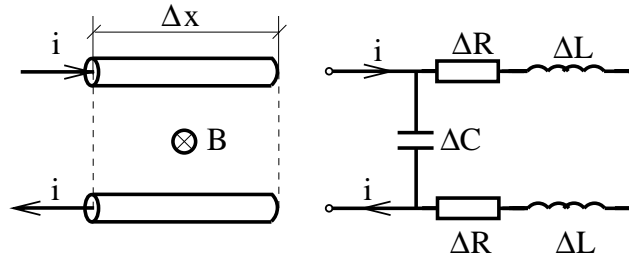


Fig. 3.54.

propagă de firul dublu. În acest caz limită, modelul conține elemente de circuit cu parametri distribuiți, spre deosebire de cazul $\Delta x \neq 0$, în care modelul rezistorului ideal este construit cu elemente având parametri concentrați.

Bobinele reale prezintă pe lângă inductivitatea proprie L și o rezistență a firului care nu poate fi neglijată. Rezultă că acestea se pot modela la frecvențe mici prin schema din figura CEVA.

La frecvențe mari efectele peliculare din conductorul bobinei fac necesară adoptarea unei scheme mai complicate de tipul celei din figura 55.a.

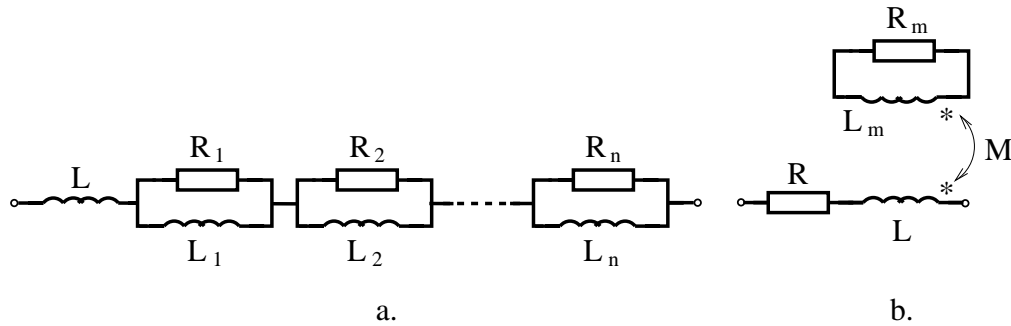


Fig. 3.55.

Dacă bobina are miez magnetic, atunci curenții turbionari induși în acest miez pot influența comportarea bobinei. O schemă simplă ce ia în considerație acest efect este cea din figura 55.b, în care în afara rezistenței conductorului R și inductivitatea proprie L , mai intervin, inductivitatea miezului L_m , rezistența electrică a miezului R_m și inductivitatea de cuplaj M , între miez și înfășurarea bobinei.

La frecvențe înalte trebuie luat și efectul capacitiv care apare între spirele bobinei (fig. 56).

De altfel, între conductoarele terminale ale oricărei componente există o capacitate parazită care poate avea un rol important la frecvențe foarte înalte. De asemenea aceste conductoare terminale au și o inductivitate proprie parazită.

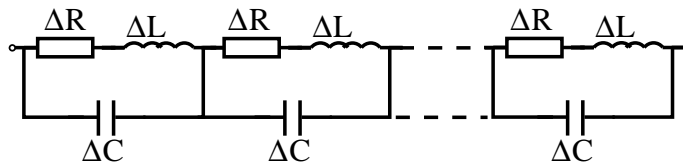


Fig. 3.56.

Condensatorul ideal este componenta a cărei comportare se apropie cel mai mult de omologul său ideal. Totuși și în acest caz, dielectricul nu este un izolator perfect, existând un curent de pierderi și implicit o rezistență de izolație, care nu este infinită. La frecvențe foarte înalte se face simțită și inductivitatea parazită a componentei (fig. 57).

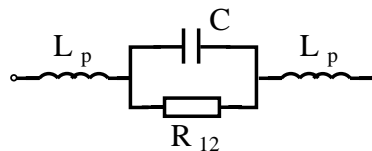


Fig. 3.57.

Generatoarele reale admit modele mai simple sau mai complicate, în funcție de principiul lor constructiv, care poate fi electrochimic, electronic, electromecanic etc. În orice caz, aceste modele vor conține cel puțin o sursă ideală de tensiune sau curent. Cel mai simplu model este cel al generatorului real de tensiune (E, R) sau de curent (J, G).

Adoptarea unui model ideal pentru generatorul real, respectiv neglijarea rezistenței interne $R = 0$ sau a conductanței interne $G = 0$ trebuie făcută cu maximă precauție, prin compensarea acestor parametri cu cei ai circuitului din care face parte. De exemplu, pentru a studia regimul de scurtcircuit al unui generator real trebuie luată în considerare rezistența sa, oricât de mică este aceasta, altfel se obțin contradicții de tipul $0 = U = E \neq 0$. Iar în studiul regimului de mers în gol al unui generator real trebuie luată în considerare conductanța sa internă oricât de mică ar fi aceasta, deoarece generatorul ideal de curent nu poate funcționa în gol.

Studiul generatoarelor reale în regim variabil impune caracterizarea lor nu numai prin rezistența internă ci și prin inductivitatea lor internă sau chiar printr-un model mai complicat.

Elementele multipolare liniare sunt caracterizate prin relațiile liniare impuse de acestea între potențialele bornelor și curenții prin borne. Aceste aplicații liniare pot fi reprezentate prin matrice pătrate ale căror dimensiuni depind de numărul de borne ale elementului.

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

Considerând cazul cel mai simplu, al elementului tripolar de circuit, la care $n = 3$, starea sa electrică va putea fi caracterizată univoc de doi curenți i_1, i_2 și două potențiale V_1, V_2 (fig. 58.a).

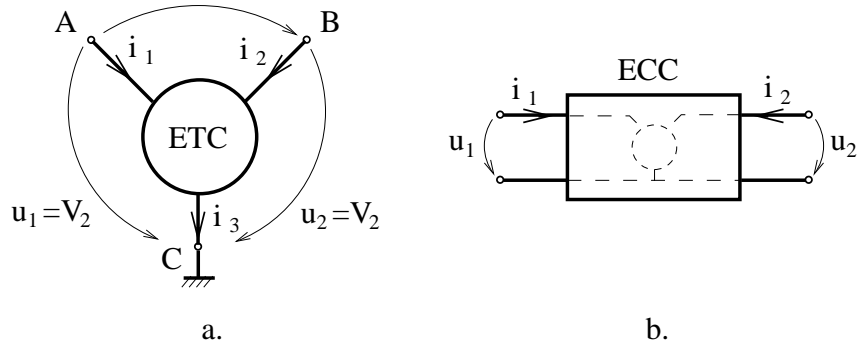


Fig. 3.58.

Conform teoremelor lui Kirchhoff, curentul $i_3 = -(i_1 + i_2)$, iar tensiunile $u_1 = u_{AC} = V_1$, $u_2 = u_{BC} = V_2$ și $u_{AB} = V_1 - V_2$. Considerând borna C , comună atât intrării cât și ieșirii, elementul tripolar de circuit poate fi privit ca un element quadripol diport, caracterizat de mărimile u_1, u_2, i_1, i_2 (fig. 58.b).

Se deosebesc șase moduri distincte pentru a caracteriza și descrie un astfel de element:

	variabile independente	variabile dependente
controlat în tensiune	i_1, i_2	u_1, u_2
controlat în curent	u_1, u_2	i_1, i_2
modul hibrid 1	i_1, u_2	i_2, u_1
modul hibrid 2	u_1, i_2	i_1, u_2
modul transmisie	u_2, i_2	u_1, i_1
modul transmisie	u_1, i_1	u_2, i_2

Relațiile caracteristice pot avea șase forme distincte:

– controlat în curent:

$$\begin{cases} u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} u \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

elementul este caracterizat de matricea rezistențelor R ;

– controlat în tensiune:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} i \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

elementul fiind caracterizat de matricea conductanțelor G , care dacă este ireversibilă satisface relația $R = G^{-1}$;

– modul hibrid 1:

$$\begin{cases} u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea hibridă H ;

– modul hibrid 2:

$$\begin{cases} i_1 = h'_{11}u_1 + h'_{12}i_2 \\ u_2 = h'_{21}u_1 + h'_{22}i_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea hibridă inversă H' , care dacă este inversabilă satisface relația $H' = H^{-1}$;

– modul transmisie 1:

$$\begin{cases} u_1 = t_{11}u_2 - t_{12}i_2 \\ i_1 = t_{21}u_2 - t_{22}i_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea de transmisie T (din considerente istorice această matrice este definită asociând sensurile mărimilor de ieșire u_2, i_2 după regula de la generatoare, ceea ce a impus utilizarea semnelui minus pentru i_2 în ecuațiile anterioare);

– modul transmisie 2:

$$\begin{cases} u_2 = t'_{11}u_1 + t'_{12}i_2 \\ -i_2 = t'_{21}u_1 + t'_{22}i_2 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

în care elementul este caracterizat prin matricea de transmisie inversă T' , care dacă este inversabilă satisface egalitatea $T' = T^{-1}$.

Se constată că în fiecare mod de reprezentare elementul este caracterizat prin patru parametri reali. În unele situații, această matrice este simetrică, iar numărul parametrilor se reduce la trei. Elementele la care matricea R sau G este simetrică se numesc elemente reciproce. În mod normal, cunoașterea matricei caracteristice unui anumit mod de reprezentare permite determinarea celorlalte cinci matrice caracteristice, prin rezolvarea sistemului de două ecuații liniare (singura condiție fiind ca determinantul acestui sistem să fie nenul).

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

Matricea rezistențelor are toate elementele de dimensiunea unor rezistențe. Se constată că:

$$r_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{i_2=0},$$

reprezintă rezistența porții de intrare în condițiile în care poarta de ieșire este în gol (fig. 59.a),

$$r_{12} = \left. \frac{u_1}{i_2} \right|_{i_1=0},$$

reprezintă rezistența de transfer intrare-ieșire, în condițiile în care poarta de intrare este în gol (fig. 59.b),

$$r_{21} = \left. \frac{u_2}{i_1} \right|_{i_2=0},$$

reprezintă rezistența de transfer ieșire-intrare, în condițiile în care poarta de ieșire este în gol (fig. 59.c), iar

$$r_{22} = \left. \frac{u_2}{i_2} \right|_{i_1=0},$$

este rezistența porții de ieșire în condițiile în care poarta de intrare este în gol (fig. 59.d).

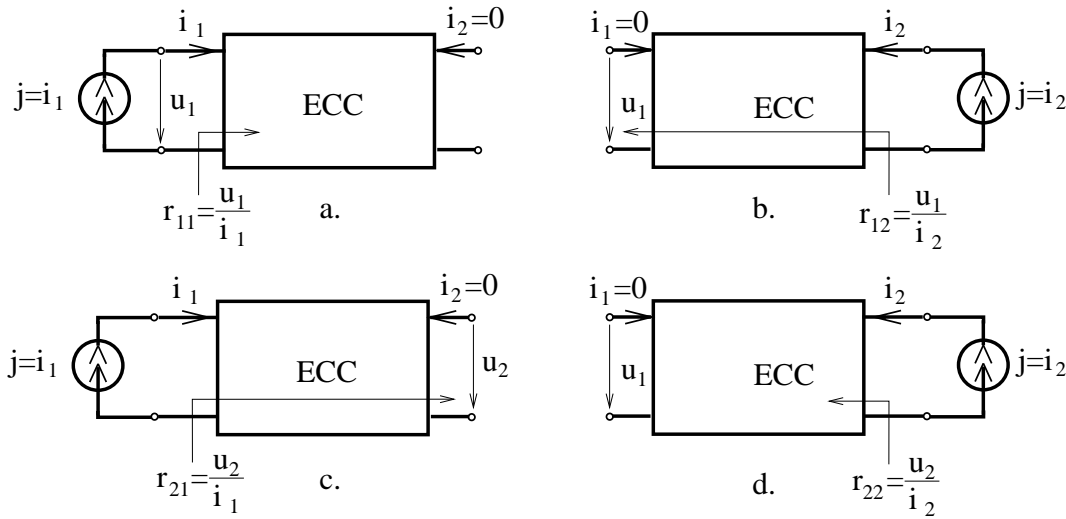


Fig. 3.59.

În mod asemănător poate fi interpretat oricare din ceilalți parametri caracteristici. Se constată că toate elementele matricei G au dimensiunea unor conductanțe:

$$g_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0}, \quad g_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0}, \quad g_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0}, \quad g_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0},$$

definite prin excitarea elementului dipolar cu o sursă ideală de tensiune conectată la o poartă, în condițiile în care cealaltă poartă are bornele scurtcircuitate (fig. 60).

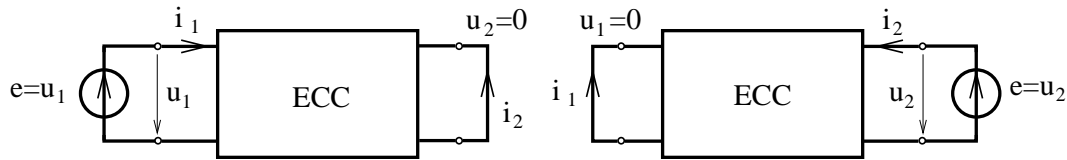


Fig. 3.60.

În modul hibrid de caracterizare, elementele matricei H are unități de măsură diferite:

$$h_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{u_2=0} \text{ --rezistența de intrare (cu ieșirea în scurtcircuit);}$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{i_1=0} \text{ --conductanța de ieșire (cu intrarea în gol);}$$

$$h_{12} = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_1=0} \text{ --factorul adimensional de transfer al tensiunii;}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{u_2=0} \text{ --factorul adimensional de transfer al curentului.}$$

În acest caz poarta de intrare se excită în curent iar cea de ieșire în tensiune. Matricele de transmisie au elementele diagonale adimensionale:

$$t_{11} = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_2=0}, \quad t_{22} = \left. \frac{-i_1}{i_2} \right|_{u_2=0},$$

cu semnificația unor factori de transfer în tensiune sau curent, iar cele nediagonale sunt rezistențe sau conductanțe de transfer:

$$t_{12} = \left. -\frac{u_1}{i_2} \right|_{u_2=0}, \quad t_{21} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{i_2=0},$$

excitația realizându-se în acest caz exclusiv la poarta de intrare, cea de ieșire fiind succesiv în gol respectiv în scurtcircuit.

Analizând ecuațiile constitutive ale surselor comandate liniar se constată că:

- sursa de tensiune comandată în tensiune are ecuația de tip hibrid 2;
- sursa de curent comandată în curent are ecuația de tip hibrid 1;
- sursa de tensiune comandată în curent are ecuația corespunzătoare modului controlat în curent;

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

- sursa de curent comandată în tensiune are ecuația corespunzătoare modului controlat în tensiune.

Deoarece determinantul matricelor acestor elemente este nul, rezultă că aceste moduri sunt specifice fiecărui element considerat.

Sursele comandate liniar pot fi folosite în modelarea oricărui element rezistiv liniar. Dacă acesta este controlat în curent, tensiunea de intrare este:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 = u'_1 + u''_1.$$

Primul termen $u'_1 = r_{11}i_1$ corespunde unui rezistor cu rezistența r_{11} iar al doilea termen $u''_1 = r_{12}i_2$ corespunde unui surse de tensiune comandate liniar în curentul de ieșire, având rezistența de transfer r_{12} . În mod asemănător se obține schema echivalentă corespunzătoare porții de ieșire (fig. 61.a).

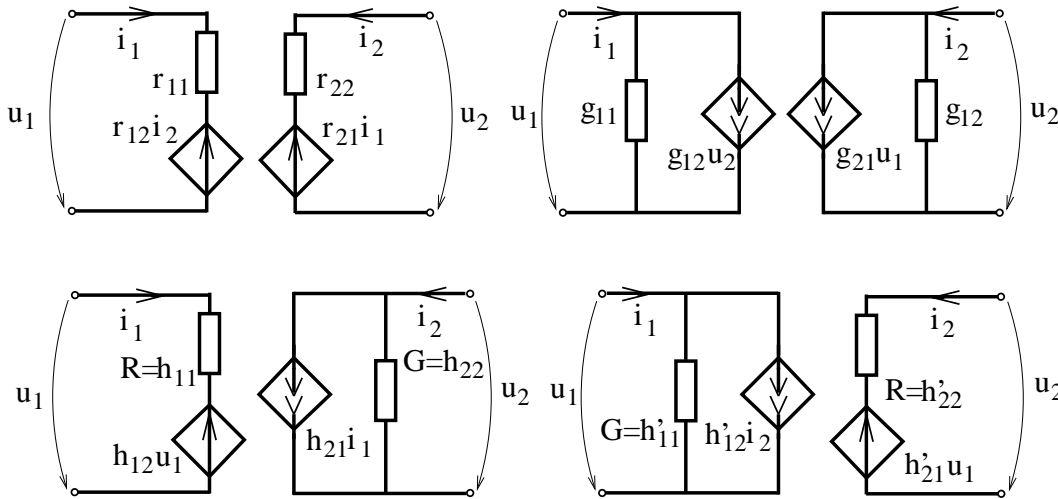


Fig. 3.61.

Elementele cuadripol de circuit controlate în tensiune admit circuite echivalente cu surse comandate ca cele din figura CEVA iar circuitele echivalente modului hibrid 1 și 2 sunt reprezentate în figura CEVA.

Circuitele cuadripolare rezistive liniare reciproce sunt caracterizate doar prin trei parametri și admit scheme echivalente mai simple decât cele din figura CEVA. Se va demonstra că aceste elemente admit scheme echivalente cu trei rezistoare dipolare conectate în Π (fig. 62.a) sau în T (fig. 62.b).

Considerând spre exemplu schema echivalentă în T pentru cazul cuadripolului controlat în curent rezultă:

$$r_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = R_1 + R_3,$$

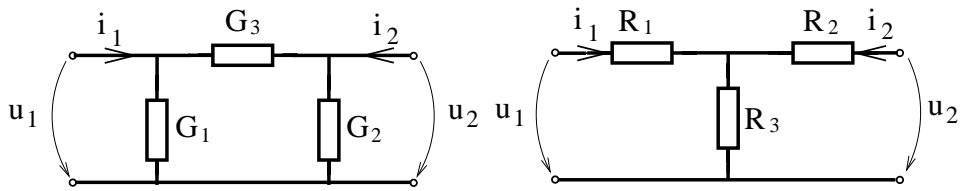


Fig. 3.62.

$$r_{12} = \frac{u_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} = R_3 = \frac{u_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = r_{21},$$

$$r_{22} = \frac{u_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = R_2 + R_3,$$

și matricea rezistențelor de forma:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}.$$

Valorile rezistențelor se determină cu relațiile $R_3 = r_{12} = r_{21}$, $R_1 = r_{11} - r_{12}$, $R_2 = r_{22} - r_{12}$.

Folosind modul de control în tensiune, rezultă pentru cazul cuadripolului în Π matricea conductanțelor:

$$G \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & G_3 \\ G_3 & G_2 + G_2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $R = G^{-1}$, rezultă că (G_1, G_2, G_3) se pot exprima funcție de (R_1, R_2, R_3) .

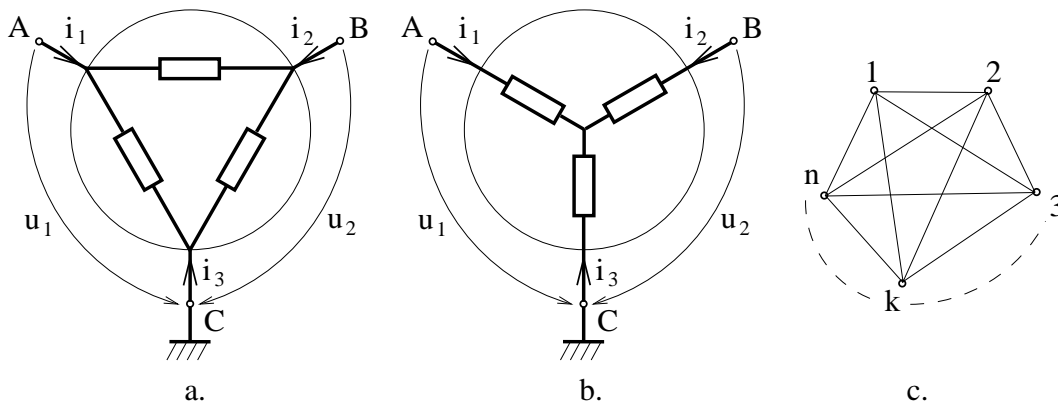


Fig. 3.63.

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

În consecință un element rezistiv tripolar liniar și reciproc admite una din schemele echivalente în triunghi (fig. 63.a) sau în stea (fig. 63.b). Acest rezultat poate fi generalizat la cazul unui element multipolar cu n borne care admite o schemă echivalentă de tip poligon complet cu $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = n(n - 1)/2$ laturi continuând rezistoare liniare (fig. 63.c), matricea conductanțelor G având dimensiunea $(n - 1) \times (n - 1)$ iar curenții $i = [i_1, \dots, i_{n-1}]^T$ exprimându-se printr-o transformare liniară $i = GV$ în funcție de vectorului potențialelor $V = [V_1, \dots, V_{n-1}]^T$.

În regim variabil elementele rezistive nu își modifică modul de comportare, ecuațiile constitutive fiind de tip algebric își mențin forma. Elementele multipolare reale prezintă efecte inductive și capacitive care la frecvențe înalte pot deveni importante. Dacă se iau în considerare doar inductivitățile parazite ale terminalelor și capacitățile între acestea se poate adopta un model de forma celui din figura 64.

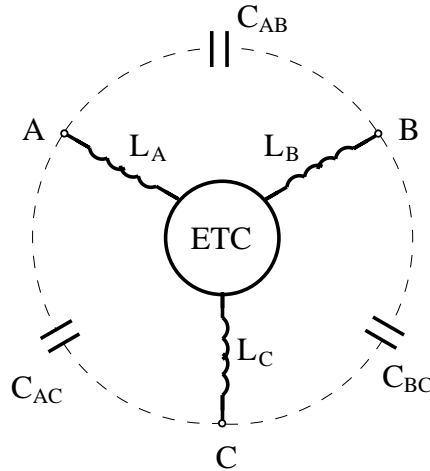


Fig. 3.64.

Un exemplu edificator asupra modului în care se modelează elementele reale de circuit îl reprezintă modelul transformatorului. Acesta la frecvențe joase poate fi modelat ca un cuadripol diport (fig. 65) ce conține o pereche de bobine cuplate. Prezența miezului poate fi modelată printr-o a treia bobină cuplată cu cele asociate celor două înfășurări.

În anumite regimuri capacitatea dintre înfășurări poate juca un rol important, introducerea ei determinând transformarea diportului într-un cuadripol general, la care $i_1 \neq -i_3$ și $i_2 \neq -i_4$, ceea ce impune caracterizarea elementului nu prin două relații $(i_1, i_2) \rightarrow (u_1, u_2)$ ci prin trei relații $(i_1, i_2, i_3) \rightarrow (V_1, V_2, V_3)$ capabile să exprime modul de variație al potențialelor în funcție de curenții din borne.

Se constată că problema determinării celor mai potrivite modele pentru elementele reale de circuit nu este o problemă simplă, necesitând rezolvarea unor

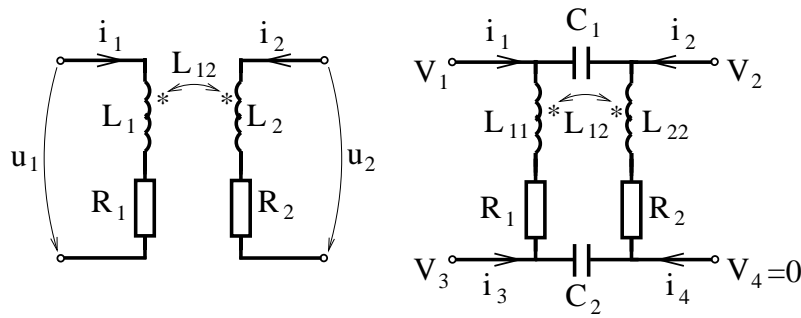


Fig. 3.65.

probleme complicate de câmp electromagnetic, dar și cunoștințe aprofundate de teoria circuitelor electrice. Adoptarea unor modele necorespunzătoare poate determina nu numai descrierea eronată a elementului ci chiar imposibilitatea de a găsi o soluție a circuitului cu elemente ideale.

Aplicația 1: Să se determine frecvența până la care se poate neglija inductivitatea parazită a unui rezistor.

Se consideră un rezistor cu rezistența R și cu inductivitatea L , (fig. 66) parcurs de curentul $i(t) = I \sin \omega t$.

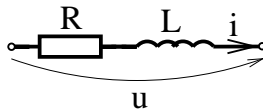


Fig. 3.66.

Tensiunea la bornele acestui element este:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} = RI \sin \omega t + \omega L I \cos \omega t = I \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \sin(\omega t + \varphi).$$

Dacă neglijăm inductivitatea parazită $L = 0$, rezultă $u' = Ri = IR \sin \omega t$.

Eroarea relativă a valorii maxime a curentului este:

$$\frac{u - u'}{u'} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - R}{R} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} - 1.$$

Impunând ca o limită admisibilă a erorii $\varepsilon = 1\%$, rezultă:

$$1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \leq (1 + \varepsilon)^2,$$

ceea ce corespunde la pulsația:

$$\omega < \frac{R}{L} \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \frac{R}{L} \sqrt{\varepsilon^2 - 2\varepsilon} \simeq \varepsilon \frac{R}{L}.$$

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

De exemplu, pentru $R = 100\Omega$ și $L = 1\text{mH}$, rezultă $\omega \leq 10^6$ rad/s, ceea ce corespunde la aproximativ 200kHz.

Aplicația 2: Prin modelarea unui generator real cu parametrii (E, r) cu un generator de tensiune cu t.e.m. E se introduce o eroare.

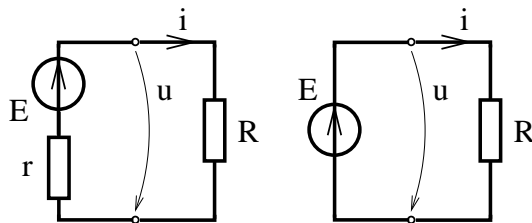


Fig. 3.67.

Considerând că la bornele generatorului se află o rezistență de sarcină R , rezultă valoarea exactă a intensității:

$$i = \frac{E}{R + r},$$

și valoarea aproximativă $i' = E/R$. Eroarea relativă de modelare:

$$\varepsilon' = \frac{i - i'}{i} = \frac{\frac{E}{R + r} - \frac{E}{R}}{\frac{E}{R + r}} = -\frac{r}{R},$$

depinde invers proporțional de rezistența de sarcină R . De exemplu, pentru $R > 100r$, eroarea de modelare $|\varepsilon| < 1\%$ și rezistența internă se poate neglija față de cea de sarcină.

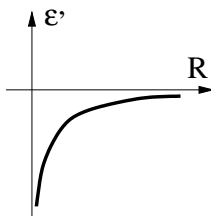


Fig. 3.68.

Dacă același generator real se modelează cu un generator ideal de curent cu c.e.m. $J = E/r$, atunci curentul aproximativ are valoarea $i'' = J$ și eroarea de

aproximare este:

$$\varepsilon'' = \frac{i - i''}{i} = \frac{\frac{E}{R+r} - \frac{E}{r}}{\frac{E}{R-r}} = -\frac{R}{r} = -\frac{g}{G},$$

în care $G = 1/R$ și $g = 1/r$.

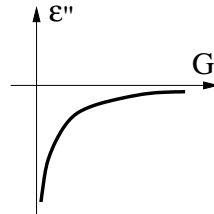


Fig. 3.69.

Dacă conductanța internă g este mult mai mică decât cea externă G , eroarea de modelare este neglijabilă. De exemplu, dacă $g < G/100$, atunci $|\varepsilon''| < 1\%$.

Rezultă că un generator real poate fi modelat cu un generator ideal de curent, dacă rezistența sa internă $r = 1/g$ este mult mai mare decât cea de sarcină $R = 1/G$.

Aplicația 3: Eroarea de modelare a unui amplificator operațional.

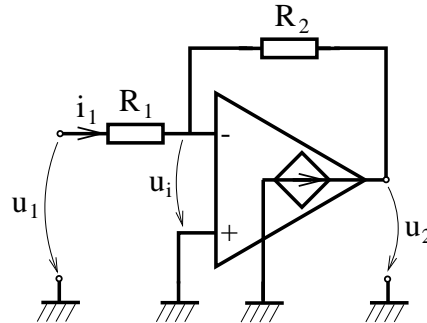


Fig. 3.70.

Se consideră circuitul amplificator inversor (fig. 70) în care amplificatorul operațional se consideră cu amplificare A în buclă deschisă finită.

Ecuatiile circuitului sunt:

$$u_1 = R_1 i_1 - u_i \quad \Rightarrow \quad u_i = R_1 i_1 - u_1$$

$$u_2 = A u_i = -R_2 i_1 - u_i \quad \Rightarrow \quad A R_1 i_1 - A u_1 = -R_2 i_1 - R_1 i_1 + u_1$$

$$i_1(AR_1 + R_2 + R_1) = (A + 1)u_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{A + 1}{AR_1 + R_1 + R_2}u_1$$

$$u_i = \left[\frac{R_1(A + 1)}{(A + 1)R_1 + R_2} - 1 \right] = -u_1 \frac{R_2}{(A + 1)R_1 + R_2}$$

$$u_2 = -u_1 \frac{AR_2}{(A + 1)R_1 + R_2}$$

Dacă $A \rightarrow \infty$ se constată că: $i_1 \rightarrow i_1' = u_1/R_1$, $u_i \rightarrow u_i' = 0$ și $u_2 \rightarrow u_2' = -u_1R_2/R_1$. În consecință, eroarea relativă asupra tensiunii de ieșire obținută prin utilizarea modelului perfect pentru amplificatorul operațional este:

$$\varepsilon = \frac{u_2' - u_2}{u_2'} = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{A}{(A + 1)R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 + R_2}{(A + 1)R_1 + R_2} = \frac{R_1 + R_2}{AR_1 + R_1 + R_2}.$$

În particular, în cazul în care $R_1 = R_2 = R$, rezultă că $\varepsilon = 2/(2 + A)$, care pentru valori uzuale $A = 2 \cdot 10^5$ corepunde la o valoare extrem de mică $\varepsilon = 10^{-5}$. În consecință, modelul perfect al amplificatorului operațional este satisfăcător pentru aplicațiile practice.

3.16 Modelarea cu elemente neliniare ideale

Modelarea elementelor reale de circuit a căror comportare este esențial neliniară trebuie făcută folosind elemente ideale neliniare. Cel mai simplu element neliniar de circuit este rezistorul neliniar. Un astfel de rezistor comandat în tensiune este caracterizat de o funcție reală $i = g(u)$, care poate fi aproximată oricât de bine printr-o funcție liniară pe porțiuni:

$$i = \bar{g}(u) = \begin{cases} m_0u + n_0, & u < u_1 \\ m_1u + n_1, & u \in (u_1, u_2) \\ \dots \\ m_{n-1}u + n_{n-1}, & u \in (u_{n-1}, u_n) \\ m_nu + n_n, & u > u_n \end{cases}$$

Valorile constantelor m_k , n_k pot fi determinate din condițiile de interpolare $g(u_k) = \bar{g}(u_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, la care se adaugă relațiile $g(u_0) = \bar{g}(u_0)$, $g(u_n + 1) = \bar{g}(u_n + 1)$, necesare determinării pantelor segmentelor extreme.

Cu cât numărul n al punctelor de frângere este mai mare, cu atât eroarea de aproximare poate fi făcută mai mică. Un rol important îl joacă punctele de frângere u_k , $k = 1, n$, a căror alegere se recomandă să fie făcută, astfel încât să se

minimizeze eroarea de aproximare. Considerând funcția \bar{g} continuă, caracteristica poate fi reprezentată compact, cu ajutorul funcției modul, sub forma:

$$i = \bar{g}(u) = a_0 + a_1 u + \sum_{j=1}^n b_j |u - u_j|,$$

unde $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ sunt tensiunile în punctele de frângere, iar

$$\begin{aligned} a_1 &= (m_0 + m_n)/2; \\ b_j &= (m_j - m_{j-1})/2; \\ a_0 &= \bar{g}(0) - \sum_{j=1}^n b_j |u_j|. \end{aligned}$$

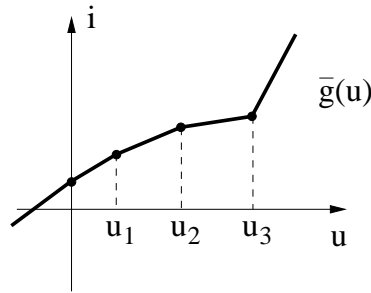


Fig. 3.71.

Se constată că această reprezentare necesită doar $2(n + 1)$ constante reale.

Pe fiecare porțiune $u \in (u_k, u_{k+1})$, elementul având o caracteristică de forma $i = m_k u + n_k$, admite o schemă echivalentă de tip generator real de curent cu conductanța internă $G_k = m_k$ și curentul electromotor $J_k = n_k$.

Prin utilizarea diodelor perfecte se poate stabili o schemă echivalentă care modelează elementul neliniar pe tot domeniul $u \in R$. Se constată că elementul de circuit alcătuit prin înserierea unei astfel de diode cu o sursă reală de tensiune (fig. 72.a) are caracteristica:

$$i = \frac{1}{2} G [|u - E| + (u - E)] = \begin{cases} 0, & u \leq E \\ G(u - E), & u > E \end{cases}$$

al cărui grafic este reprezentat în figura 72.b.

Acest element are doi parametri G, E și este simbolizat prin (D, R, E) , fiind un element unidirecțional, la care $i > 0$.

Dacă $i > 0$ dioda perfectă se comportă ca un conductor perfect iar $u = Ri + E$, ceea ce corespunde la $i = (u - E)/R = G(u - E)$, cu $(u - E) > 0$. În caz contrar, $(u - E) \leq 0$, dioda se comportă ca un izolator perfect și curentul este nul.

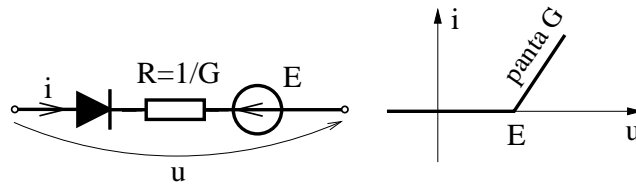


Fig. 3.72.

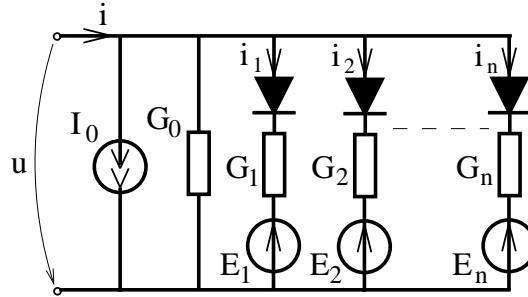


Fig. 3.73.

Prin conectarea în paralel a unor elemente de acest tip, cu un singur punct de frângere, se obține un element de circuit cu caracteristica liniară pe porțiuni (fig. 73).

La acest circuit s-a conectat în paralel și o sursă reală de curent (I_0, G_0) pentru a modela corespunzător comportarea la limita $u \rightarrow -\infty$.

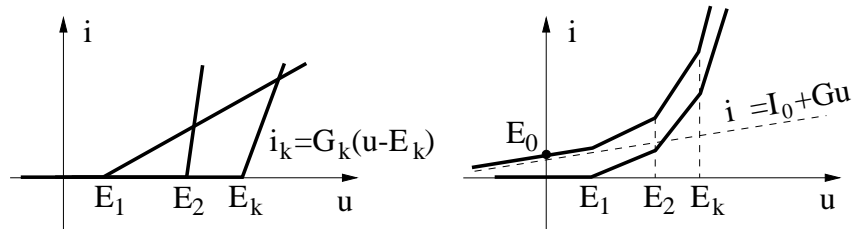


Fig. 3.74.

Caracteristica elementului (fig. 74.b) astfel construit este:

$$i = I_0 + G_0 u + \sum_{k=1}^n i_k = I_0 + G_0 u + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n G_k [|u - E_k| - (u - E_k)].$$

Alegând tensiunile electromotoare $E_k = u_k$, corespunzător punctelor de frângere, conductanțele $G_k = 2b_k$ și parametri $I_0 = a_0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n G_k E_k$, $G_0 = a_1 +$

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n G_k$ rezultă că acest circuit poate modela orice rezistor neliniar controlat în tensiune cu caracteristică liniară pe porțiuni și în mod aproximativ orice rezistor neliniar cu caracteristică $u - i$ continuă.

Dacă în anumite zone, rezistorul are conductanța dinamică negativă este necesară utilizarea unor elemente cu caracteristica: $i = 1/2 G[|u - E| + (u - E)]$, cu $G < 0$.

Aceste elemente active pot fi obținute prin "negativarea" curentului din elementele (D, R, E) . Noul element, simbolizat prin (D, R, E) este tot un element unidirecțional dar cu $i < 0$.

Rezultatele obținute pot fi aplicate prin dualitate și rezistoarelor controlate în curent, la care funcția caracteristică $u = f(i)$ poate fi aproximată liniar pe porțiuni prin:

$$u = \bar{f}(i) = a_0 + a_1 u + \sum_{k=1}^n |i - i_k|.$$

Elementul cu caracteristica:

$$u = \frac{1}{2} R[|i - J| + (i - J)] = \begin{cases} 0, & i \leq J \\ r(i - J), & i > J \end{cases}$$

are un singur punct de frângere, plasat în $i = J$ și poate fi realizat dintr-o sursă reală de curent, conectată în paralel cu o diodă perfectă (fig. 75.a).

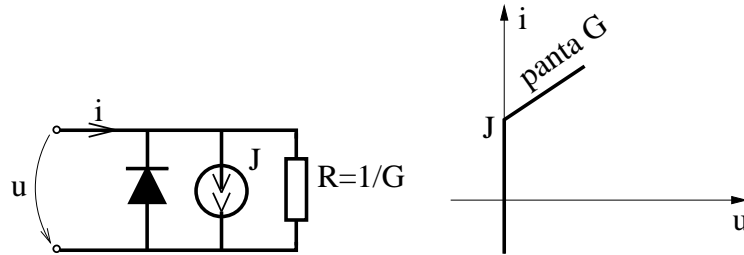


Fig. 3.75.

Acest element simbolizat prin (D, G, J) este controlat în curent. Dacă $u > 0$, dioda perfectă se comportă ca un izolator perfect iar $i = J + Gu$, ceea ce corespunde la $u = R(i - J) > 0$, deci $i > j$. Dacă $i < J$, atunci dioda perfectă se comportă ca un conductor perfect și $u = 0$.

Prin conectarea în serie a unor astfel de elemente de circuit se poate modela funcționarea oricărei caracteristici $u - i$ liniare pe porțiuni (fig. 76.a).

Fiecărui punct de frângere din caracteristica $i = f(u)$ îi corespunde o celulă (D, G, J) :

$$u = E_0 + R_0 i + \sum_{k=1}^n u_k = E_0 + R_0 i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k [|i - J| - (i - J)].$$

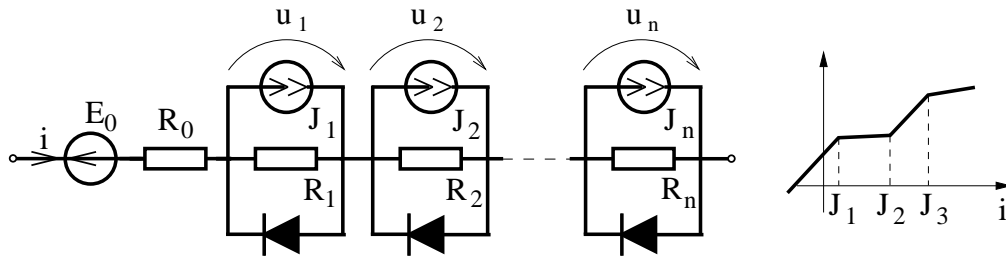


Fig. 3.76.

Alegând curenții electromotori $J_k = i_k$, corespunzător punctelor de frângere, rezultă rezistențele $R_k = 2b_k$ și parametri sursei reale de tensiune $E_0 = G_0 - \frac{1}{2} \sum R_k J_k$, $R_0 = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n R_k$ care permit modelarea comportării elementului pentru $i < J_1$.

Pentru modelarea caracteristicii de magnetizare $\varphi - i$ a bobinelor neliniare se poate utiliza de asemenea tehnica aproximării liniare pe porțiuni. Folosirea surselor liniare comandate în derivată permite modelarea bobinelor neliniare cu ajutorul rezistoarelor liniare. De exemplu, circuitul din figura 77 are următoarea

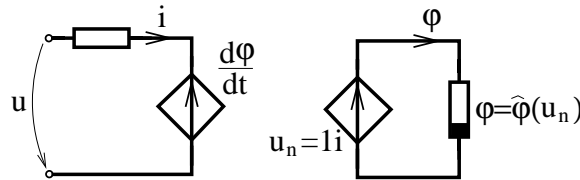


Fig. 3.77.

comportare pe la borne:

$$u = Ri + \frac{d\varphi}{dt} = Ri + \frac{d\hat{\varphi}(u_m)}{dt} = Ri + \frac{d\hat{\varphi}(i)}{dt},$$

modelând funcționarea unei bobine neliniare reale cu rezistența înfășurării R și cu caracteristica de magnetizație dată de funcția $\hat{\varphi}$. S-au folosit în afara rezistorului liniar și a sursei de tensiune comandată liniar în curent, un rezistor neliniar controlat în tensiune și o sursă de tensiune controlată în derivata "curentului" φ . Deoarece circuitul $(u_m, \hat{\varphi})$ este străbătut de un curent egal cu fluxul magnetic el se numește circuit magnetic, iar "tensiunea" $u_m = i$ se numește tensiune magnetică. Această tehnică a circuitelor magnetice poate fi utilizată și la modelarea bobinelor neliniare cuplate magnetic.

Bobinele din figura 78.a, cu n_1 și respectiv n_2 spire înfășurate pe un miez neliniar pot fi modelate prin circuitul neliniar cu surse comandate în derivată,

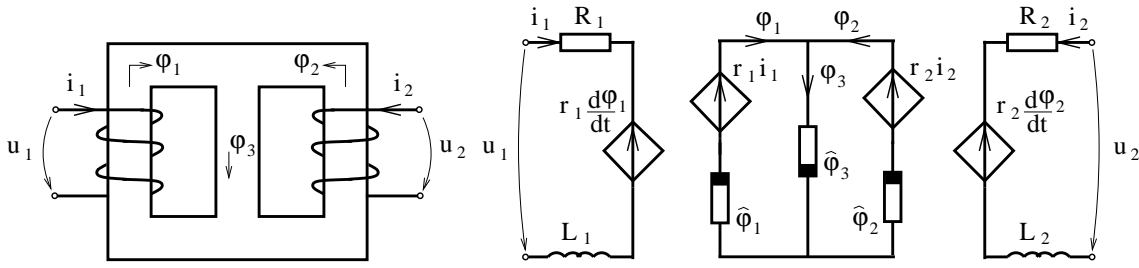


Fig. 3.78.

prezentate în figura 78.b. Acest circuit conține pe lângă cele două rezistențe electrice ale înfășurărilor R_1, R_2 și trei „rezistoare” neliniare cu caracteristicile $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3$, care modelează dependențele flux-tensiune magnetică, specifice celor trei tronsoane ale miezului magnetic. La acest circuit pot fi adăugate bobinele liniare cu inductivitățile L_1, L_2 , ce caracterizează dispersia magnetică prin aer, care este un mediu liniar. La frecvențe mari devin importante efectele de curenți turbionari (pierderile în miez) și cele capacitive, ceea ce impune completarea schemei cu noi elemente ideale.

Pentru modelarea elementelor multipolare rezistive neliniare se folosesc sursele comandate neliniar. Folosind modelul perfect al amplificatorului operațional, și aceste elemente se pot reduce la rezistoare neliniare.

Circuitul cuadripol din figura 79.a se comportă ca o sursă de tensiune comandată în curent, a cărei caracteristică neliniară:

$$u_2 = -f(i_1),$$

este determinată de caracteristica $u - i$ a rezistorului neliniar din reacție.

Circuitul cuadripol din figura 79.b se comportă ca o sursă de curent comandată în tensiune, a cărei caracteristică:

$$i_2 = g(u_1),$$

este identică cu caracteristica $i - u$ a rezistorului neliniar conținut.

Prin combinarea acestor circuite (fig. 80.a) se obține un element cuadripol, la care

$$i_2 = g(u_2') = g(-f(i_1)),$$

deci o sursă de curent controlată neliniar în curent.

Circuitul din figura 80.b satisface relațiile:

$$u_2 = -f(i_1) = -f(g(u_1)),$$

specifice unei surse de tensiune comandată neliniar în tensiune.

Aplicație:

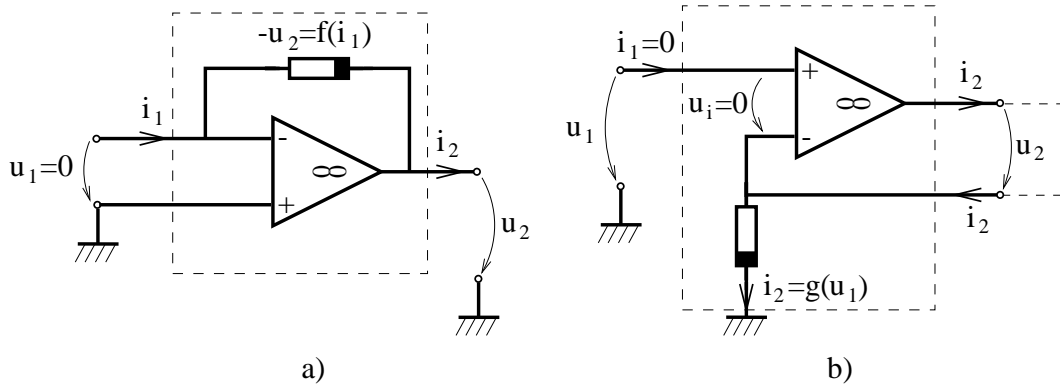


Fig. 3.79.

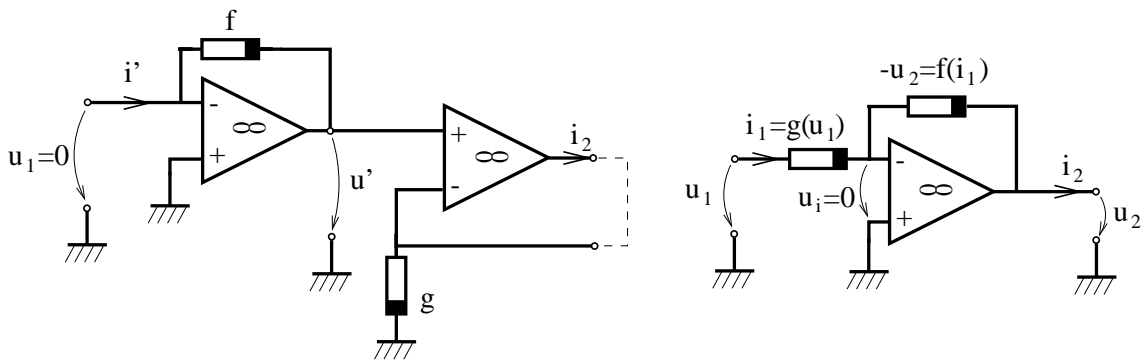


Fig. 3.80.

Considerând rezistorul $i_1 = g(u_1) = Gu_1$ liniar, rezultă $u_2 = -f(Gu_1)$.

În particular, dacă rezistorul neliniar din reacție este alcătuit din două diode Zener, conectate în serie (fig. 81.a) astfel încât $u = u_1 + u_2 = U_2 \text{sgn}(i)$ se constată că:

$$u_2 = -U_2 \text{sgn}(Gu_1),$$

cea ce corespunde unei caracteristici de transfer reprezentate în figura 82, similară amplificatorului operațional cu limitare și identică cu aceasta, dacă se mai introduce un amplificator inversor.

Aplicație:

Un exemplu interesant este cel din figura 83, în care reacția negativă este asigurată de o diodă semiconductoră.

Aplicând o tensiune de intrare $u > E$, intensitatea curentului prin rezistența R are valoarea $i = (u - E)/R > 0$, ceea ce asigură polarizarea directă a diodei D , care în acest caz este în conducție. Tensiunea de ieșire are în consecință o mică valoare negativă, egală cu opusul căderii de tensiune pe diodă, ceea ce face ca

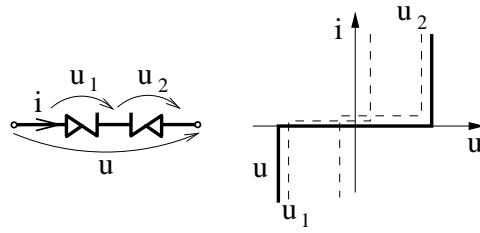


Fig. 3.81.

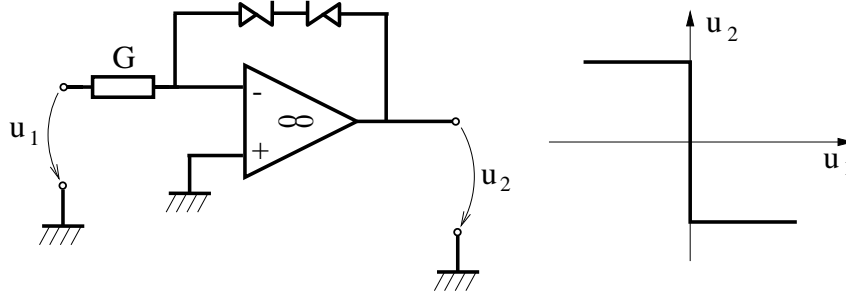


Fig. 3.82.

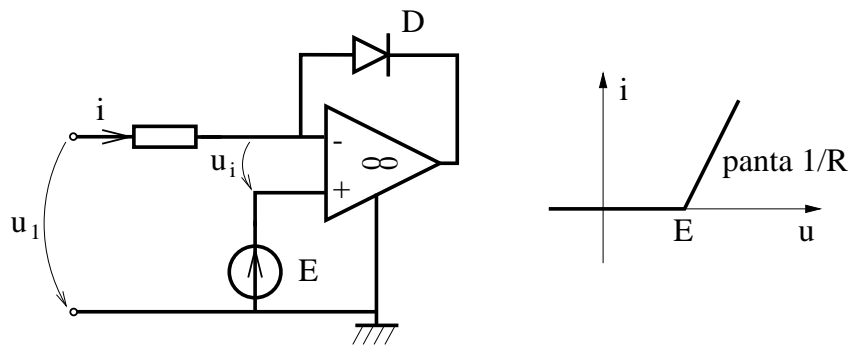


Fig. 3.83.

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

amplificatorul operațional să nu se satureze. În consecință, relația $u - i$ la poarta de intrare are forma $i = (u - E)/R$, pentru $u > E$. Dacă $u < E$, intensitatea curentului prin rezistorul R are tendința să devină negaivă ceea ce blochează dioda D . Tensiunea de intrare a amplificatorului operațional $u_i = E - Ri + u$ ia valori care îl saturează, determinând o tensiune de ieșire $U_2 = U_0$. Dioda D se blochează puternic, deoarece tensiunea la bornele sale devine $u - Ri - U_0 < 0$, ceea ce anulează practic curentul i . În consecință, pentru $u \leq E$ curentul de intrare este $i = 0$ (fig. 83.b). În acest fel se obține un circuit a cărui comportare se apropie foarte mult de cea a unui rezistor neliniar cu un singur punct de frângere. În particular, dacă $E = 0$ și $R = 0$, comportarea circuitului pe la bornele de intrare este foarte asemănătoare cu cea a diodei perfecte, chiar dacă în reacție se folosește o diodă reală. În mod dual, se demonstrează că circuitul din figura 84.a are caracteristica din figura 84.b.

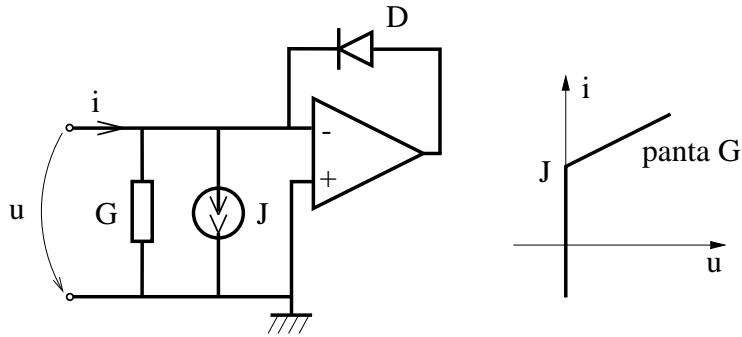


Fig. 3.84.

Aplicație: Modelarea tranzistorului bipolar.

Una din cele mai folosite componente electronice este tranzistorul bipolar. Acesta este un element de circuit cu trei terminale, numite: emitor, bază și colector. În figura 85.a este reprezentat simbolul tranzistorului bipolar *npn*.

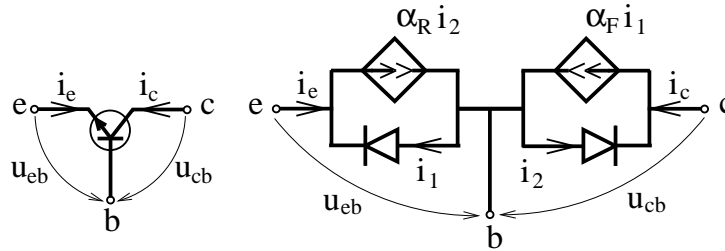


Fig. 3.85.

O caracterizare suficient de bună a acestui element este dată, la frecvențe

mici, de ecuațiile Ebers-Moll:

$$\begin{cases} i_e = -I_{ES}(e^{-u_{eb}/V_0} - 1) + \alpha_R I_{CS}(e^{-u_{cb}/V_0} - 1); \\ i_c = \alpha_F I_{ES}(e^{-u_{eb}/V_0} - 1) - I_{CS}(e^{-u_{cb}/V_0} - 1); \end{cases}$$

Se constată că:

$$\begin{aligned} i_1 &= -I_{ES}(e^{-u_{eb}/V_0} - 1) = f_1(u_{eb}); \\ i_2 &= -I_{CS}(e^{-u_{cb}/V_0} - 1) = f_2(u_{cb}); \end{aligned}$$

sunt funcțiile caracteristice ale unor diode semiconductoare.

Funcțiile caracteristice:

$$\begin{cases} i_e = g_e(u_{eb}, u_{cb}); \\ i_c = g_c(u_{eb}, u_{cb}); \end{cases}$$

au următoarea formă:

$$\begin{aligned} i_e &= i_1 - \alpha_R i_2 = f_1(u_{eb}) - \alpha_R \cdot f_2(u_{cb}); \\ i_c &= -\alpha_F i_1 + i_2 = -\alpha \cdot f_1(u_{eb}) + f_2(u_{cb}); \end{aligned}$$

care permite adoptarea schemei echivalente din figura 85.b.

Schema echivalentă Ebers-Moll este alcătuită din două rezistoare neliniare controlate în tensiune și două surse de curent comandate liniar în curent. În acest model tranzistorul este caracterizat de patru parametri V_0 , I_{ES} , I_{CS} , α_R și α_F .

De obicei tranzistorul bipolar este utilizat în conexiune cu colector comun, fiind descris în modul hibrid, prin funcțiile:

$$\begin{cases} u_{be} = f_b(i_b, u_{CE}); \\ i_c = f_c(i_b, u_{CE}); \end{cases}$$

ale căror grafice sunt reprezentate în figura 86.

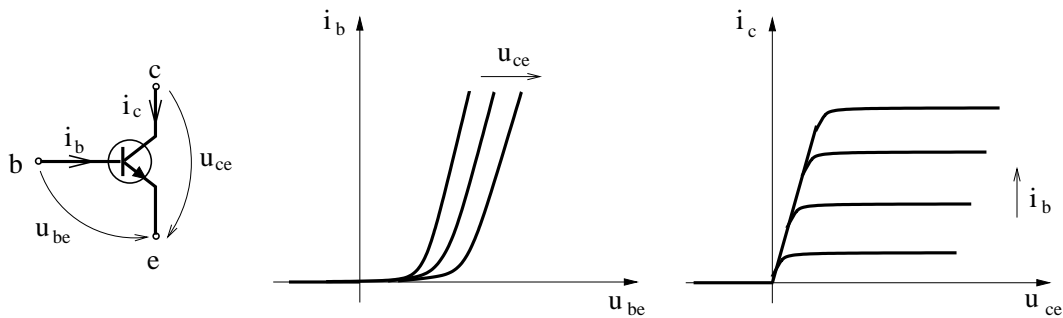


Fig. 3.86.

3. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE ELECTROMAGNETISMULUI.
BAZELE FIZICE ALE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

În acest mod de conexiune, poarta de intrare $b - c$ are o caracteristică $i_b - u_{bc}$ asemănătoare unei diode semiconductoare, cu observația că aceasta este ușor modificată de parametrul u_{ce} . Poarta de ieșire $c - e$ are o caracteristică puternic dependentă de parametrul i_b . În consecință, poarta de intrare poate fi modelată ca o diodă semiconductoare înseriată cu o sursă de tensiune comandată liniar în tensiunea de intrare. Poarta de ieșire poate fi modelată cu o sursă de curent comandată liniar în curentul de intrare, care este curentul de bază. Circuitul din figura 87.a permite modelarea cu caracteristici liniare pe porțiuni a tranzistorului în conexiunea cu colector comun pentru $u_{ce} > 0$.

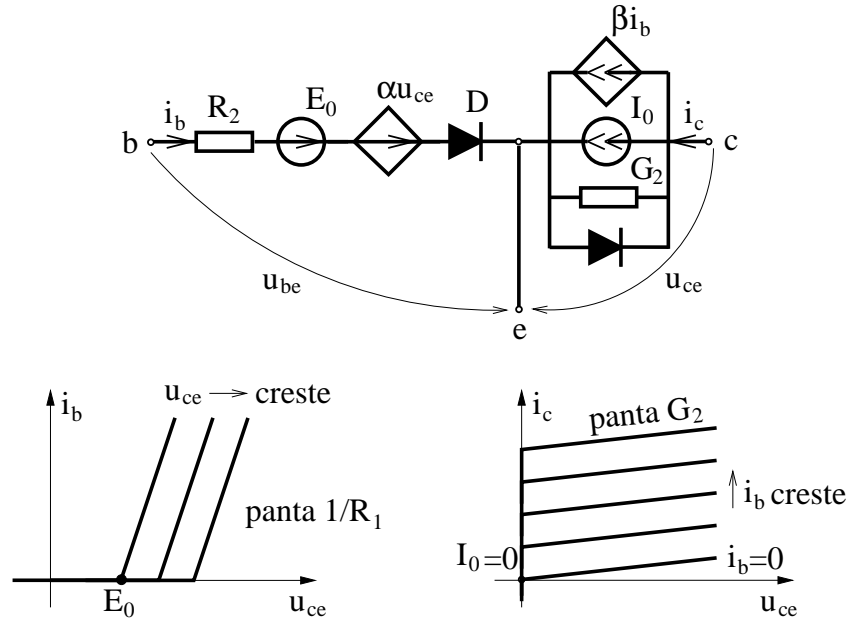


Fig. 3.87.

Deoarece R_1 , G_2 , I_0 și α au valori mici deseori se aplică, cu bune rezultate, modelul simplificat din figura 88, alcătuit dintr-o sursă ideală de tensiune, cu t.e.m. $E_0 \simeq 0,6V$, o sursă de curent comandată în curent și o diodă perfectă D .

Se constată că acest model este caracterizat în principal de parametrul β , numit factorul de amplificare în curent și care are valori în plaja $10 - 10^3$.

Modelele prezentate au un caracter rezistiv și nu descriu corect comportarea tranzistorului bipolar la frecvențe ridicate. Pentru a descrie această comportare, s-au elaborat modele mai complicate, care conțin în schemele lor echivalente și condensatoare, liniare sau neliniare. De exemplu modelul Gummel-Poon al tranzistorului bipolar este un element controlat în sarcină.

În concluzia acestui paragraf se poate afirma că pentru modelarea elementelor reale de circuit, în afara elementelor ideale dipolare liniare (R , L , C , e , j) se mai folosesc elementele dipolare rezistive neliniare (care admit ca element primitiv

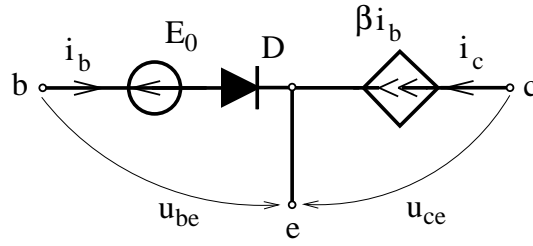


Fig. 3.88.

dioda perfectă) și sursele comandate liniar sau neliniar (care admit ca element primitiv amplificatorul operațional perfect).

Aplicație: Eroarea de modelare a unei diode semiconductoare.

Fie o diodă semiconductoare, cu caracteristica:

$$i = I_S(e^{u/V} - 1),$$

în care $I_S = 1\mu A$ și $V = 0,026V$, ce se aproximează liniar pe porțiuni prin:

$$i' = \begin{cases} G_i u, & u < 0 \\ G_d u, & u > 0 \end{cases}$$

astfel încât cele două caracteristici să se intersecteze pentru $u_1 = -10V$, $u = 0$, și $u_2 = 1V$.

Rezultă conductanța inversă:

$$G_i = \frac{i_1}{u_1} = \frac{I_S}{u_1}(e^{u_1/V} - 1) \simeq \frac{10^{-6}}{10} = 10^{-7}S,$$

și cea directă:

$$G_d = \frac{i_2}{u_2} = \frac{I_S}{u_2}(e^{u_2/V} - 1) = 10^{-6}e^{40} = 2,35 \cdot 10^{11}S,$$

Eroarea absolută de aproximare este:

$$\varepsilon = i - i' = \begin{cases} I_S(e^{u/V} - 1) - G_i u, & u < 0 \\ I_S(e^{u/V} - 1) - G_d u, & u > 0 \end{cases}$$

și are valoarea maximă în intervalul (u_1, u_2) pentru unul din punctele în care $d\varepsilon/du = 0$

În polarizare directă:

$$\frac{d\varepsilon}{du} = \frac{I_S}{V}e^{u/V} - G_d = 0 \quad \Rightarrow \quad u = V \ln \frac{VG_d}{I_S},$$

ceea ce corespunde erorii absolute.

DECALCULAT

3.17 Modele pentru mici variații

Circuitele electrice cu elemente liniare sau neliniare sunt caracterizate în regim staționar pentru fiecare latură $k = 1, L$ de o tensiune U_k și de o intensitate I_k , constante în timp. Sursele ideale ale unui astfel de circuit trebuie să aibă parametrii E_k și J_k constanți în timp.

Dacă la un moment dat, sursele încep să-și modifice parametri, circuitul părăsește regimul staționar. Considerând că parametri surselor ideale:

$$\begin{aligned} e_k(t) &= E_k + \bar{e}_k(t); \\ j_k(t) &= J_k + \bar{j}_k(t); \end{aligned}$$

au variații \bar{e}_k și \bar{j}_k suficient de mici, pentru majoritatea circuitelor se poate afirma că acestea corespund unor variații tot mici ale curenților și tensiunilor circuitului:

$$\begin{aligned} i_k(t) &= I_k + \bar{i}_k(t); \\ u_k(t) &= U_k + \bar{u}_k(t). \end{aligned}$$

Respectiv, dacă $\bar{e}_k, \bar{j}_k \rightarrow 0$ atunci $\bar{i}_k(t), \bar{u}_k(t)$ tind și ele către zero.

În această situație, punctele de frângere ale elementelor neliniare au excursii limitate în jurul punctului de funcționare corespunzător regimului staționar. Această observație permite ca pentru fiecare element neliniar, caracteristica sa să fie aproximată, suficient de bine cu o dreaptă, în jurul punctului de funcționare din regim staționar.

Cea mai bună aproximare liniară a caracteristicii se obține reținând primii doi termeni din seria Taylor asociată.

Considerând spre exemplu, un rezistor dipolar controlat în curent (fig. 89) cu caracteristica $u = f(i)$, al cărui punct de funcționare în regim staționar (numit și punct static de funcționare) satisface relația $U = f(I)$, rezultă că pentru mici variații ale curentului se poate adopta aproximarea:

$$u = f(I_i) = f(I) + f'(I)\bar{i} + \frac{1}{2}f''(I)\bar{i}^2 + \dots \simeq U + R_d\bar{i}.$$

În consecință micile variații ale tensiunii $\bar{u} = u - U = R_d\bar{i}$ sunt proporționale cu variațiile curentului, constanta de proporționalitate fiind rezistența dinamică R_d în punctul de funcționare. Raționamente asemănătoare permit determinarea schemelor echivalente pentru mici variații ale oricărui element dipol neliniar (fig. 89).

Și în cazul elementelor multipolare rezistive neliniare de circuit electric, schemele echivalente de mici variații sunt tot circuite liniare, a căror structură depinde de modul de control. De exemplu, în cazul elementelor controlate în tensiune, prin dezvoltare în serie Taylor se obține:

$$i_1 = g_1(u_1, u_2) \simeq g_1(U_1, U_2) + \frac{\partial g_1}{\partial u_1}\bar{u}_1 + \frac{\partial g_1}{\partial u_2}\bar{u}_2 = I_1 + g_{11}\bar{u}_1 + g_{12}\bar{u}_2;$$

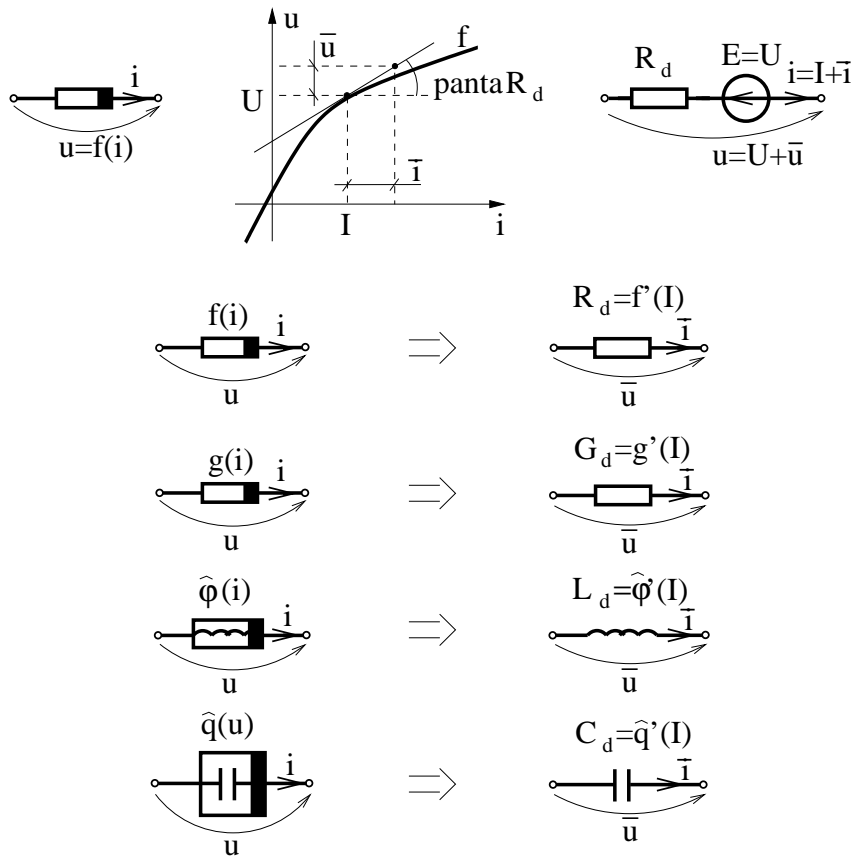


Fig. 3.89.

$$i_2 = g_2(u_1, u_2) \simeq g_2(U_1, U_2) + \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \bar{u}_1 + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \bar{u}_2 = I_2 + g_{21} \bar{u}_1 + g_{22} \bar{u}_2;$$

Sau pentru variațiile curenților $\bar{i}_1 = i_1 - I_1$, $\bar{i}_2 = i_2 - I_2$:

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 &= g_{11} \bar{u}_1 + g_{21} \bar{u}_2; \\ \bar{i}_2 &= g_{12} \bar{u}_1 + g_{22} \bar{u}_2; \end{aligned}$$

în care g_{11} , g_{22} , g_{12} , g_{21} sunt conductanțele dinamice de intrare, ieșire și respectiv de transfer.

În consecință, elementul multipolar rezistiv neliniar de circuit electric admite pentru mici variații una din schemele echivalente din figura CEVA, deoarece este un element liniar față de aceste variații.

Spre exemplu liniarizând modelul Ebers-Moll, rezultă că tranzistorul bipolar admite schema de mici variații din figura 90.

Prin liniarizarea modelului hibrid se obține:

$$u_{be} = f_b(i_b, u_{ce}) = f_b(I_b, U_{ce}) + \frac{\partial f_b}{\partial i_b} \bar{i}_b + \frac{\partial f_b}{\partial u_{ce}} \bar{u}_{ce};$$

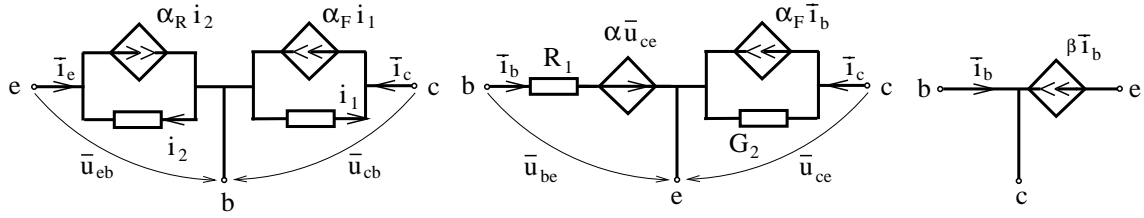


Fig. 3.90.

$$i_c = f_c(i_b, u_{ce}) = f_c(I_b, U_{ce}) + \frac{\partial f_c}{\partial i_b} \bar{i}_b + \frac{\partial f_c}{\partial u_{ce}} \bar{u}_{ce},$$

în care:

$$h_{11} = \frac{\partial u_{be}}{\partial i_b}, \quad h_{12} = \frac{\partial u_{be}}{\partial u_{ce}};$$

$$h_{21} = \frac{\partial i_c}{\partial i_b}, \quad h_{22} = \frac{\partial i_c}{\partial u_{ce}},$$

se numesc parametrii hibridi ai tranzistorului.

În consecință, tranzistorul bipolar în conexiunea colector comun admite schema de semnal mic din figura CEVA, în care:

$R_1 = h_{11}$ - rezistența dinamică de intrare;

$G_2 = h_{22}$ - conductanța dinamică de ieșire;

$\alpha = h_{12}$ - factorul de transfer invers în tensiune;

$\beta = h_{21}$ - factorul de amplitudine în curent.

În particular prin liniarizarea modelului din figura CEVA se obține schema de mici variații din figura CEVA, se constată că la mici variații un tranzistor bipolar se comportă, în principal, ca o sursă de curent comandată în curent.

Aplicație: Amplificatorul cu tranzistor bipolar.

Pentru ca tranzistorul bipolar să funcționeze ca un amplificator de mici variații este necesar ca punctul său static de funcționare să se afle într-o poziție corespunzătoare $u_{BE} > 0$, $i_B > 0$, $u_{CE} > 0$, $i_C > 0$. Aceste condiții sunt îndeplinite prin polarizarea sa cu ajutorul unor surse staționare (E_1 și E_2 în fig. 91)

Dacă peste sursa E_1 se suprapune o tensiune variabilă \bar{u}_1 , atunci tensiunea de ieșire u_2 va avea variațiile \bar{u}_2 , determinate prin analiza circuitului de mici variații:

$$u_2 = -R_c \beta \bar{i}_B = -\frac{R_c}{R_B} \beta \bar{u}_1$$

deoarece $\bar{i}_B = \bar{u}_1 / R_B$. În consecință, circuitul amplificator cu un tranzistor va amplifica variațiile tensiunii de intrare de $\beta R_c / R_B$ și va schimba semnul acestora.

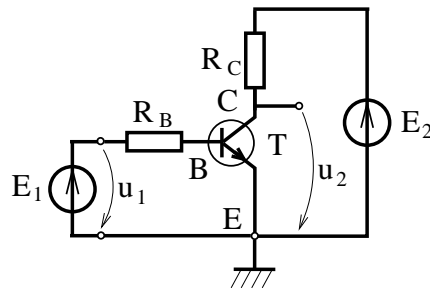


Fig. 3.91.

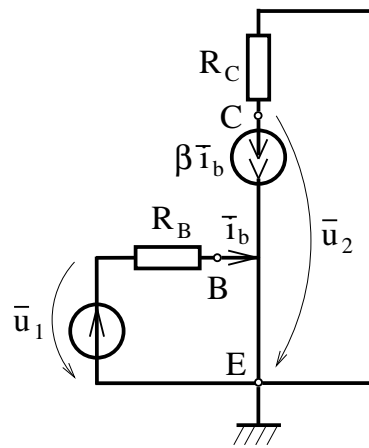


Fig. 3.92.

Capitolul 4

Circuite electrice simple.

Teorema de echivalență

4.1 Relația de echivalență a elementelor de circuit

Prin definiție, două elemente de circuit electric sunt echivalente dacă au aceeași comportare pe la borne, respectiv dacă asigură aceeași relație între tensiuni și curenți. În consecință, dacă într-un circuit electric se înlocuiește un element de circuit cu altul echivalent, starea circuitului nu se va modifica.

Pentru caracterizarea stării unui element de circuit și a interacțiunii acestuia cu exteriorul se folosesc mărimile fizice asociate bornelor (intensități, potențiale) sau perechilor de borne (tensiunile). Aceste mărimi, mai ales atunci când sunt variabile în timp, se numesc semnale electrice. Dacă un anumit semnal electric poate avea o variație arbitrară, fără să fie limitată într-un fel de structura internă sau comportarea elementului de circuit, atunci se spune că acest semnal poate fi semnal de intrare sau excitație pentru acel element de circuit. În consecință, un element de circuit determină clasificarea semnalelor sale electrice în semnale de intrare, care sunt variabile independente ale funcției sau operatorului caracteristic și în semnale de ieșire care sunt variabile dependente ale funcției sau operatorului caracteristic elementului. Variabile dependente se numesc și semnale de răspuns.

De exemplu, un rezistor neliniar controlat în curent poate fi excitat în curent iar tensiunea la borne este un semnal de ieșire (răspuns). Un rezistor controlat în tensiune poate fi excitat în tensiune, caz în care răspunsul îl reprezintă curentul.

Această clasificare nu este întodeauna unică. Dacă de exemplu, rezistorul controlat în curent are o funcția caracteristică bijectivă el poate fi excitat în curent iar tensiunea la bornele sale este un semnal de ieșire (răspuns). Un rezistor controlat în tensiune poate fi excitat în tensiune, caz în care răspunsul îl reprezintă curentul. În cazul elementelor multipolare, anumite borne pot fi excitate numai în curent iar altele numai în tensiune. În mod similar, în cazul elementelor multi-

port, anumite porți pot fi excitate numai în curent (de exemplu, cele degenerate în conductoare perfecte sau surse ideale de tensiune) iar altele numai în tensiune (de exemplu, cele degenerate în izolatoare perfecte).

Încercarea de a excita incorect un element de circuit (de exemplu, excitarea unui conductor perfect în tensiune) conduce la contradicții logice și este inadmisibilă în teoria circuitelor electrice.

Considerând un element de circuit excitat corect, comportarea sa este complet determinată, dacă răsunsul său este unic pentru orice excitație (deci pentru orice mod de variație în timp a semnalului de intrare).

În consecință, două elemente de circuit rezistive sunt echivalente, dacă ele au aceeași dependență a semnalelor de ieșire în funcție de cele de intrare. În particular, în cazul rezistoarelor dipolare, echivalența are loc dacă și numai dacă cele două rezistoare au aceeași funcție caracteristică $y = f(x)$, în care s-a notat cu x - semnalul de intrare (u - în cazul elementelor controlate în tensiune și respectiv i în cazul elementelor controlate în curent) iar cu y - semnalul de ieșire (i în cazul elementelor controlate în tensiune și respectiv u în caz contrar). Rezultă că pentru semnale de intrare $x = x_1 = x_2$ egale la cele două elemente, semnalele de ieșire $y = y_1 = y_2$ sunt deasemenea egale, oricum ar fi excitația x . Datorită caracterului rezistiv al elementelor considerate, comportarea lor rămâne aceeași, indiferent de modul în care semnalul de excitație variază în timp.

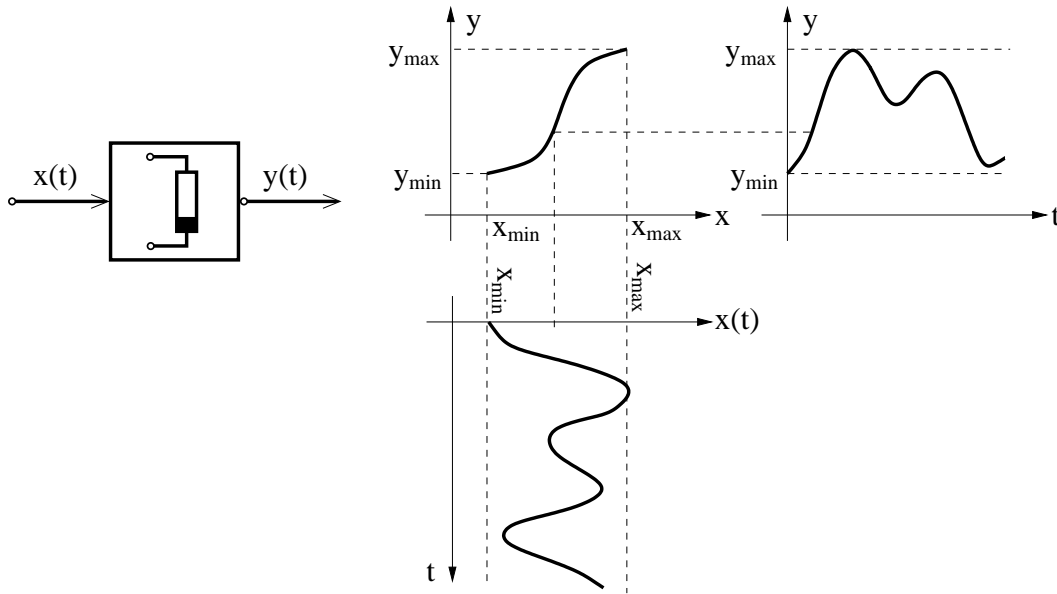


Fig. 4.1.

Urma lăsată de punctul de coordonate (x, y) nu depinde de modul în care variază în timp $x(t)$ în intervalul (x_{min}, x_{max}) . Caracteristica $y = f(x)$ a elementului rezistiv neliniar (fig. 1) se exprimă printr-o funcție $f : R \rightarrow R$ și permite

orice mod de variație în timp a semnalului de intrare $x(t)$.

Se constată că totuși pentru a evidenția pe cale experimentală echivalența a două elemente de acest tip ar trebui efectuate o infinitate de experimente, ceea ce este imposibil.

În cazul particular al elementelor de circuit electric liniar, caracteristica în planul $u - i$ fiind o dreaptă, rezultă că sunt necesare și suficiente doar două experimente pentru a demonstra echivalența. Evident, că pentru ca două elemente ideale dipolare rezistive liniare de circuit electric să fie echivalente este suficient ca parametrii acestora să fie egali, în acest caz un singur experiment este suficient pentru a demonstra echivalența.

Condiția necesară și suficientă pentru ca două elemente de circuit rezistive multipolare liniare să fie echivalente este ca matricele caracteristice celor două elemente să fie egale. Numărul de experimente necesar evidențierii echivalenței este dependent de numărul n de borne (respectiv numărul de porți, în cazul elementelor multiport). În general numărul minim de experimente este $(n - 1)^2$, respectiv n^2 dar în cazul elementelor reciproce (caracterizate prin matrice simetrice), acest număr se reduce la $n(n - 1)/2$ și respectiv la $n(n + 1)/2$.

Caracterizarea comportării elementelor reactive de circuit este mai complicată decât a celor rezistive, deoarece dependența dintre semnalele de intrare și ieșire se exprimă în acest caz printr-un operator diferențial sau integral. Din acest motiv, semnalul de ieșire $y(t)$, de la momentul de timp t depinde nu numai de valoarea semnalului de intrare $x(t)$ de la momentul de timp t ci și de evoluția sa până la timpul t .

Două elemente reactive sunt echivalente, dacă ele determină aceleași răspunsuri la excitații identice cu variații arbitrare în timp. În consecință pentru orice $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in (t_1, t_2)$ echivalența impune $y_1(t) = y_2(t)$, $t \in (t_1, t_2)$.

În continuare se va analiza comportarea elementelor reactive pentru intervalul $t \geq 0$. Presupunând convențional momentul inițial $t_1 = 0$ iar excitațiile aplicate definite pentru $t \in [0, \infty)$ vor fi considerate în mod convențional nule pentru $t < 0$. Aceasta este echivalentă cu înmulțirea lor cu funcția treaptă unitate:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Analizând comportarea bobinei liniare ideale, la care:

$$u = L \frac{di}{dt},$$

se constată că dacă aceasta este excitată în curent (fig. 2), atunci semnalul de intrare $i(t)$ nu poate avea o variație arbitrară în timp, el trebuie să fie continuu și derivabil iar la momentul inițial ($t = 0$) trebuie să satisfacă egalitatea $i(0) = i_0$, în care $i_0 = \lim_{\substack{t < 0 \\ t \rightarrow 0}}$ este condiția inițială a bobinei.

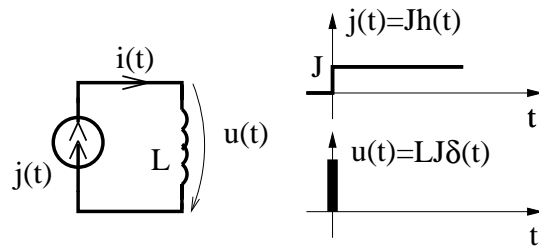


Fig. 4.2.

Prezența discontinuităților în semnalul de intrare determină apariția unor tensiuni nedefinite. Acest caz ar putea fi studiat folosind teoria distribuțiilor, tensiunea la borne corespunzătoare unui salt Δi al curentului la momentul t_0 fiind $u = L\Delta i \cdot \delta(t - t_0)$, deci nemărginită. Chiar dacă excitația $j(t)$ este continuă și derivabilă este posibilă apariția unei supratensiuni nemărginite $u = L(j(o) - i_0)\delta(t)$, datorată condiției inițiale. Din aceste motive se poate afirma că excitația în curent a unei bobine este o excitație improprie.

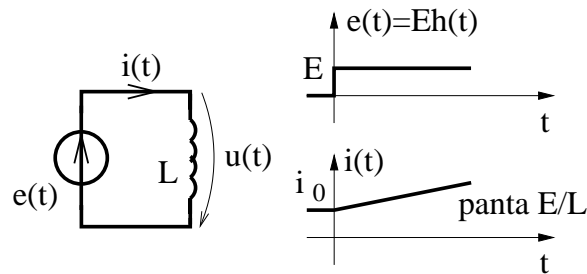


Fig. 4.3.

Excitarea în tensiune a unei bobine liniare ideale, (fig. 3), corespunde relației:

$$i(t) = i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t u(t') dt'.$$

Se constată că semnalul de intrare $u(t) = e(t)$, se impun condiții mult mai puțin restrictive (el trebuie să fie integrabil în timp dar poate fi discontinuu), ceea ce din punct de vedere practic, corespunde unui semnal arbitrar.

În consecință, bobina poate fi excitată în tensiune. Răspunsul $i(t)$ se obține pornind de la excitația $u(t)$ prin folosirea unui operator liniar, de integrare. Totuși relația excitație - răspuns nu este liniară, decât în cazul particular al condiției inițiale nule $i_0 = 0$.

În cazul excitației treaptă (constante) se constată că răspunsul are o variație în timp reprezentată grafic printr-o semidreaptă. Pentru ca două bobine ideale

liniară să fie echivalente este necesar și suficient ca la excitații de tensiune treaptă identice (de exemplu, unitate) să determine răspunsuri identice. Pentru a verifica echivalența este suficient să se compare curentul $i(t)$ determinat de $u(t) = E$ la două momente diferite de timp.

În consecință sunt suficiente două măsurători pentru a verifica echivalența a două bobine liniare ideale. Dacă cele două bobine se vor comporta la fel în acest regim de excitație particulară, atunci ele vor avea aceeași comportare pentru orice excitație.

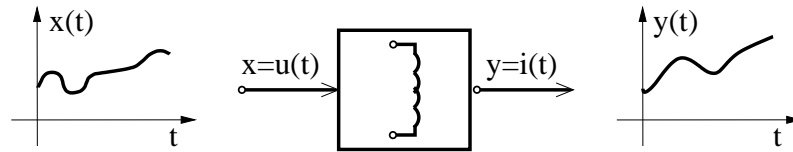


Fig. 4.4.

Pentru caracterizarea relației curent - tensiune impusă de o bobină liniară ideală nu se pot folosi funcții ci operatori. În cazul excitației impropriei în curent, tensiunea $u : (0, \infty) \rightarrow R$ se obține:

$$u = z \cdot i,$$

aplicând intensității $i : (0, \infty) \rightarrow R$ operatorul diferențial:

$$z \cdot = L \frac{d \cdot}{dt}$$

numit operator de impedanță. Domeniul operatorului de z este alcătuit din mulțimea funcțiilor continue și derivabile care satisfac condiția suplimentară $i(0) = i_0$ iar codomeniul este spațiul funcțiilor integrabile.

În cazul excitației în tensiune, intensitatea curentului $i : (0, \infty) \rightarrow R$ se obține:

$$i = j \cdot u,$$

aplicând tensiunii $u : (0, \infty) \rightarrow R$ operatorul integral

$$j \cdot = i_0 + \frac{1}{L} \int_0^t \cdot dt'$$

numit operator de admitanță. Se constată că acești operatori sunt liniari doar în cazul condițiilor inițiale nule.

Caracterizarea elementului prin operatorul diferențial corespunde excitației impropriei și maschează condiția inițială, care este specifică elementului.

În concluzie două bobine liniare ideale sunt echivalente, dacă au operatori de admitanță identici, ceea ce impune ca inductivitățile lor să fie egale dar și curenții inițiali să fie egali.

Condensatorul liniar ideal poate fi excitat propriu în curent (fig. 5):

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{L} \int_0^t i(t') dt',$$

sau impropriu în tensiune (fig. 5):

$$i(t) = C \frac{du}{dt}.$$

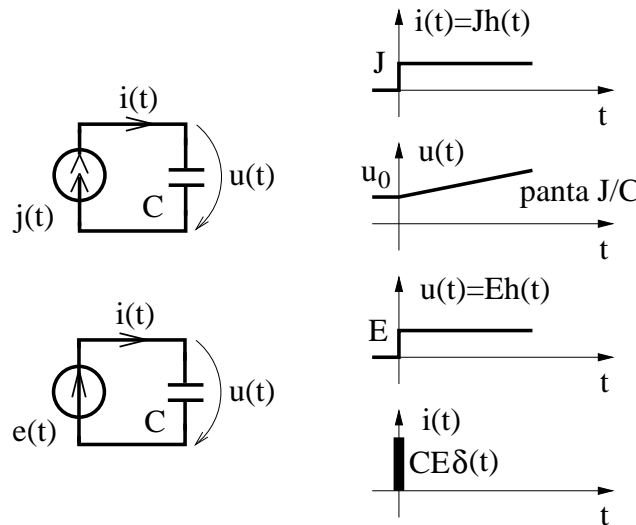


Fig. 4.5.

Pentru caracterizarea relației tensiune - curent se pot folosi:

– operatorul de impedanță:

$$z \cdot = u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t \cdot dt';$$

– operatorul de admitanță:

$$y \cdot = C \frac{d \cdot}{dt};$$

Condiția ca două condensatoare să fie echivalente este ca operatorii lor de echivalență să fie identici, ceea ce impune ca cele două capacități să fie egale dar și tensiunile inițiale să fie egale.

Pentru verificarea experimentală a echivalenței între două condensatoare ideale liniare sunt suficiente două măsurători ale tensiunii la borne $u(t)$, la două momente diferite de timp, în condițiile excitării condensatorului cu surse de curent treaptă unitară (fig. 5).

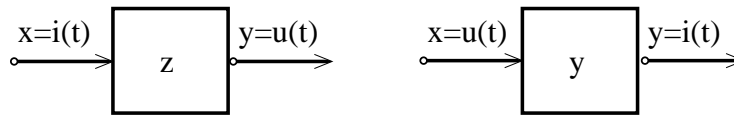


Fig. 4.6.

Echivalența între două circuite impune ca operatorii z și y să fie inversabili. În cazul degenerat al sursei ideale de tensiune, la care $z = 0$ nu se poate aplica această teoremă de echivalență. De asemenea nici sursa ideală de curent ($y = 0$) nu poate fi echivalentă cu o sursă de tensiune.

În cazul particular al circuitelor rezistive (fig. 7), la care $z = R$ și $y = G$, aceste relații capătă forma: $R = 1/G$, $e = Rj$.

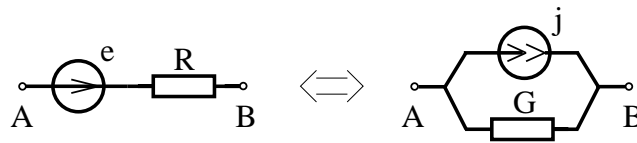


Fig. 4.7.

Dacă elementul dipolar de circuit este o bobină liniară ideală (fig. 8) $z = L du/dt$ și în consecință $e = L dj/dt$.

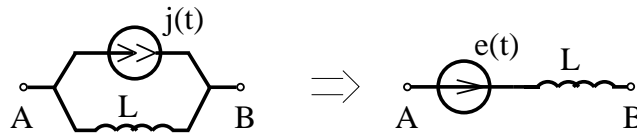


Fig. 4.8.

Conform teoremei condiției inițiale, orice bobină cu curentul inițial $i(0)$, admite o schemă echivalentă de tip sursă reală de curent, în care $j = i_0 = ct$.

În consecință, ea admite și o schemă echivalentă de tip sursă reală de tensiune la care $e = L di_0/dt = L i_0 \delta(t)$, ca în figura 9.

Dacă elementul dipolar de circuit este un condensator ideal (fig. 10), $y = C du/dt$ și în consecință $j = C de/dt$.

Un condensator cu condiție inițială nenulă $u(0) = u_0$ va admite circuitul echivalent din figura 11, în care $j = C du_0/dt = C u_0 \delta(t)$.

Operatorii de impedanță și admitanță:

$$u = z \cdot i, \quad i = y \cdot u,$$

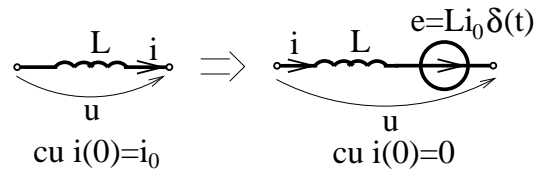


Fig. 4.9.

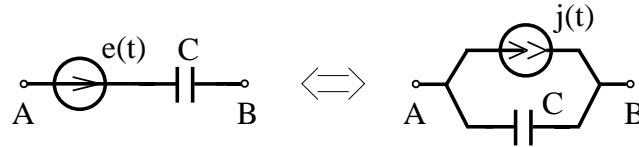


Fig. 4.10.

pot fi utilizați pentru caracterizarea oricărui element de circuit rezistiv sau reactiv liniar sau neliniar. De exemplu, în cazul rezistoarelor liniare:

$$z \cdot = R \cdot, y \cdot = G \cdot,$$

aceștia sunt operatori liniari, cu caracter algebric.

În cazul elementelor multipolare liniare, operatorii de impedanță și cei de admitanță au un caracter matriceal.

Conform definițiilor anterioare, de câte ori operatorii z sau y sunt inversabili ei satisfac relațiile:

$$z = y^{-1}, y = z^{-1}.$$

Condiția ca două elemente de circuit să fie echivalente este ca acestea să aibă operatori de admitanță și impedanță identici.

4.2 Teorema generatoarelor echivalente

Considerând o sursă reală de tensiune (fig. 12) formată dintr-o t.e.m. $e(t)$ înseriată cu un element dipolar de circuit cu operatorul de impedanță liniar z , tensiunea la borne satisface relația:

$$u = zi - e.$$

Presupunând operatorul z inversabil rezultă:

$$i = z^{-1}(u + e) = yu + j,$$

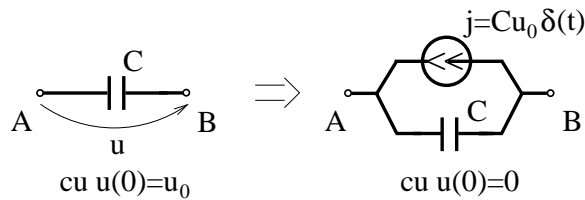


Fig. 4.11.

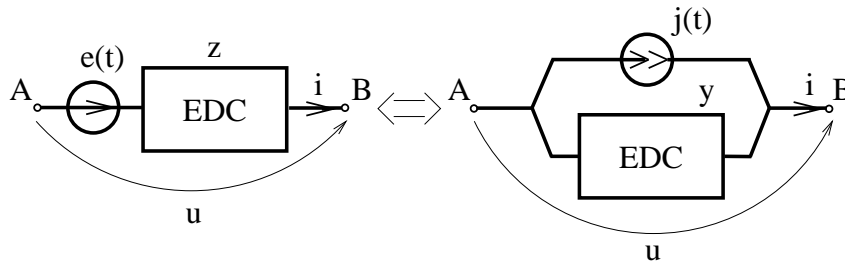


Fig. 4.12.

în care s-a notat cu $y = z^{-1}$ și $j = z^{-1}e = ye$. Se constată că aceasta este ecuația unei surse reale de curent, formată dintr-o sursă ideală cu c.e.m. j conectată în paralel cu elementul dipolar de circuit EDC.

În consecință, orice sursă reală de tensiune cu impedanța internă nenulă este echivalentă cu o sursă reală de curent. Transfigurarea unei surse reale de curent într-una de tensiune se poate face, dacă:

$$z = y^{-1}, e = zj,$$

iar transfigurarea unei surse de tensiune într-o sursă de curent, dacă

$$y = z^{-1}, j = ye.$$

4.3 Conexiunea serie a elementelor dipolare

Două elemente dipolare de circuit conectate în serie sunt parcurse de același curent (fig. 13):

$$i = i_1 = i_2,$$

în schimb tensiunile la borne satisfac relația:

$$u = u_1 + u_2.$$

Considerând că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de impedanță:

$$u_1 = z_1 i_1, u_2 = z_2 i_2,$$

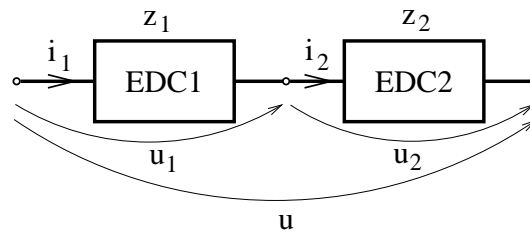


Fig. 4.13.

dacă z_1 și z_2 au același domeniu, rezultă că $u = u_1 + u_2 = z_1 i + z_2 i = (z_1 + z_2) i = 2z i$.

Deci cele două elemente dipolare de circuit conectate în serie sunt echivalente cu un element având operatorul de impedanță $z = z_1 + z_2$.

În general, în cazul a n elemente de circuit conectate în serie având impedanțele z_k , $k = 1, n$, cu domeniu comun, impedanța echivalentă este:

$$z = \sum_{k=1}^n z_k,$$

deoarece în acest caz $i_k = i$ și

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n z_k i_k = \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \cdot i = z i.$$

Deoarece adunarea este comutativă rezultă că nu are importanță ordinea în care elementele dipolare sunt conectate în serie.

Prezintă interes următoarele cazuri particulare:

- a. Conexiunea serie a rezistoarelor liniare (fig. 14). Deoarece în acest caz operatorii de impedanță $z_k = R_k$, rezultă că:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k,$$

deci că rezistența echivalentă este suma rezistențelor conectate în serie.

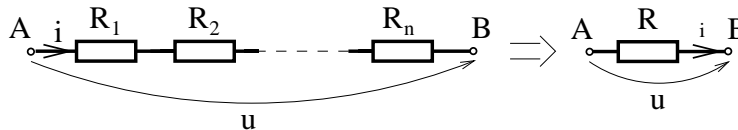


Fig. 4.14.

b. Conexiunea serie a bobinelor liniare (fig. 15).

Pentru a putea fi sumați operatorii de impedanță $z_k = L d/dt$ trebuie să aibă același domeniu, respectiv să aibă aceeași condiție inițială $i_k(0) = i_0$. În acest caz:

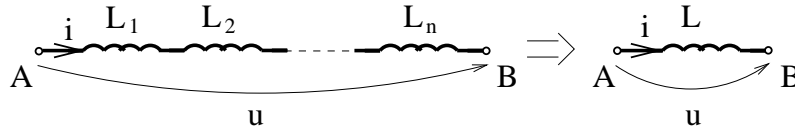


Fig. 4.15.

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt},$$

în care:

$$L = \sum_{k=1}^n L_k,$$

inductivitatea echivalentă fiind suma inductivităților conectate în serie.

Dacă se înseriază bobine cu condiții inițiale diferite se obține un circuit incorect formulat.

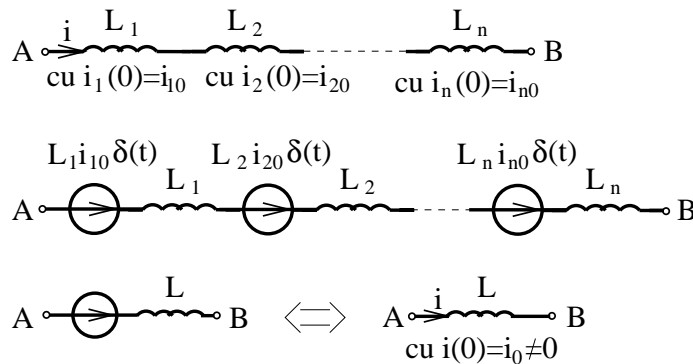


Fig. 4.16.

Formarea unui circuit prin înseriarea unor bobine, care au inițial curenți diferiți poate fi totuși studiată folosind teoremele de echivalență pentru bobine cu condiții inițiale nenule (fig. 16). Tensiunea la bornele AB este:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = - \sum_{k=1}^n i_k i_{k0} \delta(t) + \sum_{k=1}^n L_k \frac{di}{dt} = -L i_0 \delta(t) + L \frac{di}{dt}$$

în care s-a notat cu:

$$L = \sum_{k=1}^n L_k \text{ și } i_0 = \frac{\sum_{k=1}^n L_k i_{k0}}{\sum_{k=1}^n L_k}.$$

Rezultă că cele n bobine pot fi înlocuite cu o singură bobină având curentul inițial egal cu media ponderată a curenților inițiali (cu ponderi egal'e cu inductivitățile).

Acest model prezintă dificultăți legate de faptul că tensiunile la bornele fiecărei bobine sunt nemărginite la momentul inițial.

- c. Conexiunea serie a condensatoarelor (fig. 17).

În acest caz:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_0^t i(t') dt' = u_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt',$$

dacă:

$$u_0 = \sum_{k=1}^n u_k(0) \quad \text{și} \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}.$$

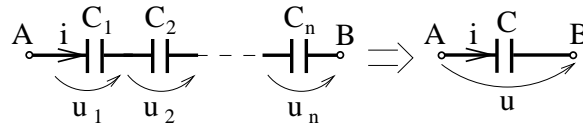


Fig. 4.17.

În consecință, n condensatoare conectate serie sunt echivalente cu un singur condensator la care capacitatea reciprocă $S = 1/C$

$$S = \sum_{k=1}^n S_k,$$

este suma capacităților reciproce ($S_k = 1/C_k$) ale condensatoarelor înseriate și având o tensiune inițială u_0 , egală cu suma tensiunilor inițiale ale condensatoarelor înseriate.

- d. Conexiunea serie a surselor ideale de tensiune (fig. 18).

În acest caz:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n e_k,$$

în consecință, aceste surse sunt echivalente cu o singură sursă având tensiunea electromotoare:

$$e = \sum_{k=1}^n e_k.$$

Această sursă are un caracter algebric, pentru a permite cazul în care sursele de tensiune nu au aceeași orientare.

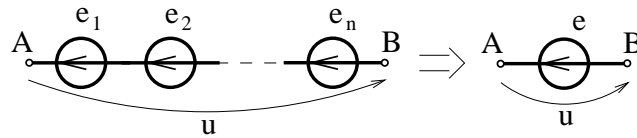


Fig. 4.18.

e. Conexiunea serie a surselor ideale de curent (fig. 19).

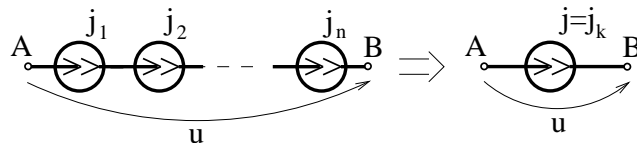


Fig. 4.19.

Deoarece conexiunea serie a elementelor dipolare de circuit impune aceeași valoare a curentului prin toate elementele conectate iar în cazul surselor ideale de curent $i_k = j_k$, rezultă că pentru a evita incompatibilitățile este necesar ca toți curenții electromotori să aibă aceeași valoare $j_k = i$.

Rezultă că două surse ideale de curent cu c.e.m. diferiți nu pot fi conectate în serie.

f. Conexiunea serie a rezistoarelor neliniare (fig. 20).

Considerând n rezistoare neliniare comandate în curent și conectate în serie:

$$u = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n f_k(i) = f(i).$$

Rezultă că acestea sunt echivalente cu un rezistor neliniar având caracteristica $f = \sum_{k=1}^n f_k$.

Se constată că elementul echivalent are o caracteristică f , care se poate obține prin însumarea pe verticală a caracteristicilor din planul $i - u$ sau suma pe orizontală a caracteristicilor din planul $u - i$.

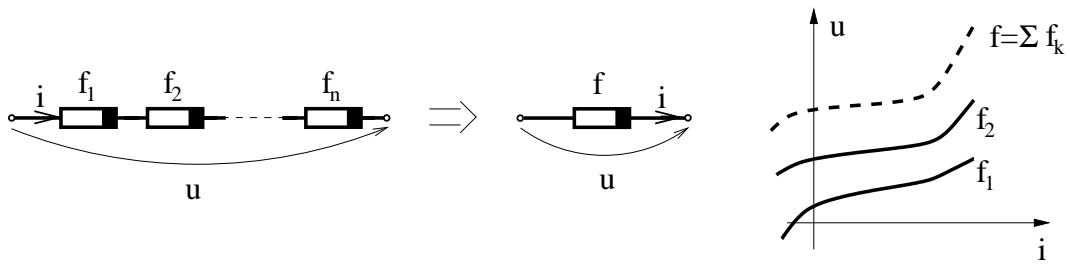


Fig. 4.20.

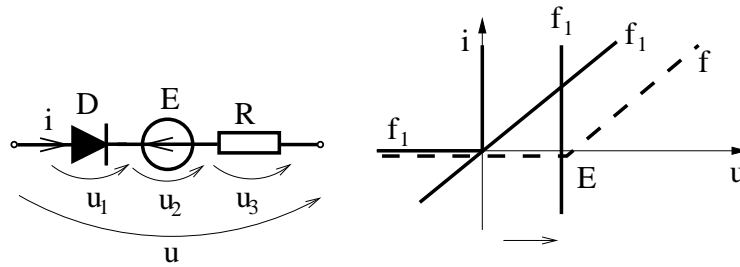


Fig. 4.21.

În figura 21 se prezintă modul în care se poate obține pe cale grafică funcția caracteristică elementului obținut prin conexiunea serie a unei diode perfecte D , o sursă ideală de tensiune E și un rezistor R .

Conectarea în serie a unui element dipolar de circuit EDC $u = zi$ cu o sursă ideală de tensiune E (fig. 22) are ca efect translatarea caracteristicii în direcția axei tensiunii $u' = u + E = zi + E$.

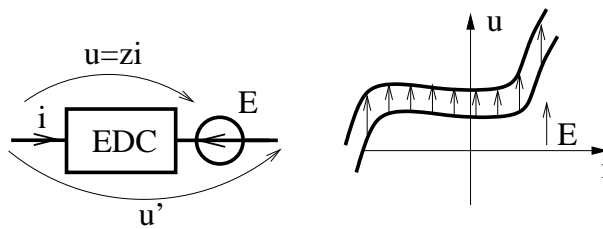


Fig. 4.22.

g. Conexiunea serie a surselor de tensiune (fig. 23).

Se consideră n surse reale de tensiune cu t.e.m. e_k și operatorul de impedanță

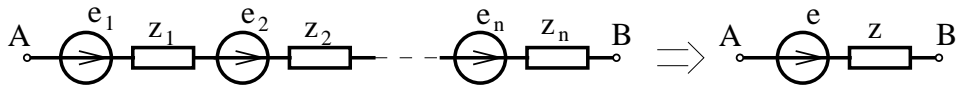


Fig. 4.23.

$z_k, k = 1, n$. Tensiunea la bornele AB:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n e_k + \sum_{k=1}^n z_k i = -e + zi,$$

în care s-a notat:

$$e = \sum_{k=1}^n e_k, z = \sum_{k=1}^n z_k.$$

În consecință, cele n surse reale de tensiune sunt echivalente cu o singură sursă la care t.e.m. este suma algebrică a t.e.m. e_k și impedanță z egală cu suma impedanțelor z_k .

În particular, în cazul surselor rezistive $z_k = R_k$ și $z = R = \sum_{k=1}^n R_k$.

h. Conexiunea serie a surselor reale de curent (fig. 24)

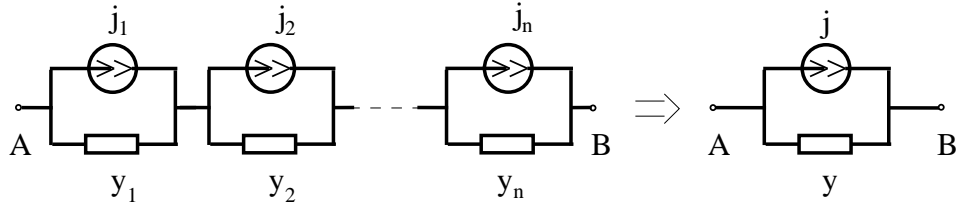


Fig. 4.24.

Tranfigurând sursele de curent în surse de tensiune se obțin:

$$z_k = y_k^{-1}, e_k = z_k j_k,$$

și conform teoremei anterioare:

$$z = \sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n y_k^{-1}, e = \sum_{k=1}^n e_k = \sum_{k=1}^n z_k j_k.$$

Rezultă parametrii $y = z^{-1}$ și $j = z^{-1}e$ ale sursei reale de curent echivalente:

$$y = \left[\sum_{k=1}^n y_k^{-1} \right]^{-1}, \quad j = y \left[\sum_{k=1}^n y_k^{-1} j_k \right].$$

În particular, în cazul surselor de curent rezistive, rezultă:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k = \frac{1}{G} \quad \text{și} \quad j = \frac{\sum R_k j_k}{\sum R_k}.$$

Sursa de curent echivalentă are rezistența internă egală cu suma rezistențelor și c.e.m. echivalentă egală cu media c.e.m. ale surselor înseriate, cu ponderile egale cu rezistențele interne. Dacă rezistențele interne sunt egale, rezultă c.e.m. echivalent ca medie aritmetică a curenților surselor.

Pentru studiul surselor reale diferite (curent și tensiune) conectate în serie se recomandă transfigurarea surselor reale de curent în surse reale de tensiune (fig. 25).

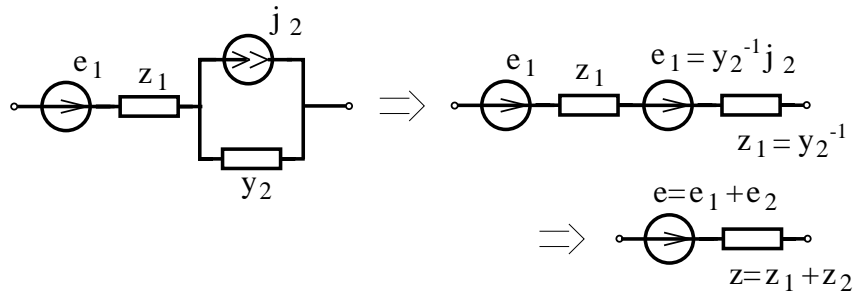


Fig. 4.25.

O teoremă de echivalență importantă referitoare la conexiunea serie este teorema sursei de curent. Conform acesteia, orice sursă ideală de curent, conectată în serie cu un element dipolar de circuit arbitrar (dar compatibil cu sursa ideală

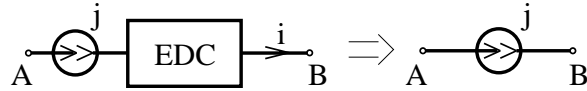


Fig. 4.26.

de curent) este echivalentă cu sursa de curent (fig. 26).

Demonstrația acestei teoreme este banală și se bazează pe observația că elementul EDC este parcurs de curentul $i = j$ independent de tensiunea la borne. În consecință, elementul de circuit cu bornele AB se comportă ca o sursă ideală de curent cu c.e.m. j .

Nu orice element dipolar de circuit poate fi înseriat cu o sursă ideală de curent. De exemplu, sursa ideală de curent nu poate fi înseriată cu altă sursă ideală de curent sau cu un izolator perfect (fig. 27).

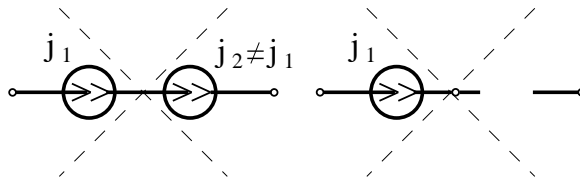


Fig. 4.27.

4.4 Conexiunea paralel a elementelor dipolare

Două elemente dipolare de circuit conectate în paralel au aceeași tensiune la borne (fig. 28):

$$u = u_1 = u_2,$$

iar intensitățile curenților satisfac relația:

$$i = i_1 + i_2.$$

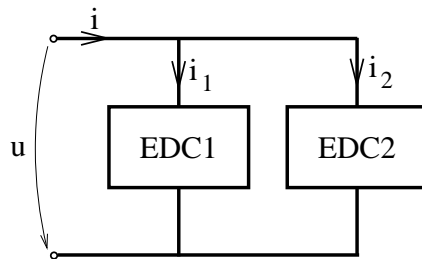


Fig. 4.28.

Considerând că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de admitanță:

$$i_1 = y_1 u_1, \quad i_2 = y_2 u_2,$$

rezultă că:

$$i = i_1 + i_2 = y_1 u + y_2 u = (y_1 + y_2) u = y u.$$

În consecință, cele două elemente de circuit conectate paralel sunt echivalente cu un element dipolar având operatorul de admitanță $y = y_1 + y_2$.

În general n elemente de circuit conectate în paralel cu admitanțele y_k , $k = 1, n$ au o admitanță echivalentă:

$$y = \sum_{k=1}^n y_k,$$

deoarece $u_k = u$ și

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n y_k i_k = \left(\sum_{k=1}^n y_k \right) \cdot i = y i.$$

a. Conexiunea paralel a rezistoarelor liniare (fig. 29).

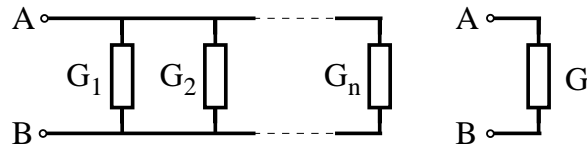


Fig. 4.29.

În cazul rezistoarelor liniare operatorii de admitanță $y_k = G_k$, deci conductanța echivalentă este suma conductanțelor rezistoarelor:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k$$

b. Conexiunea paralel a bobinelor liniare (fig. CEVA).

4.5 Conexiunea mixtă

Dacă laturile unui circuit sunt conectate succesiv serie-paralel, atunci se spune că circuitul are conexiunea mixtă. Exemplu de conexiune mixtă a trei elemente dipolare de circuit este prezentată în figura 30.

Elementele dipolare de circuit EDC1, EDC2 sunt conectate în paralel iar elementul dipolar EDC3.

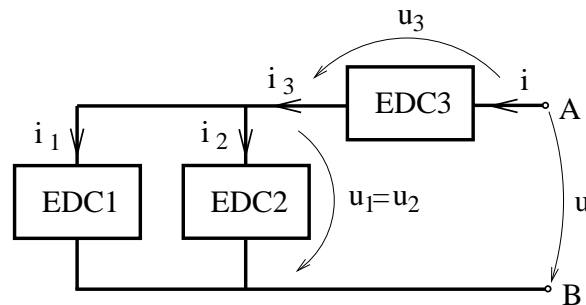


Fig. 4.30.

Presupunând cunoscuți operatorii de admitanță y_1, y_2 ai primelor două elemente și operatorul de impedanță al celui de-al treilea element, rezultă:

$$i = i_1 + i_2 = y_1 u_1 + y_2 u_2 = (y_1 + y_2) u_1 = y_{12} u_1;$$

$$u = u_1 + u_3 = z_{12} i_3 + z_3 i_3 = (z_{12} + z_3) i_3 = z i,$$

în care s-a notat cu:

$$z_{12} = y_{12}^{-1}, \quad z = z_{12} + z_3.$$

În consecință operatorul de impedanță echivalent este:

$$z = (y_1 + y_2)^{-1} + z_3.$$

În cazul particular, în care cele trei elemente sunt rezistoare liniare rezultă rezistența echivalentă:

$$R = R_3 + \frac{1}{G_1 + G_2} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

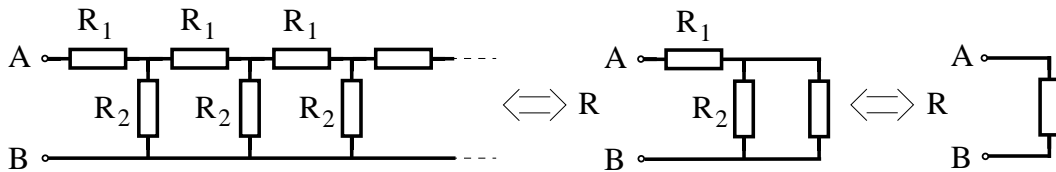


Fig. 4.31.

Un exemplu de circuit cu o infinitate de elemente conectate mixt îl reprezintă circuitul din figura 31. Față de bornele AB acesta se comportă ca un rezistor liniar cu rezistența echivalentă R . Pentru determinarea acestei rezistențe se observă că eliminând primul tronson R_1, R_2 circuitul rămas este tot infinit și are aceeași rezistență echivalentă R , în consecință la bornele de ieșire ale primului tronson cuadripol se poate presupune rezistența R astfel încât:

$$R = R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 R}.$$

Din această ecuație, rezultă:

$$(R - R_1)(R_2 + R) - R_2 R = 0,$$

deci R este soluția ecuației de gradul doi:

$$R^2 - R_1 R - R_1 R_2 = 0,$$

și are una din valorile:

$$R_{a,b} = \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}}{2}.$$

Deoarece soluția corectă $R > R_1$, se adoptă:

$$R = \frac{R_1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + 4\frac{R_2}{R_1}} \right].$$

Un al doilea mod în care trei elemente dipolare de circuit se pot conecta mixt este prezentat în figura 32. EDC1 și EDC2 sunt conectate serie iar elementul dipolar obținut este în paralel cu EDC3, în acest caz admitanța echivalentă $y = y_3 + (z_1 + z_2)^{-1}$.

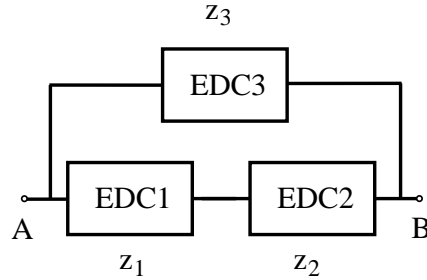


Fig. 4.32.

Un circuit dipolar obținut prin conexiunea mixtă este cel din figura 33.a:

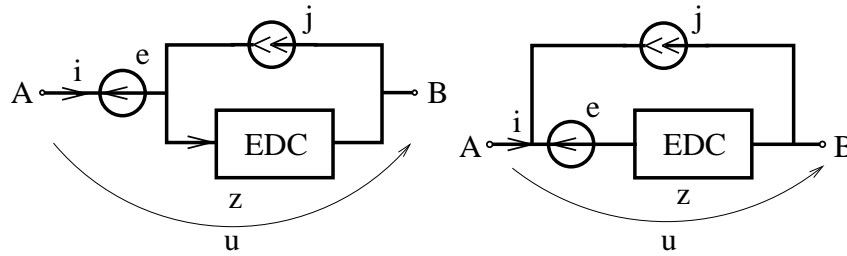


Fig. 4.33.

Tensiunea între bornele A și B este:

$$u = e + z(i + j),$$

se constată că aceasta este și relația caracteristică elementului din figura 33.b, deci cele două elemente sunt echivalente.

Acest circuit este important deoarece prin particularizări el poate degenera într-o sursă reală de curent ($e = 0$), sursă reală de tensiune ($j = 0$), sursă ideală de tensiune ($j = 0, z = 0$) și respectivă sursă ideală de curent ($e = 0, y = 0$).

4.6 Conexiunile stea, triunghi, poligon complet

Conexiunea stea. Trei elemente de circuit sunt conectate în stea, dacă au o bornă pusă în comun (fig. 34). Alegând borna (3) ca nod de referință, ecuațiile acestui element tripolar de circuit au forma:

$$V_1 = z_1 i_1 + z_3(-i_1 - i_2),$$

$$V_2 = z_2 i_2 + z_3(-i_1 - i_2).$$

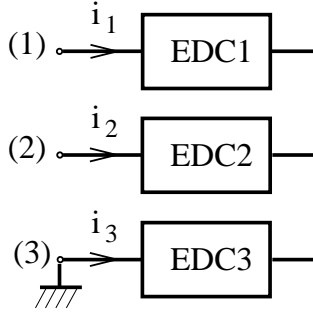


Fig. 4.34.

Acest tip de conexiune poate fi generalizat, considerând n elemente dipolare considerate la un nod. Circuitul astfel obținut se numește stea multiplă cu n laturi și este un element n -polar de circuit cu ecuațiile:

$$V_k = z_k i_k + z_n \left(- \sum_{j=1}^{n-1} i_j \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Conexiunea triunghi. Dacă trei elemente dipolare de circuit sunt conectate ca în figura 35, având două câte două o bornă pusă în comun se spune că cele trei elemente sunt conectate în triunghi.

Notând cu y_{12} , y_{23} , y_{31} operatorii de admitanță pentru care cele trei elemente dipolare, rezultă următoarele relații specifice conexiunii triunghi:

$$i_1 = i_{12} - i_{31} = y_{12}(V_1 - V_2) - y_{31}(V_3 - V_1),$$

$$i_2 = i_{23} - i_{12} = y_{23}(V_2 - V_3) - y_{12}(V_1 - V_2),$$

$$i_3 = i_{31} - i_{23} = y_{31}(V_3 - V_1) - y_{23}(V_2 - V_3).$$

Generalizând acest tip de conexiune se obține conexiunea **poligon complet** (figura 36). în care fiecare pereche de noduri k, j cu $k = \overline{1, n}$ este conectată printr-un element dipolar de circuit. Acest circuit conține $n(n - 1)/2$ laturi.

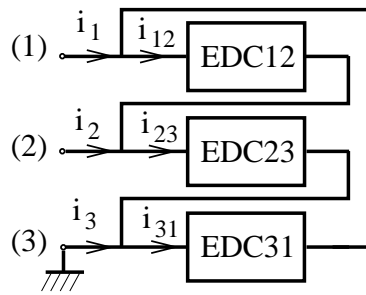


Fig. 4.35.

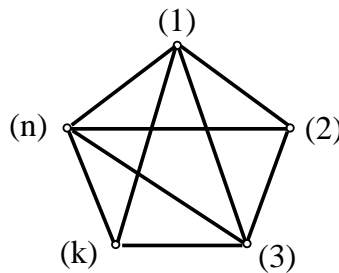


Fig. 4.36.

Notând cu y_{kj} operatorul de admitanță specifică elementului dipolar care unește nodurile k și j se obțin ecuațiile:

$$i_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n i_{kj} = \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{kj}(V_k - V_j).$$

Teorema transfigurării stea - triunghi

Orice stea cu n laturi, elemente dipolare de circuit, caracterizate de operatorul de admitanță liniar y_k , $k = \overline{1, n}$ este echivalentă cu un poligon complet cu n vârfuri având operatori de admitanță:

$$y_{kj} = y_k \left(\sum_{l=1}^n y_l \right)^{-1} y_j.$$

Pentru a demonstra această teorema se aplică pentru circuitul stea prima teorema Kirchhoff:

$$0 = \sum_{l=1}^n i_l = \sum_{l=1}^n y_l(V_l - V_0) = \sum_{l=1}^n y_l V_l - \left(\sum_{l=1}^n y_l \right) V_0,$$

din care rezultă potențialul nodului central al sferei:

$$V_0 = \left(\sum_{l=1}^n y_l \right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n y_j V_j.$$

În consecință curenții din laturi sunt:

$$i_k = y_k(V_k - V_0) = y_k V_k - y_k \left(\sum_{l=1}^n y_l \right)^{-1} \sum_{j=1}^n y_j V_j = y_k V_k - \sum_{j=1}^n y_k \left(\sum_{l=1}^n y_l \right)^{-1} y_j V_j.$$

Prezintă interes următoarele cazuri particulare:

- circuit stea cu rezistoare liniare, este echivalent cu un poligon complet, la care:

$$G_{kj} = \frac{G_k \cdot G_j}{\sum_{l=1}^n G_l},$$

- circuitul stea cu bobine liniare având condiții inițiale nule, este echivalent cu un poligon complet, la care:

$$\Gamma_{kj} = \frac{\Gamma_k \cdot \Gamma_j}{\sum_{l=1}^n G_l},$$

- circuitul stea cu condensatoare liniare având condiții inițiale nule este echivalent cu un poligon complet, la care:

$$C_{kj} = \frac{C_k \cdot C_j}{\sum_{l=1}^n C_l}.$$

În cazul circuitului stea cu $n = 3$ laturi, rezultă parametrii triunghiului echivalent:

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}, \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \Rightarrow R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}. \end{aligned}$$

Aceste relații ca și cele similare pentru inductivitățile L_{kj} și capacitățile reciproce S_{kj} , permit transfigurarea stea - triunghi.

Teorema transfigurării stea - triunghi

Un circuit triunghi cu laturile având operatori de admitanță liniari $y_{12} = z_{12}^{-1}$, $y_{23} = z_{23}^{-1}$, $y_{31} = z_{31}^{-1}$ este echivalent cu un circuit stea cu impedanțele (figura 37):

$$z_1 = \frac{1}{2}[(z_{23} + z_{12})^{-1} + y_{31}]^{-1} + \frac{1}{2}[(z_{31} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1} - \frac{1}{2}[(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1},$$

$$z_2 = \frac{1}{2}[(z_{21} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1} + \frac{1}{2}[(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1} - \frac{1}{2}[(z_{23} + z_{12})^{-1} + y_{21}]^{-1},$$

$$z_3 = \frac{1}{2}[(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1} + \frac{1}{2}[(z_{23} + z_{12})^{-1} + y_{31}]^{-1} - \frac{1}{2}[(z_{31} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1}.$$

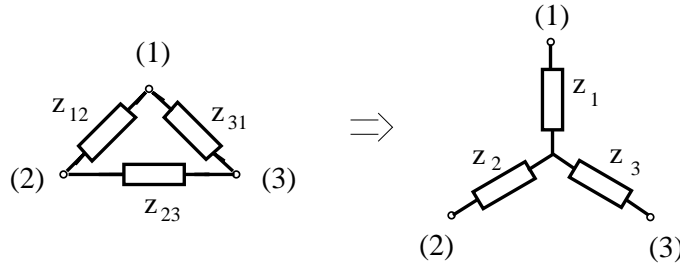


Fig. 4.37.

Pentru demonstrația acestei teoreme se excită cele două circuite în curent între perechile de borne 1 - 2, 2 - 3, 3 - 1, succesiv, obținându-se:

$$1 - 2 : z_1 + z_2 = [(z_{31} + z_{23})^{-1} + y_{12}]^{-1},$$

deoarece laturile z_1 și z_2 sunt înseriate, iar z_{31} , z_{23} , z_{12} sunt conectate mixt (z_{23} - z_{31} serie, iar rezultatul în paralel cu z_{12});

$$2 - 3 : z_2 + z_3 = [(z_{12} + z_{31})^{-1} + y_{23}]^{-1},$$

$$3 - 1 : z_1 + z_3 = [(z_{12} + z_{23})^{-1} + y_{31}]^{-1}.$$

Adunând aceste trei relații se obține mărimea $2 \cdot (z_1 + z_2 + z_3)$, care scăzută din dublul fiecărei relații permite obținerea rezultatelor dorite.

Transfigurarea unui polinom complet cu n noduri și $s = n(n-1)/2$ laturi într-o stea cu n laturi presupune rezolvarea a s ecuații cu n necunoscute. Această problemă are soluție doar dacă:

$$\frac{n(n-1)}{2} = n,$$

deci pentru $n = 3$. În consecință singurul poligon complet care se poate transfigura în stea este triunghiul. Aplicând teorema transfigurării triunghi - stea în cazul circuitelor rezistive liniare se obțin relațiile:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

În cazul circuitelor cu bobine ideale liniare, relațiile de transfigurare sunt:

$$L_1 = \frac{L_{12}L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}, L_2 = \frac{L_{12}L_{23}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}, L_3 = \frac{L_{23}L_{31}}{L_{12} + L_{23} + L_{31}}.$$

iar în cazul condensatoarelor:

$$C_1 = \frac{1}{S_1} = \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{23}},$$

$$C_2 = \frac{1}{S_2} = \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{31}},$$

$$C_3 = \frac{1}{S_3} = \frac{C_{12}C_{23} + C_{23}C_{31} + C_{31}C_{12}}{C_{12}}.$$

Următoarele teoreme se referă la echivalența circuitelor alcătuite din surse ideale.

Teorema lui Vachy pentru surse de tensiune

Un circuit stea alcătuit din surse ideale de tensiune cu t.e.m identice și orientate similar față de nodul central este echivalent cu o stea cu laturi conductoare perfecte (figura 38):

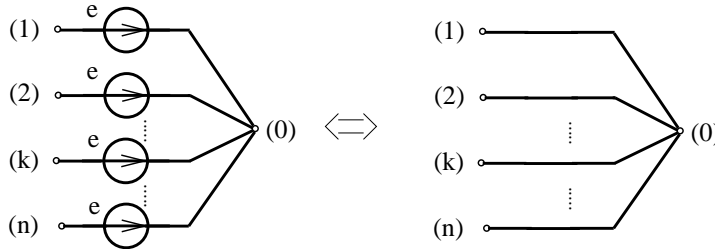


Fig. 4.38.

Pentru demonstrația acestei afirmații se constată că tensiunea dintre două noduri arbitrare $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ este nulă:

$$u_{kj} = u_{k0} - u_{0j} = -e + e = 0.$$

Rezultă că toate cele n noduri sunt echipotențiale:

$$V_1 = V_2 = \dots = V_k = \dots = V_n,$$

ceea ce corespunde cazului în care cele n surse sunt unite printr-un conductor perfect.

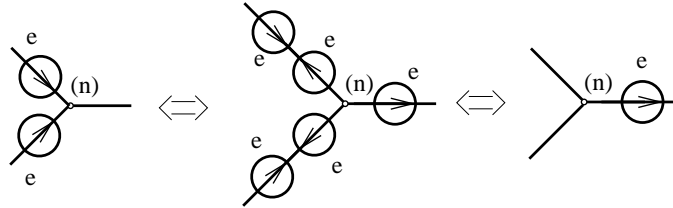


Fig. 4.39.

O consecință a acestei teoreme, cunoscută sub numele de "alunecarea surselor", este reprezentată în figura (39). Se constată că cele două surse de tensiune, care concură la nodul (n) , pot fi eliminate și înlocuite cu o singură sursă plasată pe a treia latură.

Teorema lui Vachy pentru surse de curent

Un circuit format din surse ideale de curent identice conectate în buclă și orientate în același sens este echivalent cu un circuit format din izolatoare perfecte (figura 40).

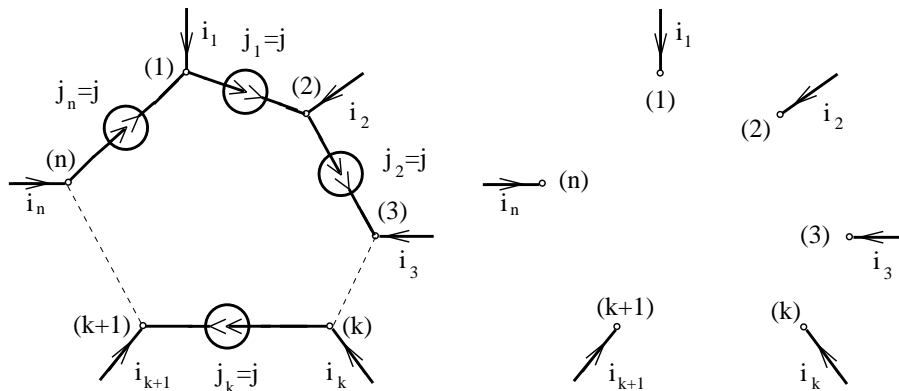


Fig. 4.40.

Intensitățile curenților din cele n borne ale circuitului sunt toate nule, deoarece:

$$i_k = j_k - j_{k-1} = j - j = 0, \quad k = \overline{2, n},$$

și

$$i_1 = j_1 - j_n = 0.$$

În consecință, indiferent ce valori au potențialele bornelor $i_k = 0, k = \overline{1, n}$, deci circuitul are același comportare ca un izolator.

De exemplu, aplicând această teoremă la circuitul din figura 41, se obține în

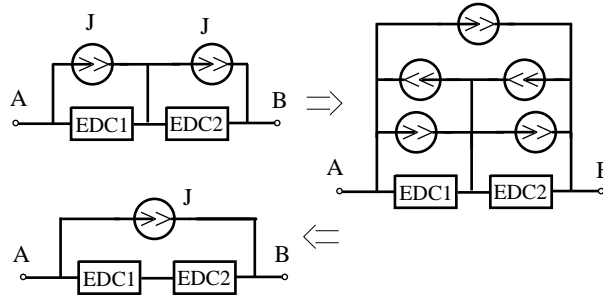


Fig. 4.41.

final un circuit cu o singură sursă de curent, dar cu o comportare pe la borne similară circuitului initial.

4.7 Teoreme de echivalare pentru bobine cuplate

Teorema eliminării cuplajului

Două bobine cuplate care au o bornă comună (figura 42) sunt echivalente cu o stea cu inductivitățile necuplate:

$$L_A = L_1 - M, \quad L_B = L_2 - M, \quad L_C = M.$$

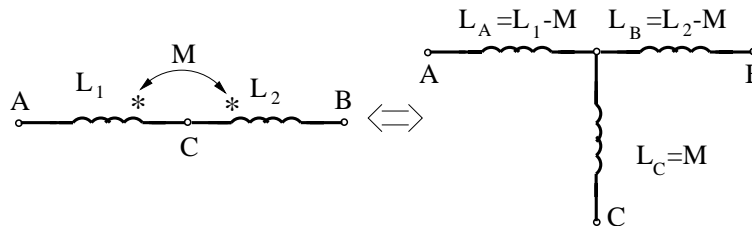


Fig. 4.42.

Aceste relații se aplică în cazul în care bornele polarizate au aceeași poziție față de borna comună. În caz contrar, trebuie schimbat semnul inductivității mutuale în cele trei relații.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se consideră că cele două bobine sunt parcurse de curenții i_1, i_2 (figura 43) și în consecință:

$$u_{AC} = z_1 i_1 + z_M i_2, \quad u_{BC} = z_2 i_2 + z_M i_1,$$

în care s-a notat $z_1 = L_1 \frac{d}{dt}$, $z_2 = L_2 \frac{d}{dt}$ și $z_M = M \frac{d}{dt}$. În circuitul echivalent:

$$u_{AC} = z_A i_1 + z_C (i_1 + i_2) - (z_A + z_C) i_1 + z_C i_2,$$

$$u_{BC} = z_B i_2 + z_C (i_1 + i_2) - (z_B + z_C) i_2 + z_C i_1,$$

unde $z_A = L_A \frac{d}{dt}$, $z_B = L_B \frac{d}{dt}$, $z_C = L_C \frac{d}{dt}$.

Condiția ca cele două circuite tripolare să aibă aceeași comportare pe la borne este ca cele două relații să fie identice, respectiv $z_A + z_C = z_1$, $z_B + z_C = z_2$ și $M = L_C$, $L_1 = L_A + M$ și $L_2 = L_B + M$.

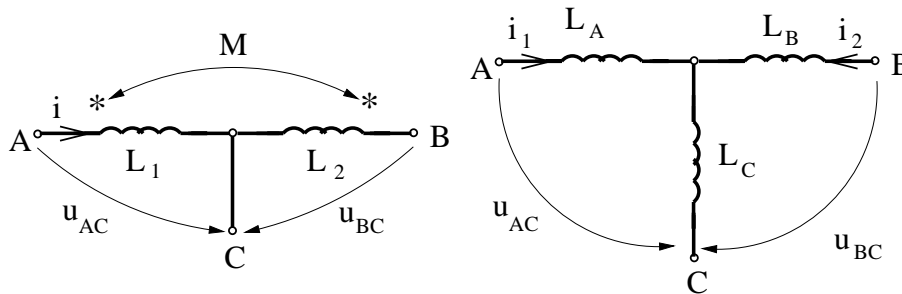


Fig. 4.43.

Rezultatul obținut poate fi generalizat în cazul unui circuit stea cu trei laturi cuplate magnetic (figura 44).

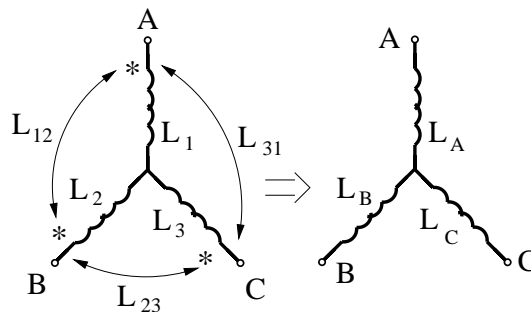


Fig. 4.44.

Prin eliminarea succesivă a celor trei cuplaje L_{12} , L_{23} și L_{31} se obțin relațiile de echivalență:

$$L_A = L_1 - L_{12} + L_{23} - L_{31},$$

$$L_B = L_2 - L_{12} - L_{23} + L_{31},$$

$$L_C = L_3 + L_{12} + L_{23} - L_{31}.$$

Aplicând teorema eliminării cuplajului în cazul unei perechi de bobine cuplate și înseriate (figura 45 și figura 46) se obține:

$$L_e = L_1 + L_2 \pm 2M,$$

în care semnul se stabilește în funcție de poziția bobinei polarizate.

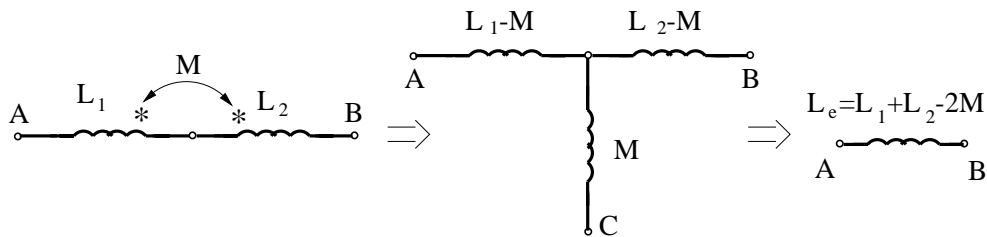


Fig. 4.45.

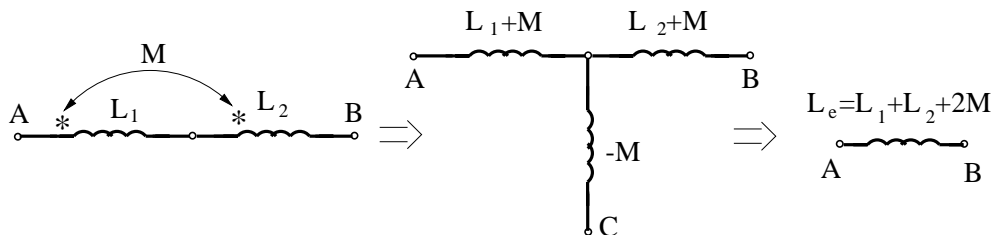


Fig. 4.46.

Acest rezultat poate fi generalizat la cazul a n bobine cuplate magnetic și înseriate (figura 47) cu condiții inițiale nule.

Presupunând ca toate bornele polarizate sunt orientate similar tensiunea u_{AB} la borne are expresia:

$$u_{AB} = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} \right) \frac{di}{dt} = L_e \frac{di}{dt}.$$

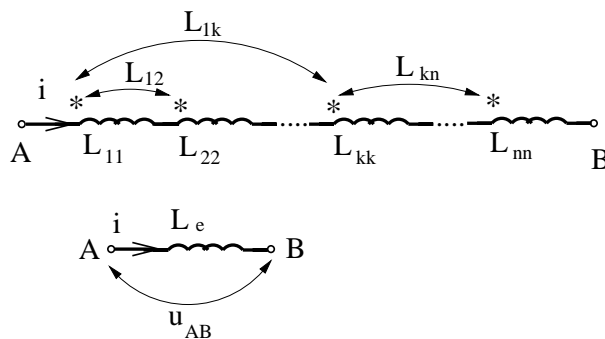


Fig. 4.47.

În consecință aceste bobine sunt echivalente cu o singură bobină având inductivitatea echivalentă:

$$L_e = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj}.$$

Considerând două bobine cuplate magnetic și conectate în paralel (figura 48), prin eliminarea cuplajului se obține:

$$L_e = M + \frac{(L_1 - M)(L_2 - M)}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

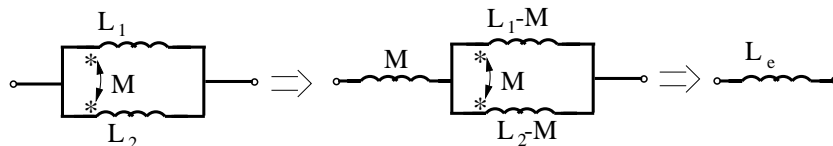


Fig. 4.48.

Dacă bornele polarizate au poziții opuse expresia inductivității echivalente $L_e = (L_1 L_2 - M^2)/(L_1 + L_2 + 2M)$ se obține prin schimbarea semnului inductivității mutuale M .

Pentru a studia cazul a n bobine cuplate și conectate în paralel se consideră matricea inductivităților reciproce $\Gamma = L^{-1}$. Curentul total absorbit de circuit este:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj} \int_0^t u(t') dt' = \Gamma_e \int_0^t u(t') dt',$$

sau folosind operatorii de admitanță:

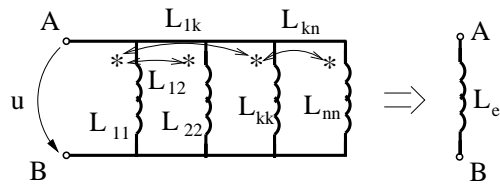


Fig. 4.49.

$$i = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj} \right) u.$$

Intensitatea laturii k este:

$$i_k^{(1)} = \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj} \int_0^t u(t') dt'.$$

În consecință, cele n bobine conectate în paralel sunt echivalente cu o singură bobina având inductivitatea reciprocă echivalentă:

$$\Gamma_e = \frac{1}{L_e} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj},$$

iar în cazul general al bobinelor liniare cuplate, operatorul de admitanță echivalent este:

$$y_e = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n y_{kj}.$$

Eliminarea cuplajelor în conexiunea triunghi

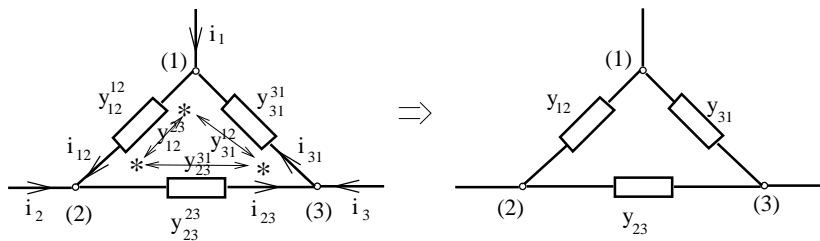


Fig. 4.50.

Se consideră trei laturi conectate în triunghi caracterizate prin operatorii de admitanță proprii y_{12}^{12} , y_{23}^{23} , y_{31}^{31} , cuplate magnetic. Cuplajul este caracterizat prin operatorii de admitanță y_{12}^{23} , y_{23}^{31} , y_{31}^{12} , astfel încât:

$$\begin{aligned}i_{12} &= y_{12}^{12}u_{12} + y_{12}^{23}u_{23} + y_{12}^{31}u_{31}, \\i_{23} &= y_{23}^{12}u_{12} + y_{23}^{23}u_{23} + y_{23}^{31}u_{31}, \\i_{31} &= y_{31}^{12}u_{12} + y_{31}^{23}u_{23} + y_{31}^{31}u_{31}.\end{aligned}$$

Deoarece $u_{23} = -u_{12} - u_{31}$, rezultă:

$$i_{12} = (y_{12}^{12} - y_{12}^{23})u_{12} + (y_{12}^{31} - y_{12}^{23})u_{31},$$

și în mod similar i_{31} . În consecință:

$$i_1 = i_{12} - i_{31} = (y_{12}^{12} - y_{12}^{23} - y_{12}^{31} + y_{23}^{31})u_{12} - (y_{31}^{31} - y_{31}^{12} - y_{31}^{23} + y_{12}^{23})u_{31},$$

și prin identificare cu expresia curentului din circuitul triunghi cu laturile necuplate:

$$i_1 = y_{12}u_{12} - y_{31}u_{31},$$

se obțin relațiile de transfigurare:

$$\begin{aligned}y_{12} &= y_{12}^{12} - y_{12}^{23} - y_{12}^{31} + y_{23}^{31}, \\y_{23} &= y_{23}^{23} - y_{23}^{12} - y_{23}^{31} + y_{12}^{12}, \\y_{31} &= y_{31}^{31} - y_{31}^{12} - y_{31}^{23} + y_{12}^{23}.\end{aligned}$$

În particular, în cazul a trei bobine identice, cu conductivitățile proprii L și cuplate simetric prin inductivitatea mutuală M , se obține:

$$L_e = L + M,$$

(deoarece $\Gamma_{kj} = L/(L^2 - M^2)$, $\Gamma_{kj} = (-M)/(L^2 - M^2)$).

Echivalarea condițiilor inițiale

Teoremele prezentate au presupus ca bobinele au condiții inițiale nule. Pentru studiul bobinelor cu condiții inițiale nenule se recomandă modelarea condițiilor inițiale prin surse independente.

Perechea de bobine cuplate este caracterizată de ecuațiile diferențiale:

$$\begin{aligned}u_1 &= L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt}, \\u_2 &= L_{21}\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}.\end{aligned}$$

Sau în cazul folosirii inductivităților reciproce:

$$\frac{di_1}{dt} = \Gamma_{11}u_1 + \Gamma_{12}u_2,$$

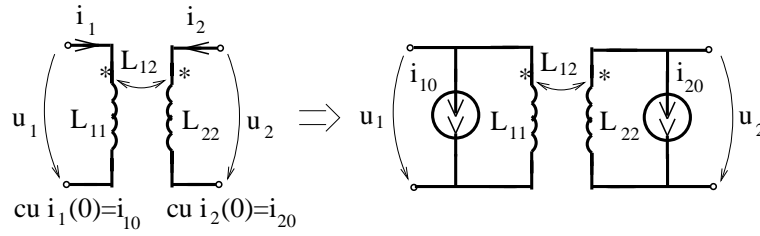


Fig. 4.51.

$$\frac{di_2}{dt} = \Gamma_{21}u_1 + \Gamma_{22}u_2.$$

Întegrând aceste ecuații pe intervalul $(0, t)$, rezultă:

$$i_1(t) = i_1(0) + \int_0^t (\Gamma_{11}u_1 + \Gamma_{12}u_2)dt',$$

$$i_2(t) = i_2(0) + \int_0^t (\Gamma_{21}u_1 + \Gamma_{22}u_2)dt',$$

relații care corespund unei perechi de bobine cuplate cu condiții inițiale nule, fiecare bobină fiind conectată în paralel cu o sursă de curent $i_{10} = i_1(0)$ și $i_{20} = i_2(0)$. Dacă se notează cu:

$$y_{kj} = \Gamma_{kj} \cdot \int_0^t u_j dt',$$

operatorul de admitanță, liniar, se obțin relațiile:

$$\begin{cases} i_1 = i_{10} + y_{11}u_1 + y_{12}u_2 \\ i_2 = i_{20} + y_{21}u_1 + y_{22}u_2, \end{cases}$$

Exprimând tensiunile la bornele bobinelor se obțin expresiile:

$$\begin{cases} u_1 = z_{11}(i_1 - i_{10}) + z_{12}(i_2 - i_{20}) \\ u_2 = z_{21}(i_1 - i_{10}) + z_{22}(i_2 - i_{20}), \end{cases}$$

în care z este un operator matriceal de impedanță, definit prin $z = y^{-1}$. Componentele lui vor fi $z_{kj} = L_{kj} \frac{di}{dt}$. În consecință, condițiile inițiale vor putea fi reprezentate și prin surse ideale de tensiune (figura 52) cu t.e.m. $e_{11} = -z_{11}i_{10} = -L_{11}i_{10}\delta(t)$, $e_{12} = -z_{12}i_{20} = -L_{12}i_{20}\delta(t)$, $e_{21} = -z_{21}i_{10} = -L_{21}i_{10}\delta(t)$ și $e_{22} = -z_{22}i_{20} = -L_{22}i_{20}\delta(t)$.

Se constată că aceste surse ideale de tensiune au o variație în timp de tip impuls Dirac $\delta(t)$, multiplicat cu fluxul inițial prin fiecare bobină $\varphi_{10} = L_{11}i_{10} + L_{12}i_{20}$ și $\varphi_{20} = L_{21}i_{10} + L_{22}i_{20}$, fiind orientate în sensul de referință al curentului. Această afirmație este valabilă și în cazul în care numărul de bobine cuplate este mai mare de două.

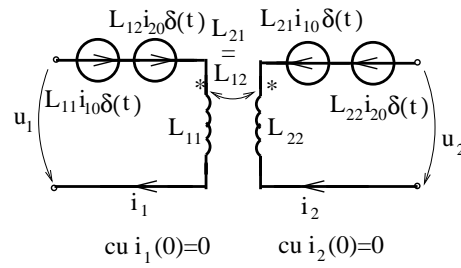


Fig. 4.52.

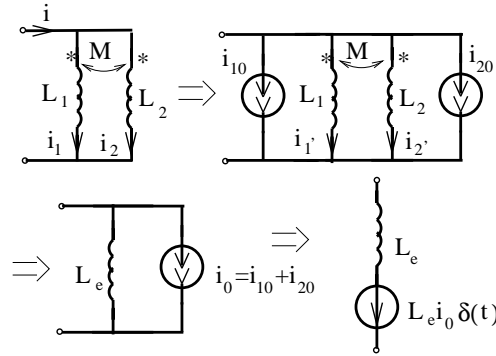


Fig. 4.53.

În figura 53 se reprezintă circuitul echivalent pentru două bobine cuplate conectate în paralel.

În figura 54 se reprezintă cazul conexiunii serie unde $j_0 = \varphi_0/L_e = (\varphi_{10} + \varphi_{20})/L_e = ((L_1 + M)i_{10} + (L_2 + M)i_{20})/(L_1 + L_2 + 2M)$.

4.8 Analiza prin transfigurare a circuitelor electrice. Metoda generatoarelor echivalente

Teorema divizorului de tensiune

Două elemente dipolare de circuit EDC1, EDC2 conectate în serie (figura 55) alcătuiesc un circuit numit divizor de tensiune, deoarece tensiunea u aplicată circuitului se divizează în două componente u_1 și u_2 , astfel încât $u = u_1 + u_2$. Dacă se presupune că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de impedanță z_1 și z_2 , cu același domeniu, atunci circuitul este echivalent cu un element dipolar cu operatorul de admitanță $z = z_1 + z_2$, care se va presupune inversabil. În aceste condiții, intensitatea curentului este:

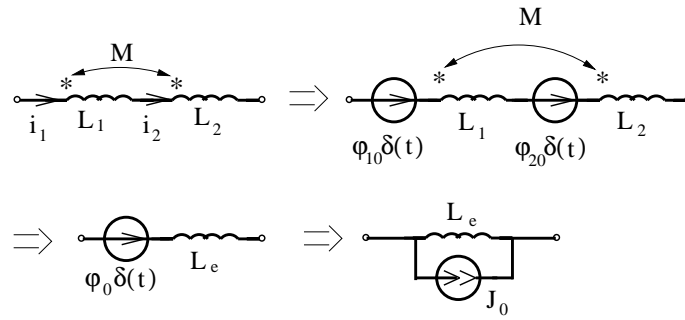


Fig. 4.54.

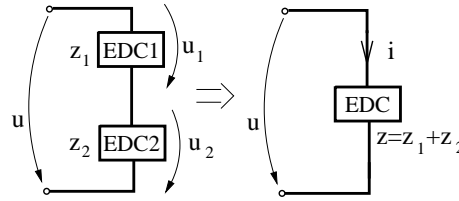


Fig. 4.55.

$$i = (z_1 + z_2)^{-1}u,$$

și determină tensiunile:

$$u_1 = z_1 i = z_1 (z_1 + z_2)^{-1}u,$$

$$u_2 = z_2 i = z_2 (z_1 + z_2)^{-1}u,$$

expresii cunoscute sub numele de relațiile divizorului de tensiune.

În particular, în cazul elementelor ideale liniare, aceste relații capătă formele:

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}u, \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}u,$$

pentru cazul divizorului rezistiv de tensiune;

$$u_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}u, \quad u_2 = \frac{L_2}{L_1 + L_2}u,$$

pentru divizorul inductiv de tensiune (cu condiții inițiale nule);

$$u_1 = \frac{S_1}{S_1 + S_2}u = \frac{C_1}{C_1 + C_2}u, \quad u_2 = \frac{S_2}{S_1 + S_2}u = \frac{C_2}{C_1 + C_2}u,$$

pentru divizorul capacitiv de tensiune (cu condiții inițiale nule).

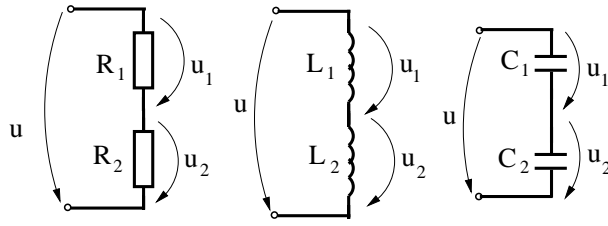


Fig. 4.56.

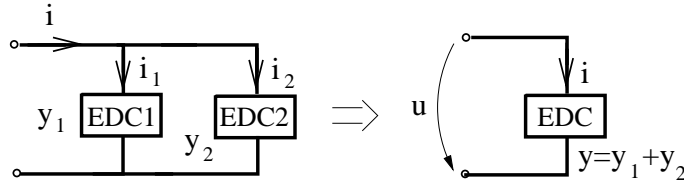


Fig. 4.57.

Teorema divizorului de curent

Două elemente dipolare de circuit conectate paralel (figura 57) alcătuiesc un divizor de curent, deoarece, curentul $i = i_1 + i_2$ este divizat în i_1 și i_2 . Considerând că cele două elemente sunt caracterizate prin operatorii de admitanță y_1 și y_2 cu domenii identice, divizorul de curent este echivalent cu un element dipolar de circuit cu operatorul de admitanță $y = y_1 + y_2$. Presupunând acest operator inversabil, tensiunea la bornele divizorului este:

$$u = (y_1 + y_2)^{-1}i,$$

deci fiecare latură a divizorului va fi străbătută de:

$$i_1 = y_1 u = y_1 (y_1 + y_2)^{-1}i,$$

$$i_2 = y_2 u = y_2 (y_1 + y_2)^{-1}i.$$

Aceste expresii se numesc relațiile divizorului de curent. În cazul particular al elementelor ideale liniare (figura 58) aceste relații capătă formele:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}i = \frac{R_2}{R_1 + R_2}i, \quad i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}i = \frac{R_1}{R_1 + R_2}i,$$

pentru divizorul rezistiv de curent.

$$i_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}i = \frac{L_2}{L_1 + L_2}i, \quad i_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}i = \frac{L_1}{L_1 + L_2}i,$$

pentru divizorul inductiv de curent (cu condițiile inițiale nule).

$$i_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i, \quad i_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i,$$

pentru divizorul capacitiv de curent (cu condiții inițiale nule).

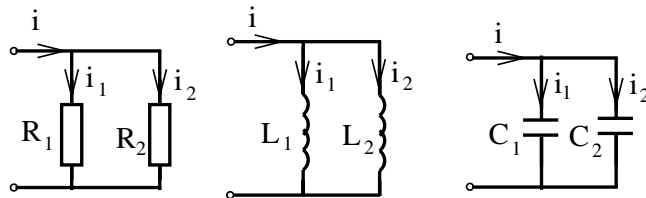


Fig. 4.58.

Teoremele divizoarelor de curent și tensiune împreună cu teoremele de echivalență serie - paralel reprezintă baza teoretică a unei metode de maximă eficiență pentru analiza circuitelor electrice. Principiul acestei metode constă în transfigurarea succesivă a circuitului prin înlocuirea laturilor conectate serie cu un singur element dipolar și a laturilor conectate paralel cu un element dipolar echivalent, pâna la reducerea circuitului la o singură buclă. După determinarea curentului ce străbate această buclă, se revine la circuitul inițial, la care se determină curenții și tensiunile prin aplicarea succesiv a teoremelor divizorului de curent sau de tensiune.

Metoda prezentată, cunoscută și sub numele de metoda generatoarelor echivalente poate fi extinsă de la circuit cu conexiune mixtă la circuite cu topologie mai complicată, prin utilizarea transfigurărilor stea - triunghi. În acest caz, se elimină pe rând câte un nod din circuit, considerându-l nodul central al unei stele, care se transformă într-un poligon complet.

Pentru a exemplifica aplicarea metodei se va considera pentru început cazul circuitelor liniare în regim staționar. Deoarece în acest caz bobinele și condensatoarele se comportă ca rezistoare degenerate (conductoare și respectiv izolatoare perfecte), singurele elemente ideale care intervin sunt rezistoarele (R), sursele de tensiune (E) și cele de curent (I).

Tabelul din figura 59 prezintă parametrii elementelor echivalente obținute prin toate combinațiile serie - paralel de elemente R,E,I. Valorile acestor parametri au fost obținute prin aplicarea teoremelor de echivalență stabilite în paragrafele anterioare.

Se constată că orice combinație serie - paralel de elemente ideale se reduce în final la o sursă reală de tensiune (în particular la un rezistor, dacă $E = 0$, sau la o sursă ideală de tensiune, dacă $R = 0$) sau la o sursă ideală de curent (care este ireductibilă la o sursă reală de tensiune).

Aplicație: Fie circuitul din figura 60:

serie paralel							
	 $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$						
	 $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ and $\frac{E_2 R_1}{R_1 + R_2}$			 (1)			
	 $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ and $J_2 R_2$			 (2)			

$$(1) \begin{cases} R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ E = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ E = (J_1 + J_2)(R_1 || R_2) \end{cases}$$

Fig. 4.59.

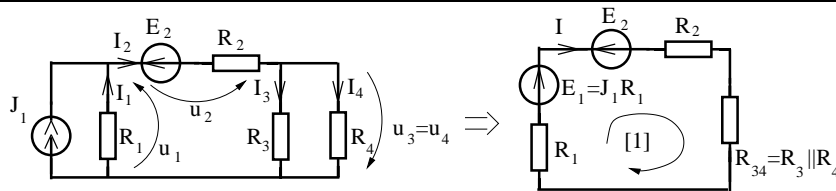


Fig. 4.60.

Transfigurând generatorul real de curent (J, R_1) într-un generator real de tensiune (E_1, R_1) și înlocuind rezistoarele R_3, R_4 cu o rezistență echivalentă $R_{34} = (R_3 R_4)/(R_3 + R_4)$ se obține circuitul cu o singură buclă, la care intensitatea curentului electric I se obține din a doua teorema Kirchhoff:

$$[1] : R_1 I - E_1 + E_2 + R_2 I + R_{34} I = 0 \Rightarrow I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_{34}}.$$

Deoarece latura (E_2, R_2) nu a fost afectată de transfigurări, rezultă că aceasta este străbătută de curentul $I_2 = I$. Intensitățile I_3 și I_4 se obțin prin aplicarea relației divizorului de curent rezistiv:

$$I_3 = I_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4}, \quad I_4 = I_2 \frac{R_3}{R_3 + R_4}.$$

Curentul I_1 , rezultă din prima teorema Kirchhoff:

$$(1) : I_1 + J_1 = I_2 \Rightarrow I_1 = I - J_1,$$

tensiunile la bornele laturilor au expresiile:

$$U_1 = R_1 I_1, \quad U_2 = E_2 + R_2 I_2, \quad U_3 = U_4 = R_{34} I.$$

4.9 Folosirea similitudinii în analiza circuitelor electrice

Metoda prezentată poate fi aplicată și în cazul circuitelor liniare rezistive, în regim variabil, ecuațiile circuitelor (R, E, J) , ce nu conțin elemente acumulate de energie, fiind în fiecare moment identice cu ecuațiile circuitelor (R, E, J) .

Ecuații similare au și circuitele cu surse ideale de curent și bobine, în regim staționar. Circuitele (L, J) în regim staționar sunt caracterizate prin faptul că tensiunile la bornele elementelor sunt nule, totuși relațiile constitutive ale bobinelor $\phi = LI$ (similare relațiilor $U = RI$ din circuitele rezistive) permit determinarea fluxurilor magnetice ale bobinelor. În consecință între ecuațiile circuitelor

rezistive (R, J) și ecuațiile circuitelor inductive (L, J) se poate stabili o relație de similitudine, caracterizată de tabelul:

Circuite (R, J)	I	U	R
Circuite (L, J)	J	ϕ	L

Se constată că fluxul magnetic este similar tensiunii electrice și inductivitatea este similară rezistenței. În consecință circuitele (L, J) pot fi studiate cu metodele circuitelor (R, J) înlocuind bobinele cu rezistoare iar la revenire valorile numerice ale tensiunii vor da valorile fluxurilor.

Circuitele electrice alcătuite exclusiv din condensatoare și surse ideale de tensiune (C, E) au în regim staționar ecuații similare circuitelor (R, E) .

Intensitățile curenților sunt nule prin toate laturile circuitelor (C, E) , în schimb fiecare condensator este caracterizat prin relația constitutivă $Q = CU$, similară relației $I = GU$. Între circuitele (C, E) și cele (R, E) există o similitudine caracterizată de tabelul:

Circuite (L, E)	I	U	$G = VR$
Circuite (R, E)	Q	U	$C = VS$

Rezultă că circuitele (C, E) pot fi studiate ca circuite (R, E) , înlocuind condensatoarele cu rezistoare având conductanța cu valoarea numerică egală cu capacitatea condensatoarelor substituie iar în final curenții din circuitul rezistiv similar vor da valorile numerice ale sarcinilor condensatoarelor.

La circuitele (R, C, E) cu rezistoare, condensatoare și surse ideale de tensiune în regim staționar distribuția curenților se determină înlocuind condensatoarele cu izolatoare perfecte. În schimb, pentru a determina tensiunile în circuit este necesară luarea în considerare și a capacităților condensatoarelor. Pentru aceasta se studiază rețeaua capacitivă la bornele căreia potențialele sunt determinate de componenta (R, E) a circuitului.

În mod similar se procedează și în cazul circuitelor (R, L, J) .

Aplicație: Fie circuitul, în regim staționar, din figură 61

Deoarece în regim staționar curenții ce străbat condensatoarele sunt nuli, rezultă că acestea pot fi eliminate din circuit, fără ca intensitățile curenților să se modifice.

Se constată că laturile 1 și 6 sunt conectate în paralel, deci vor putea fi înlocuite cu sursa reală de tensiune cu parametrii $E_{16} = E_1 R_6 / (R_1 + R_6)$ și $R_{16} = R_1 R_6 / (R_1 + R_6)$. Intensitatea curentului prin latura 2, ramură neafectată de transfigurare este $I_2 = E_{16} / (R_{16} + R_2)$.

Potențialul nodului (1) este

$$V_1 = U_2 = R_2 I_2 = E_{16} \frac{R_2}{R_{16} + R_2},$$

egal cu tensiunea U_2 , la bornele laturilor 1, 2 și 6. Curentul prin latura 6 este $I_6 = V_1 / R_6$ cu $I_1 = I_6 + I_2$.

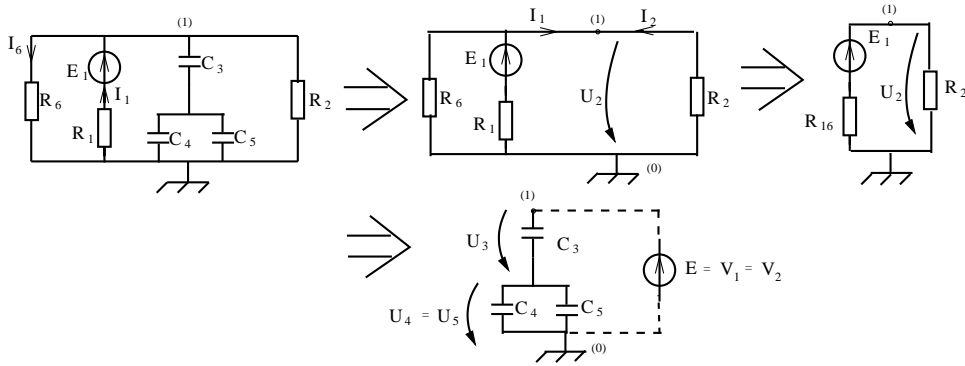


Fig. 4.61.

Pentru determinarea tensiunilor la bornele laturilor 3, 4 și 5 se studiază rețeaua capacitivă C_3, C_4, C_5 , care are la nodul (1) potențialul $V_1 = U_2$. Laturile 4, 5 se pot transfigura într-o latură capacitivă cu $C_{45} = C_4 + C_5$. Aplicând relația divizorului capacitiv de tensiune, rezultă:

$$U_3 = \frac{C_{45}}{C_3 + C_{45}}, \quad U_4 = \frac{C_3}{C_3 + C_{45}}.$$

4.10 Analiza circuitelor rezistive neliniare simple. Metoda dreptei de sarcină

Cele mai simple circuite rezistive neliniare sunt cele care conțin un singur element neliniar, restul fiind elemente rezistive de circuit liniar (R, E, J). După cum s-a arătat în paragraful anterior, partea liniară a circuitului poate fi echivalată cu o sursă reală de tensiune sau de curent (fig. 62)

Perechea de mărimi (u, i) trebuie să satisfacă simultan și ecuația rezistorului liniar, dar și cea a sursei echivalente. Sursa echivalentă de tensiune are ecuația:

$$u = e - Ri,$$

care reprezintă o dreaptă în planul i - u ce taie axele în punctele $e, i_S = \frac{e}{R}$. În consecință (u, i) reprezintă coordonatele punctului de intersecție între graficul funcției $f(i)$ și dreapta caracteristica părții liniare, numită dreapta de sarcină. (fig. 63)

Dacă partea liniară a circuitului se echivalează cu o sursă reală de curent, atunci:

$$i = j - Gu,$$

și dreapta de sarcină taie axele în punctele j și $u_0 = j/G$.

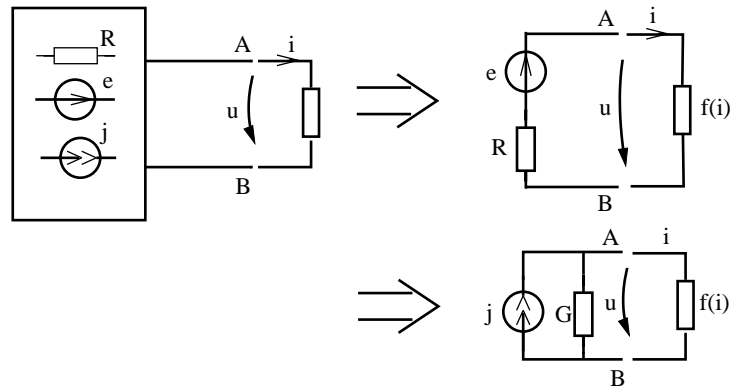


Fig. 4.62.

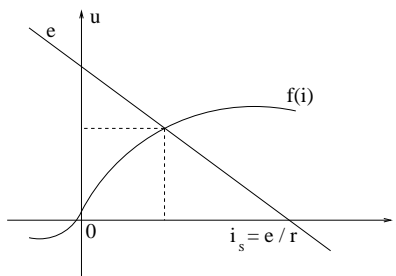


Fig. 4.63.

soluția (u, i) răspunde în acest caz intersecției dintre graficul funcției $g(u)$ și această dreaptă de sarcină (fig. 64)

În cazul circuitelor cu un element neliniar este posibil ca dreapta de sarcină să nu intersecteze graficul elementului neliniar (fig. 65) sau îl intersectează în mai multe puncte, (fig. 65) deci soluția problemei să nu existe, sau să existe soluții multiple.

Valorile u, i se pot determina prin:

- metode analitice
- metode grafice
- metode numerice

Eliminând din sistemul de ecuații algebrice:

$$u = e - Ri, u = f(i),$$

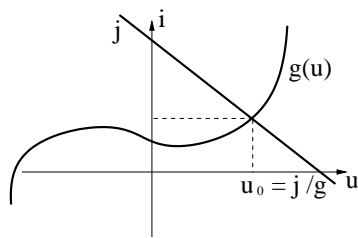


Fig. 4.64.

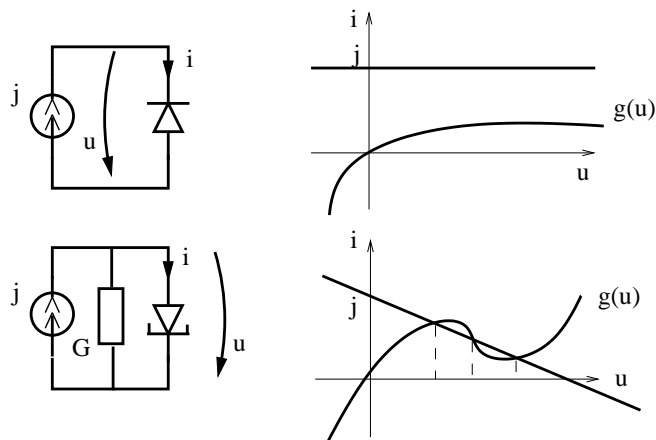


Fig. 4.65.

tensiunea u , se obține ecuația neliniară

$$f(i) + Ri - e = 0,$$

prin rezolvarea căreia se determină intensitatea i .

În mod asemănător, în cadrul elementului controlat în tensiune, din siste,ul:

$$i = j - Gu, i = g(u),$$

se obține ecuația $g(u) + Gu - j = 0$, prin rezolvarea căreia se determină tensiunea u la bornele elementului neliniar.

Determinarea punctului de funcționare prin metode grafice are dezavantajul impreciziei specifice acestor metode, dar are avantajul că permite evidențierea soluțiilor multiple și a zonei din caracteristica neliniară în care se află punctul de funcționare.

4.10.1 Metode numerice pentru analiza circuitelor rezistive cu un element neliniar

Soluționarea numerică a ecuației neliniare $F(x) = 0$, în care $F(x) = f(x) + Rx - e$, cu $x = i$ sau $F(x) = g(x) + Gx - j$, cu $x = u$ urmărește determinarea unei aproximații a soluției exacte. În acest scop se pot folosi:

- metode aproximării liniare pe porțiuni
- metode iterative

Metoda aproximării liniare pe porțiuni folosește în locul funcției $F(x)$ aproximația:

$$\bar{F}(x) = a_0 + b_1x + \sum_{k=1}^n b_k|x - x_k|.$$

Pe fiecare interval $x \in (x_k, x_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ rezistorul neliniar admite o schemă echivalentă liniară (sursă reală de tensiune sau curent). Presupunând că $i \in (i_k, i_{k+1})$, cu $k = 0$ se înlocuiește rezistorul neliniar cu sursa reală de tensiune echivalentă, având parametrii (R_k, E_k) . Prin analiza circuitului liniar (fig. 66) se obține:

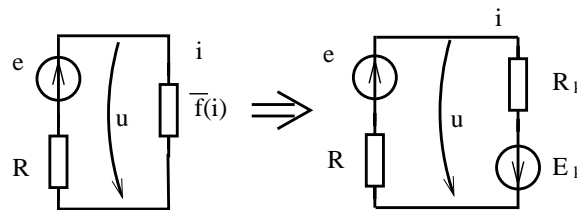


Fig. 4.66.

$$i^* = (e - +E_u)/(R + R_k).$$

Dacă $i^* \in (i_k, i_{k+1})$, atunci acesta este soluția problemei altfel se incrementează k și procedura se reia.

Se constată că pentru analiza unui circuit care conține un rezistor neliniar cu caracteristica aproximată prin n segmente de dreaptă, este necesară analiza a cel mult n circuite liniare. Efortul de calcul poate fi sensibil micșorat, dacă se cunoaște segmentul în care se află punctul de funcționare. Pentru determinarea acestuia se poate aplica metoda grafică a dreptei de sarcină.

Metodele iterative reprezintă o categorie de metode dedicate în special calculatoarelor numerice, în care soluția ecuației $F(x) = 0$ se obține ca limita unui șir definit recursiv: $x_{k+1} = G(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Dacă acest șir este convergent către soluția x^* a ecuației $F(x) = 0$, se poate reține termenul x_n ca soluție

aproximativă a deoarece pentru orice eroare impusă ε , există un n astfel încât $|x_n - x^*| < \varepsilon$.

Dintre metodele de definiție ale șirului recursiv cel mai des folosite sunt metoda iterației simple și metoda tangentei (Newton Raphson).

În cazul controlului în curent $F(x) = f(x) + Rx - e = 0$ expresie, care poate fi rescrisă sub forma:

$$x = (e - f(x))/R,$$

ceea ce corespunde iterațiilor:

$$x_{k+1} = (e - f(x_k))/R,$$

$k = 0, 1, 2, \dots$.

Modul în care evoluează iterațiile este reprezentat grafic în (fig. 67). Pornind de la o inițializare $x_0 = i_0$ arbitrară se constată că $i_k = x_k$ tinde către soluția problemei aflată la intersecția drepte de sarcină cu caracteristica elementului

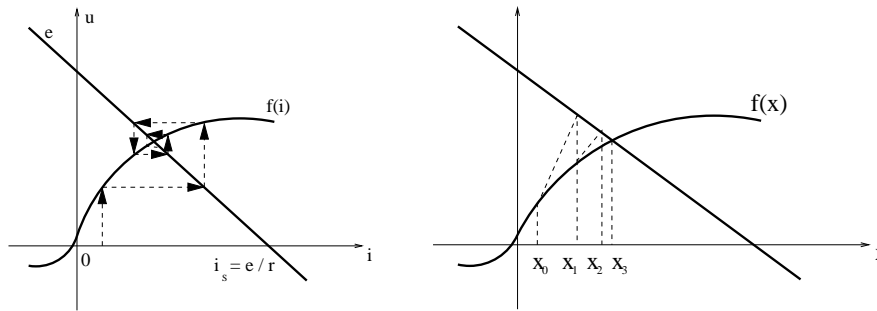


Fig. 4.67.

neliniar.

Această metodă nu este convergentă pentru orice caracteristică f . O condiție suficientă de convergență este ca funcția G să fie o contracție, respectiv ca $|G'| < 1$, condiție îndeplinită dacă rezistența dinamică $R_d = f'(i)$ a elementului neliniar este mai mică decât rezistența R a sursei reale de tensiune. În cazul controlului în tensiune $x_{k+1} = (j - g(x_k))/G$, metoda iterației simple este convergentă, dacă conductanța dinamică este mai mică decât conductanța internă a sursei echivalente de curent. De exemplu dacă în (fig. 67), elementul neliniar se consideră controlat în tensiune, ciclul iterativ se va derula în sensul invers al săgeților și șirul x_k va fi divergent. Aceste observații permit în cazul elementelor neliniare cu caracteristică bijectivă alegerea modului de control, care să asigure convergența șirului iterativ.

Metoda iterației simple are dezavantajul unei mici viteze de convergență. Pentru a îmbunătăți viteza de convergență se utilizează metoda tangentei. În acest

caz, funcția $F(x)$ se aproximează cu primii doi termeni din seria Taylor:

$$F(x_{k+1}) \cong F(x_k) + (x_{k+1} - x_k)F'(x_k),$$

echivalentă cu aproximarea graficului funcției $F(x)$ prin tangenta dusă în punctul $x = x_k$. Din condiția $F(x_{k+1}) = 0$, rezultă

$$x_{k+1} = x_k - F(x_k)/F'(x_k),$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ care reprezintă șirul iterativ specific metodei Newton Raphson (fig. 68)

În cazul controlului în curent, $F(x) = f(x) + Rx - e$ și

$$F'(x) = f'(x) + R = R_d(x) + R,$$

derivata funcției F fiind suma dintre rezistența dinamică a rezistorului neliniar și rezistența internă a sursei echivalente de tensiune. Curentul la iterația $k + 1$ se determină în funcție de cel de la iterația anterioară cu relația:

$$i_{k+1} = i_k - (f(i_k) + Ri_k - e)/(R_d(i_k) + R),$$

Se constată că această relație, adusă sub forma:

$$i_{k+1} = \frac{e - f(i_k) + R_d(i_k) \cdot i_k}{R + R_D(i_k)} = \frac{e - R_k}{R + R_d(i_k)}.$$

Correspunde unui circuit electric obținut prin înlocuirea elementului neliniar cu o sursă reală de tensiune având parametrii $R_k = R_d(i_k)$, $e_k = f(i_k) - R_d(i_k) \cdot i_k$. În consecință, la fiecare iterație, elementul neliniar cu caracteristică $u = f(i)$ se înlocuiește cu un element având caracteristica

$$u_{k+1} = f(i_k) + (i_{k+1} - i_k)R_d(i_k),$$

obținută prin reținerea a primilor doi termeni din seria Taylor asociată.

Aplicând metoda Newton-Raphson elementelor controlate în tensiune se constată că la fiecare iterație, elementul neliniar se înlocuiește cu sursă reală de curent cu parametrii $G_k = G_d(u_k) = g'(u_k)$, $j_k = g(u_k) - G_k \cdot u_k$. Aceste circuite echivalente elementelor neliniare se numesc circuite liniarizate. În consecință, analiza circuitelor neliniare prin metode iterative presupune rezolvarea unui șir de circuite liniare până când soluțiile succesive devin suficient de apropiate.

Metoda Newton-Raphson poate fi generalizată la cazul circuitelor cu mai multe elemente neliniare, când la fiecare iterație se înlocuiesc toate rezistoarele neliniare cu circuitele lor echivalente. În acest caz caracteristica circuitului conectat la bornele unui element neliniar nu se mai reprezintă grafic printr-o dreaptă în planul $u-i$ ci printr-o curbă neliniară. Perechea u,i specifică unui element neliniar reprezintă coordonatele punctului de intersecție dintre graficul caracteristicii elementului și curba de sarcină, specifică restului circuitului (fig. 69)

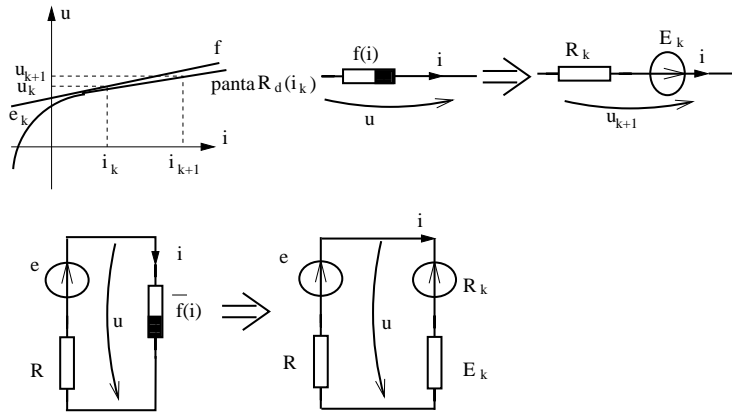


Fig. 4.68.

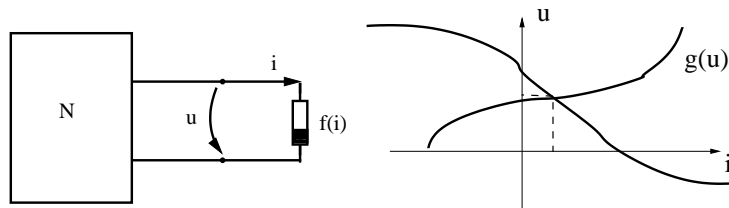


Fig. 4.69.

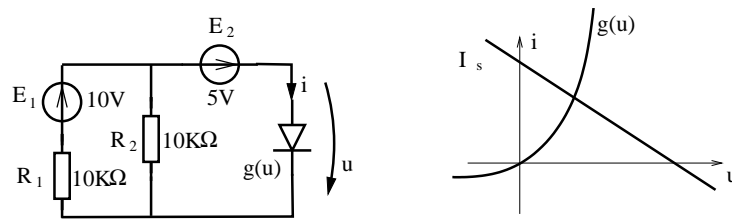


Fig. 4.70.

Aplicația 1:

Fie circuitul din (fig. 70), la care $g(u) = I_0(e^{+u/v_0} - 1)$ cu $I_0 = 10^{-6}A$, $V_0 = 0,027V$. Pentru determinarea generatorului echivalent părții liniare se constată că laturile 1 și 2 sunt conectate în paralel, deci sunt echivalente cu o sursă reală de tensiune cu parametrii: $R_{12} = R_1R_2/(R_1 + R_2) = R_1/2 = 5K\Omega$, $E_{12} = E_1R_2/(R_1 + R_2) = E_1/2 = 5V$. Aceasta înseriată cu sursa $E_3 = 5V$ determină $E_{123} = 10V$. Dreapta de sarcină taie axele în punctele $V_0 = 0V$ și $I_S = E/R_{12} = 2mA$ și are ecuația $i = I_S - Gu$ cu $G = VR_{12}$. Pentru determinarea tensiunii u la bornele diodei trebuie rezolvată ecuația $10^{-6}(e^{+u/0,027} - 1) = 2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}u$. Care este o ecuație transcendentă. Pe cale grafică se constată că $0 < i < I_S$ și $0 < u < V_0$, dioda fiind polarizată direct. Deoarece în punctul de funcționare, rezistența dinamică a elementului neliniar este mai mică decât rezistența echivalentă R_{12} , pentru a asigura convergența iterațiilor simple, rezistorul trebuie controlat în curent $u = V_0(i/I_0 + 1)$ iar ecuația părții liniare scrisă sub forma $u = v_0 - Ri$. În aceste condiții iterațiile $i_{k+1} = (U_0 - V_0 \ln(i_k/I_0 + 1))/R$ vor fi convergente.

Dacă se aplică metoda tangentei, la fiecare iotație, dioda semiconductoră trebuie înlocuită cu o sursă reală de tensiune cu parametrii $R_k = g'(i_k) = v_0/(i_k + I_0)$, $e_k = g(i_k) - R_k i_k = V_0 \ln(i_k/I_0 + 1) - v_0 i_k/(i_k + I_0)$, ceea ce corespunde unui curent:

$$i_{k+1} = \frac{v_0 - e_k}{R + R_k}.$$

Aplicația 2:

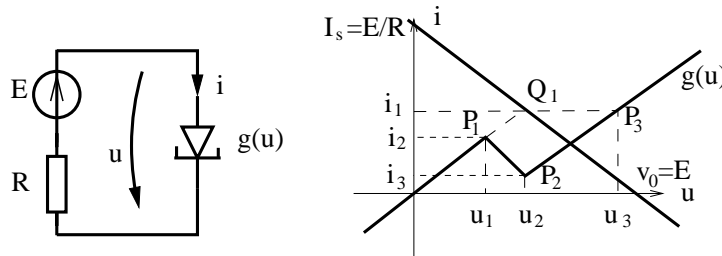


Fig. 4.71.

Fie circuitul din (fig. 71), în care dioda tunel are caracteristica $i = g(u)$, al cărui grafic trece prin punctele P_1, P_2 și P_3 cu coordonatele $u_1 = 1V, i_1 = 10mA$, $u_2 = 2V, i_2 = 5mA, u_3 = 3V, i_3 = 20mA$ iar sursa reală de tensiune are parametrii $E = 5V, R = 100\Omega$.

Pentru determinarea soluției u, i se presupune, pentru început $u < u_1$, ceea ce corespunde aproximării $g(u) = G_1U = (i_1u)/u_1 = 10^{-2}u$. Înlocuind dioda tunel cu un rezistor linear cu rezistența $R_1 = 1/G_1 = 100\Omega$ se obțin, $i = E/(R + R_1) = 25mA, u = ER_1/(R + R_1) = 2,5V$, coordonatele punctului Q_1 . Deoarece $u > u_1$

rezultă că aceasta nu este soluția problemei, punctul Q_1 , neobținându-se pe

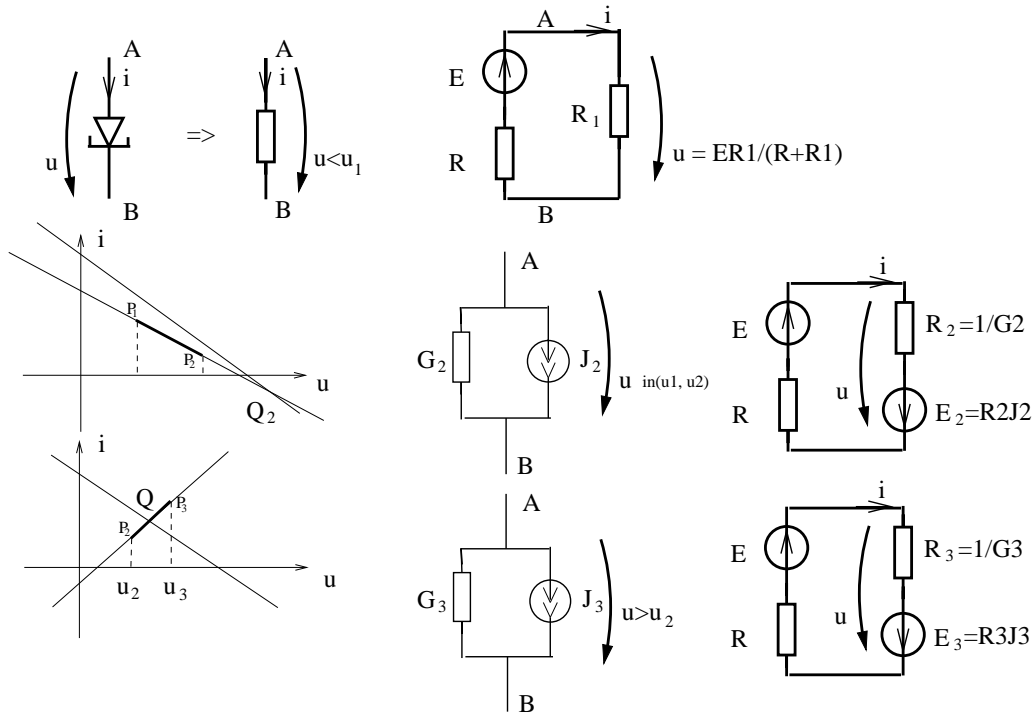


Fig. 4.72.

caracteristica elementului neliniar.

Presupunând că soluția $u \in (u_1, u_2)$, dioda tunel are în această zonă caracteristica:

$$g(u) = i_1 + \frac{i_2 - i_1}{u_2 - u_1}(u - u_1) = J_2 + G_2u,$$

deci este echivalentă cu o sursă reală de curent cu parametrii: $G_2 = (i_2 - i_1)/(u_2 - u_1) = -5mS$, $J_2 = i_1 - G_2u = 15mA$, sau cu o sursă de tensiune cu parametrii $R_2 = 1/G_2 = -200\Omega$, $E_2 = R_2J_2 = 3V$.

Curentul are în acest caz valoarea (fig. 72) $i = (E + E_2)/(R + R_2) = -80mA$, iar tensiunea $u = E - Ri = R_2i - E_2 = 13V$. Deoarece tensiunea nu satisface condiția $u \in (u_1, u_2)$, nici această zonă $P_1 - P_2$ nu conține punctul de funcționare Q_2 .

În cazul în care presupunem că $u > u_2$, dioda tunel are caracteristica:

$$g(u) = i_2 + \frac{i_3 - i_2}{u_3 - u_2}(u - u_2) = J_3 + G_3u,$$

cu $G_3 = (i_3 - i_2)/(u_3 - u_2) = 15mS$, $J_3 = -25mA$, ceea ce corespunde la $R_3 = 1/G_3 = 200/3\Omega$, $E_3 = R_3J_3 = -5/3V$.

Intensitatea curentului este $i = (E + E_3)/(R + R_3) = 20mA$, iar tensiunea $u = E - Ri = 3V$. Deoarece în acest caz ipoteza este satisfăcută, perechea $u = 3V, i = 20mA$ este soluția problemei.

Efortul de calcul ar fi putut fi micșorat dacă se cunoștea zona în care este plasat punctul de funcționare. Aceasta poate fi determinată prin metoda dreptei de sarcină, care din păcate nu poate fi aplicată de sistemele numerice de calcul.

Aplicația 3:

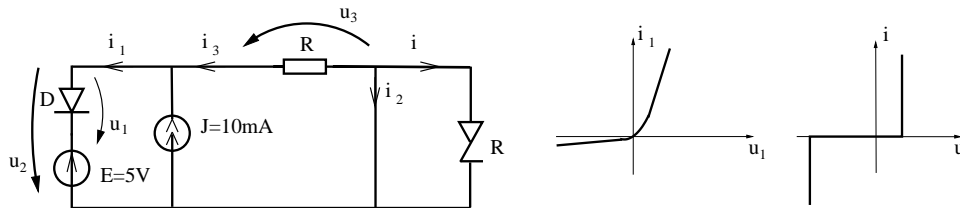


Fig. 4.73.

Pentru analiza circuitului din figură (fig. 73) se va aplica metoda curbei de sarcină. Prin înserierea diodei D cu sursa E , $u_2 = u_1 + E$ și caracteristica se translatează la dreapta cu $E = 5V$. Prin conectarea în paralel cu sursa J , $i_3 = i_1 - J$ și caracteristica se deplasează în jos cu $J = 10mA$ (fig. 74).

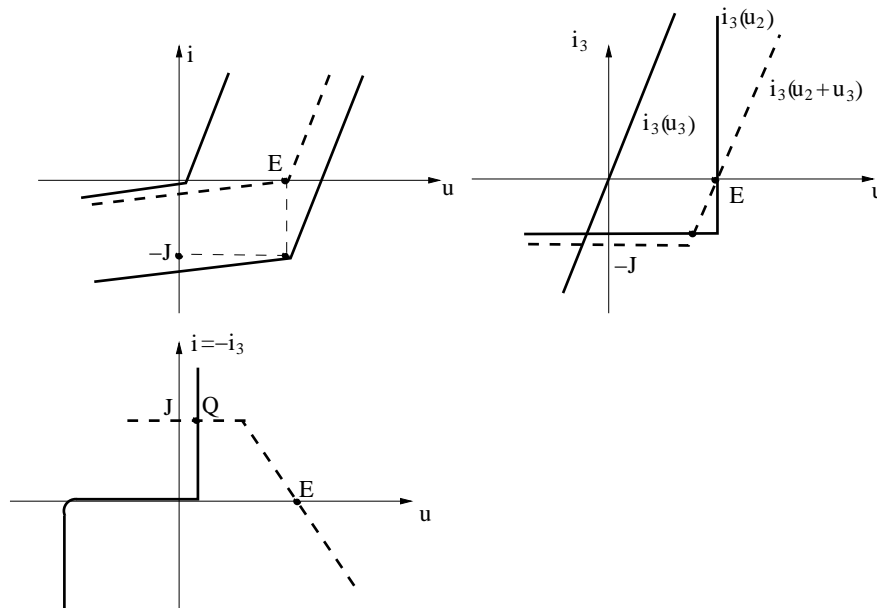


Fig. 4.74.

Prin înseriere cu reostatul $R = 1K\Omega$, $u = u_2 + u_3$ și caracteristica se modifică conform figurii. Graficul funcției $i_3(u)$ trebuie răsrurnat prin simetrie față de axa tensiunii, deoarece $i = -i_3$. Reprezentând în planul u-i planul diodei Zener $i(u)$ și curba de sarcină $i = -i_3$ se constată că punctul lor de intersecție Q se află în zona de polarizare directă a diodei Zener. Tensiunea la bornele acesteia este $u + 0$, iar curentul $i = J = 10mA$. Dioda D este blocată, deci $i_1 = 0$, $u_3 = Ri_3 = -10V$, iar $u_1 = -u_3 + u - E = -15V$.

4.11 Circuite electrice cu un singur element acumulator de energie.

Pentru început vor fi studiate circuitele liniare excitate cu surse având parametrii constanți în timp, care conțin în afara părții rezistive (R, E, J) un singur element acumulator de energie de tip inductiv (L) sau capacitiv (C). Prin înlocuirea părții rezistive cu sursa echivalentă de curent sau tensiune aceste circuite se reduc la unul din cele patru cazuri prezentate în figură.

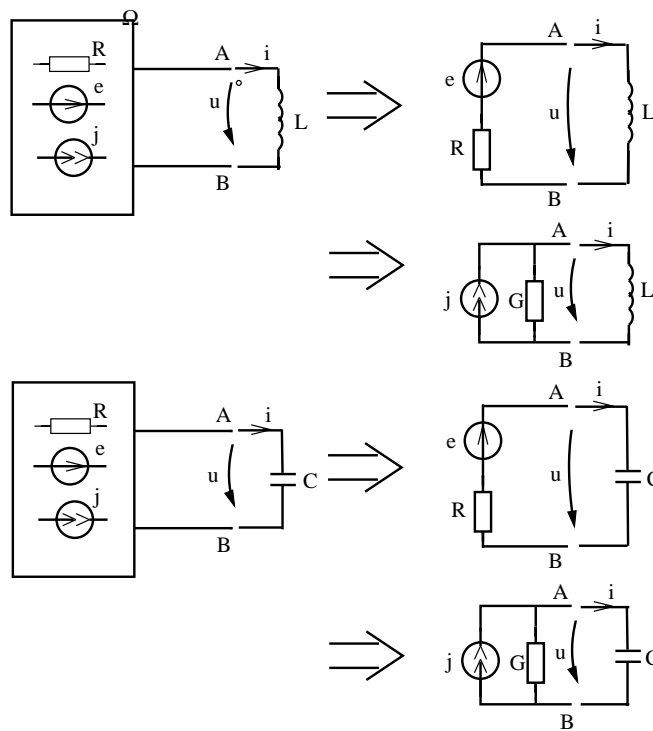


Fig. 4.75.

Analizând circuitul RL serie se obține, pe baza celei de a doua teoreme Kirc-

khoff:

$$u + Ri - E = 0,$$

respectiv ecuația diferențială satisfăcută de intensitatea curentului:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Pentru a obține o soluție unică, la această ecuație trebuie adăugată și condiția inițială $i(0) = i_0$ egală cu valoarea inițială a curentului prin bobină.

Pentru analiza circuitului GLJ paralel se aplică prima teoremă Kirchoff:

$$i = J - Gu \text{ cu } u = L \frac{di}{dt}.$$

Prin eliminarea tensiunii u se obține ecuația diferențială:

$$GL \frac{di}{dt} + i = J,$$

satisfăcută de intensitatea curentului, cu condiția inițială $i(0) = i_0$.

Aplicând a doua teoremă Kirckhoff la circuitul RCE serie se obține:

$$u + Ri - E = 0 \text{ cu } i = C \frac{du}{dt}.$$

Prin eliminarea curentului se obține ecuația diferențială:

$$RC \frac{du}{dt} + u = E,$$

cu condiția inițială $u(0) = u_0$ egală cu tensiunea inițială la bornele condensatorului.

Ecuația diferențială specifică circuitului $G CJ$ paralel se obține prin aplicarea primei teoreme Kirckhoff:

$$i = J - Gu \text{ cu } i = C \frac{du}{dt}.$$

Prin eliminarea curentului se obține ecuația diferențială:

$$C \frac{du}{dt} + Gu = J,$$

cu condiția inițială $u(0) = u_0$.

Se constată că cele patru ecuații au forma comună:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = b_0,$$

4.11. CIRCUITE ELECTRICE CU UN SINGUR ELEMENT ACUMULATOR
DE ENERGIE.

su condiția inițială $x(0) = x_0$. Valorile constantelor a_0, a_1, b_0, x_0 sunt date de tabelul 3.2.

Circuitul	a_0	a_1	b_0	x_0
RLE serie	L	R	E	i_0
GLE paralel	GL	1	J	i_0
RCE serie	RC	1	E	u_0
GCJ paralel	C	G	J	u_0

Deoarece aceste circuite sunt caracterizate de o singură ecuație diferențială de ordinul întâi ele se numesc circuite de ordinul unu.

Pentru determinarea soluției ecuației diferențiale liniare cu coeficienți constanți se determină pentru început soluția generală a ecuației omogene:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = 0.$$

Ecuația caracteristică a acesteia,

$$a_0 r + a_1 = 0,$$

are o singură rădăcină $r = -a_1/a_0$, soluția generală fiind:

$$x_1(t) = Ae^{rt}.$$

Soluția particulară a ecuației neomogene se presupune constantă în timp $x_2(t) = B$. Prin substituție se obține $aB = b_0$, deci:

$$x_2(t) = B = b_0/a_1.$$

În consecință ecuația diferențială admite soluția:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = Ae^{rt} + B,$$

cu $r = -a_1/a_0$ și $B = b_0/a_1$. Constanta de integrare A se obține din condiția inițială:

$$x(0) = A + B = x_0, \quad A = x_0 - B.$$

Forma finală a soluției este:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{b_0}{a_1}\right)e^{-\frac{a_1}{a_0}t} + \frac{b_0}{a_1},$$

ceea ce corespunde în cele patru cazuri la:

$$i(t) = \left(i_0 - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R},$$

$$\begin{aligned}i(t) &= (i_0 - J)e^{-\frac{t}{GL}} + J, \\u(t) &= (u_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} + E, \\u(t) &= (u_0 - \frac{J}{G})e^{-\frac{t}{C}} + \frac{J}{G}.\end{aligned}$$

Pentru $t \rightarrow \infty$ se constată că $x(t)$ are limita $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{b_0}{a_1}$, ceea ce corespunde la:

$$\begin{aligned}i_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E}{R}, \quad i_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = J, \\u_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = E, \quad u_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{J}{G}.\end{aligned}$$

Aceste valori corespund regimurilor staționare ale circuitelor analizate, în care bobina se comportă ca un conductor perfect, iar condensatorul ca un izolator perfect. Notând cu $\tau = a_0/a_1$, soluția se scrie sub forma:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

în care τ se numește constanta de timp a circuitului și are valorile:

$$\tau = \frac{L}{R} = GL,$$

pentru circuitele inductive,

$$\tau = RC = \frac{C}{G},$$

pentru circuitele capacitive.

În aceste relații $R = 1/G$ reprezintă rezistența internă a sursei echivalente circuitului la bornele cărui se află conectat elementul acumulator de energie. Funcția $x(t)$ fiind continuă în origine:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-, t < 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+, t > 0} x(t),$$

ea satisface egalitatea $x(0) = x_0$. Cunoșterea constantei de timp τ , a valorii inițiale x_0 și a valorii finale x_∞ , determinată prin analiza regimului staționar asimptotic permite determinarea variației în timp a mărimii $x(t) = Ae^{-t/\tau} + B$, care este curentul prin bobină sau tensiunea la bornele condensatorului. Aceste mărimi se numesc variabile de stare și sunt funcții continue, spre deosebire de tensiunea la bornele bobinei sau curentul prin conductoare care nu sunt în mod necesar funcții continue. Pentru determinarea acestora se poate folosi ecuația constitutivă a elementului acumulator de energie:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{LA}{\tau} e^{-t/\tau} = -RAe^{-t/\tau} = R \left(\frac{E - i_0}{R} \right) e^{-t/\tau},$$

$$i_L(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{CA}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{A}{R} e^{-t/\tau} = R \left(\frac{E - u_0}{R} - i_0 \right) e^{-t/\tau}.$$

Se constată că aceste funcții au valoare asimptotică nulă: $\lim_{t \rightarrow \infty} u_L(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} i_C(t) = 0$.

Valoarea inițială a tensiunii la bornele bobinei este: $u_L(0) = E - Ri_0$, ca și cum bobina în primul moment se comportă ca o sursă de curent, cu c.e.m egal cu condiția sa inițială i_0 . În particular, în cazul condiției inițiale nule $i_0 = 0$, bobina se comportă în primul moment ca un izolator perfect.

Valoarea inițială a curentului prin condensator este: $i_C = (E - u_0)/R$, ca și cum acesta ar fi în primul moment o sursă ideală de tensiune cu t.e.m egală cu condiția inițială u_0 . Dacă inițial condensatorul este descărcat $u_0 = 0$, el se comportă ca un conductor perfect.

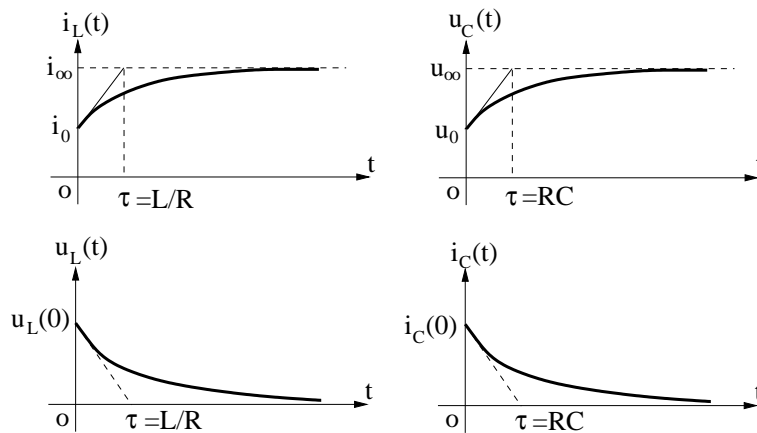


Fig. 4.76.

Modul de variație în timp al acestor patru mărimi este reprezentat în figura 76.

Tangenta dusă la oricare din aceste grafice în origine intersectează asimptota orizontală a graficului în punctul $t = \tau$. Se constată că după câteva constante de timp, variabilele ating practic valorile corespunzătoare regimului staționar. De exemplu, după cinci constante de timp valoarea curentului prin condensator $i_C(t) = i_{C0}e^{-5} \cong 0.007i_{C0}$ este doar de circa 0.7% față de valoarea inițială. În consecință, constanta de timp τ reprezintă o măsură a duratei regimului tranzitoriu, de variație de la starea inițială x_0 la cea finală x_∞ . Totuși după o singură constantă de timp, mărimile au parcurs doar $1 - e^{-1} \cong 63\%$ din variația totală și mai au de parcurs circa 37%.

Un mod practic de a evalua timpul de creștere al unei mărimi este de a determina durata cât această mărime parcurge de la 10% până la 90% din variația sa totală.

Dacă se consideră variația exponențială:

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} + B = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t/\tau},$$

pentru două momente de timp t_1 și t_2 se obțin:

$$x_1 = x(t_1) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t_1/\tau},$$

$$x_2 = x(t_2) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t_2/\tau},$$

respectiv prin împărțire:

$$\frac{x_1 - x_\infty}{x_2 - x_\infty} = e^{-\frac{t_1 - t_2}{\tau}},$$

respectiv timpul cât durează tranziția de la starea x_1 la starea x_2 este:

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{x_1 - x_\infty}{x_2 - x_\infty}.$$

În particular, dacă $x_1 = x_0 + 0.1(x_\infty - x_0)$ și $x_2 = x_0 + 0.9(x_\infty - x_0)$, rezultă timpul de creștere:

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{0.9(x_0 - x_\infty)}{0.1(x_0 - x_\infty)} = \tau \ln(9) \cong 2.2\tau.$$

Deoarece pentru $\tau < 0$ variabila de stare tinde asimptotic către x_∞ , indiferent care este valoarea sa inițială se spune că aceste circuite sunt stabile.

În cazul în care rezistența echivalentă R este negativă $\tau < 0$ și circuitul nu mai este stabil, variabilele tinzând către $\pm\infty$ pentru $t \rightarrow \infty$ (figura 77).

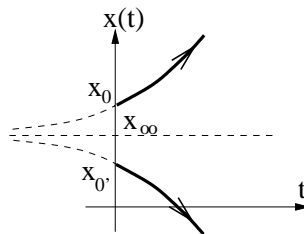


Fig. 4.77.

Constanta de timp τ poate avea următoarele două cazuri limită $\tau = 0$ și $\tau \rightarrow \infty$. Primul caz degenerat, corespunde excitării bobinei în curent ($G = 0$) sau a condensatorului în tensiune ($R = 0$). Ambele cazuri corespund unor excitații improprii, saltul instantaneu al variabilei de stare de la valoarea x_0 la x_∞ determinând o tensiune nemărginită la bornele bobinei sau un curent prin condensator nemărginit.

Valoarea inițială a constantei de timp τ corespunde excitației în tensiune a bobinei sau excitației în curent a unui condensator. În aceste situații variabila de stare are o creștere monotonă, liniară în timp, regimul tranzitoriu fiind nesfârșit.

Aplicația 1

Se consideră circuitul din figura 78, în care condensatorul este încărcat inițial la tensiunea $u(0) = -10V$.

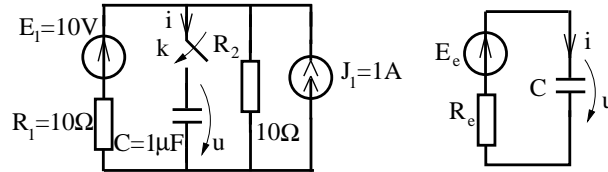


Fig. 4.78.

La momentul $t = 0$ se închide comutatorul k. Circuitul rezistiv conectat la bornele condensatorului este format dintr-o sursă reală de tensiune și o sursă reală de curent, conectate în paralel.

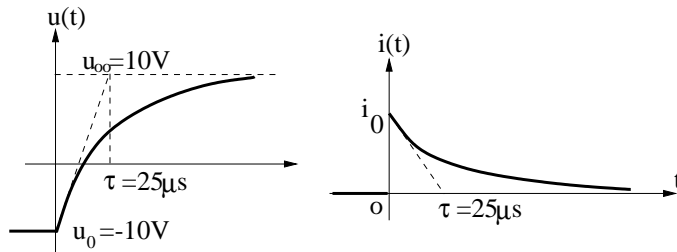


Fig. 4.79.

Acesta va fi echivalent cu o sursă reală de tensiune cu parametrii:

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5\Omega,$$

$$E_e = \frac{E R_2 + J_1 R_2 R_1}{R_1 + R_2} = 10V.$$

Constanta de timp a circuitului este $\tau = R_e C = 25\mu s$, iar valoarea asimptotică a tensiunii la bornele condensatorului este:

$$u_\infty = E_e = 10V.$$

Pentru intervalul $t \in (0, \infty)$, tensiunea la bornele condensatorului variază conform relației:

$$u(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

în care A și B se determină din sistemul:

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ B = u_\infty, \end{cases}$$

rezultând $B = 10V$, $A = u_0 - B = -20V$. Intensitatea curentului prin condensator se determină prin derivarea tensiunii:

$$u(t) = -20e^{-t/\tau} + 10,$$

$$i(t) = C \frac{du}{dt} = 4e^{-t/\tau}.$$

În momentul comutației, curentul prin condensator are un salt de la valoarea $i(0_-) = 0$ la $i(0_+) = 4A$, în schimb tensiunea la bornele condensatorului variază continuu de la valoarea inițială $u_0 = -10V$ la cea finală $u_\infty = 10V$.

Aplicația 2

Se consideră un circuit repeter cu amplificator operațional la intrarea căruia se aplică tensiunea treaptă E_1 .

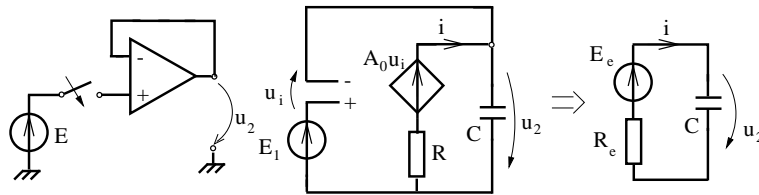


Fig. 4.80.

Pentru a determina felul în care variază tensiunea de ieșire u_2 în timp se adoptă pentru amplificatorul operațional modelul cu rezistență de intrare infinită, dar cu amplificare în buclă deschisă A_0 finită și rezistență de ieșire R nemulă.

Pentru a modela corect comportarea dinamică a amplificatorului operațional, la ieșire se adaugă un condensator cu capacitate C . Schema echivalentă a părții rezistive se obține aplicând a doua teoremă Kirchhoff:

$$u_2 = A_0 u_i - Ri = -u_i + E_1,$$

din care rezultă tensiunea de intrare:

$$u_i = \frac{E_1 + Ri}{A_0 + 1}.$$

Tensiunea de ieșire:

$$u_2 = E_1 - u_i = E_1 \frac{A_0}{A_0 + 1} - \frac{R}{A_0 + 1} i,$$

permite identificarea parametrilor schemei echivalente:

$$E_e = E_1 \frac{A_0}{A_0 + 1}, \quad R_e = \frac{R}{A_0 + 1}.$$

Pentru $A_0 \rightarrow \infty$ se obține: $E_e = E_1$, $R_e = 0$, ceea ce evidențiază caracterul repeter de tensiune al acestui circuit. Presupunând că inițial tensiunea de ieșire $u_2(0) = 0$, rezultă:

$$u_2(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

în care $\tau = R_e C$, $A + B = 0$, $B = E_e$, deci:

$$u_2(t) = E_e(1 - e^{-t/\tau}).$$

În consecință tensiunea de ieșire nu urmărește instantaneu tensiunea de intrare. La aplicarea unei excitații treaptă tensiunea de ieșire are o variație exponențială în timpul de creștere $t_r = 2.2\tau = 2.2R_e C$. De exemplu, pentru $R = 100\Omega$, $C = 1mF$, $A_0 = 10^5$, rezultă $R_e = 1m\Omega$, $\tau = R_e C = 1\mu s$, ceea ce corespunde la un timp de creștere de $2.2\mu s$.

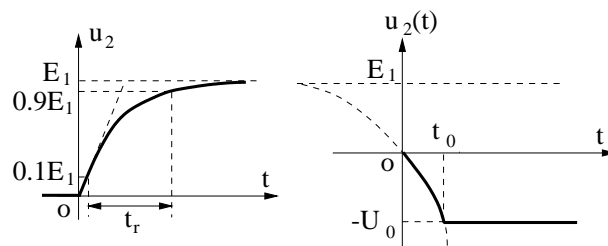


Fig. 4.81.

Dacă amplificatorul are reacția inversă pozitivă, din punctul de vedere al relațiilor, acesta corespunde schimbării semnului amplificării în buclă deschisă A_0 , ceea ce corespunde la:

$$E_e = E_1 \frac{A_0}{A_0 - 1}, \quad R_e = -\frac{R}{A_0 - 1}.$$

Chiar dacă pentru $A_0 \rightarrow \infty$, acești parametri tind către aceleași valori $E_e = E_1$, $R_e = 0$ ce ar putea conduce la interpretarea ca și în cazul reacției pozitive circuitul funcționează ca un repeter. Totuși, valoarea negativă a rezistenței echivalente R_e , face ca circuitul să aibă o comportare instabilă, iar la o tensiune

de intrare $E_1 > 0$ să apară la ieșire o tensiune $u_2 \rightarrow -\infty$ (figura 81). Datorită saturației, în realitate tensiunea de ieșire se limitează la $\pm U_0$. Timpul t_0 în care tensiunea ajunge la valoarea $u_2 = -U_0$ este $t_0 = -\tau \ln(U_0/E_1)$. Se constată că oricât de mică ar fi tensiunea de intrare, tensiunea de ieșire, amplificatorul se saturează inferior sau superior. În concluzie, un amplificator operațional cu reacție pozitivă, datorită instabilității nu poate funcționa în zona liniară a caracteristicii.

Circuite excitate cu semnale constante pe porțiuni

Rezultatele obținute anterior pot fi aplicate și în cazul unor excitații variabile, care se aproximează prin funcții scară. Presupunând că pe fiecare interval de timp al diviziunii $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ excitațiile sunt constante, generatorul echivalent ar avea parametrii R, E_k , pentru $t \in (t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$. În consecință variabila de stare va avea evoluția:

$$x(t) = A_k e^{-(t-t_k)/\tau} + B_k = x_{\infty_k} + (x_{0_k} - x_{\infty_k}) e^{-(t-t_k)/\tau},$$

În care x_{0_k} se determină din condiția de continuitate a funcției $x(t)$ în funcție de $\lim_{x \rightarrow t_k^-} x(t)$.

Dacă la momentele t_k au loc comutații în circuit este posibil ca pe fiecare interval $t \in (t_k, t_{k+1})$, rezistența echivalentă să aibă altă valoare R_k , $k = 0, 1, \dots$

Aplicația 1

Se consideră circuitul RLe , în care $R = 10\Omega$, $L = 10mH$, iar $e(t)$ are variația reprezentată în figura 82, cu $t_1 = 1ms$, $E_1 = 10V$, $E_2 = -10V$.

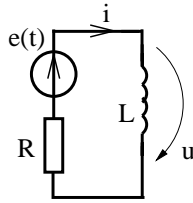


Fig. 4.82.

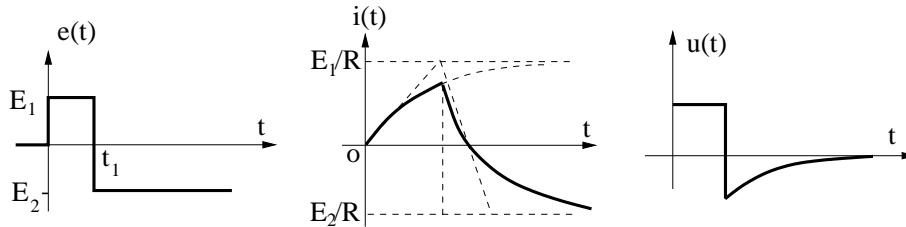


Fig. 4.83.

Deoarece pentru $t < 0$, $e(t) = 0$, curentul inițial prin bobina are valoarea $i(0) = 0$. Pe primul interval de timp $t \in (0, t_1)$ curentul este:

$$i(t) = A_1 e^{-t/\tau} + B_1,$$

cu $\tau = L/R$, $i(0) = A_1 + B_1 = 0$, $i_\infty = B_1 = E/R$.

Curentul

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = 1 - e^{-t/10^{-3}},$$

are la momentul de timp $t_1 = 1ms$ valoarea $i_1 = i(t_1) = 1 - e^{-1} = 0.63A$, care este condiția inițială pentru următorul interval $t > t_1$, în care:

$$i(t) = A_2 e^{-(t-t_1)/\tau} + B_2,$$

cu $i(t_1) = A_2 + B_2 = i_1$, $i_\infty = B_2 = E_2/R$, ceea ce corespunde la:

$$i(t) = \frac{E_2}{R} + \left(i_1 - \frac{E_2}{R} \right) e^{-(t-t_1)/\tau} = -1 + 1.63e^{-(t-t_1)/\tau}.$$

Intensitatea curentului:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}), & 0 < t < t_1 \\ \frac{E_2}{R} + \left(i_1 - \frac{E_2}{R} \right) e^{-(t-t_1)/\tau}, & t > 0, \end{cases}$$

permite determinarea tensiunii la bornele bobinei:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} \begin{cases} E e^{-t/\tau}, & 0 < t < t_1 \\ (E_2 - i_1 R) e^{-(t-t_1)/\tau}, & t > 0, \end{cases}$$

mărimi a căror variație în timp sunt reprezentate grafic în figura 83.

Aplicația 2

Se consideră aplicația din figura 84, în care $E_1 = 20V$, $R_1 = R_2 = 1k\Omega$, $J_2 = 10mA$, $C = 1\mu F$, la care comutatorul k se închide la momentul $t = 0$ și rămâne închis o durată $t_1 = 1ms$, după care se deschide din nou.

În regimul staționar anterior momentului inițial, circuitul admite schema echivalentă din figura 84, în care $u_0 = -R_2 J_2 = -10V$. În regimul staționar ulterior închiderii comutatorului k circuitul admite schema echivalentă din figura 84, în care $i_1 = (E_1 + R_2 J_2)/(R_1 + R_2) = 15mA$, $u_\infty = E_1 - R_1 i_1 = 5V$.

Pentru intervalul $t \in (0, t_1)$, circuitul rezistiv este echivalent (figura 86) cu o sursa de tensiune cu rezistență internă:

$$R_{e1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 500\Omega,$$

care determină o constantă de timp $\tau_1 = R_{e1} C = 500\mu s$.

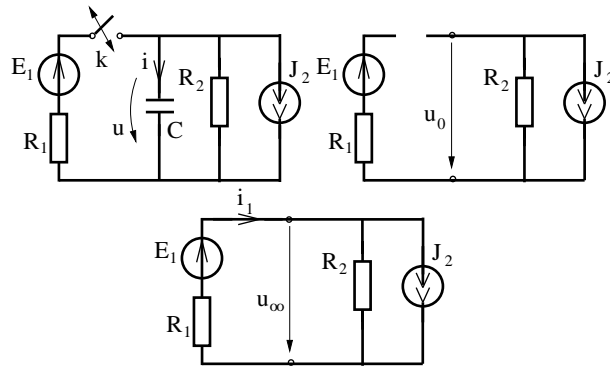


Fig. 4.84.

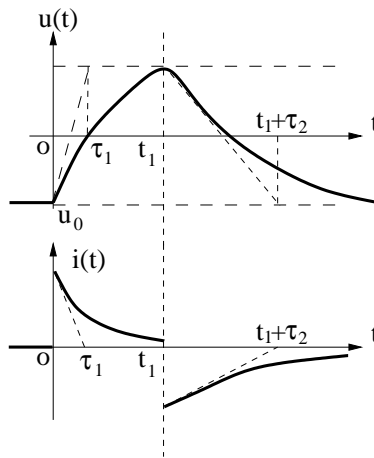


Fig. 4.85.

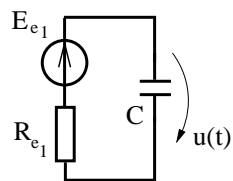


Fig. 4.86.

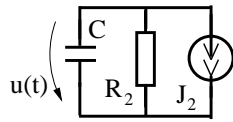


Fig. 4.87.

Tensiunea la bornele condensatorului are, în acest interval, expresia:

$$u(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + B_1,$$

cu $u(0) = A_1 + B_1 = u_0$, $u_\infty = B_1$, deci:

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-t/\tau_1} = 5 - 15e^{-t/\tau_1}.$$

La momentul $t = t_1$ tensiunea are valoarea $u_1 = 5 - 15e^{-2} \cong 3.5V$.

Pentru intervalul $t > t_1$, în care comutatorul k este deschis, rezistența echivalentă la bornele condensatorului este R_2 și constanta de timp $\tau = R_2 C = 1ms$. Tensiunea la bornele condensatorului:

$$u(t) = A_2 e^{-(t-t_1)/\tau_2} + B_2,$$

satisface condițiile $u(t_1) = A_2 + B_2 = u_1$ și $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0$, ce conduc la:

$$u(t) = u_0 + (u_1 - u_0)e^{-(t-t_1)/\tau_2} = -10 - 5(1 + 3e^{-2})e^{-(t-t_1)/\tau_2}.$$

Intensitatea curentului prin condensator $i = C \frac{du}{dt}$ are variația în timp prezentată în figura 85.

Circuite de ordinul unu excitate cu semnale arbitrare

Analizând răspunsul unui circuit liniar cu un singur element acumulator de energie la excitație treaptă:

$$x(t) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)e^{-t/\tau} = x_0 e^{-t/\tau} + x_\infty(1 - e^{-t/\tau}).$$

Se constată că un circuit electric care conține elemente acumulator de energie poate fi străbătut de curenți nenuli, chiar în absența surselor $x_\infty = 0$. Acestea se datorează stării inițiale nenule $x_0 \neq 0$.

Răspunsul $x(t)$ se poate descompune în doi termeni: $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$:

$$x_l(t) = x_0 e^{-t/\tau},$$

$$x_f(t) = x_\infty(1 - e^{-t/\tau}),$$

în care $x_l(t)$ este numită soluția liberă și se datorează exclusiv condițiilor inițiale și $x_f(t)$ este numită soluția forțată și se datorează excitației.

Soluția liberă satisface condiția inițială $x_l(0) = x_0$ și evoluează către zero. Această fiind soluția ecuației diferențiale omogene, corespunzătoare circuitului cu surse nule, nu va depinde de tipul excitației aplicat circuitului. Soluția forțată evoluează de la $x_f(0) = 0$, corespunzătoare stării inițiale nule, către valoarea de regim staționar x_∞ . Soluția de regim forțat este soluția ecuației neomogene:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = b_0(t),$$

cu $x(0) = 0$ și depinde de excitația aplicată $b_0(t) = e(t)$ sau $j(t)$.

Ecuația diferențială fiind liniară, soluția ei va depinde liniar de excitație.

De exemplu, dacă excitația are forma unui impuls dreptunghiular (figura 88), răspunsul este:

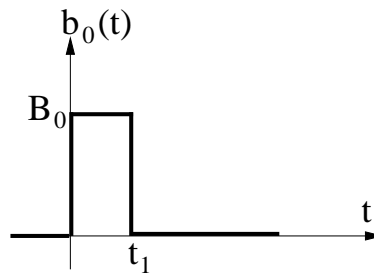


Fig. 4.88.

$$x(t) = \begin{cases} \frac{B_0}{a_1}(1 - e^{-t/\tau}), & t \in (0, t_1) \\ x_1 e^{-(t-t_1)/\tau}, & t > t_1, \end{cases}$$

cu $x_1 = (B_0/a_1)(1 - e^{-t_1/\tau})$.

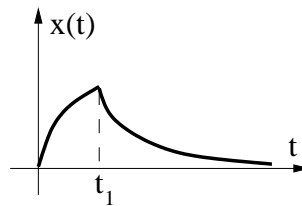


Fig. 4.89.

La limită dacă $t_1 \rightarrow 0$ și $B_0 \rightarrow \infty$, astfel încât $t_1 B_0 = 1$ (figura 90), ceea ce corespunde unei excitații de tip impuls Dirac $b_0(t) = \delta(t)$:

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} x_1 = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{a_1 t_1} (1 - e^{-t_1/\tau}) = \frac{1}{a_1 \tau} = \frac{1}{a_0},$$

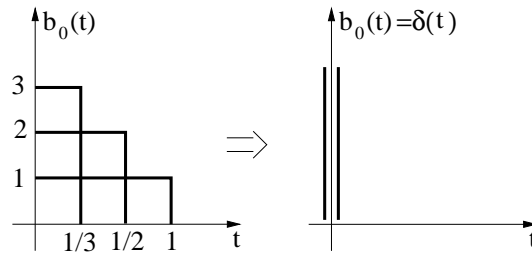


Fig. 4.90.

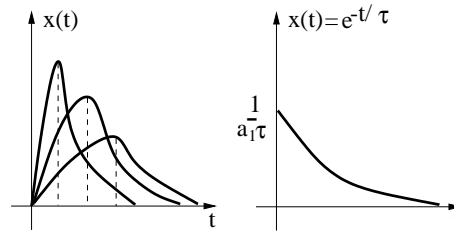


Fig. 4.91.

iar răspunsul devine:

$$x(t) = \frac{1}{a_0} e^{-t/\tau}.$$

Se constată că răspunsul liber al circuitului are aceeași expresie, dacă $x_0 = 1/a_0$. În consecință, orice stare inițială x_0 nenulă este echivalentă din punctul de vedere al răspunsului cu o excitație $a_0 \delta(t)$ aplicată unui circuit cu stare inițială nulă.

Acest lucru nu este întâmplător, conform teoremei de echivalență pentru condițiile inițiale, un element acumulator de energie cu stare inițială nenulă este echivalent cu elementul în stare inițială nulă conectat cu o sursă impuls Dirac.

Deoarece orice semnal de excitație admite reprezentarea:

$$b_0(t) = \int_0^t b_0(t') \delta(t - t') dt',$$

datorită liniarității ecuației, soluția de regim forțat datorată acestei excitații va fi:

$$x_f(t) = \frac{1}{a_0} \int_0^t b_0(t') e^{-(t-t')/\tau} dt'.$$

Răspunsul circuitului linear de ordinul unu la excitație arbitrară $b_0(t)$ și stare inițială x_0 , este:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) = x_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{a_0} e^{-t/\tau} \int_0^t b_0(t') e^{-t'/\tau} dt'.$$

Derivata funcției $x(t)$ este:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x_0}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{1}{a_0 \tau} e^{-t/\tau} \int_0^t b_0'(t') e^{-t'/\tau} dt' + \frac{1}{a_0} e^{-t/\tau} b_0(t) e^{-t'/\tau}.$$

și se verifică ușor că $x(t)$ satisface ecuația:

$$a_0 \frac{dx}{dt} + a_1 x = b_0(t),$$

și condiția inițială $x(0) = x_0$. Fiind soluția unică a acestei ecuații este și problema problemei.

Condiția ca două elemente dipolare de circuit să fie echivalente este ca ele să aibă același răspuns pentru o excitație comună, arbitrară. Circuitele de ordinul unu sunt echivalente dacă au aceeași comportare în regim staționar, au aceeași constantă de timp și stare inițială identică.

Aplicând rezultatul obținut la circuitul RLe serie se obține următoarea expresie a curentului:

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t \frac{e(t')}{R} e^{-t'/\tau} dt',$$

în care $\tau = L/R$. În cazul circuitului RCE serie tensiunea la bornele condensatorului este:

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau} + \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t e(t') e^{-t'/\tau} dt'.$$

Aplicația 1

Considerând circuitul din figura 92, în care:

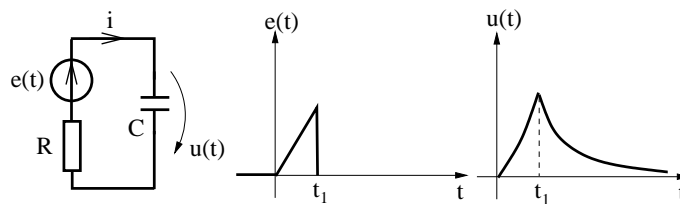


Fig. 4.92.

$$e(t) = \begin{cases} at, & t \in (0, t_1) \\ 0, & t > t_1, \end{cases}$$

iar condensatorul este inițial descărcat.

Tensiunea la bornele condensatorului este, pentru $t < t_1$:

$$u(t) = \frac{a}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^t t' e^{-t'/\tau} dt' = \frac{a}{\tau} e^{-t/\tau} [\tau t e^{-t/\tau} - \tau \int_0^t e^{-t'/\tau} dt'] = a(t - \tau + \tau e^{-t/\tau}).$$

Pentru $t > t_1$:

$$u(t) = \frac{a}{\tau} e^{-t/\tau} \int_0^{t_1} t' e^{-t'/\tau} dt' = a e^{-t/\tau} [(t_1 - \tau) e^{t_1/\tau} + \tau].$$

Circuite neliniare cu un element acumulator de energie

Se consideră un circuit electric alcătuit din surse de tensiune, surse de curent, rezistoare liniare sau neliniare, la bornele cărora se află un element linear acumulator de energie: bobină sau condensator (figura 93).

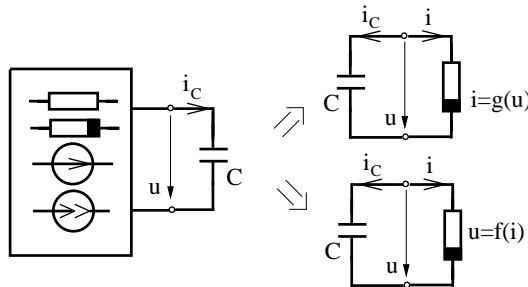


Fig. 4.93.

Presupunând sursele cu parametrii constanți în timp partea rezistivă a circuitului se poate echivala cu un rezistor neliniar controlat în tensiune sau în curent.

Pentru a simplifica analiza se presupune că rezistorul neliniar are caracteristica liniară pe porțiuni.

Modul în care variază tensiunea $u(t)$ se obține prin rezolvarea ecuațiilor:

$$i_C = C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = -i_C = -C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = g(u),$$

cu condiția inițială $u(0) = u_0$, sau

$$C \frac{du}{dt} = -g(u),$$

perechea u, i fiind coordonatele unui punct din graficul funcției $g(u)$. Circuitul se află în regim dinamic atât timp cât $i \neq 0$.

Din analiza acestei relații rezultă că dacă $i = g(u) > 0$ atunci $u(t)$ este descrescător, iar dacă $i = g(u) < 0$, atunci tensiunea trebuie să scadă în timp. Această observație permite stabilirea sensului în care evoluează punctul de funcționare pe caracteristica neliniară $u - i$. Deplasarea acestui punct se face până la îndeplinirea condiției $i = 0$, corespunzând punctului de echilibru.

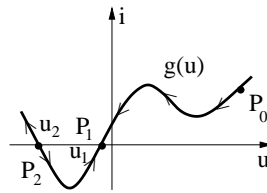


Fig. 4.94.

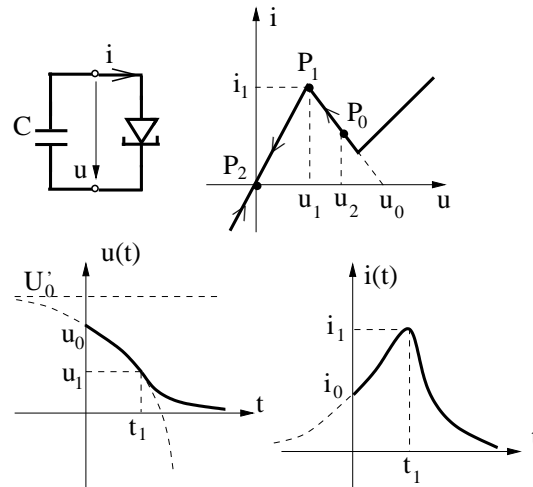


Fig. 4.95.

De exemplu, din caracteristica neliniară reprezentată în figura 94, rezultă că pentru orice P_0 cu $u > u_1$, circuitul evoluează către starea finală P_1 . Tot spre P_1 evoluează circuitul, dacă $u_0 \in (u_2, u_1)$. Rezultă că P_1 este un punct de echilibru stabil. În schimb P_2 este un punct de echilibru instabil.

În general, punctele de intersecție ale caracteristicii cu axa tensiunii sunt puncte de echilibru, cele la care rezistența dinamică este pozitivă sunt puncte de echilibru stabil, în caz contrar sunt puncte de echilibru instabil.

Aplicația 1

Se va analiza descărcarea unui condensator pe o diodă tunel (figura 95).

Considerând tensiunea inițială a condensatorului corespunzătoare punctului P_0 plasat pe porțiunea de caracteristică cu rezistență dinamică R_{d_1} negativă, curba va evolua către P_1 și ulterior pe porțiunea cu $R_{d_2} > 0$ către punctul de echilibru final P_2 .

Pe primul interval de timp $P \in (P_0, P_1)$ curentul și tensiunea vor evolua exponențial instabil cu $\tau = R_{d_1}C < 0$. Durata acestei tranziții este:

$$t_1 = \tau_1 \ln \frac{u_0 - u'_0}{u_1 - u'_0},$$

Evoluția de la P_1 la P_2 se face exponențial stabil:

$$u(t) = u_1 e^{-t/\tau_2}, \quad i(t) = i_1 e^{-t/\tau_2},$$

iar constanta de timp: $\tau_2 = R_{d2}C > 0$.

Într-o manieră asemănătoare se tratează și cazul bobinei conectate la bornele unui rezistor neliniar controlat în curent (figura 96).

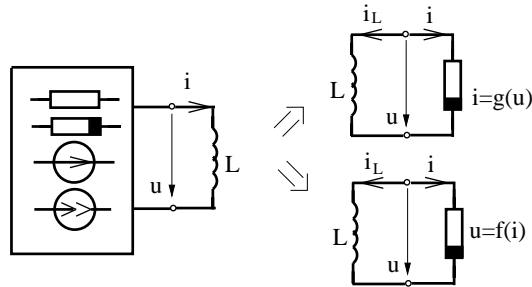


Fig. 4.96.

Ecuatiile acestui circuit

$$u = L \frac{di_L}{dt}, \quad -i_L = i, \quad u = f(i),$$

permit obținerea unei ecuații similare:

$$L \frac{di}{dt} = -f(i),$$

cu condiția inițială $i(0) = i_0$.

De această dată, punctul de echilibru corespunde condiției $u = 0$. Dacă $u > 0$, atunci $i(t)$ trebuie să scadă în timp, iar dacă $u < 0$, atunci $i(t)$ trebuie să crească în timp.

În acest caz, punctele de intersecție ale caracteristicii cu axa curentului sunt puncte de echilibru, stabil dacă rezistența dinamică în ele este pozitivă și instabil în caz contrar.

Analizând graficul caracteristicii neliniare $u = f(i)$ din figura 97 se constată că punctele P_1 și P_3 sunt puncte de echilibru stabil, iar P_2 este un punct de echilibru instabil. Dacă $i_0 > i_2$ atunci curentul va evolua către valoarea finală $i_\infty = i_3$, iar dacă $i_0 < i_2$, atunci valoarea asimptotică va fi $i_\infty = i_1$.

Aproximând caracteristica $f(i)$ liniar pe porțiuni, funcțiile $i(t)$ și $u(t)$ admit pe diferite intervale de timp expresii de forma $Ae^{-t/\tau} + B$, în care $\tau = L/R_d$ iar constantele A și B se determină din condițiile inițiale și cele asimptotice.

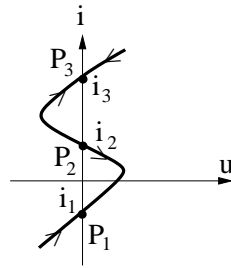


Fig. 4.97.

Analiza circuitelor cu un condensator conectat la un rezistor neliniar controlat în curent precum și a circuitelor cu o bobină conectată la bornele unui rezistor neliniar controlat în tensiune ridică dificultăți suplimentare.

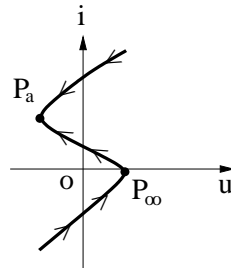


Fig. 4.98.

Fie circuitul capacitiv neliniar de ordinul unu, cu o caracteristică $u = f(i)$.

$$i = -i_C = -C \frac{du}{dt}, \quad u = f(i),$$

Punctul unic de echilibru corespunde condiției $i = 0$. Dacă $i > 0$, atunci $u(t)$ trebuie să scadă în timp, iar dacă $i < 0$, atunci $u(t)$ trebuie să crească în timp.

Analizând caracteristica din figura 99, rezultă că P_e este un punct de echilibru stabil și că starea circuitului va evolua asimptotic către acest punct indiferent de starea inițială P_0 . Dacă $u_0 < u_2$, atunci evoluția are loc direct către P_e prin P'_2 . În schimb dacă, intensitatea curentului în starea inițială $i_0 > i_1$, atunci se constată că punctul de funcționare evoluează de la P_0 către punctul P_2 . Punctul P_2 este un punct de impas, deoarece ajuns aici, circuitul nu poate rămâne în această stare, în care $i \neq 0$. Se constată că punctul de funcționare are un salt din P_2 în P'_2 , salt care este însoțit de o discontinuitate în curent, dar nu și în tensiunea la bornele condensatorului. Din P'_2 punctul de funcționare evoluează către starea finală de echilibru P_e . Un astfel de circuit cu o singură stare de echilibru se numește circuit monostabil. Analizând caracteristica neliniară din figura 99 se constată că P_e este

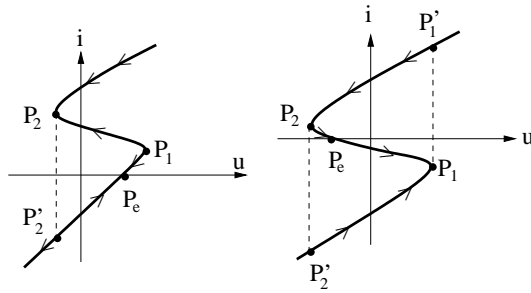


Fig. 4.99.

unicul punct de echilibru, dar el este instabil, iar punctele P_1 și P_2 sunt puncte de impas. În consecință indiferent de ce stare inițială $P_0 \neq P_e$ are circuitul, acesta va evolua pe traseul $P_1 - P_1' - P_2 - P_2'$ ciclul reluându-se la nesfârșit.

Un astfel de circuit la care mărimile $u(t)$ și $i(t)$ au o variație periodică în timp se numește circuit astabil.

Și în cazul circuitelor cu o bobină conectată la bornele unui circuit rezistiv neliniar, controlat în tensiune, există un singur punct de echilibru $u = 0, i = g(u)$. Acesta poate fi stabil, dacă $g'(t) > 0$ sau instabil, dacă conductanța dinamică este negativă în acest punct. Când punctul de funcționare ajunge într-un punct de impas, în acest caz are doar un salt orizontal, până la un alt punct al caracteristicii, care are același curent. Acest salt corespunde unei variații discontinue a tensiunii la bornele bobinei, dar cu păstrarea continuității funcției $i(t)$.

Aplicația 2: Oscilatorul de relaxare.

Circuitul alcătuit dintr-un condensator și un INIC realizat cu un amplificator operațional (figura 100) are caracteristica din figura 101.

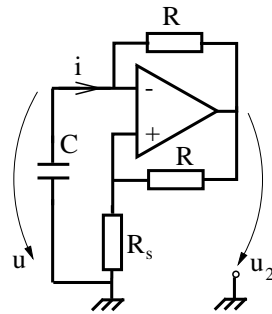


Fig. 4.100.

Acest circuit are originea O ca punct de echilibru instabil, iar punctele P_1 și P_2 puncte de impas. Punctul de funcționare va evolua ciclic pe traseul $P_1 - P_1' - P_2 - P_2'$. Segmentele $P_1' - P_2$ și $P_2' - P_1$ corespund saturației inferioare și

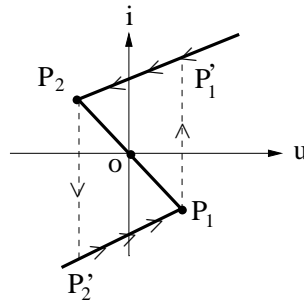


Fig. 4.101.

respectiv superioare amplificatorului operațional ceea ce determină la ieșire un semnal dreptunghiular periodic.

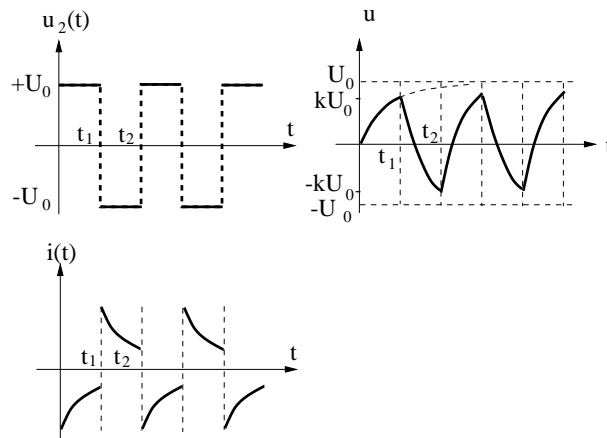


Fig. 4.102.

Presupunând pentru început că amplificatorul este saturat superior, $u_2 = U_0$, potențialul bornei + a amplificatorului operațional are expresia:

$$V_1 = U_0 \frac{R_s}{R + R_s} = kU_0,$$

determinată cu relația divizorului de tensiune. Condensatorul C va avea la borne o tensiune:

$$V_- = u(t) = Ae^{-t/\tau} + B,$$

cu $\tau = RC$ și $u_\infty = B = U_0$. Presupunând condensatorul C inițial descărcat, rezultă $u(0) = A + b = 0$:

$$u(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

Tensiunea de intrare $u_i = V_+ - V_-$ este pozitivă până la momentul t_1 la care:

$$U_0(1 - e^{-t_1/\tau}) = U_0 \frac{R_s}{R + R_s},$$

$$t_1 = \tau \ln \frac{R + R_s}{R}.$$

În acest moment amplificatorul operațional trece din starea saturat superior în starea saturat inferior (are loc saltul $P_1 - P'_1$). În continuare tensiunea la bornele condensatorului va evolua descrescător de la $u(t_1) = kU_0$ spre $-U_0$ dar la momentul t_2 , la care $u(t_2) = -kU_0$ are loc o nouă tranziție. Astfel încât:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{kU_0 + U_0}{-kU_0 + U_0} = \tau \ln \frac{1 + k}{1 - k} = \tau \ln \left(1 + 2 \frac{R_s}{R} \right),$$

reprezintă semiperioada oscilațiilor.

În concluzie, acest circuit alcătuit cu un singur element acumulator de energie, numit oscilator de relaxare, nu are un regim limită staționar și va oscila permanent cu perioada $T = 2\Delta t$.

Aplicația 3: Circuit bistabil cu bobină și amplificator operațional.

4.12 Circuite electrice liniare cu două elemente acumulator de energie

Se consideră un circuit electric alcătuit din rezistoare, surse ideale de tensiune și de curent, care conține și două elemente acumulator de energie. Se deosebesc trei cazuri (figura 103):

- circuite cu două bobine;
- circuite cu două condensatoare;
- circuite cu o bobină și un condensator.

Circuitul cu două bobine are ecuațiile:

$$u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt},$$

iar partea rezistivă liniară și activă, presupusă controlabilă în curent, ar fi caracterizată prin ecuațiile:

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + e_1,$$

$$u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + e_2,$$

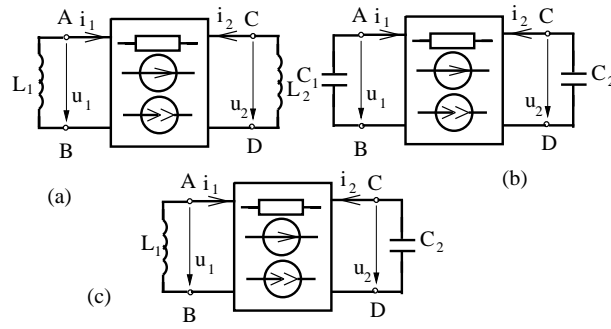


Fig. 4.103.

în care $e_1 = u_{AB0}$ și $e_2 = u_{CD0}$ reprezintă tensiunile de mers în gol, pentru regimul $i_1 = i_2 = 0$, la cele două porți AB și respectiv CD .

Cele patru rezistențe: de intrare r_{11} , de ieșire r_{22} și de transfer r_{12} , r_{21} reprezintă elementele unei matrice pătrate și simetrice $r_{12} = r_{21}$, dacă circuitul rezistiv nu conține surse comandate. Deoarece s-a adoptat pentru circuitul rezistiv regula de la receptoare, matricea r este pozitiv definită și $r_{11} > 0$, $r_{22} > 0$, dacă circuitul rezistiv pasivizat este alcătuit doar din rezistoare pasive, cu rezistențe pozitive.

Eliminând tensiunile de la bornele celor două bobine, se obține sistemul de ecuații diferențiale liniare, de ordinul întâi cu coeficienți constanți:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + e_1}{L_1},$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + e_2}{L_2}.$$

Circuitul cu două condensatoare este caracterizat prin ecuațiile:

$$i_1 = -C_1 \frac{du_1}{dt}, \quad i_2 = -C_2 \frac{du_2}{dt},$$

caracteristice părții reactive și

$$i_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + j_1,$$

$$i_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + j_2,$$

caracteristice părții rezistive, presupusă controlabilă în tensiune. În aceste ecuații $j_1 = i_{sc_{AB}}$ și $j_2 = i_{sc_{CD}}$ reprezintă curenții de scurtcircuit produși de sursele din circuitul rezistiv la cele două porți AB și CD .

Prin eliminarea curenților i_1 și i_2 se obține sistemul de ecuații diferențiale liniare, de ordinul întâi cu coeficienți constanți:

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + j_1}{C_1},$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + j_2}{C_2}.$$

Dacă în primul caz soluția ecuațiilor diferențiale era reprezentată de curenții din bobine, în acest caz, soluția este constituită de tensiunile la bornele condensatoarelor. Aceste semnale electrice constituie variabilele de stare ale circuitului analizat, iar ecuațiile diferențiale satisfăcute se numesc ecuațiile variabilelor de stare.

Pentru obținerea ecuațiilor variabilelor de stare într-un circuit cu o bobină și un condensator se folosesc ecuațiile elementelor acumulate de energie:

$$u_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad i_2 = -C_2 \frac{du_2}{dt},$$

și cele ale părții rezistive, caracterizare hibridă:

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2 + e_1,$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2 + j_2,$$

iar prin eliminarea variabilelor u_1 și i_2 :

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{h_{11}i_1 + h_{12}u_2 + e_1}{L_1},$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{h_{21}i_1 + h_{22}u_2 + j_2}{C_2}.$$

Și în acest caz variabilele de stare reprezintă tensiunile la bornele condensatoarelor și curenții din bobine.

Indiferent de cazul considerat, ecuațiile variabilelor de stare au forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2,$$

în care $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$, iar x_1, x_2, y_1 și y_2 sunt funcții de timp, definite pe intervalul $t > 0$ și cu valori în \mathbb{R} . Deoarece circuitele cu două elemente acumulate de energie sunt caracterizate de un sistem de două ecuații diferențiale, ele se numesc și circuite de ordinul doi.

Folosind notația matriceală - vectorială:

$$x = [x_1, x_2]^T, \quad y = [y_1, y_2]^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

ecuațiile variabilelor de stare capată formă compactă:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y,$$

în care x reprezintă vectorul variabilelor de stare, y reprezintă excitațiile (efectul surselor văzut pe la bornele elementelor acumulare de energie), iar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ este o matrice pătrată, caracteristică sistemului analizat cu elemente date de parametrii R, L, C din circuit.

Pentru determinarea evoluției în timp a variabilelor de stare trebuie rezolvată ecuația variabilelor de stare, a cărei soluție este determinată univoc, doar dacă se cunosc valorile condițiilor inițiale:

$$x(0) = x_0,$$

respectiv curenții prin bobine și tensiunile la bornele condensatoarelor, în momentul inițial $t = 0$.

Rezolvarea sistemului variabilelor de stare se va face prin eliminare. Derivând prima ecuație se obține (cu notația $x' = \frac{dx}{dt}$):

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + y_1',$$

și înlocuind $x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2$, rezultă:

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}y_2 + y_1',$$

Exprimând $x_2 = (x_1' - a_{11}x_1 - y_1)/(a_{12})$, din prima ecuație, rezultă în final:

$$x_1'' - (a_{11} + a_{12})x_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = y_1' - a_{22}y_1 + a_{12}y_2.$$

Cea de a doua variabilă de stare satisface o ecuație asemănătoare:

$$x_2'' - (a_{11} + a_{12})x_2' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = y_2' - a_{11}y_2 + a_{21}y_1.$$

Cele două variabile de stare satisfac ecuații diferențiale liniare de ordinul doi cu coeficienți constanți de forma:

$$x'' - Tx' + Dx = f,$$

în care $T = a_{11} + a_{22}$ reprezintă urma matricei A , iar $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ reprezintă determinantul matricei A . Termenul liber f reprezintă excitațiile circuitului.

Coeficienții ecuației diferențiale se notează deseori cu $T = -2\alpha$, $D = \omega_0^2$:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = f,$$

în care $\alpha = -T/2$ se numește coeficient de amortizare, iar $\omega_0 = \sqrt{D}$ se numește pulsație de rezonanță.

Soluția ecuației diferențiale de ordinul doi satisfăcută de o variabilă de stare se caută sub forma:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t),$$

în care $x_g(t)$ este soluția generală a ecuației omogene:

$$x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0,$$

iar $x_p(t)$ este o soluție particulară a ecuației neomogene. Dacă în particular, excitația f este constantă în timp, atunci ecuația neomogenă admite ca soluție particulară $x_p(t) = f/(\omega_0^2)$.

Pentru determinarea soluției generale a ecuației neomogene se utilizează ecuația caracteristică:

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 r^2 = 0,$$

care este o ecuație de gradul doi, cu rădăcinile:

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Se verifică ușor că aceste rădăcini sunt chiar valorile proprii ale matricei A :

$$Ax = \lambda x,$$

care se calculează din ecuația:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

deci $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$, ceea ce corespunde cu:

$$\lambda_2 - T\lambda + D = 0.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale omogene are expresia:

$$x_g(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t},$$

ceea ce corespunde expresiei:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + x_p(t),$$

pentru evoluția în timp a variabilei de stare cu $x_p(t) = f/(\omega_0^2)$, în cazul particular al excitației constante.

Pentru analiza calitativă a modului în care evoluează în timp o variabilă de stare la un circuit de ordinul doi se vor discuta ecuația caracteristică.

Dacă rădăcinile ecuației caracteristice sunt reale și negative se introduc notațiile:

$$r_1 = -\frac{1}{\tau_1}, r_2 = -\frac{1}{\tau_2},$$

care evidențiază că un astfel de circuit are două constante de timp τ_1 și τ_2 , iar regimul tranzitoriu, de evoluție de la o stare inițială către o stare finală staționară:

$$x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p(t) = \frac{f}{\omega_0^2},$$

care există în cazul excitațiilor constante, se face după relația:

$$x(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} + x_\infty.$$

Constantele de integrare A_1 și A_2 se determină din condițiile inițiale:

$$x(0) = A_1 + A_2 + x_\infty, x'(0) = -\frac{A_1}{\tau_1} - \frac{A_2}{\tau_2},$$

iar starea asimptotică finală x_∞ se determină prin studiul regimului staționar posterior regimului tranzitoriu, deci prin analiza circuitului rezistiv (R, E, J) obținut prin înlocuirea bobinelor cu conductoare perfecte și a condensatoarelor prin izolatoare perfecte.

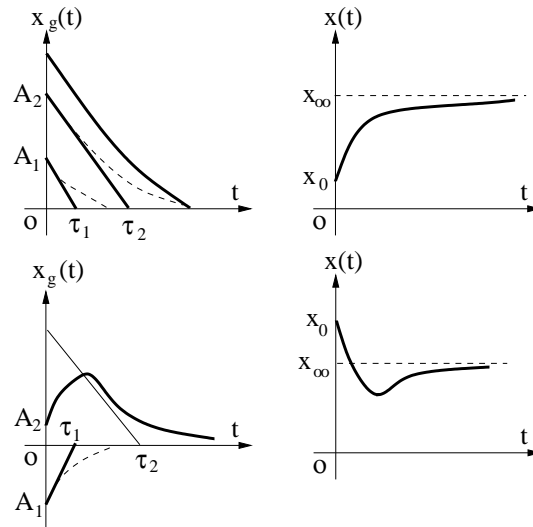


Fig. 4.104.

În figura 104 se reprezintă câteva moduri tipice de variație în timp a unei variabile de stare la un circuit de ordinul doi. Se constată că regimul tranzitoriu are un caracter aperiodic (cu cel mult un singur punct de extremum), uneori

monoton și că el durează practic un timp de $3 \div 4$ ori mai mare decât cea mai mare constantă de timp a circuitului.

Regimul aperiodic al unui circuit electric are loc atunci când ecuația sa caracteristică are determinantul pozitiv, deci $T^2 > 4D$, respectiv $\alpha > \omega_0$ coeficientul de amortizare mai mare decât pulsația de rezonanță.

Aceste afirmații sunt valabile dacă cele două rădăcini reale sunt negative, ceea ce implică $-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$, deci $\alpha > \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} > 0$.

Dacă urma T a matricei A nu este negativă sau determinantul D nu este pozitiv, atunci coeficientul de amortizare devine negativ, iar circuitul are o funcționare instabilă. În consecință, dacă cel puțin una din rădăcinile caracteristice ale ecuației caracteristice este pozitivă atunci, regimul tranzitoriu nu are o durată limitată, iar variabila de stare crește namărginit în timp.

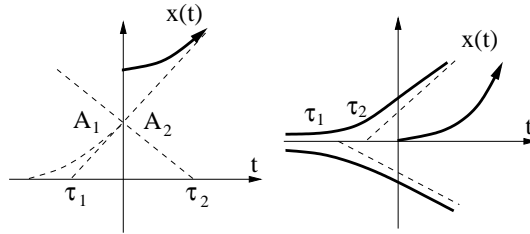


Fig. 4.105.

În cazul în care determinantul ecuației caracteristice este negativ, rădăcinile acestuia sunt complexe și conjugate, deoarece ecuația are coeficienți reali.

Notând cu $j = \sqrt{-1}$ unitatea imaginară, rezultă:

$$r_1 = -\alpha + j\omega, \quad r_2 = -\alpha - j\omega,$$

în care $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ se numește pulsație proprie.

În acest caz:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + x_\infty = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}) + x_\infty,$$

și folosind relațiile Euler:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \quad e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t,$$

rezultă:

$$x(t) = (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) e^{-\alpha t} + x_\infty.$$

Constantele de integrare B_1 și B_2 se determină din condițiile inițiale $x(0) = B_1 + x_\infty$ și $x'(0) = -\omega B_2 - \alpha B_1$, iar starea asimptotică x_∞ din studiul circuitului în regim staționar.

În acest caz se constată că variabila de stare are o evoluție oscilant amortizată cu pulsația ω și cu coeficientul de amortizare $\alpha = 1/\tau$. În figura 106 se prezintă:

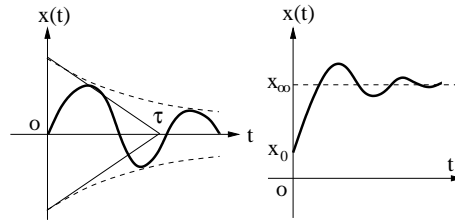


Fig. 4.106.

moduri tipice de evoluție a variabilelor de stare în cazul $\omega_0 > \alpha$, în ipoteza că partea reală a rădăcinilor ecuației caracteristice este negativă (coeficientul de amortizare $\alpha > 0$).

Regimul tranzitoriu are o durată limitată, practic după 3-4 constante de timp $\tau = \frac{1}{\alpha}$ se atinge starea staționară posteroară regimului tranzitoriu. Dacă în schimb urma T a matricei este pozitivă, coeficientul de amortizare este negativ iar circuitul are o funcționare instabilă, oscilațiile de pulsație ω cu amplitudine crescătoare nemărginit în timp (fig. 107.b).

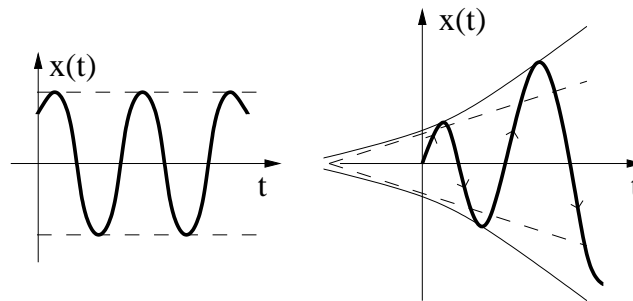


Fig. 4.107.

În cazul limită, în care rădăcinile ecuației caracteristice sunt pur imaginare ($\alpha = 0$ și $T = 0$) variabila de stare are o evoluție oscilantă neamortizată:

$$x(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + x_\infty$$

ca în figura 107.a.

Un alt caz special are loc atunci când determinatul ecuației caracteristice este nul. În această situație, rădăcinile acestei ecuații sunt confundate și obligatoriu reale. Dacă valoarea comună este negativă, atunci circuitul are o comportare stabilă, variabilele de stare având evoluția conform funcției:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 t e^{r_2 t} + x_\infty = (A_1 + A_2) e^{-t/\tau} + x_\infty,$$

circuitul fiind caracterizat de o singură constantă de timp $\tau = -1/r_2 = -1/r_2$.

În acest caz se spune că circuitul este în regim critic, evoluția variabilei de stare fiind la frontieră între evoluția aperiodică și cea oscilant amortizată (fig. 108).

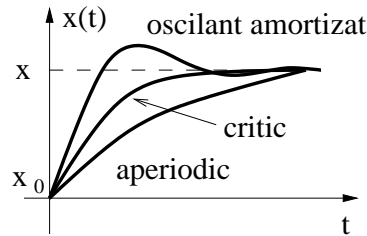


Fig. 4.108.

În cazul în care valoarea comună a rădăcinilor este pozitivă, variabilele de stare au o evoluție nemărginită pentru $t > 0$, circuitul având un caracter instabil.

În cazul degenerat $r_1 = r_2 = 0$, variabila de stare are expresia:

$$x(t) = A_1 + A_2 t + x_\infty$$

deci este nemărginită.

În concluzie, circuitele electrice liniare cu două elemente acumulator de energie se pot clasifica în următoarele categorii:

- circuite stabile (cu rădăcinile în semiplanul stâng)
 - cu regim aperiodic (rădăcini reale, distincte și negative);
 - în regim critic (rădăcini confundate, negative);
 - în regim oscilant amortizat (rădăcini complex conjugate cu parte reală negativă);
- circuite oscilante neamortizate (cu rădăcini pur imaginare);
- circuitele instabile (cu rădăcini în semiplanul drept).

În figură se prezintă poziția rădăcinilor ecuației caracteristice pentru diferite categorii de circuite de ordinul doi. Partea imaginară a rădăcinilor caracteristice când este nenulă este egală cu ω , deci are semnificația pulsației proprii a oscilațiilor care apar la trecerea de la o stare la alta. Partea reală este $-\alpha = -1/\tau$ deci are semnificația inversei opuse constantei de timp. La circuitele stabile, cu cât constanta de timp este mai mare, cu atât rădăcina este mai apropiată de origine.

Aplicația 1: Descărcarea a două condensatoare pe o rețea rezistivă.

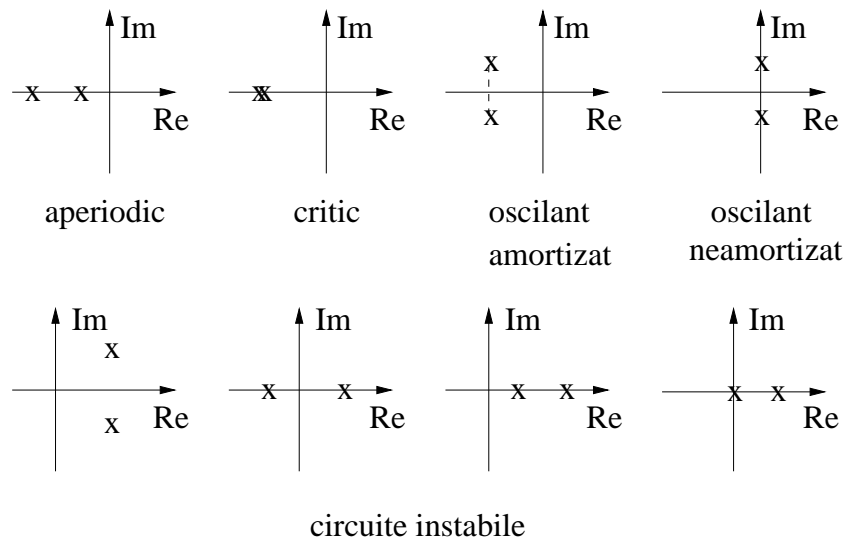


Fig. 4.109.

Se consideră două condensatoare de capacitățile C_1 și C_2 , încărcate inițial cu tensiunile u_{10} și respectiv u_{20} .

Se urmărește determinarea evoluției tensiunii celor două condensatoare în urma conectării lor la o rețea alcătuită din rezistoare pasive.

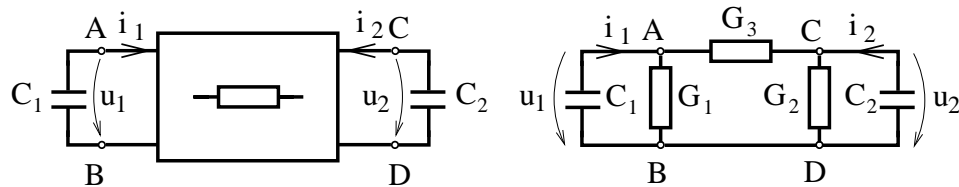


Fig. 4.110.

După cum s-a arătat, un circuit cuadripolar rezistiv este echivalent cu un circuit în conexiune triunghi (fig. 110) și are matricea conductanțelor:

$$g = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$

În consecință matricea sistemului variabilelor de stare este:

$$A = \begin{bmatrix} -(G_1 + G_3)/C_1 & G_3/G_1 \\ G_3/C_2 & -(G_2 + G_3)/C_2 \end{bmatrix}$$

cu urma și determinantul:

$$T = -\frac{G_1 + G_3}{C_1} - \frac{G_2 + G_3}{C_2} < 0$$

$$D = \frac{(G_1 + G_3)(G_2 + G_3)}{C_1 C_2} + \frac{G_3^2}{C_1 C_2} > 0$$

Matricea g fiind simetrică și pozitiv definită are valorile proprii reale și negative pentru matricea A . În consecință există două constante de timp pozitive τ_1 și τ_2 iar tensiunile la bornele celor două condensatoare au o evoluție aperiodică stabilă:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= B_{11}e^{-t/\tau_1} + B_{12}e^{-t/\tau_2} \\ u_2(t) &= B_{21}e^{-t/\tau_1} + B_{22}e^{-t/\tau_2} \end{aligned}$$

Cele patru constante de integrare se determină din ecuațiile inițiale, prin rezolvarea sistemului liniar:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= B_{11} + B_{12} = u_{10} \\ u_2(0) &= B_{21} + B_{22} = u_{20} \\ u_1'(0) &= -\frac{B_{11}}{\tau_1} - \frac{B_{12}}{\tau_2} = -\frac{G_1+G_3}{C_1}u_{10} + \frac{G_3}{C_1}u_{20} \\ u_2'(0) &= -\frac{B_{21}}{\tau_1} - \frac{B_{22}}{\tau_2} = \frac{G_3}{C_2}u_{10} - \frac{G_2+G_3}{C_2}u_{20} \end{aligned}$$

Se constată că cele două constante de timp τ_1 și τ_2 nu pot fi asociate fiecare câte unui condensator, expresiile lor conținând fiecare capacitățile ambelor condensatoare C_1 și C_2 .

Separarea are loc, doar atunci când $G_3 = 0$, ceea ce corespunde la două circuite de ordinul întâi cu constantele de timp:

$$\tau_1 = C_1/G_1, \quad \tau_2 = C_2/G_2,$$

cu soluția:

$$u_1(t) = u_{10}e^{-t/\tau_1}, \quad u_2(t) = u_{20}e^{-t/\tau_2}.$$

Alte cazuri degenerate, care prezintă interes constau în conectarea celor două condensatoare în serie și respectiv în paralel (fig. 111).

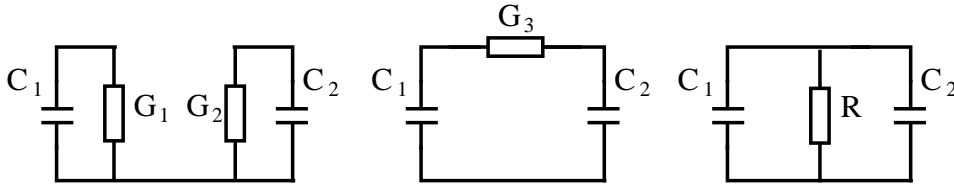


Fig. 4.111.

Conectarea în serie a celor două condensatoare corespunde cazului $G_1 = G_2 = 0$, matricea A având în acest caz determinantul nul $D = 0$ și urma $T = -G_3/C_1 - G_3/C_2 = -G_3/C$ cu $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$. Ecuația caracteristică $r^2 - Tr = 0$ are o rădăcină nulă și alta negativă corespunzătoare constantei de timp:

$$\tau = -1/T = C/G_3,$$

în care C este capacitatea echivalentă conexiunii serie iar G_3 este conductanța rezistorului pe care se descarcă cele două condensatoare înseriate. Tensiunile celor două condensatoare au variația în timp:

$$u_1(t) = B_{11}e^{-t/\tau} + B_{12}$$

$$u_2(t) = B_{21}e^{-t/\tau} + B_{22}$$

iar din condițiile inițiale rezultă:

$$\begin{aligned} B_{11} + B_{12} &= u_{10} \\ B_{21} + B_{22} &= u_{20} \\ -\frac{B_{11}}{\tau} &= \frac{G_3}{C_1}(-u_{10} + u_{20}) \\ -\frac{B_{21}}{\tau} &= \frac{G_3}{C_2}(u_{10} - u_{20}) \end{aligned}$$

În acest caz cele două condensatoare pot rămâne încărcate și în starea asimptotică finală. Dacă inițial tensiunile celor două condensatoare sunt egale, (condensatorul echivalent este descărcat) nu există regim tranzitoriu ($B_{11} = B_{21} = 0$), condensatoarele rămânând încărcate în starea inițială. Dacă se notează cu $u_0 = u_{10} - u_{20}$, tensiunea inițială la bornele condensatorului echivalent de capacitate C , atunci:

$$u_1(t) = \frac{C}{C_1}u_0(e^{-t/\tau} - 1) + u_{10}$$

$$u_2(t) = \frac{C}{C_2}u_0(e^{-t/\tau} - 1) + u_{20}$$

cele două tensiuni evoluând către limita comună (fig. 112)

$$u_\infty = u_{10} - \frac{C}{C_1}u_0 = u_{20} - \frac{C}{C_2}u_0 = \frac{C_1u_{10} + C_2u_{20}}{C_1 + C_2}$$

care este media ponderată a celor două tensiuni, cu ponderi egale cu capacitățile condensatoarelor.

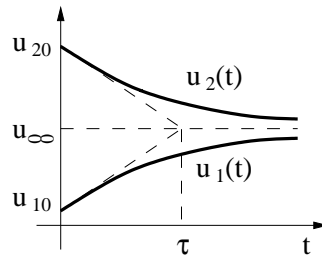


Fig. 4.112.

Aceasta este de fapt tensiunea cu care rămâne încărcat condensatorul echivalent celor două condensatoare presupuse conectate în paralel (în regim staționar G_3 nu este parcurs de curent).

În cazul conectării în paralel a două condensatoare și a unui rezistor, partea rezistivă a circuitului nu admite control în tensiune și formalismul anterior nu poate fi aplicat. Formal G_3 tinde către infinit, ceea ce conduce la o rădăcină infinită a ecuației caracteristice și implicit la o constantă de timp nulă. Acest fapt este explicabil, deoarece prin conectarea în paralel a două condensatoare încărcate la tensiuni inițiale diferite ele tind să își egaleze instantaneu tensiunile. Saltul tensiunii la bornele unui condensator corespunde unei tranziții cu constantă de timp nulă. Deoarece variația discontinuă a tensiunii la bornele condensatorului determină un curent nemărginit, rezultă că un astfel de circuit este impropriu excitat și se spune că din cele două condensatoare unul este în exces.

Capitolul 5

Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice Analiza topologică a circuitelor

5.1 Independența ecuațiilor lui Kirchhoff. Forme matriciale

Prima teoremă a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in (n)}^A i_k = 0$$

este valabilă pentru orice nod $n = 1, 2, \dots, N$ al unui circuit electric. Cele N ecuații algebrice liniare astfel obținute formează un sistem de relații care nu sunt liniar independente. Orice ecuație din acest sistem se poate obține ca o consecință a celorlalte $N - 1$ ecuații (printr-o combinație liniară a lor).

Pentru a demonstra această afirmație se va folosi forma matriceală a sistemului de ecuații:

$$A' i = 0$$

în care s-a notat $i = [i_1, i_2, \dots, i_n]^T$ vectorul curenților și $A' = [a_{jk}]$, $k = 1, L j = 1, n$ o matrice numită matricea extinsă a incidențelor laturi-noduri.

Elementele acestei matrice au valorile:

$$a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{dacă latura } k \notin (j) \\ +1 & \text{dacă latura } k \text{ părăsește nodul } (j) \\ -1 & \text{dacă latura } k \text{ vine la nodul } (j) \end{cases}$$

corespunzătoare factorilor de semn din suma algebrică.

Se constată că pentru orice circuit matricea:

$$A' = \begin{matrix} & 1 & 2 & \dots & k & \dots & L \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & +1 & & & \\ & & & & +1 & \\ +1 & -1 & & & & -1 \\ & & & & -1 & \\ -1 & & & & & +1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

are pe fiecare coloană două elemente nenule, cu valorile +1 și -1, celelalte elemente ale coloanei fiind nule. Elementele $a_{jk} = +1$ din coloana k se află în linia corespunzătoare nodului inițial al laturii k iar elementul $a_{jk} = -1$ se află în linia corespunzătoare nodului final al laturii k . În consecință, suma elementelor din orice coloană este nulă, deci suma ecuațiilor Kirchhoff corespunzătoare tuturor nodurilor unui circuit este nulă.

Rezultă că ecuația Kirchhoff asociată unui nod se obține prin adunarea ecuațiilor Kirchhoff asociate celorlalte noduri ale circuitului.

Pentru a demonstra că $(N - 1)$ ecuații sunt liniar independente se va nota cu:

$$f_j(i) = f_j(i_1, i_2, \dots, i_L) = \sum_{k \in (n)}^A i_k = \sum_{k=1}^L a_{jk} i_k$$

ecuația asociată nodului j .

Dacă există constantele nenule C_1, C_2, \dots, C_m astfel încât:

$$\sum_{j=1}^m C_j f_j(i_1, i_2, \dots, i_L) = 0$$

pentru orice i , atunci cele n funcții f_j sunt liniar dependente, în caz contrar ele sunt liniar independente. Pentru $m = N$ există constantele $C_j = 1$, deci ecuațiile nu sunt liniar independente. Dacă $m = N - 1$ atunci ecuațiile sunt liniar independente. Există un curent i_k (dintr-o latură, care concură la nodul N) ce intervine o singură dată în combinația liniară analizată, deci aceasta nu poate fi nulă pentru constante c_j nenule, afirmație valabilă pentru orice $n \leq N - 1$.

A doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$\left(\sum_{k \in [b]} \right)^A u_k = 0$$

este valabilă pentru orice buclă a circuitului.

Ecuațiile scrise pe toate buclele unui circuit nu sunt, în general, liniar independente.

Adunând ecuațiile Kirchhoff scrise pe buclele $[b_1], [b_2]$ vecine se obține ecuația Kirchhoff obținută pe bucla $[b]$ (fig. 1). Din acest motiv se spune că buclele $[b_1]$,

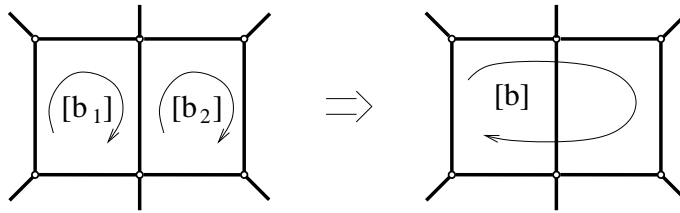


Fig. 5.1.

$[b_2]$ și $[b]$ nu sunt independente. Pentru a obține un sistem de bucle independente, pentru care ecuațiile Kirchhoff sunt liniar independente se folosește conceptul de arbore.

Se numește arbore al unui graf, o mulțime de laturi din graf, care conțin toate nodurile grafului, dar nu formează bucle.

Laturile unui arbore se numesc ramuri (fig. 2).

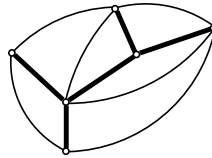


Fig. 5.2.

Fiecare ramură nouă introduce în arbore un nod de graf, dar cum prima ramură conține două două noduri rezultă că numărul total de ramuri dintr-un graf conex este $N - 1$.

Laturile unui graf, care nu aparțin arborelui se numesc coarde. Mulțimea coardelor unui graf se numește coarboare și conține $O = L - N + 1$ laturi. Fiecare coardă închide o buclă formată din acea coardă și în rest din ramuri. Sistemul de bucle astfel format este un sistem independent, deoarece fiecare buclă conține o latură (coarda generatoare) care nu apare în nici o altă buclă. S-a demonstrat astfel că un circuit electric conex cu L laturi și N noduri admite $B = L - N + 1$ bucle independente, pe care ecuațiile Kirchhoff sunt liniar independente.

Ecuațiile Kirchhoff independente referitoare la tensiuni admit următoarea formă matriceală:

$$Bu = 0$$

în care $u = [u_1, u_2 \dots, u_L]^T$ este vectorul tensiunilor iar $B = [b_{jk}]$, $j = 1, B$, $k = 1, L$ este o matrice numită matricea incidențelor laturi-bucle.

Elementele acestei matrice:

$$b_{jk} = \begin{cases} 0; & \text{dacă latura } k \notin j \\ +1; & \text{dacă latura } k \text{ aparține buclei } [j] \text{ și este orientată similar} \\ -1; & \text{dacă latura } k \text{ aparține buclei } [j] \text{ și este orientată invers.} \end{cases}$$

au valori în concordanță cu factorii de semn din suma algebrică. Linia j a matricei B conține elemente nenule doar pe coloanele corespunzătoare laturilor care aparțin buclei $[j]$.

Dacă laturile unui graf se numerotează, începând cu laturile arborelui și continuând apoi cu coardele iar buclele se numerotează conform coardelor care le-au generat, rezultă că matricea B conține în ultimele coloane matricea unitate $I \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ (fig. 3):

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & & -1 & 1 & & \\ & -1 & -1 & & 1 & \\ 1 & -1 & & & & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

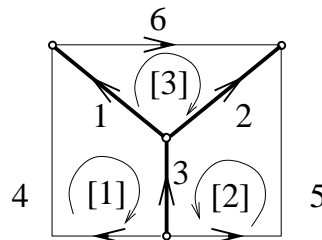


Fig. 5.3.

Sensul de parcurs al buclelor este dat de sensul coardei generatoare.

Primele $N - 1$ coloane vor conține o matrice Λ care descrie complet topologia circuitului, deoarece B se poate partaja în:

$$B = [\Lambda | I]$$

Matricea Λ se numește matricea incidențelor esențiale.

Prin exprimarea tensiunilor de-a lungul laturilor ca diferențe de potențial, ecuațiile Kirchhoff pentru tensiuni, sunt automat satisfăcute.

Folosind vectorul potențialelor $V = [V_1, V_2, \dots, V_{N-1}]^t$, în care s-a presupus că nodul N este nod de referință și $V_N = 0$, se verifică ușor că relația matriceală:

$$u = A^T V$$

exprimă tensiunile ca diferențe de potențiale.

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_L \end{array}} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ L \end{array} \boxed{\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & & & & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}} \boxed{\begin{array}{c} V_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{array}} \\
 u = A^T V
 \end{array}$$

S-a presupus că tensiunile au aceleași sensuri de referință ca și intensitățile (mărimile sunt asociate conform regulii de la receptoare).

Deoarece matricea A^T (transpusa matricei A) conține în linia k doar două elemente nenule, în coloanele corespunzătoare nodului inițial al laturii k ($a_{kj} = 1$) și nodul final al laturii k ($a_{kj'} = -1$), rezultă că tensiunea $u_k = V_{j'} - V_j$.

Utilizarea formei $u = A^T V$ a teoremei a doua a lui Kirchhoff are avantajul că folosește aceeași matrice ca prima teoremă a lui Kirchhoff, dar are dezavantajul că obligă la folosirea potențialelor.

Introducând tensiunile $u = A^T V$ în ecuația $Bu = 0$, rezultă $A^T B V = 0$, relație valabilă pentru orice valori ale potențialelor, în consecință:

$$A^T B = 0$$

deci matricele A și B sunt ortogonale.

Matricele A și B se numesc matrice topologice, deoarece fiecare din ele descrie complet topologia circuitului. Elementele lor au valori 0, +1, -1, independente de structura sau comportarea laturilor circuitului.

O consecință importantă a primei teoreme a lui Kirchhoff se obține prin adunarea ecuațiilor referitoare la două sau mai multe noduri vecine (fig. 4):

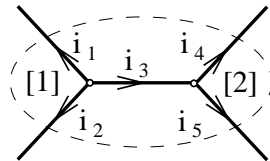


Fig. 5.4.

$$\begin{array}{l}
 [1]: i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\
 [2]: -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\
 \hline
 \Sigma: i_1 + i_2 + i_4 + i_5 = 0.
 \end{array}$$

Prin această operație se reduc intensitățile curenților din laturile cuprinse în interiorul suprafeței închise Σ , care conține nodurile considerate.

Combinăția liniară obținută este chiar suma algebrică a intensităților curenților din laturile ce străbat suprafața Σ și ea are valoare nulă.

Se numește secțiune într-un graf conex o mulțime de laturi, care eliminate din graf determină separarea acestuia în două părți disjuncte iar reintroducerea lor succesivă generează grafuri conexe.

Suprafețele închise Σ , care conțin în interiorul lor unul sau mai multe noduri dintr-un graf intersectează laturile unei secțiuni (fig. 5). Secțiunile unui graf se notează cu $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, ...

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &: \{1, 2, 3\} \\ \Sigma_2 &: \{4, 2, 3, 7\} \\ \Sigma_3 &: \{4, 5, 8, 3\}.\end{aligned}$$

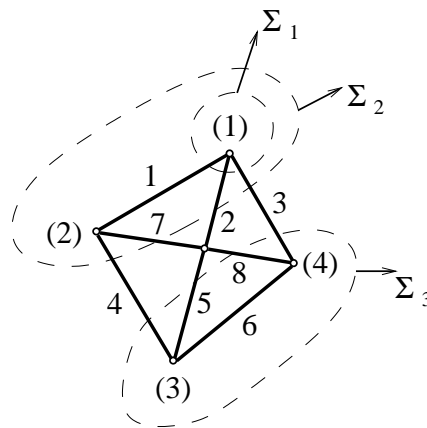


Fig. 5.5.

Prima teoremă a lui Kirchhoff poate fi generalizată sub forma:

$$\sum_{k \in \{S\}} A_k i_k = 0$$

în care $\{S\}$ este o secțiune arbitrară a circuitului.

Dacă fiecare secțiune conține doar un singur nod, atunci această formă a ecuațiilor lui Kirchhoff degenează în forma clasică.

Numărul maxim de ecuații de această formă liniar independentă este $(N-1)$.

Pentru scrierea matriceală a acestor ecuații:

$$Ci = 0$$

se folosește matricea $C = [c_{jk}]$ a incidențelor laturi-secțiuni. Elementele acestei matrice sunt:

$$c_{jk} = \begin{cases} 0; & \text{dacă latura } k \notin \{j\} \\ +1; & \text{dacă latura } k \text{ părăsește secțiunea } \{j\} \\ -1; & \text{dacă latura } k \text{ intră în secțiunea } \{j\} \end{cases}$$

O metodă simplă de a obține un sistem de secțiuni pe care ecuațiile Kirchhoff sunt independente este de a genera aceste secțiuni pornind de la ramurile unui arbore.

Fiecare ramură a unui arbore generează o secțiune unică formată din acea ramură iar în rest din coarde (fig. 6). Pentru a genera regula de semn a sumei algebrice, secțiunile trebuie orientate. Se consideră că sensurile de referință ale secțiunilor sunt date de sensurile ramurilor generatoare.

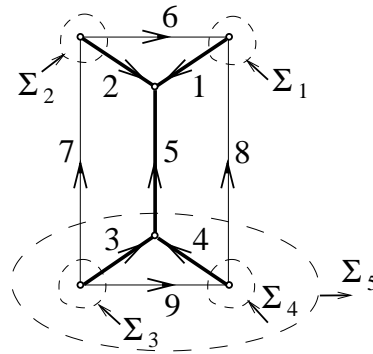


Fig. 5.6.

Matricea C are structura:

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & & & & & -1 & & -1 & \\ & 1 & & & & 1 & -1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & & 1 & 1 & \end{array} \right] \end{matrix}$$

Pe linia j se află un număr de elemente nenule egal cu numărul laturilor ce străbat secțiunea $\{j\}$. Dacă laturile sunt numerotate începând cu ramurile, iar secțiunile sunt numerotate în concordanță cu ramurile generatoare, matricea C admite partajarea

$$C = [I|V],$$

în care $I \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$.

5. TEOREMELE FUNDAMENTALE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE
ANALIZA TOPOLOGICĂ A CIRCUITELOR

Deoarece matricea C se obține printr-o transformare liniară aplicată matricei A , rezultă că

$$C^T B = 0,$$

deci C și B sunt ortogonale.

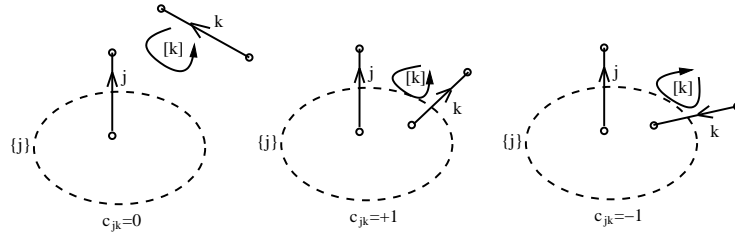


Fig. 5.7.

Pentru o secțiune $\{j\}$ determinată de ramura j , elementul c_{jk} poate avea trei valori distincte (fig. 7).

Dacă latura k nu intersectează secțiunea $\{j\}$, atunci $c_{jk} = 0$ și deoarece bucla k nu va conține latura j , rezultă că $b_{kj} = 0$.

Dacă latura k părăsește secțiunea $\{j\}$, atunci $c_{jk} = +1$, dar deoarece bucla k este orientată invers decât latura $[j]$, rezultă că $b_{kj} = -1$.

Dacă latura k intră în secțiunea $\{j\}$, rezultă că $c_{jk} = -1$, dar în acest caz $b_{kj} = +1$.

Aceste observații permit să se afirme că $c_{jk} = b_{kj}$, deci că $V = -\Lambda^T$.

Folosind matricea incidentelor esențiale, ecuațiile Kirchhoff au următoarea formă matriceală:

$$Ci = [I - \Lambda^T]i = 0,$$

$$Bu = [\Lambda|I]u = 0.$$

Aceste ecuații sunt liniar independente, rangul matricei C fiind $(N - 1)$, iar cel al matricei B fiind $(L - N + 1)$.

Aceste forme ale ecuațiilor presupun că tensiunea și intensitatea din fiecare latură au sensuri de referință comune (s-a adoptat regula de asociere a sensurilor de la generatoare).

Dacă vectorii:

$$i = [i_r|i_c], \quad u = [u_r|u_c],$$

se partajează în vectori asociați ramurilor și respectiv coordonatelor, ecuațiile Kirchhoff devind:

$$i_r - \Lambda^T i_c = 0,$$

$$\Lambda u_r + u_c = 0.$$

Aceste relații scrise sub forma:

$$i_r = \Lambda^T i_c, \quad u_c = -\Lambda u_r,$$

evidențiază faptul că intensitățile curenților din ramură se determină în funcție de cele din coarde, prin aplicarea primei teoreme Kirchhoff, iar tensiunile din coarde se determină în funcție de cele din ramură, prin aplicarea celei de a doua teoremă a lui Kirchhoff. Curenții din coarde și tensiunile din ramuri pot avea valori arbitrare, fără ca acestea să contravină teoremelor Kirchhoff. Cunoașterea acestor mărimi permite determinarea tuturor curenților și tensiunilor circuitului:

$$i = [i_c, i_r] = [\Lambda^T i_r, i_c] = [\Lambda^T | I] i_c = B^T i_c.$$

În concluzie, teoremele lui Kirchhoff au una din următoarele forme echivalente:

$$\begin{cases} Ai = 0 \\ u = A^T v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ci = 0 \\ Bu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i_r = \Lambda^T i_c \\ u_c = -\Lambda u_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = B^T i_c \\ u = C^T u_r \end{cases}$$

Acestea alcătuiesc ecuații liniar independente.

5.1.1 Teorema lui Tellegen. Conservarea puterilor

5.1.2 Analiza circuitelor electrice. Problema fundamentală

Problema fundamentală a analizei circuitelor electrice are ca necunoscute intensitățile curenților din laturi $i_k, k = 1, L$ și tensiunile la bornele laturilor $u_k, k = 1, L$. Pentru a determina aceste mărimi se presupun cunoscute:

- topologia circuitului analizat, descrisă grafic prin graful orientat G al circuitului sau numeric prin una din matricele topologice;
- ecuațiile constitutive ale laturilor circuitului, respectiv operatorii de impedanță $\zeta_k, k = 1, L$ sau de admitanță $y_k, k = 1, L$.

Operatorii de impedanță/admitanță pot fi determinați dacă se cunosc parametrii elementelor din laturi (R_k, L_k, C_k pentru laturile pasive și e_k, j_k pentru laturile active), iar în cazul circuitelor cu elemente acumulative de energie condițiile inițiale (curenții din bobine $i_{i_k}(0)$ și tensiunile la bornele condensatoarelor $u_{C_k}(0)$).

Din punct de vedere matematic problema fundamentală a analizei unui circuit electric constă în rezolvarea sistemului de ecuații, format din:

- ecuațiile Kirchhoff I:

$$Ai = 0;$$

– ecuațiile Kirchhoff II:

$$Bu = 0;$$

– ecuațiile constitutive ale laturilor:

$$u = \zeta i,$$

în care $\zeta = [\zeta_{jk}]$ este matricea operatorilor de impedanță dacă toate laturile sunt controlate în curent sau

$$i = yu,$$

în care $y = [y_{jk}]$ este matricea operatorilor de admitanță, dacă laturile sunt controlate în tensiune.

Prin rezolvarea acestui sistem de $2L$ ecuații se determină vectorii: curent $i = [i_1, i_2, \dots, i_L]^T$ și tensiune $u = [u_1, u_2, \dots, u_L]^T$, care au în total $2L$ componente și reprezintă soluția problemei.

Dacă operatorii ζ sau y sunt liniari, problema admite soluția banală $u = 0$, $i = 0$, deci circuitul nu este străbătut de curent. Pentru ca circuitul să fie parcurs de curenți este necesar ca acesta să conțină cel puțin o sursă de curent, tensiune sau să aibă condiții inițiale nenule.

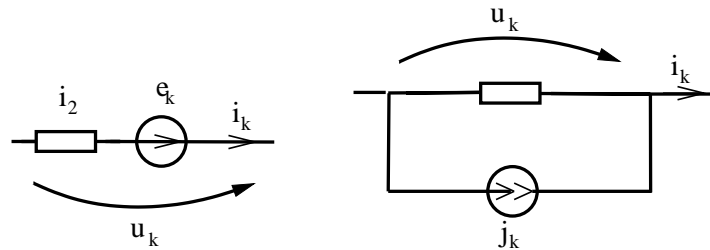


Fig. 5.8.

Circuitele electrice alcătuite cu elemente dipolare au laturile cu structura prezentată în (fig. 8).

Ecuatiile lor constitutive sunt:

$$u_k = \zeta_k i_k - e_k,$$

$$i_k = y_k u_k + j_k,$$

în care prin particularitățile $\zeta_k = 0$ și $y_k = 0$ se obțin cazurile degenerate ale surselor ideale de tensiune și respectiv de curent.

Dacă operatorii ζ_k și y_k sunt liniari se spune că circuitul este liniar. Separarea surselor va simplifica analiza circuitelor cu condiții inițiale nenule, care pot fi echivalate prin surse.

Sursele ideale nu pot fi conectate arbitrar într-un circuit. De exemplu, prin conectarea în paralel a două surse ideale de tensiune se obține un circuit pentru care problema fundamentală nu are soluție unică.

Un circuit electric se numește bine formulat dacă problema fundamentală a analizei acestui circuit are soluție și aceasta este unică. În caz contrar se numește prost formulat.

Circuitele care conțin bucle formate exclusiv din surse ideale de tensiune nu sunt circuite bine formulate, deoarece dacă tensiunile la bornele lor nu satisfac teorema a doua a lui Kirchhoff problema analizei nu are soluție, iar dacă ele satisfac această teoremă, curenții ce străbat laturile buclei pot lua valori arbitrare, deoarece prin suprapunerea unui curent arbitrar ce ar "străbate" bucla, ecuațiile nu se modifică. În acest ultim caz soluția nu este unică.

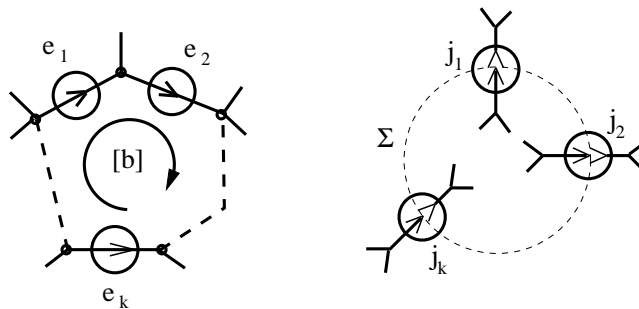


Fig. 5.9.

În mod asemănător, circuitele care conțin secțiuni formate exclusiv din cu laturi surse ideale de curent sunt circuite prost formulate.

Atunci când curenții acestor laturi nu satisfac prima teoremă a lui Kirchhoff, problema fundamentală nu are soluție. Dacă în schimb, curenții electromotori sunt în acord cu această teoremă, soluția nu este unică, tensiunile la bornele surselor de curent nu au valori unice. De exemplu, în cazul a două surse ideale de curent $j_1 = j_2 = j$, tensiunile u_1 și u_2 la bornele acestor surse pot fi mo-

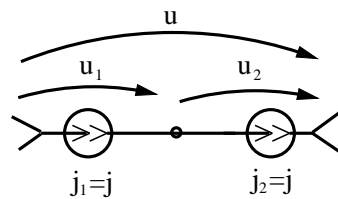


Fig. 5.10.

dificate cu o constantă C arbitrară astfel încât $u'_1 = u_1 + C$, $u'_2 = u_2 - C$ și $u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$.

În particular prin pasivizarea surselor, rezultă că pe două izolatoare perfecte înseriate căderile de tensiune nu pot fi determinate prin analiza circuitului electric.

Pornind de la observația că circuitele reale au întotdeauna ”soluție” se poate afirma că circuitele electrice fără soluție apar datorită deficiențelor de modelare a elementelor reale cu scheme formate din elemente ideale. Aceste situații nedorite pot fi eliminate prin utilizarea unor modele mai complicate, care conțin și elemente ”parazite”, ce pot juca în anumite regimuri un rol esențial (de exemplu, rezistențele interne ale surselor, oricât de mici ar fi acestea).

Czul circuitelor cu soluții multiple poate reflecta o situație reală. Circuitele neliniare în regim staționar pot avea mai multe puncte de funcționare, dintre care unele stabile. Această proprietate este fundamentală, în realizarea circuitelor cu memorie, cum sunt circuitele bistabile. Starea unui astfel de circuit depinde de evoluția sa în imp, deci rezultă în mod univoc prin analiza circuitului în regim variabil. Determinarea condițiilor în care soluția există și este unică. Se face prin analiza eacuațiilor circuitului; de aceea aceste condiții depind de regimul de funcționare al circuitului. Totuși anumite condiții necesare de bună funcționare sunt comune, indiferent de regim.

Teorema arborelui normal. Dacă un circuit nu admite un arbore în care să se afle toate sursele ideale de tensiune și nici o sursă ideală de curent atunci el este prost formulat.

Arborele menționat de această teoremă se numește arbore normal. Teorema evidențiază o condiție necesară de bună formulare și anume existența unui arbore normal.

Circuitele electrice care nu admit arbore normal conțin fie bucle cu surse laturi ideale de tensiune fie secțiuni cu laturi surse ideale de curent. Se spune despre astfel de circuite că au surse în exces.

Dacă circuitul analizat conține arbore normal atunci nu există în circuit bucle cu surse ideale de tensiune și secțiuni cu surse ideale de curent.

Considerând un circuit bine formulat se pot plasa toate sursele de tensiune în arbore și cele de curent în coarbore. Ecuațiile constitutive ale laturilor au formele matriceale:

$$\begin{aligned} u_r &= \zeta i_r - e, \\ i_c &= y u_c + j, \end{aligned}$$

în care $u = [u_r | u_c]$, $i = [i_r | i_c]$ s-au partajat corespunzător ramurilor (u_r, i_r) și respectiv coardelor (u_c, i_c) .

Folosind formele cu matricea incidentelor esențiale ale teoremelor Kirchhoff:

$$\begin{aligned} i_r - \Lambda^T i_c &= 0, \\ \Lambda u_r + u_c &= 0, \end{aligned}$$

prin substituirea ecuațiilor constitutive, rezultă un sistem redus de L ecuații cu L necunoscute:

$$\begin{aligned} u_r \zeta \Lambda^T i_c &= -e \\ i_c - y \Lambda u_r &= j. \end{aligned}$$

Această formă a ecuațiilor:

$$\begin{bmatrix} I & -\zeta \Lambda^T \\ -y \Lambda & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e \\ j \end{bmatrix}$$

are avantajul că vectorul soluție $x = [u_r, i_c]^T$ conține câte o necunoscută pentru fiecare latură curentul, în cazul coardelor și tensiunea, în cazul ramurilor. Celelalte necunoscute secundare, rezultă prin aplicarea relațiilor Kirchoff: $i_1 = \Lambda^T i_c$, $u_c = -\Lambda u_r$.

Metoda de analiză prezentată este o metodă de substituție, care conduce la îmbunătățirea dimensiunii sistemului de ecuații și la reducerea considerabilă a efortului necesar rezolvării.

Necunoscutele principale, care rezultă direct din rezolvarea sistemului sunt $x = [u_r, i_c]^T$, sunt **variabilele esențiale** ale circuitului.

Aceasta nu este singura metodă de substituție folosită în analiza circuitelor electrice.

Dacă circuitul nu conține surse ideale de curent și toate laturile sunt comandate în curent:

$$u = \zeta i - e.$$

Prin substituția tensiunilor în ecuația $Bu = 0$, rezultă

$$B\zeta i = Be,$$

iar împreună cu ecuațiile $Ai = 0$ se formează sistemul ecuațiilor Kirchoff:

$$\begin{bmatrix} A \\ B\zeta \\ k \end{bmatrix} i = \begin{bmatrix} 0 \\ Be \\ e' \end{bmatrix}$$

din care rezultă curenții din laturi $i = k^{-1}e'$. Tensiunile prin laturi se obțin prin substituții în ecuațiile constitutive $u = \zeta i - e$. Această metodă este cunoscută sub numele de **analiza curenților**, deoarece are ca necunoscute principale curenții din laturi.

Dacă toate laturile unui circuit sunt controlate în tensiune (circuitul nu conține surse ideale de tensiune), atunci ecuațiile constitutive se pot scrie sub forma:

$$i = yu + j,$$

și din $Ai = 0$ rezultă: $Ayu = -Aj$.

Împreună cu ecuația $Bu = 0$, rezultă sistemul liniar:

$$\begin{bmatrix} Ay \\ B \\ k' \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -Aj \\ 0 \\ j' \end{bmatrix}$$

Prin rezolvarea acestui sistem rezultă tensiunile la bornele laturilor $u = k^{-1}j'$, iar apoi prin substituții la ecuațiile constitutive, rezultă și curenții din laturi: $i = yu + j$. Deoarece în acest caz necunoscutele principale sunt tensiunile laturilor se spune că această metodă de substituție se bazează pe **analiza tensiunilor**. O reducere suplimentară a dimensiunii sistemului se obține prin considerarea drept necunoscute principale a curenților de coarde i_c . în număr de $L - N + 1$. Această metodă se numește **analiza buclelor** (sau a curenților ciclici).

Deoarece curenții din laturi se exprimă în funcție de cei din coardă $i_r = \Lambda^T i_c$, rezultă că $i = [i_r, i_c] = [\Lambda^T i_c, i_c] = [\Lambda^T | I] i_c = B^T i_c$, deoarece $B^T = [\Lambda | I]^T = [\Lambda^T | I]$.

Considerând laturile controlate în curent $u = \zeta i - e$, din relația $Bu = 0$, rezultă: $B\zeta i = Be$ și $B\zeta B^T i_c = Be$.

Notând $\zeta' = B\zeta B^T$ numită matricea impedanțelor ciclice și $e' = Be$, rezultă:

$$\zeta' i_c = e',$$

din care $i_c = \zeta^{-1} e'$. După determinarea curenților din coarde i_c (numiți și curenți ciclici, deoarece se pot considera curenții fictivi, care străbat bucele independente generate de aceste coarde) se determină curenții din ramuri $i_r = \Lambda^T i_c$ și apoi tensiunile laturilor $u = \zeta i - e$.

Analiza secțiunilor (metoda tensiunilor din ramuri)

Capitolul 6

Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice

6.1 Puteri. Relații de conservare

Pentru a caracteriza transferul de energie între un element multipolar și circuitul electric din care acesta face parte se utilizează puterea transferată pe la borne:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t)v_k(t), \quad (6.1)$$

în care $i_k(t)$ este intensitatea curentului ce străbate borna k , $v_k(t)$ este potențialul bornei k iar n este numărul de borne ale elementului.

Sensul acestei puteri depinde de semnul sumei $P(t)$ dar și de sensurile de referință ale curenților. Dacă toți curenții $i_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ au sensurile de referință astfel alese încât să părăsească elementul multipolar, atunci $P(t)$ are sensul convențional e la element spre circuit (fig.17.1.a). Dacă în schimb, curenții $i_k(t)$ au sensurile de referință orientate spre elementul de circuit, atunci puterea $P(t)$ este convențional absorbită de element (fig.17.1.b). Dacă $P(t) > 0$, atunci sensul real al puterii coincide cu cel convențional, iar dacă $P(t) < 0$, atunci sensul real este invers celui convențional.

Conform primei teoreme Kirchhoff, intensitățile curenților prin bornele unui element multipolar au suma nulă, ceea ce face ca valoarea puterii transferate să nu depindă de alegerea referinței potențialului. Dacă se modifică toate potențialele cu constanta v_0 , rezultă:

$$P'(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t)(v_k(t) - v_0) = \sum_{k=1}^n i_k(t)v_k(t) + v_0 \sum_{k=1}^n i_k(t) = P(t),$$

deci, invarianța puterii.

Alegând una dintre bornele multipolului ca referință a potențialului, de exemplu $v_n = 0$, se obține:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n-1} i_k(t)v_k(t). \quad (6.2)$$

În cazul particular al elementelor dipolare la care $n=2$ se obține, pornind de la relația (6.2), $P(t) = i_1(t) \cdot v_1(t)$. Deoarece $v_1(t)$ reprezintă chiar tensiunea $u(t)$ la bornele dipolului, orientată de la borna 1 spre borna de referință, iar $i_1(t)$ este intensitatea $i(t)$ ce strabate elementul, rezultă:

$$P(t) = u(t) \cdot i(t). \quad (6.3)$$

În stabilirea sensului puterii (6.3) se deosebesc două cazuri:

- regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare, caz uzual în care tensiunea și intensitatea au sensurile de referință cu aceeași poziție față de borne (fig.17.2.a) și în care puterea (6.3) este convențional absorbită de element;
- regula de asociere a sensurilor de referință de la generatoare, caz în care tensiunea și intensitatea au sensuri de referință opuse (una orientată de la borna 1 spre 2, iar cealaltă orientată de la borna 2 spre 1) și în care sensul convențional al puterii este de la element spre circuit.

Și în aceste cazuri sensul real al puterii coincide cu cel convențional, dacă $P(t) > 0$ și este invers în caz contrar.

Exemplul 1. Elementul tripolar din figura 17.3.a absoarbe o putere

$$P = v_1 i_1 + v_2 i_2 = 20 - 25 = -5W,$$

deci în realitate generează puterea electrică $|p| = 5W$, iar elementul dipolar din figura 17.3.b, având sensurile de referință asociate după regula de la generatoare (curentul în jos și tensiunea în sus) produce puterea

$$P = u \cdot i = -50mW.$$

Următoarea teoremă garantează consistența definiției (6.1) în cadrul teoriei circuitelor electrice.

Teorema 1, a puterii transferate de un circuit neizolat: o parte a unui circuit electric, considerată ca un multipol, transferă pe la bornele sale de acces o putere electrică egală cu suma puterilor transferate pe la borne de către elementele ce o alcătuiesc.

În această teoremă s-a considerat că toate elementele au același sens convențional al puterii.

Teorema va fi demonstrată în cazul particular al circuitelor alcătuite din elemente dipolare. Dacă se notează $u = [u_1, u_2, \dots, u_l]^T$ vectorul tensiunilor la bornele celor l laturi, $i = [i_1, i_2, \dots, i_l]^T$ vectorul intensităților curenților din laturi, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ vectorul potențialelor celor n noduri și $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]^T$ vectorul curenților injectați în nodurile circuitului, suma puterilor transferate pe la bornele elementelor dipolare este egală cu produsul scalar al vectorilor u și i ,

$$P = \sum_{k=1}^l u_k i_k = u^T i = (A^T v)^T i = v^T (A i) = v^T j, \quad (6.4)$$

în care A este matricea de incidență a laturilor la noduri. În relația 6.4 s-au folosit cele două teoreme ale lui Kirchhoff sub forma:

$$A i = j, \quad u = A^T v. \quad (6.5)$$

Ca o consecință a teoremei 1 rezultă că orice parte a unui circuit electric alcătuit din elemente dipolare pasive, la care $u \cdot i > 0$ transferă pe la bornele sale de acces o putere totală nenegativă. Această afirmație, valabilă și în cazul circuitelor neliniare este cunoscută sub numele de **teorema pasivității**.

O altă consecință importantă a teoremei 1 se referă la circuitele electrice izolate.

Teorema 2, a conservării puterii în circuitele electrice: suma puterilor transferate pe la borne de către toate elementele unui circuit electric este nulă:

$$\sum_{k=1}^l u_k i_k = 0. \quad (6.6)$$

În relația (6.6) s-a considerat că toate elementele din circuit au aceeași regulă de asociere a sensurilor.

Pentru ca suma (6.6) să fie nulă în condițiile în care termenii ei sunt nenuli este necesar ca termenii pozitivi să aibă suma egală cu modulul sumei termenilor negativi. În consecință, în orice moment, într-un circuit electric izolat puterea totală reală consumată este egală cu puterea totală reală generată. Această egalitate este cunoscută sub numele de "bilanțul puterilor" și este o consecință a conservării puterii electrice. În demonstrația teoremelor 1 și 2 precum și a relației de bilanț s-au folosit formele generale ale teoremelor lui Kirchhoff, ceea ce înseamnă că ele sunt valabile, indiferent de tipul sau structura elementelor care alcătuiesc circuitul.

Exemplul 2. Aplicând teorema conservării puterilor pentru circuitul reprezentat în figura 17.4.a se obține

$$P = \sum_{k=1}^6 u_k i_k = -10 + 2,5 - 5 + 37,5 - 40 + 15 = 0. \quad (6.7)$$

În calcul s-au folosit intensitățile curenților reprezentate în graful din figura 17.4.b și tensiunile reprezentate în graful din figura 17.4.c. Se constată că cele două grafuri sunt orientate similar, ceea ce este echivalent cu alegerea regulii de asociere a sensurilor de la receptoare pentru toate laturile circuitului.

Pentru ca relația (6.6) să fie satisfăcută este suficient ca intensitățile curenților să fie preluate dintr-un graf consistent cu prima teoremă a lui Kirchhoff, iar tensiunile dintr-un graf orientat, echivalent cu primul, dar consistent cu a doua teoremă a lui Kirchhoff. Se constată că nu este necesar ca aceste mărimi să se refere la același circuit electric ci doar la circuite echivalente topologic. Această generalizare a teoremei 3 este cunoscută sub numele de **teorema pseudoputerilor (Tellegen)**, deoarece produsul dintre o tensiune și o intensitate arbitrară se numește pseudoputere.

Ca o exemplificare a teoremei lui Tellegen se poate considera chiar relația (6.7), în care tensiunile (fig 17.4.b) și intensitățile curenților (fig 17.4.c) se referă la circuitul din figura 17.4.a, dar la momente diferite de timp.

6.2 Teoreme de existență și unicitate a soluției

Problema fundamentală a analizei circuitelor electrice constă în determinarea intensităților curenților în toate laturile unui circuit dat, a tensiunii la bornele laturilor și eventual a potențialelor nodurilor circuitului.

Datele acestei probleme se pot clasifica în trei categorii:

- date tipologice, referitoare la modul în care sunt conectate elementele circuitului;
- date care descriu elementele circuitului și anume parametrii elementelor liniare, funcțiile caracteristice ale elementelor neliniare și parametrii surselor variabile sau constante în timp;
- condiții inițiale, necesare doar în analiza regimului tranzitoriu.

Se pune în mod natural întrebarea dacă o astfel de problemă este corect formulată, respectiv dacă sistemul de ecuații asociat circuitului (format din ecuațiile generale, KI, KU și cele caracteristice) are soluție și dacă aceasta este unică. se pot da ușor exemple de circuite incorect formulate, care nu au soluție sau aceasta nu este unică.

Exemplul 3. Circuitul din figura 17.5.a nu are soluție deoarece tensiunile la bornele celor două surse ideale, conectate în paralel nu pot fi egale, deoarece intensitățile curenților din cele două surse pot avea valori arbitrare, care nu pot fi determinate univoc din ecuațiile circuitului.

Pornind de la observația că circuitele reale au întotdeauna ”soluție” se poate afirma că circuitele electrice fără soluție apar datorită deficiențelor de modelare a elementelor reale prin scheme ”echivalente”, formate din elemente ideale. Astfel

de situații nedorite pot fi eliminate prin utilizarea unor modele mai complicate, care conțin și elemente ”parazite”, ce pot juca în anumite regimuri un rol esențial. De exemplu, circuitele din figura 17.5 devin bine formulate, dacă se iau în considerare rezistențele interne ale surselor, oricât de mici dar nenule ar fi acestea, respectiv dacă se înlocuiesc sursele ideale cu surse reale.

Cazul circuitelor cu soluții multiple poate reflecta o situație reală. Circuitele neliniare în regim staționar pot avea mai multe puncte de funcționare, dintre care unele stabile. Această proprietate este fundamentată în proiectarea circuitelor de memorie, cum este circuitul bistabil.

Determinarea condițiilor în care soluția există și este unică se face prin analiza ecuațiilor circuitului; de aceea aceste condiții depind de regimul de funcționare al circuitului.

Teorema 3, de existență și unicitate a soluției unui circuit electric liniar fără surse comandate, în regim staționar: condiția necesară și suficientă ca un circuit electric liniar, format în rezistoare cu rezistențe pozitive, surse ideale de curent și surse ideale de tensiune să aibă soluție unică este existența, unui arbore în circuit, care să conțină toate sursele ideale de tensiune și nici o sursă ideală de curent.

Această teoremă poate fi aplicată și în cazul circuitelor alcătuite din elemente dipolare rezistive, în regim variabil.

Arborele cu proprietățile menționate în teorema 3 se numește **arbore normal**. Dacă într-un circuit nu există arbore normal, atunci acesta conține cel puțin o buclă formată din surse ideale de tensiune sau o secțiune formată din surse ideale de curent. Aceste surse se numesc generatoare în exces. Dacă sursele ideale de tensiune în exces (v.fig.17.6.a) satisfac a doua relație a lui Kirchhoff, atunci ecuațiile circuitului nu au soluție unică, deoarece curenții din aceste surse nu sunt univoc determinați. Dacă în schimb sursele ideale de tensiune nu satisfac a doua relație a lui Kirchhoff, atunci circuitul nu are soluție. Dacă sursele ideale de curent în exces (v.fig.17.6.b) satisfac prima relație Kirchhoff, atunci circuitul nu are soluție unică, deoarece tensiunile la bornele acestor surse nu au valori univoc determinate de ecuații, iar în cazul în care aceste surse nu satisfac prima relație Kirchhoff, circuitul nu are soluție. În consecință, pentru ca problema analizei unui circuit să fie bine formulată este necesar ca acesta să aibă un arbore normal.

Pentru a determina unicitatea soluției se presupune prin absurd că există două soluții. Deoarece diferența lor $\Delta u_k, \Delta i_k$ satisface formula generală a teoremelor lui Kirchhoff se poate aplica teorema lui Tellegen:

$$0 = \sum_{k=1}^l \Delta u_k \Delta i_k = \sum_{k=1}^l R_k \Delta i_k^2 > 0,$$

ceea ce evidențiază absurditatea supoziției.

Exemplul 4. Circuitul din figura 17.7.a este bine formulat, deoarece deține un arbore normal, marcat cu linie groasă, dar circuitul din figura 17.7.b nu este bine formulat, deoarece nu stăpânește condițiile teoremei 3.

Teorema 3 a fost generalizată la cazul circuitelor neliniare de Desoer și Katzenelson [Willson 1975].

Teoreme 4, de existență și unicitate a soluției unui circuit electric rezistiv, neliniar, cu elemente dipolare ale căror caracteristici sunt funcții continue și monoton crescătoare, definite pe întreaga axă reală: dacă în circuit există un arbore, care conține în ramurile sale numai rezistoare controlate în curent, iar în coarde rezistoare controlate în curent, atunci există o soluție pentru orice valori ale surselor de tensiune sau curent și această soluție este unică.

În această teoremă s-a adoptat regula sensurilor de la receptoare pentru toate laturile circuitului. Deoarece caracteristicile u-i ale elementelor dipolare nu trebuie să fie în mod necesar strict monotone, sursele ideale de tensiune se consideră rezistoare controlate în curent, iar sursele ideale de curent se consideră rezistoare controlate în tensiune, în ambele cazuri funcțiile caracteristice fiind constante. Rezistoarele ale căror funcții caracteristice sunt bijective pot fi plasate atât în arbore cât și în coarboare, deoarece ele pot fi considerate controlate atât în curent cât și în tensiune.

Condițiile necesare existenței și unicității soluției circuitelor cu elemente rezistive sunt evidențiate de teoremele Desoer - Wu și Sardberg - Willson.

Aplicând aceste teoreme, se demonstrează că circuitele cu diode, tranzistoare bipolare, rezistoare liniare și surse independente de tensiune sau curent au structura tipologică prezentată în figura 17.8 nu pot avea soluții multiple, indiferent de valorile parametrilor elementelor de circuit. În consecință, nu se pot obține circuite bistabile cu tranzistoare în conexiunea bază comună (în particular cu un singur tranzistor). Nici circuitele cu două tranzistoare, separabile în două subcircuite conectate ca în figura 17.9 nu au soluții multiple.

Un rezultat fundamental privind unicitatea soluției în circuite cu tranzistoare este prezentat de Nielsen și Willson, care demonstrează că circuitele cu rezistoare liniare, surse independente de tensiune sau curent au soluție unică, dacă î numai dacă nu conțin o structură cu reacție de tipul celei din figura 17.10. Pentru evidențierea structurii cu reacție se pasivizează sursele, rezistoarele se elimină sau se scurtcircuitază, iar tranzistoarele, cu excepția unei perechi, se înlocuiesc cu una din schemele prezentate în figura 17.11 (se consideră pe rând porțiunile blocate sau în conducție perfectă).

Exemplul 5. Analizând circuitul din figura 17.12.a se constată că acesta conține o structură cu reacție (v.fig.17.12.b), deci pentru anumite valori ale parametrilor, circuitul va avea soluții multiple.

Pentru a obține circuitul din figura 17.12.b s-au scurtcircuitat rezistoarele R_3 , R_5 și rezistanța internă a sursei, iar rezistoarele R_1 , R_2 și R_4 au fost eliminate.

Condițiile topologice necesare și suficiente pentru ca un circuit electric cu rezistoare neliniare, surse independente de curent sau tensiune și surse comandate liniar să aibă soluție și aceasta să fie unică, pentru orice valori ale parametrilor au fost evidențiate de Nishi și Chua.

Teorema 3 poate fi extinsă cu ușurință în cazul regimului armonic sau la circu-

ite liniare în regim periodic permanent, cazuri în care se impune ca impedanțele complexe ale laturilor pasive să aibă parte reală strict pozitivă. Trebuie menționat faptul că circuitele L-C serie au la rezonanță impedanță nulă, deci sunt similare surselor ideale de tensiune pasivizate, iar circuitele L-C paralel au la rezonanță admitanță nulă, fiind similare surselor ideale de curent pasivizate. În particular, circuitul format dintr-o bobină ideală și un condensator ideal interconectate nu au soluție unică, deoarece nici intensitatea curentului, nici tensiunea la bornele comune nu au valori univoc determinate din ecuațiile circuitului.

Teorema 5, de existență și unicitate în regim tranzitoriu a soluției unui circuit liniar alcătuit din rezistoare cu rezistențe pozitive, condensatoare cu capacitate pozitivă, bobine eventual cuplate (cu matricea inductivităților simetrică și pozitiv definită), surse ideale de tensiune și surse ideale de curent: dacă există un arbore, care conține toate sursele ideale de tensiune și nici o sursă de curent, atunci pentru valori date la momentul inițial ale tensiunilor la bornele condensatoarelor și ale intensităților curenților din bobine există o soluție a ecuațiilor circuitului și aceasta este unica.

Demonstrația unicității se bazează pe teorema lui Tellegen. În general, pentru un circuit arbitrar, care satisface condițiile teoremei 5 soluția datorată unor surse cu variație arbitrară în timp se află în clasa funcțiilor generalizate, ea fiind o distribuție. Totuși, în condiții topologice suplimentare, referitoare la elementele acumulative de energie (absența buclelor formate din surse ideale de tensiune și condensatoare sau a secțiunilor formate din surse ideale de curent și bobine) soluția satisface ecuațiile diferențiale ale circuitului în sens clasic, fiind continuă și derivabilă. În această situație se spune că circuitul nu conține elemente acumulative de energie în exces.

Exemplul 6. Circuitul din figura 17.13.a are soluție clasică de regim tranzitoriu pentru $t \geq 0$ și aceasta este unică, dacă se cunosc R, L, C (strict pozitive), $j(t), e(t)$ pentru $t \geq 0$ și condițiile inițiale $i(0)$ și $u(0)$, deoarece el deține un arbore normal, care conține toate sursele de tensiune și condensatoarele circuitului și nici o sursă de curent sau bobină.

În schimb, circuitul din figura 17.13.b, cu toate că are soluție unică, aceasta nu este în mod necesar o funcție clasică (tensiunea la bornele condensatorului poate fi discontinuă, iar intensitatea curentului din condensator poate evolua în timp ca o funcție de tip Dirac $\delta(t)$, deci nemărginită), deoarece circuitul conține o buclă formată dintr-o sursă ideală de tensiune și un condensator. Un efect similar are loc și la conectarea în paralel a două condensatoare ideale, din care unul inițial încărcat și altul descărcat.

6.3 Teorema privind invarianța soluției

Această categorie de teoreme evidențiază transformările la care poate fi supus un circuit electric fără ca soluția sa sau o parte a ei să se modifice.

Teorema 6, a surselor de tensiune cu acțiune nulă: dacă în ramurile unui circuit se înseriază surse ideale de tensiune arbitrare, iar în coardele sale se înseriază surse ideale de tensiune, care împreună cu cele din ramuri satisfac a doua relație a lui Kirchhoff, atunci intensitățile curenților din laturile circuitului nu se modifică.

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe observația că suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor noi introduse este nulă pe orice buclă din circuit. În consecință, ecuațiile Kirchhoff exprimate în curenți nu se vor modifica în urma introducerii surselor menționate.

Exemplul 7. Circuitul din figura 17.14.a are aceleași valori ale intensității curenților ca și circuitul din figura 17.14.b, pentru orice valori e_1, e_2, e_3 .

Teorema 7, a surselor de curent cu acțiune nulă: dacă în paralel cu coardele unui circuit se conectează surse de curent de valoare arbitrară, iar în paralel cu ramurile se conectează surse de curent, care împreună cu cele din coarde satisfac prima relație a lui Kirchhoff, atunci tensiunile la bornele laturilor circuitului nu se modifică.

Demonstrația teoremei 7 este similară cu cea a teoremei 6, dar se referă la ecuațiile Kirchhoff pentru tensiuni, care în acest caz rămân nemodificate.

O consecință imediată a teoremei 6 este că dacă pe toate laturile unui circuit, care concură la un nod, se înseriază surse ideale de tensiune cu valoare egală și orientate similar față de nod, atunci intensitățile curenților din laturile circuitului nu se modifică (fig.17.15.a). Se constată că potențialul nodului crește cu E , ceea ce face ca tensiunile la bornele laturilor să fie afectate de introducerea noilor surse, în schimb curenții din laturi își mențin intensitățile, deoarece pentru orice buclă care trece prin nod, cei doi termeni opuși $+E$ și $-E$ se anulează reciproc în a doua teoremă a lui Kirchhoff.

Din teorema 7 rezultă că dacă în paralel cu toate laturile unei bucle se conectează surse ideale de curent cu valoare egală și orientate similar față de sensul buclei (v. fig. 17.15.b), atunci tensiunile la bornele laturilor circuitului nu se modifică. Aceste afirmații sunt cunoscute sub numele de **teoremele lui Vaschy**.

Utilizarea teoremelor Vaschy permite în unele cazuri simplificarea analizei circuitelor electrice.

Exemplul 8. Dacă la circuitul din figura 17.16.a se introduc surse de tensiune alese astfel încât să anuleze sursele inițiale (v.fig.17.16.b) se obține în final un circuit cu o singură sursă de tensiune (v.fig.17.16.c), care este străbătut de aceeași curenți ca și circuitul inițial.

Folosind teoremele lui Vaschy pot fi eliminate dintr-un circuit bine formulat toate sursele ideale de tensiune sau curent, obținându-se doar laturi cu surse reale (v.fig.17.17). Această transformare simplifică analiza circuitului, deoarece micșorează numărul de noduri respectiv de laturi.

Teoema 8, a echivalanței: Orice parte a unui circuit electric poate fi înlocuită cu un multipol echivalent, fără ca partea de soluție corespunzătoare restului circuitului să se modifice. La aplicarea acestei teoreme în regim tranzitoriu trebuie

avut grijă ca multipolul echivalent să asigure aceleași condiții inițiale (de obicei nule) ca și partea de circuit satisfăcută. Aplicarea teoremei echivalenței determină o tehnică eficientă de analiză a circuitelor electrice.

Exemplul 9. Prin înlocuirea dipolului AB din figura 17.18.a cu generatorul Thevenin echivalent, se obține un circuit mult mai simplu (v.fig.17.18.b) în care intensitățile curenților I_1 , I_2 și I_3 au valori egale cu cele din circuitul inițial.

Teorema 9, a substituției: Dacă într-un circuit electric un element dipolar cu tensiunea la borne $u(t)$ și străbătut de curentul $i(t)$ este înlocuit cu o sursă ideală de tensiune cu valoarea $e(t) = u(t)$ sau cu o sursă ideală de curent cu valoarea $j(t) = i(t)$, atunci soluția circuitului nu se modifică (v.fig.17.19).

Trebuie menționat că prin substituție este posibil ca un circuit cu soluție unică să se transforme într-un circuit cu soluții multiple. Modificarea unui circuit pe baza teoremei 9 este cunoscută sub numele de **transfigurare prin compensație**. Ea poate fi efectuată doar dacă se cunoaște intensitatea curenților $i(t)$ sau tensiunea $u(t)$ la bornele elementului și este valabilă doar pentru regimul respectiv. Din aceste motive se spune că transfigurarea prin compensație este mai slabă decât cea prin echivalență, evidențiată de teorema 8.

Teorema 10, a simetriei pentru un circuit electric alcătuit din două părți N'si N'' identice: dacă cele două părți sunt conectate simetric (v.fig.17.20.a), atunci intensitățile curenților prin conductoarele directe sunt nule ($i_1 = 0$, $i_2 = 0$, ...), iar tensiunile la bornele conductoarelor încrucișate sunt nule ($u_{34} = 0$, ...). Dacă cele două părți sunt conectate antisimetric (v.fig.17.21.a), atunci tensiunile între bornele simetrice conectate direct sunt nule (u_{14} , ...), iar curenții prin bornele simetrice conectate încrucișat au intensități nule ($i_2 = 0$, $i_3 = 0$, ...).

Prin folosirea teoremei 10 analiza circuitelor simetrice se reduce considerabil, deoarece soluția corespunzătoare părții lui N'egală cu soluția corespunzătoare părții simetrice N'' se poate obține prin analiza doar a unei jumătăți din circuit.

În cazul conexiunii simetrice (cu axă de simetrie), prin întreruperea conexiunilor directe și scurtcircuitarea bornelor încrucișate, conform teoremei substituției, soluția nu se modifică (v.fig.17.20.b). În cazul conexiunii antisimetrice (cu axă de răsturnare), soluția nu se modifică prin scurtcircuitarea bornelor conectate direct și prin întreruperea legăturilor încrucișate (v.fig.17.21.b).

Exemplul 10. Folosind teorema simetriei analiza circuitului simetric din figura 17.22.a se reduce la analiza circuitului din figura 17.22.b, iar analiza circuitului antisimetric din figura 17.23.b.

O altă transformare care nu modifică valorile numerice ale soluției ci doar substituie valorile tensiunilor cu ale curenților și reciproc este transformarea de dualitate.

Un circuit N'este prin definiție dualul unui circuit dat N, dacă ecuațiile circuitului N în care s-au efectuat substituțiile $i'_k = u_k$ și $u'_k = i_k$ sunt identice cu ecuațiile circuitului N'.

Teorema 11, a dualității: condiția necesară și suficientă ca un circuit cu elemente dipolare să admită circuit dual este ca graful lui să fie planar.

Algoritmul de construcție a circuitului dual Năl unui circuit dat N conține etapele:

- se construiește graful orientat G al circuitului N ;
- în interiorul fiecărui ochi al grafului G și în exteriorul grafului se plasează un nod al grafului G' ;
- prin unirea nodurilor (i') și (j') se trasează câte o latură l' la graful G' , asociată laturii l , comun ochiurilor $[i]$ și $[j]$ din graful G ;
- se orientează laturile lăle grafului G' , astfel încât nodul de plecare al laturii lșă vadă latura duală l orientată în sens trigonometric;
- se introduce în fiecare latură l' un element dual elementului din latura corespunzătoare l , conform tabelului 17.1

Elemente duale	
Graful G	Graful G'
rezistor liniar cu rezistența R	rezistor liniar cu conductanță G' numeric egală cu R
rezistor neliniar cu funcția caracteristică $u = f(i)$	rezistor neliniar cu funcția caracteristică $i' = f(u')$
bobină cu inductivitatea L	condensator cu capacitatea C' numeric egală cu L
condensator cu capacitatea C	bobină cu inductivitatea L' numeric egală cu C
sursă de tensiune $e(t)$	sursă de curent $j'(t)$ numeric egal cu $e(t)$
sursă de curent $j(t)$	sursă de tensiune $e'(t)$ numeric egal cu $j(t)$

Relația de dualitate permite extinderea rezultatelor obținute în analiza și sinteza unei categorii de circuite asupra categoriei duale.

Exemplul 11. Circuitul reprezentat în figura 17.24.a are o comportare similară a soluției cu circuitul din figura 17.24.c, respectiv asigură o relație $u - j$ similară celei $i - e$, realizată de primul circuit. În figura 17.24.b se reprezintă cele două grafuri G și G' , duale unul altuia.

6.4 Teoreme privind comportarea soluției

Această categorie de teoreme evidențiază proprietățile soluțiilor circuitelor electrice.

Teorema 12, a superpoziției: la un circuit electric liniar și cu condiții inițiale nule, dacă sub acțiunea surselor descrise de vectorul $S' = [e'_1, e'_2, \dots, e'_l, j'_1, j'_2, \dots, j'_l]^T$ soluția este $J' = [i'_1, i'_2, \dots, i'_l, u'_1, u'_2, \dots, u'_l]^T$, iar sub acțiunea surselor $S'' = [e''_1, e''_2, \dots, e''_l, j''_1, j''_2, \dots, j''_l]^T$ soluția este $J'' = [i''_1, i''_2, \dots, i''_l, u''_1, u''_2, \dots, u''_l]^T$, atunci sub acțiunea surselor $\lambda_1 S' + \lambda_2 S''$ soluția este $\lambda_1 J' + \lambda_2 J''$, în care λ_1 și λ_2 sunt constante reale.

Teorema superpoziției este o consecință imediată a liniarității ecuațiilor circuitelor electrice liniare, cu sau fără surse comandate liniar. În cazul regimurilor staționare sau periodic permanente, deci inclusiv în cazul regimului armonic, restricția referitoare la condițiile inițiale nu trebuie luată în considerare.

În regim tranzitoriu, superpoziția poate fi aplicată și condițiilor inițiale, dacă acestea sunt tratate ca surse, conform echivalenței reprezentate în figura 17.25. În consecință, soluția de regim tranzitoriu a unui circuit electric liniar cu condiții inițiale nenule se poate descompune întotdeauna într-o soluție de regim liber (obținută prin pasivizarea surselor din circuitul inițial dar cu considerarea condițiilor inițiale nenule).

Ca o consecință a teoremei superpoziției rezultă faptul că soluția unui circuit liniar este egală cu suma soluțiilor circuitului respectiv, în condițiile în care se introduce pe rând în circuit câte o sursă iar celelalte sunt pasivizate (v.fig.17.27).

Operația de pasivizare a unei surse constă în anularea parametrului ei. În cazul unei surse ideale de tensiune ($u = e$), aceasta corespunde cu înlocuirea ei cu un conductor perfect, iar în cazul unei surse ideale de curent ($i = j$), pasivizarea corespunde cu înlocuirea cu un izolator perfect. În general, pasivizarea unei surse independente corespunde înlocuirii cu rezistența sa internă (nulă la sursa ideală de tensiune și infinită la sursa ideală de curent).

Sursele comandate și rezistoarele nu sunt modificate prin operația de pasivizare.

O altă consecință, cunoscută sub numele de **teorema liniarității**, rezultă prin aplicarea teoremei superpoziției la circuitele cu o singură sursă de tensiune (v.fig.17.28.a) sau de curent (v.fig.17.28.b). În acest caz soluția depinde liniar de parametrul sursei. Dacă circuitul este rezistiv sau de regim staționar, dependența dintre soluție și parametrul sursei se exprimă ca o relație de proporționalitate:

$$i_k = g_{km} \cdot e_m, \quad u_k = \alpha_{km} \cdot e_m, \quad (6.8)$$

în cazul sursei de tensiune plasată în latura m și

$$i_k = \beta_{km} \cdot j_m, \quad u_k = r_{km} \cdot j_m, \quad (6.9)$$

în cazul sursei de curent plasată în latura m .

Aceste relații permit determinarea funcțiilor de circuit:

- g_{km} - conductanța de transfer;
- α_{km} - factorul de transfer pentru tensiune

- β_{km} - factorul de transfer pentru curent;
- r_{km} - rezistența de transfer;

care sunt numere reale independente de parametrul sursei și ale căror valori depind doar de circuit și de laturile k, m considerate.

În cazul regimului variabil al circuitelor cu elemente acumulative de energie, între parametrii surselor (excitațiile e_m, j_m) și soluția (răspunsul u_k, i_k) există relații de liniaritate dar nu și de proporționalitate instantanee. De aceea, funcțiile de circuit se exprimă în acest caz prin operatori liniari. Folosind transformări simbolice (reprezentarea complexă în cazul regimului armonic, transformata Fourier în cazul regimului periodic permanent și transformata Laplace în regim tranzitoriu) acești operatori se exprimă prin funcții complexe numite admitanță de transfer, factor complex de transfer pentru curent sau tensiune și respectiv impedanță de transfer.

Revenind la cazul circuitelor liniare rezistive se demonstrează că în absența surselor comandate, factorii de transfer au valori subunitare $|\alpha_{km}| \leq 1, |\beta_{km}| \leq 1$, ceea ce asigură în întregul circuit tensiuni și curenți mai mici sau cel mult egali cu tensiunea sau curentul produs de sursă. Această afirmație nu este adevărată în cazul circuitelor cu surse comandate (în care poate apărea efectul de amplificare) și nici în cazul circuitelor în regim variabil (în care pot apărea efecte de rezonanță).

Teorema 13, a reciprocității: într-un circuit electric liniar, alcătuit din elemente dipolare pasive (rezistoare, condensatoare și eventual bobine cuplate magnetic, caracterizate prin matrice ale inductivităților simetrice), operatorii impedanță și admitanță de transfer sunt identici; în particular, cazul circuitelor rezistive, rezistențele și conductanțele de transfer sunt simetrice, adică

$$r_{km} = r_{mk}, \quad g_{km} = g_{mk}, \quad (6.10)$$

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe teorema Tellegen.

Teorema 13 nu poate fi aplicată în cazul circuitelor cu surse comandate (care din acest motiv se numesc surse nereciproce), în cazul circuitelor active (care conțin surse sau condiții inițiale nenule) și nici în cazul circuitelor neliniare. Circuitele la care se aplică teorema 13 se numesc reciproce, iar celelalte sunt nereciproce.

Un exemplu tipic de circuit nereciproce este amplificatorul, la care efectul semnalului asupra ieșirii este complet diferit de efectul invers al răspunsului asupra intrării.

Conform acestei teoreme, intensitatea curentului i'_k prin poarta de ieșire a unui circuit cuadripol reciproc, în condițiile în care poarta de intrare este excitată de sursa de tensiune $e'_m = e$ este egală cu intensitatea curentului din poarta de intrare i''_m , în condițiile în care poarta de ieșire este excitată de sursa de tensiune $e''_k = e$ (v.fig.17.30), caz în care $u'_k = u''_m$.

Teorema liniarității aplicată circuitelor rezistive asigură admiterea dependenței dintre semnalul de intrare și cel de ieșire. Deci, mici variații ale semnalului de intrare determină în cazul circuitelor rezistive liniare bine formulate, variații suficient de mici ale semnalului de ieșire. Această comportare a soluției nu este caracteristică tuturor circuitelor electrice. De exemplu, în cazul unor circuite neliniare (v.fig.17.31) mici variații ale semnalului de intrare pot determina variații importante ale semnalului de ieșire, iar în cazul regimului tranzitoriu excitației mici sau chiar nule pot determina răspunsuri ale căror valori cresc namărginit în timp (v.fig.17.32). Astfel de comportări instabile se pot întâlni și în funcționarea circuitelor electrice reale, motiv pentru care este utilă cunoașterea condițiilor în care soluția unui circuit este stabilă, ceea ce înseamnă că ea este dependentă continuu de datele problemei (excitației, condiții inițiale, parametrii elementelor).

Teorema 14, de stabilitate: un circuit electric liniar, alcătuit din elemente dipolare pasive ($R_k > 0$, $L_k > 0$, $C_k > 0$), din surse ideale de tensiune sau curent și care se află în condițiile inițiale (la $t = 0$) nenule, are soluția $i_k(t)$, $u_k(t)$, $t \geq 0$, dependentă continuu de datele problemei, dacă el nu conține surse sau elemente acumulative de energie în exces.

Este un concept de stabilitate mai puțin uzual, ar trebui continuată prezentarea legând-o de ceea ce s-a menționat prea în fugă în legătură cu figura 17.32.

Anexa A

Legile câmpului electromagnetic

A.1 Legea fluxului electric.

Fluxul electric pe orice suprafață închisă Σ este egal cu sarcina electrică din domeniul D_Σ marginit de suprafața Σ :

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}, \quad (\text{A.1})$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \rho dv. \quad (\text{A.2})$$

Această lege caracterizează fenomenul prin care orice corp electricizat produce în interiorul și în jurul său un câmp electric.

Aplicând relația Gauss-Ostrogradski, rezultă:

$$\int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \text{div}\mathbf{D}dv = \int_{D_\Sigma} \rho dv.$$

Ultima relație fiind valabilă pentru orice domeniu D_Σ rezultă că:

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho. \quad (\text{A.3})$$

Această consecință diferențială este cunoscută sub numele de forma locală a legii fluxului electric.

A.2 Legea fluxului magnetic.

Fluxul magnetic pe orice suprafață închisă Σ este nul:

$$\varphi_\Sigma = 0, \quad (\text{A.4})$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Sigma \mathbf{B}d\mathbf{A} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Această lege evidențiază absența sarcinii magnetice. Folosind Gauss-Ostrogradski, rezultă forma locală a legii câmpului magnetic:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \quad (\text{A.6})$$

A.3 Legea inducției electromagnetice

Tensiunea electrică pe orice curbă închisă Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic de pe orice suprafață S_Γ , care se sprijină pe curba Γ :

$$u_\Gamma = -\frac{d\varphi_{S_\Gamma}}{dt}, \quad (\text{A.7})$$

sau dezvoltat:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{B}d\mathbf{A}. \quad (\text{A.8})$$

Această lege se referă la fenomenul de inducție electromagnetice, prin care orice câmp magnetic variabil generează (induce) un câmp electric.

În teoria Maxwell-Hertz, curba Γ și suprafața S_Γ sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor. Dacă acestea sunt imobile prin aplicarea relației lui Stokes, rezultă:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}\mathbf{E}d\mathbf{A} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}d\mathbf{A}.$$

Deoarece ultima egalitate este valabilă pentru orice suprafață S_Γ , rezultă că:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.9})$$

care este forma locală a legii inducției electromagnetice în medii imobile.

În regim staționar, mărimile fizice sunt constante în timp, iar legea inducției devine:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0. \quad (\text{A.10})$$

În acest regim tensiunea electrică pe orice curbă închisă este nulă. Această relație este cunoscută sub numele de teorema potențialului electric staționar. Forma locală a acestei teoreme:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.11})$$

evidențiază caracterul irotational al intensității câmpului electric în regim staționar.

O consecință directă a teoremei potențialului electric staționar este aceea că tensiunea electrică staționară pe o curbă deschisă nu depinde de forma curbei ci doar de punctele ei extreme:

$$\int_{\Gamma=C_1UC_2} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{E}d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{E}d\mathbf{r}_1 - \int_{C_2} \mathbf{E}d\mathbf{r}_2 = U_1 - U_2 = 0$$

Deci $U_1 = U_2$, în care U_1 și U_2 sunt tensiunile între două puncte A și B calculate pe două drumuri diferite. În consecință, tensiunea electrică este în regim staționar o mărime asociaă unei perechi orientate de puncte și nu unei curbe. Această observație permite caracterizarea locală a câmpului electric printr-o mărime scalară numită potențial și definită ca tensiunea de la punctul curent la un punct de referință, în care potențialul se consideră convențional nul:

$$V(M) = \int_{C_{MM_0}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = U_{MM_0}. \quad (\text{A.12})$$

Utilizarea potențialului simplifică determinarea tensiunii electrice staționare:

$$U_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{AM_0}} \mathbf{E} d\mathbf{r} + \int_{C_{M_0B}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = V_A - V_B. \quad (\text{A.13})$$

În regim staționar tensiunea electrică între două puncte este potențialul punctului inițial minus potențialul punctului final.

Cunoașterea potențialului electric permite determinarea intensității câmpului electric prin relația:

$$\mathbf{E} = -gradV, \quad (\text{A.14})$$

în concordanță cu caracterul irotațional al intensității câmpului electric în acest regim.

Pentru demonstrarea acestei relații se consideră:

$$U_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int_{C_{AB}} gradV d\mathbf{r} = - \int_{C_{AB}} dV = V_A - V_B,$$

relație în acord cu A.13.

A.4 Legea circuitului magnetic.

Tensiunea magnetică pe orice curbă închisă Γ este egală cu intensitatea curentului electric plus viteza de variație a fluxului electric de pe suprafața S_Γ , care se aprijină pe curba Γ :

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \quad (\text{A.15})$$

sau dezvoltat:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{A} \quad (\text{A.16})$$

Legea circuitului magnetic pune în evidență două cauze ale câmpului magnetic și anume:

- curentul electric;
- variația în timp a câmpului electric.

Deoarece $\frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$ are aceeași unitate de măsură cu i_{S_Γ} și același efect magnetic el a fost numit de Maxwell curent deplasare.

În teoria Maxwell-Hertz atât curba Γ cât și suprafața S_Γ se consideră antrenate de corpuri în mișcarea lor. În continuare se va presupune corpurile imobile și prin aplicarea relației Stokes, rezultă:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \text{rot} \mathbf{H} d\mathbf{A} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{A}.$$

Ultima egalitate este valabilă pentru orice suprafață S_Γ și în consecință:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.17})$$

Această consecință diferențială a legii este cunoscută sub numele de forma locală a legii circuitului magnetic în medii imobile. Rotorul intensității câmpului magnetic este dat de suma dintre densitatea de curent de conducție și cea de deplasare.

În regim staționar legea circuitului magnetic are una din formele:

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma}; \quad (\text{A.18})$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A}; \quad (\text{A.19})$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (\text{A.20})$$

cunoscute sub numele de teorema lui Ampère.

A.5 Teorema conservării sarcinii electrice.

Intensitatea curentului electric ce părăsește o suprafață închisă Σ este egală cu viteza de scădere a sarcinii din domeniul D_Σ mărginit de suprafața Σ :

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt}, \quad (\text{A.21})$$

sau dezvoltat:

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{D_\Sigma} \rho dv. \quad (\text{A.22})$$

Legea conservării sarcinii electrice evidențiază legătura intimă care există între curentul electric și sarcina electrică, fiind în concordanță cu interpretarea microscopică a curentului ca deplasare ordonată a sarcinilor electrice.

Legea conservării sarcinii electrice poate fi privită ca o consecință a legii circuitului magnetic. Dacă vom considera curba Γ un cerc a cărui rază tinde către 0, suprafața S_Γ va tinde către o suprafață închisă Σ iar din relația (A.15):

$$u_{m_\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$$

se obține prin trecerea la limită:

$$0 = i_{\Sigma} + \frac{d\psi_{\Sigma}}{dt}.$$

Deoarece conform legii fluxului electric $\psi_{\Sigma} = q_{D_{\Sigma}}$, rezultă că $i_{\Sigma} = -\frac{dq_{D_{\Sigma}}}{dt}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

Forma locală a acestei legi pentru medii imobile de obține aplicând realția Gauss-Ostrogradski,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \operatorname{div} \mathbf{J} dv = - \int_{D_{\Sigma}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

Deoarece ultima egalitate se menține valabilă pentru orice domeniu D_{Σ} , rezultă că:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{A.23})$$

care este forma locală a legii.

În cazul regimului staționar, legea conservării sarcinii capătă una din formele:

$$i_{\Sigma} = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (\text{A.25})$$

cunoscute sub numele de teorema conservării curentului.

A.6 Legea legăturii dintre \mathbf{D} și \mathbf{E} .

Inducția electrică \mathbf{D} dintr-un punct depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

Modul concret de dependență este funcție de natura substanței în care se află punctul curent. Din acest motiv legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ este o lege de material.

În cazul vidului între \mathbf{D} și \mathbf{E} există o dependență de proporționalitate și coliniaritate:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (\text{A.26})$$

în care ε_0 este o constantă universală, numită permitivitatea vidului și care are valoarea $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9.1 \cdot 10^9}$ F/m. În majoritatea corpurilor, legătura dintre \mathbf{D} și \mathbf{E} este tot de coliniaritate și proporționalitate:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (\text{A.27})$$

dar ε este în acest caz o constantă de material, numită permitivitate. Mediile în care $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ se numesc dielectrice liniari și izotropi.

Dacă dependența între \mathbf{D} și \mathbf{E} nu este de proporționalitate atunci mediile sunt dielectrice neliniari. În acest caz, dependența poate fi aproximată măcar pe porțiuni prin relația:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_p \quad (\text{A.28})$$

în care \mathbf{P}_p este o constantă de material numită polarizație permanentă. Această formă a legii evidențiază o altă cauză posibilă a câmpului electric și anume polarizația permanentă (cazul electretelor).

Pornind de la forma locală a legii dependenței $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ în dielectrice liniari se poate obține o consecință integrală, referitoare la tuburile de flux electric. Un tub de flux electric este un domeniu spațial D_Σ neelectrizat, mărginit de suprafața închisă $\Sigma = S_l + S_1 + S_2$ alcătuită din suprafața laterală S_l pe care fluxul este nul pentru că $\mathbf{nD} = 0$ și cele două suprafețe S_1 și S_2 sunt numite borne, pe care $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$.

Starea electrică a unui tub de flux este caracterizată prin:

- fluxul electric:

$$\psi = \int_S \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{D}d\mathbf{A},$$

care are aceeași valoare pe orice transversală conform legii fluxului electric.

- tensiunea electrică:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = V_1 - V_2,$$

calculată pe o curbă care unește un punct de pe prima bornă cu un punct de pe a doua bornă. Datorită condițiilor impuse celor două borne acestea vor avea un caracter echipotențial: $V|_{S_1} = V_1$, $V|_{S_2} = V_2$

Ca o consecință locală a legii legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$, rezultă teorema tubului liniar de flux electric, care afirmă că fluxul electric al tubului este proporțional cu tensiunea electrică:

$$\psi = \Lambda_e U,$$

costanta de proporționalitate Λ_e este numită permeanță electrică a tubului de flux nu depinde de starea electrică ci doar de datele geometrice și de material. Inversa permeanței electrice

$$C = \frac{1}{\Lambda_e}$$

poartă numele de capacitatea tubului de flux.

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe liniaritatea dependențelor $U - \mathbf{E}, \psi - \mathbf{D}$ și $\mathbf{D} - \mathbf{E}$, care fiind tranzitorie implică liniaritatea dependenței $\psi - U$.

A.7 Legea legăturii dintre \mathbf{B} și \mathbf{H} .

Inducția magnetică \mathbf{B} dintr-un punct depinde de intensitatea câmpului magnetic din acel punct.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}). \quad (\text{A.29})$$

Modul concret de dependență este funcție de natura substanței în care se află punctul curent. Și legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este o lege de material.

În cazul vidului, între \mathbf{B} și \mathbf{H} , dependența este dată de proporționalitate și coliniaritate:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (\text{A.30})$$

constanta de proporționalitate $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H/m}$ fiind o constantă universală, numită permeabilitatea vidului.

În multe corpuri numite medii liniare și izotrope din punct de vedere magnetic dependența $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este dată de relația de proporționalitate și coliniaritate:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (\text{A.31})$$

în care μ este o constantă de material numită permeabilitate.

În medii neliniare magnetic dependența $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este mai complicată, dar poate fi aproximată pe porțiuni prin relația:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p \quad (\text{A.32})$$

în care \mathbf{M}_p este o constantă de material numită magnetizație permanentă. Acesta formă a legii evidențiază drept sursă posibilă a câmpului magnetic magnetizația permanentă (cazul magnetilor permanenți).

Pentru a stabili consecințele integrale ale legii dependenței $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ se consideră un tub de flux magnetic în regim staționar, definit pe un domeniu D_Σ , mărginit de suprafața $\Sigma = S_l U S_1 U S_2$ cu proprietatea că pe suprafața laterală S_l este îndeplinită condiția $\mathbf{Bn} = 0$ iar pe bornele S_1 și S_2 : $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$.

Dacă tubul de flux magnetic este ocupat de un mediu magnetic liniar ne-străbătut de curent electric atunci el este caracterizat de mărimile globale:

- fluxul magnetic:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{A},$$

calculat pe o secțiune transversală și

- tensiunea magnetică:

$$U_m = \int_{C_{12}} \mathbf{H} d\mathbf{r},$$

calculată pe o curbă ce unește cele două borne (în ipotezele menționate se demonstrează ușor că această mărime nu depinde de forma curbei sau de

poziția punctelor externe cu condiția ca acestea să fie plasate pe cele două borne). În ipotezele menționate între aceste mărimi globale există relația de proporționalitate:

$$\varphi = \Lambda_m U_m.$$

Constanta de proporționalitate Λ_m numită permeanță magnetică a tubului de flux nu depinde de starea magnetică a tubului ci doar de datele geometrice și de material. Inversa permeanței

$$R_m = \frac{1}{\Lambda_m}$$

se numește reluctanță magnetică și este o constantă caracteristică a tubului de flux magnetic.

Demonstrația teoremei tubului de flux magnetic se bazează pe liniaritatea dependențelor $\varphi - \mathbf{B}$, $U_m - \mathbf{H}$ și $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

A.8 Legea conducției.

Densitatea curentului electric \mathbf{J} dintr-un punct depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}). \quad (\text{A.33})$$

Modul concret al dependenței este funcție de natura substanței în care se află punctul respectiv. Legea conducției cunoscută și sub numele de legea lui Ohm sau legea legăturii $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ este o lege de material.

În majoritatea corpurilor \mathbf{J} este proporțional și coliniar cu \mathbf{E} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{A.34})$$

Mediile în care este valabilă relația A.34 se numesc conductoare liniare. Constanta de material σ se numește conductivitate electrică iar inversa ei

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

se numește rezistivitate. În cazul vidului deoarece acesta nu poate fi străbătut de curent electric: $\mathbf{J} = 0$ ceea ce corespunde condiției $\sigma = 0$. Mediile prin care curentul electric nu poate trece și la care $\sigma = 0$ se numesc izolatoare perfecte iar mediile la care $\rho = 0$, deci $E = 0$ oricare ar fi J se numesc supraconductoare.

Corpurile în care J nu este proporțional cu E se numesc conductoare neliniare. În acestea, cel puțin pe porțiuni, dependența $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ poate fi aproximată cu relația:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i), \quad (\text{A.35})$$

în care \mathbf{E}_i este o constantă vectorială de material numită intensitatea câmpului electric imprimat.

Pentru a stabili consecința integrală a legii conducției se consideră un domeniu D_Σ , numit tub de curent, în care \mathbf{E} și \mathbf{J} sunt constante în timp iar suprafața de frontieră $\Sigma = S_l U S_1 U S_2$ este formată dintr-o suprafață laterală S_l pe care $\mathbf{nE} = 0$ și două borne S_1 și S_2 pe care $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Starea electrică a tubului de curent este caracterizată de:

- intensitatea curentului ce străbate tubul:

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{S_1} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{S_2} \mathbf{J} d\mathbf{A}$$

calculat pe o secțiune transversală arbitrară și

- tensiunea electrică între borne:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r}$$

calculată pe o curbă ce pornește de pe un punct aparținând primei borne și se oprește într-un punct al celei de-a doua borne.

În regim staționar, conform teoremei conservării curentului, intensitatea I are aceeași valoare pe orice secțiune S . Conform teoremei potențialului staționar tensiunea U nu depinde de forma curbei C_{12} , și nici de poziția celor două puncte extreme în interiorul bornelor S_1 și S_2 , deoarece bornele sunt echipotențiale conform condiției $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$.

Teorema tubului de curent liniar afirmă că în regim staționar pe un tub de curent care ocupă un domeniu conductor liniar, intensitatea curentului este proporțională cu tensiunea:

$$I = GU. \tag{A.36}$$

Constanta de proporționalitate G se numește conductanța tubului de curent și nu depinde nici de U nici de I ci doar de datele geometrice și de cele de material.

Inversa conductanței

$$R = \frac{1}{G} \tag{A.37}$$

se numește rezistența tubului de curent.

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe liniaritatea relațiilor $I - \mathbf{J}$, $U - \mathbf{E}$ și $\mathbf{J} - \mathbf{E}$.

O aplicație utilă a teoremei o reprezintă cazul unui conductor filiform (cu o lungime mult mai mare decât diametrul) scufundat într-un mediu izolant și străbătut de longitudinal de curent electric.

Notând cu C_{12} linia mediană a conductorului, datorită caracterului filiform se poate presupune că pe orice secțiune transversală, normală la C_{12} , densitatea de

curent \mathbf{J} este distribuită uniform și tangențial la C_{12} . Presupunând conductorul liniar ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), rezultă că și \mathbf{E} are aceeași proprietate. În consecință,

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} = JA,$$

deci

$$\Rightarrow J = \frac{I}{A},$$

în care A este aria secțiunii transversale în punctul curent.

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} E dr = \int_{C_{12}} \rho J dr = I \int_{C_{12}} \frac{\rho dr}{A},$$

deci

$$R = \frac{U}{I} = \int_{C_{12}} \frac{\rho dr}{A}. \quad (\text{A.38})$$

Dacă firul este omogen ($\rho = ct$) și are aceeași arie în orice secțiune transversală ($A=ct$), atunci,

$$R = \frac{\rho l}{A} \quad (\text{A.39})$$

unde l este lungimea firului.

În cazul în care firul conductor este neliniar din punct de vedere electrocinetic:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

sau echivalent

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} - \mathbf{E}_i.$$

Tensiunea de-a lungul firului este:

$$U = \int_{C_{12}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \int_{C_{12}} \rho \mathbf{J} d\mathbf{r} - \int_{C_{12}} \mathbf{E}_i d\mathbf{r} = RI - e, \quad (\text{A.40})$$

în care

$$e = \int_{C_{12}} \mathbf{E}_i d\mathbf{r} \quad (\text{A.41})$$

se numește tensiune electromotoare a firului. Se constată că în acest caz ca tensiunea între borne nu mai este proporțională cu valoarea curentului deoarece în condițiile în care $I = 0$ tensiunea la bornele conductorului $U = -e$ este nenulă.

A.9 Legea transformării energiei în conductoare.

Prezența curentului electric în conductoare determină transformări energetice, însoțite de încălzirea conductoarelor. Aceste transformări sunt descrise de legea enunțată în continuare.

Densitatea de volum a puterii transferate de câmpul electromagnetic corpurilor este egală cu produsul scalar dintre densitatea de curent și intensitatea câmpului electric.

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E}. \quad (\text{A.42})$$

Densitatea de volum a puterii p este o mărime scalară măsurată în W/m^3 ce caracterizează local viteza de transfer a energiei. Dacă $p > 0$, atunci transferul are loc de la câmp la corp iar dacă $p < 0$, atunci sensul real al transferului este invers.

În cazul conductoarelor liniare

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E} = \sigma E^2 = \rho J^2 \geq 0, \quad (\text{A.43})$$

deci transferul are loc ireversibil de la câmp la corp. Energia transferată duce la încălzirea conductorului, fenomenul purtând numele Joule-Lentz. În conductoare neliniare:

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \mathbf{E} = \sigma E^2 + \sigma \mathbf{E}\mathbf{E}_i = \rho J^2 - \mathbf{J}\mathbf{E}_i, \quad (\text{A.44})$$

rezultatul fiind pozitiv sau negativ. În cazul în care \mathbf{J} este orientat în sens invers față de \mathbf{E}_i atunci $p > 0$ iar transferul energetic are sensul real de la câmp la corp. Dacă \mathbf{J} este orientat în sensul \mathbf{E}_i este posibil ca $p < 0$, ceea ce corespunde transferului de la corp la câmp. În ambele situații transferul este însoțit de fenomenul ireversibil Joule-Lentz ($\rho J^2 > 0$).

Forma globală a legii va fi stabilită pentru cazul conductoarelor filiforme:

$$P = \int_{D_\Sigma} p dv = \int_{C_{12}} \int_S \mathbf{J}\mathbf{E} dA dr = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} \int_{C_{12}} \mathbf{E} dr = UI, \quad (\text{A.45})$$

la care puterea $P[W]$ transferată întregului conductor este egală cu produsul dintre tensiunea U și intensitatea I . Acest rezultat este valabil pentru orice tub de curent.

În particular, în mediile conductoare liniare:

$$P = UI = RI^2 = GU^2, \quad (\text{A.46})$$

iar în conductoare filiforme cu câmp imprimat:

$$P = UI = (RI - e)I = RI^2 - eI, \quad (\text{A.47})$$

apare în afara puterii $P = RI^2$, disipate prin efect termic Joule-Lenz și termenul eI , dependent de t.e.m. a conductorului.