

DANIEL C. IOAN  
Universitatea "Politehnica" București

**CIRCUITE ELECTRICE  
REZISTIVE**

**Breviare teoretice și probleme**

Editura  
2000

DANIEL C. IOAN  
**CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE**  
Breviare teoretice și probleme

Referenți științifici: Conf.dr.ing. Irina Munteanu  
Ș.l. dr. ing. Gabriela Ciuprina

Editura, 2000  
București

---

---

## Prefață

Lucrarea *Circuite electrice rezistive* se adresează în primul rând studenților de la facultățile de profil electric: electrotehnică, electronică, automatică și calculatoare, electroenergetică sau instalații electrice, dar ea este de un real folos în aprofundarea cunoștințelor pentru orice student din învățământul superior tehnic și științific, inginerilor, tehnicienilor sau fizicienilor. Multe capitole pot fi folosite de elevii ultimelor clase din liceele teoretice sau de specialitate, mai ales pentru pregătirea examenului de bacalaureat sau a admiterii la facultate, la disciplina *Fizică*.

Volumul reprezintă rezultatul unei *experiențe didactice îndelungate în catedra de Electrotehnică a Universității Politehnica din București*. El a fost elaborat în perioada 1970-1980 și a fost îmbunătățit ulterior, prin directă interacțiune cu zeci de generații de studenți care au urmat cursul de *Bazele electrotehnicii*, semestrul întâi din anul al II-lea de studiu.

Decizia de a pune lucrarea la dispoziția publicului larg se datorează pe de o parte reacției extrem de pozitive din partea celor care au folosit conținutul ei în pregătirea lor științifică și tehnică fundamentală, iar pe de altă parte solicitărilor din partea noilor generații de studenți, preparatori și asistenți, de a avea la dispoziție un material didactic care să permită studiul individual, într-o manieră eficientă.

Lucrarea tratează într-o manieră originală teoria circuitelor electrice rezistive liniare și neliniare, din punctul de vedere al aplicațiilor practice. Conținutul lucrării este structurat în patru capitole.

**Primul capitol** este dedicat fundamentelor teoriei circuitelor electrice: ecuațiile lui Kirchhoff, puterea transferată de elementele de circuit, formularea matriceal-topologică a ecuațiilor fundamentale și o trecere în revistă a principalelor ecuații constitutive ale elementelor ideale de circuit electric.

**Al doilea capitol** al lucrării se referă la circuitele electrice rezistive liniare, insistându-se asupra metodelor de analiză a acestor circuite: metode bazate pe transfigurări, metoda ecuațiilor lui Kirchhoff atât în curenți cât și în tensiuni, metoda curenților ciclici, metoda potențialelor nodurilor precum și metodele Thévenin-Norton. Un paragraf special este dedicat circuitelor neregulate, cu surse comandate liniar sau amplificatoare operaționale cu reacție negativă. Capitolul se încheie cu un paragraf dedicat teoremelor generale ale circuitelor rezistive neliniare, cum sunt teorema superpoziției și cea a reciprocității.

**Capitolul al treilea** este dedicat analizei circuitelor rezistive neliniare. Sunt prezentate: metoda dreptei de sarcină, analiza circuitelor cu caracteristici liniare pe porțiuni, metoda micilor variații dar și metodele iterative pentru analiza acestor circuite. Capitolul se încheie cu un paragraf dedicat teoremelor generale ale circuitelor rezistive neliniare.

În **ultimul capitol** se tratează câteva probleme și tehnici speciale utilizate în studiul circuitelor rezistive, cum sunt metoda grafurilor de fluentă și analiza

---

senzitivităților.

Principalele **trăsături caracteristice și de originalitate** ale lucrării constau în:

- fiecare paragraf este alcătuit dintr-un breviar teoretic în care sunt sintetizate principalele cunoștințe necesare abordării aplicațiilor, definiții, formule, metode și tehnici, fără a include demonstrații complete, urmat de o serie de probleme ilustrative propuse, a căror rezolvare se poate face cu un efort de calcul numeric redus;
- spre deosebire de alte culegeri similare, accentul este pus pe înțelegerea conceptelor fundamentale, care din experiența noastră didactică ridică dificultăți, chiar dacă sunt aparent simple: sensuri de referință pentru curenți și tensiuni, convenții de semn, reguli de asociere a sensurilor, deosebirea dintre elementele reale și cele ideale de circuit electric, formularea corectă a circuitelor cu elemente ideale, conceptul de echivalență în teoria circuitelor, modelarea aproximativă, alegerea metodelor optime de analiză, analiza topologică a circuitelor, etc;
- chiar dacă autorul nu este adeptul rețetelor de rezolvare a problemelor, în lucrare sunt prezentate mai mulți algoritmi de rezolvare, asociați chiar unor metode simple, în vederea dezvoltării gândirii algoritmice a studenților, abordare foarte apreciată de aceștia;
- problemele propuse au fost alese cu grijă dintre acelea care au o maximă relevanță pentru aplicațiile practice, întâlnite în viața de zi cu zi a inginerilor, motiv pentru care accentul a fost pus pe circuite electronice, electrice rezistive, atât liniare cât și neliniare;
- prin parcurgerea sistematică a lucrării, cititorul învață să-și formuleze singur probleme interesante, care nu presupun calcule numerice complicate și au soluții exprimabile prin numere întregi;
- accentul este pus pe circuitele rezistive, în vederea căpătării deprinderilor esențiale necesare analizei circuitelor, urmând ca ulterior acestea să fie ușor extensibile la cazul circuitelor în regim variabil;
- un alt accent este pus pe rezolvarea manuală rapidă, chiar și prin metode aproximative, ca o alternativă la analiza automată cu programe de calcul de tip SPICE, în vederea căpătării deprinderilor necesare înțelegerii funcționării și depanării unor circuite electronice complexe, ușurând astfel parcurgerea cursului de *Dispozitive și circuite electronice*.

Apariția acestei lucrări nu ar fi fost posibilă fără colaborarea unor studenți, tehnicieni și tinere cadre didactice. Dorim să aducem pe această cale **mulțumirile noastre** domnului *Matei Dorian*, care a realizat partea grafică în primul manuscris al lucrării și studenților:

- 
- *Merode Costin-Cătălin;*
  - *Rădulescu Marius-Cristian;*
  - *Blujdea Gabriel;*
  - *Săbăreanu Robert-Petru,*

care au realizat tehnoredactarea finală a manuscrisului, folosind instrumentele *Xfig* și  $\LaTeX$  sub *Linux*, în *Laboratorul de Metode Numerice (LMN) din catedra de Electrotehnică a Universității Politehnica din București*.

Mulțumim deasemenea referenților științifice Conf. Dr. ing. *Irina Munteanu* și șefei de lucrări Dr. ing. *Gabriela Ciuprina*, pentru atenta citire a lucrării.

---

# Cuprins

<b>Prefața</b>	<b>iii</b>
<b>1 Fundamentele teoriei circuitelor electrice</b>	<b>1</b>
1.1 Ecuatiile lui Kirchhoff . . . . .	1
1.2 Puteri transferate de elementele de circuit . . . . .	14
1.3 Matrice de incidență . . . . .	18
1.4 Elemente ideale de circuit . . . . .	23
<b>2 Circuite electrice rezistive liniare</b>	<b>43</b>
2.1 Teoreme de echivalență . . . . .	43
2.2 Metoda ecuațiilor lui Kirchhoff . . . . .	69
2.3 Metoda curenților ciclici . . . . .	81
2.4 Metoda potențialelor nodurilor . . . . .	86
2.5 Metodele Thévenin și Norton . . . . .	91
2.6 Circuite electrice liniare nereziproce . . . . .	97
2.7 Teoremele circuitelor rezistive liniare . . . . .	105
<b>3 Circuite electrice rezistive neliniare</b>	<b>115</b>
3.1 Circuite liniare cu un dipol neliniar . . . . .	115
3.2 Elemente cu caracteristici liniare pe porțiuni . . . . .	126
3.3 Metoda micilor variații . . . . .	137
3.4 Metode iterative pentru analiza circuitelor rezistive neliniare . . .	143
3.5 Teoremele circuitelor rezistive neliniare . . . . .	154
<b>4 Probleme speciale ale analizei circuitelor rezistive</b>	<b>173</b>
4.1 Metoda grafurilor de fluentă . . . . .	173
4.2 Calculul sensibilităților circuitelor rezistive . . . . .	184
<b>Bibliografie</b>	<b>195</b>



*CUPRINS*

---

# Capitolul 1

## Fundamentele teoriei circuitelor electrice

### 1.1 Ecuatiile lui Kirchhoff

#### BREVIAR

*Elementul dipolar* de circuit reprezintă un domeniu spațial a cărui interacțiune electrică cu exteriorul se realizează prin intermediul a două părți disjuncte ale suprafeței sale, numite borne (fig. 1.1).



Fig. 1.1.

Prin *circuit electric* (sau rețea electrică) vom înțelege o mulțime de elemente dipolare conectate pe la borne (fig. 1.2).

Într-un circuit nu are importanță așezarea elementelor, ci doar modul de conexiune dintre ele; astfel circuitul din figura 1.2 este echivalent cu cel din figura 1.3. Din acest motiv, se spune că în teoria circuitelor electrice spațiul este înzestrat cu o structură topologică și nu cu una metrică (distanțele, unghiurile, lungimile nu au importanță).

Ținând cont de observația anterioară, structura unui circuit este caracterizată complet de graful  $G$  al circuitului.

*Graful unui circuit* este alcătuit dintr-o mulțime de puncte, numite *noduri* care reprezintă bornele elementelor de circuit, unite prin arce de curbă numite *laturi*, acestea reprezentând elementele dipolare.

*Numărul laturilor* se va nota în continuare cu  $L$  iar *numărul nodurilor* unui graf se va nota cu  $N$ .

Graful din figura 1.4 este asociat circuitului din figura 1.2 și are  $L=5$ ,  $N=4$ .

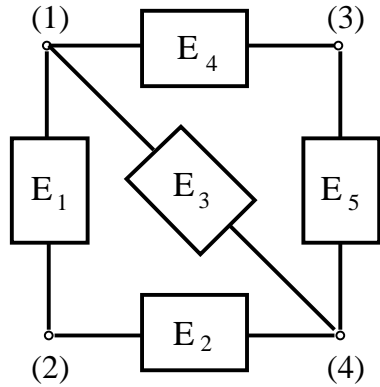


Fig. 1.2.

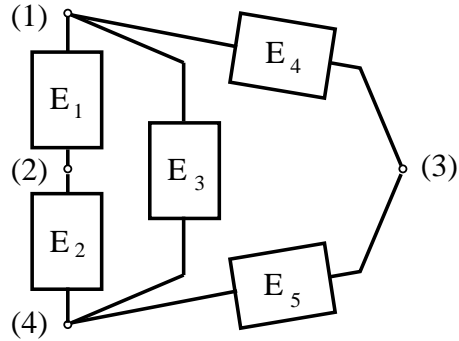


Fig. 1.3.

Pentru a reprezenta conexiunile unui element având bornele polarizate (necchivalente) se utilizează grafurile orientate, la care fiecare latură este marcată cu o săgeată. Două grafuri sunt echivalente dacă au același număr de laturi, iar laturile sunt conectate similar. Dacă cele două grafuri sunt orientate atunci laturile corespondente trebuie să fie orientate similar. Pentru caracterizarea cantitativă a interacțiunii electrice a unui element dipolar cu exteriorul se utilizează două mărimi fizice: curentul și tensiunea electrică.

**1. Intensitatea curentului electric** este o mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) asociată unui sens de referință marcat de-a lungul elementului (fig. 1.5). Ea se notează cu  $i$  (sau  $I$ , dacă este constantă în timp) și se măsoară în amperi [A].

Săgețile marcate în figura 1.5 nu reprezintă sensul real al curentului ci **sensul de referință** al acestuia. La schimbarea sensului de referință se schimbă semnul intensității curentului; astfel, pentru intensitățile  $i_1$  și  $i_2$  marcate în figura 1.6 se poate scrie:

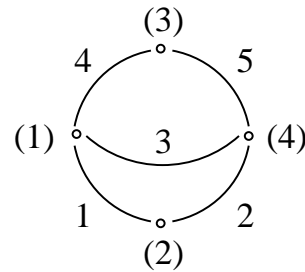


Fig. 1.4.

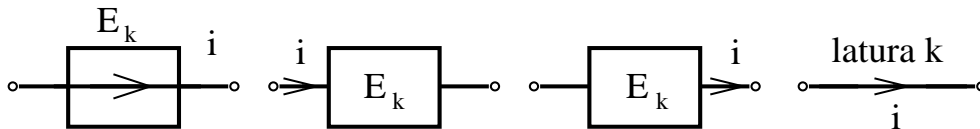


Fig. 1.5.

$$i_1 = -i_2.$$

Curentul se măsoară cu un aparat dipolar numit ampermetru, care se conectează în circuit astfel încât să fie străbătut de curentul măsurat. Ampermetrul măsoară curentul ce-l parcurge de la borna sa "plus" la borna "minus". Se poate considera că fiecare sens de referință pentru curent reprezintă un simbol pentru

ampermetru, indicând și felul în care acesta este montat în circuit. Pentru reprezentarea curenților ce străbat elementele dipolare ale unui circuit electric se utilizează *graful de curent*  $G_I$  (fig. 1.7) care este un graf orientat, cu laturile orientate conform sensurilor de referință ale intensităților curenților.



Fig. 1.6.

Se va evita utilizarea expresiilor: "curentul dintr-un circuit", "curentul pe un element de circuit", acceptate fiind expresiile: "curenții dintr-un circuit"; "curentul ce străbate un element de circuit". Este obligatoriu ca orice referire la intensitatea unui curent să fie precedată de alegerea sensului de referință al acestuia. Curenții oricărui circuit electric sunt supuși unor restricții. Aceste restricții sunt generate de

**prima teoremă a lui Kirchhoff** care afirmă că: *suma algebrică a intensităților curenților din laturile ce concură la un nod al circuitului este egală cu zero:*

$$\sum_{k \in (j)}^{alg.} i_k = 0. \quad (1.1)$$

În această sumă se trec cu plus curenții ce părăsesc nodul și cu minus curenții ce intră în nod. Se spune că un graf de curent  $G_I$  este consistent dacă valorile intensităților din laturile sale satisfac prima ecuație a lui Kirchhoff (1.1). Consecința principală a primei ecuații a lui Kirchhoff constă în faptul că suma aritmetică a curenților ce intră într-un nod este egală cu suma aritmetică a curenților ce părăsesc nodul. Pentru figura 1.7 se poate afirma că:

- pentru nodul (1):  $i_4 = i_1 + i_3$ ;
- pentru nodul (3):  $i_4 + i_5 = 0$ .

Prin scăderea acestor relații rezultă:

$$-i_5 = i_1 + i_3 \quad \text{sau} \quad i_1 + i_3 + i_5 = 0.$$

Se constată că suma algebrică a curenților ce părăsesc o suprafață închisă  $\Sigma$  este nulă. Această afirmație este o altă consecință a primei ecuații a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in \{j\}}^{alg.} i_k = 0. \quad (1.2)$$

S-a notat cu  $\{j\}$  *secțiunea*  $j$ , care reprezintă o mulțime de laturi prin eliminarea cărora graful circuitului (inițial conex) să devină neconex, iar reintroducerea oricărei laturi în graf să restabilească conexiunea grafului. Secțiunea reprezintă,

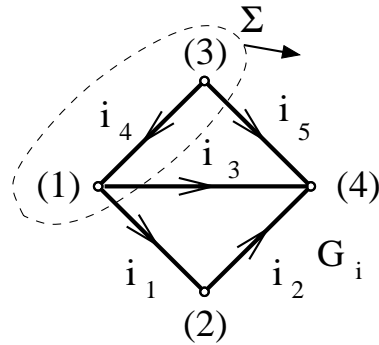


Fig. 1.7.

din punctul de vedere al teoriei grafurilor o suprafață închisă, urmând ca laturile unei secțiuni să fie laturile grafului intersectate de acea suprafață închisă.

Suprafața închisă se consideră orientată în sensul normalei exterioare, urmând ca pe laturile unei secțiuni să coexiste sensul de referință al curentului din graf  $G_I$  și sensul de orientare al suprafeței (din interior spre exterior). În suma algebrică (1.2) se trec cu plus curenții din laturile secțiunii, la care sensul de referință al curentului coincide cu sensul de orientare al secțiunii (curenții ce părăsesc secțiunea) și se trec cu minus curenții din laturile secțiunii la care sensul de referință al curentului este opus sensului de orientare al secțiunii (curenții ce intră în secțiune).

**2. Tensiunea electrică** este o mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) asociată unei perechi ordonate de borne. Ea se notează cu  $u$  (sau  $U$ , dacă este constantă în timp) și se măsoară în volți [V]. Pentru ordonarea perechii de borne se utilizează ”sensul de referință al tensiunii” (fig. 1.8), care reprezintă o curbă orientată având ca extremități bornele între care se calculează tensiunea. Schimbarea sensului de referință al tensiunii determină schimbarea semnului tensiunii; astfel, pentru figura 1.9 se poate scrie:

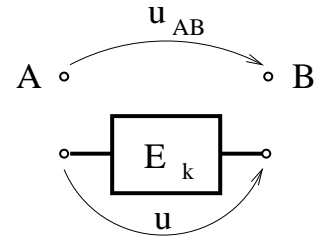


Fig. 1.8.

$$u_1 = -u_2.$$

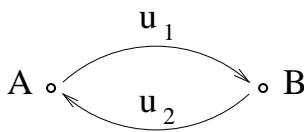


Fig. 1.9.

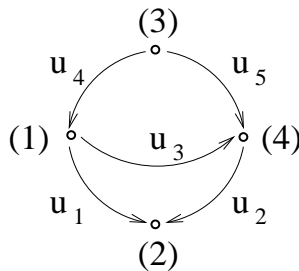


Fig. 1.10.

Tensiunea se măsoară cu un aparat dipolar numit voltmetru, care se conectează în circuit astfel încât bornele sale să fie puse în contact cu punctele între care se dorește a se determina tensiunea. Voltmetrul măsoară tensiunea orientată de la borna ”plus” la borna sa ”minus”.

Se poate considera că fiecare sens de referință pentru tensiune reprezintă un simbol pentru voltmetru, indicând felul în care acesta este montat în circuit.

Pentru reprezentarea tensiunilor la bornele elementelor dipolare ale unui circuit electric se utilizează *graful de tensiune*  $G_U$  (fig. 1.10), care este un graf orientat cu laturile orientate conform sensurilor de referință ale tensiunilor electrice.

Tensiunea electrică fiind o mărime fizică asociată unei perechi de borne, are sens să se vorbească despre tensiunea între două noduri între care nu există conectat nici un element dipolar. De exemplu,  $u_{32}$  este tensiunea între nodurile (3) și (2) din figura 1.10.

Graful de tensiune  $G_U$  poate fi extins pînă la un graf complet ce conține o latură între oricare pereche de noduri.

Se va evita utilizarea expresiilor: ”tensiunea dintr-un circuit”, ”tensiunea dintr-un element de circuit”, acceptate fiind expresiile: ”tensiunile unui circuit”, ”tensiunea la bornele unui element de circuit”. Se recomandă evitarea dublei săgeți pentru marcarea unei tensiuni (fig. 1.11.a), preferându-se înlocuirea cu simpla săgeată (fig. 1.11.b). Tensiunile unui circuit sunt supuse restricțiilor guvernate de a doua ecuație a lui Kirchhoff. Această ecuație se referă la conceptul

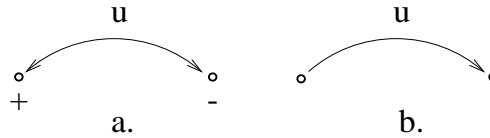


Fig. 1.11.

de *bucă*, ce reprezintă o mulțime de laturi care alcătuiesc o curbă închisă orientată cu un *sens de parcurs*.

Porțiunea de buclă cuprinsă între două noduri succesive se identifică cu latura corespunzătoare din grafal de tensiune  $G_U$ , urmând ca pe acea latură să coexiste sensul de referință al tensiunii și sensul de parcurs al buclei (cele două sensuri putând fi identice sau nu).

**A doua teoremă a lui Kirchhoff** afirmă că: *suma algebrică a tensiunilor laturilor unei bucle este egală cu zero*:

$$\boxed{\sum_{k \in [j]}^{alg.} u_k = 0.} \quad (1.3)$$

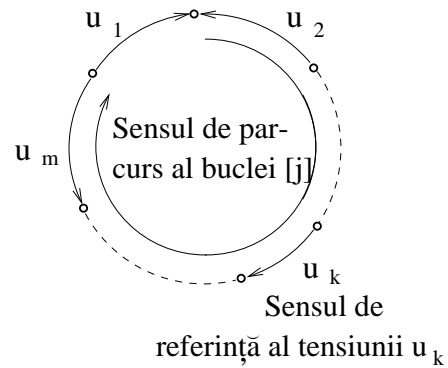


Fig. 1.12.

În această sumă, se trec cu plus tensiunile ce au sensul de referință identic cu sensul de parcurs al buclei ( $u_1, u_k$  în figura 1.12), și cu minus tensiunile ce au sensul de referință opus sensului de parcurs al buclei ( $u_2, u_m$  în figura 1.12).

Se spune că un graf de tensiune  $G_U$  este consistent dacă valorile tensiunilor laturilor satisfac a doua ecuație a lui Kirchhoff (1.3). O consecință a celei de-a doua ecuații a lui Kirchhoff (1.3) este faptul că tensiunea între cele două noduri este egală cu suma algebrică a tensiunilor de pe o cale orientată ce leagă cele două noduri, indiferent care este această cale. De exemplu, în figura

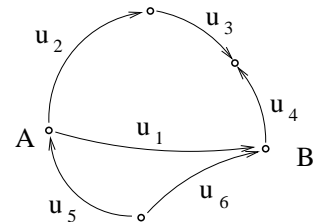


Fig. 1.13.

1.13:

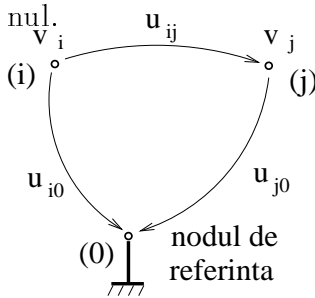
$$u_1 = u_2 + u_3 - u_4,$$

$$u_1 = -u_5 + u_6.$$

O altă consecință constă în faptul că fiecărui nod al unei rețele  $i$  se poate asocia o mărime fizică, numită *potențial electric* care este definită ca tensiunea de la nodul respectiv la un nod de referință marcat ca în figura 1.14.

$$v_i = u_{i0}, v_j = u_{j0}.$$

Potențialul se măsoară, ca și tensiunea, cu voltmetrul, conectând borna sa "minus" la nodul de referință. Potențialul nodului de referință este prin definiție nul.



Tensiunea între două noduri  $u_{ij}$  se exprimă, conform primei consecințe a teoremei a doua Kirchhoff, ca diferența dintre potențialul nodului de plecare  $v_i$  și potențialul nodului de sosire  $v_j$ .

$$u_{ij} = v_i - v_j. \quad (1.4)$$

La schimbarea nodului de referință se modifică toate potențialele (printr-o translație) dar tensiunile rămân invariante la această transformare. Din acest motiv se spune că potențialele sunt definite până la o constantă aditivă.

Fig. 1.14.

aditivă.

În continuare sunt prezentate o serie de definiții utile aplicării ecuațiilor Kirchhoff.

Se numește *arbore* al unui graf  $G$ , un subgraf  $G_A$  cu  $N$  noduri ale cărui laturi nu formează bucle (fig. 1.15).

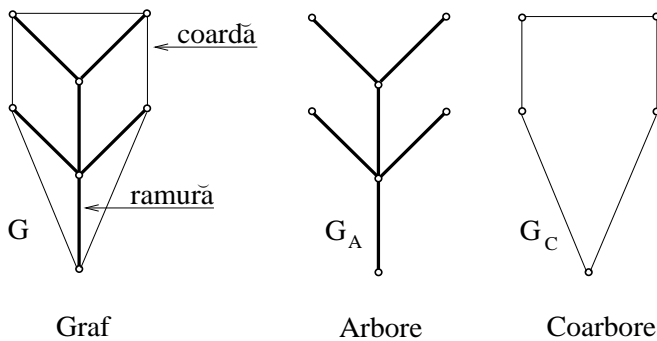


Fig. 1.15.

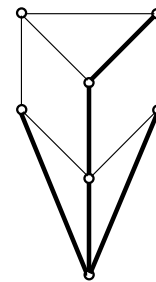


Fig. 1.16.

Se numește *coarbore* al grafului  $G$ , subgraful  $G_C$  ce se obține prin eliminarea laturilor unui arbore. Laturile arborelui se numesc *ramuri* iar laturile coarborelui se numesc *coarde*. Un graf  $G$  cu  $L$  laturi și  $N$  noduri conține  $N-1$  ramuri și  $L-N+1$  coarde. Un graf poate avea mai mulți arbori și coarbori (fig. 1.16).

Tensiunile din ramuri sunt independente din punctul de vedere al celei de-a doua ecuații Kirchhoff (pot fi alese arbitrar fără să contrazică ecuația, deoarece arborele nu conține nici o buclă).

Tensiunile din coarde pot fi calculate în mod univoc, aplicând a doua ecuație Kirchhoff, în funcție de tensiunile din arbore, deoarece fiecare coardă închide câte o buclă.

Aceste observații permit să se afirme că pentru o rețea se pot scrie **(L-N+1) ecuații Kirchhoff II independente**, pe un sistem de bucle fundamentale, generate fiecare de câte o coardă și în rest de ramuri.

Curenții din laturile unui coarboare sunt independenți din punctul de vedere al primei ecuații Kirchhoff (pot fi aleși arbitrar fără să contrazică ecuația Kirchhoff I, deoarece nu se pot forma secțiuni doar din coarde).

Curenții din arbore pot fi calculați în mod univoc în funcție de curenții din coarboare, aplicând prima ecuație Kirchhoff, deoarece fiecare ramură generează o secțiune alcătuită din acea ramură și în rest din coarde.

Aceste observații permit să se afirme că pentru o rețea se pot scrie **N-1 ecuații Kirchhoff I independente** pe un sistem de secțiuni fundamentale, generate fiecare de câte o ramură și în rest de coarde. Ecuațiile Kirchhoff pentru curenți, scrise în N-1 noduri distincte, indiferent care sunt acestea, alcătuiesc un sistem de ecuații liniar independente.



**PROBLEME**

**1.1.1.** Să se reprezinte grafurile circuitelor din figura 1.1.1 și să se determine parametrii topologici  $L$  și  $N$ .

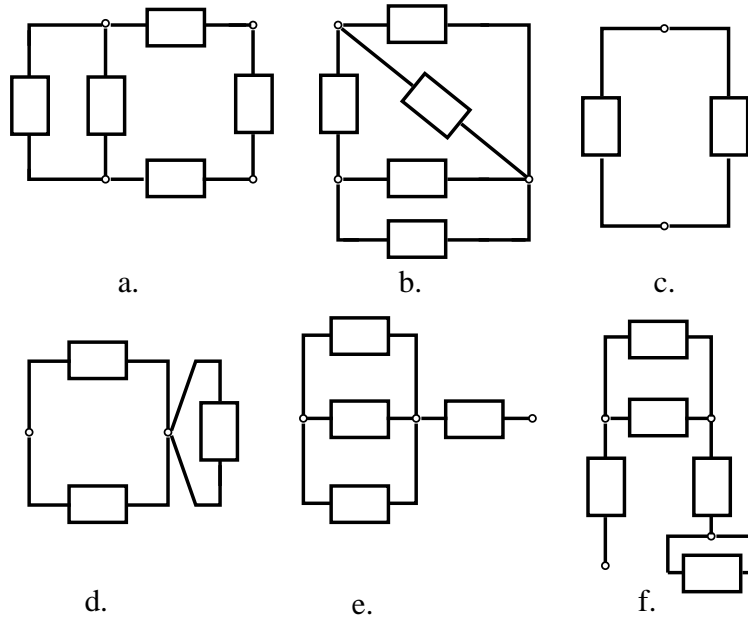


Fig. 1.1.1.

**1.1.2.** Să se determine clasele de echivalență în mulțimea de grafuri din figura 1.1.2.

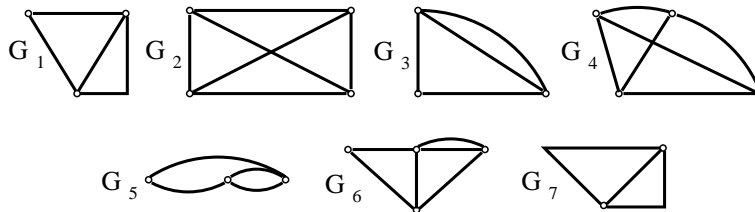


Fig. 1.1.2.

**1.1.3.** Să se determine clasele de echivalență ale mulțimii de grafuri orientate din figura 1.1.3.

**1.1.4.** Să se calculeze intensitățile curenților din grafurile de curent  $G_I$  reprezentate în figura 1.1.4, presupunând că ele sunt asociate aceluiași circuit electric.

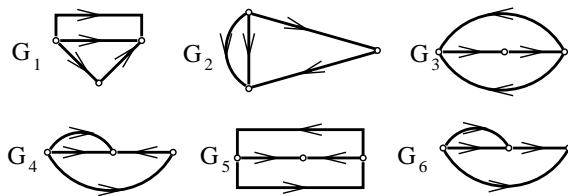


Fig. 1.1.3.

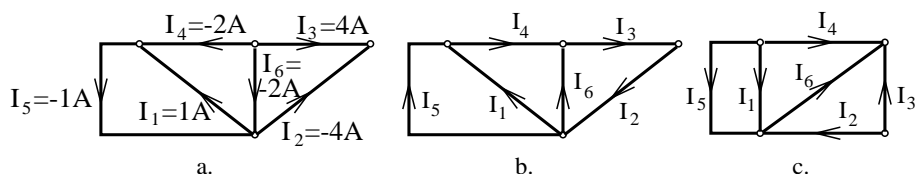


Fig. 1.1.4.

**1.1.5.** Să se completeze grafurile de curent din figura 1.1.5 aplicând prima ecuație Kirchhoff și să se verifice apoi ecuațiile pentru diferite secțiuni.

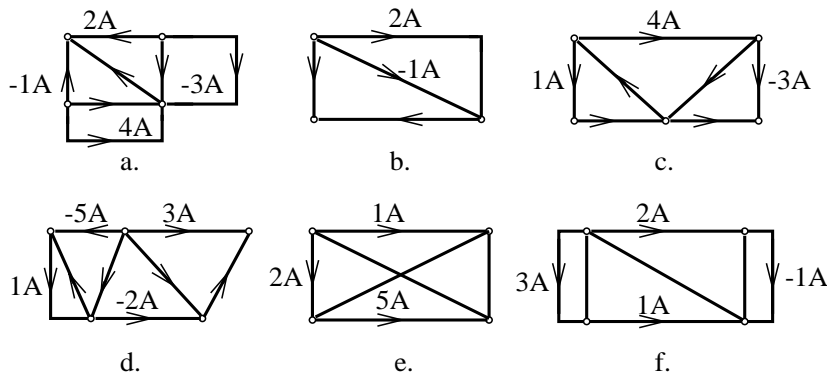


Fig. 1.1.5.

**1.1.6.** Să se calculeze tensiunile electrice din grafurile  $G_U$  prezentate în figura 1.1.6, presupunând că grafurile sunt asociate aceluiași circuit electric.

**1.1.7.** Să se completeze grafurile de tensiune din figura 1.1.7 și să se verifice rezultatul aplicând a doua ecuație Kirchhoff pe alte bucle ale circuitului.

**1.1.8.** Să se calculeze tensiunile din grafurile prezentate în figura 1.1.8 în funcție de potențialele nodurilor.

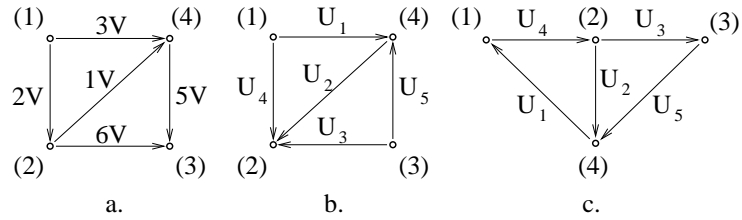


Fig. 1.1.6.

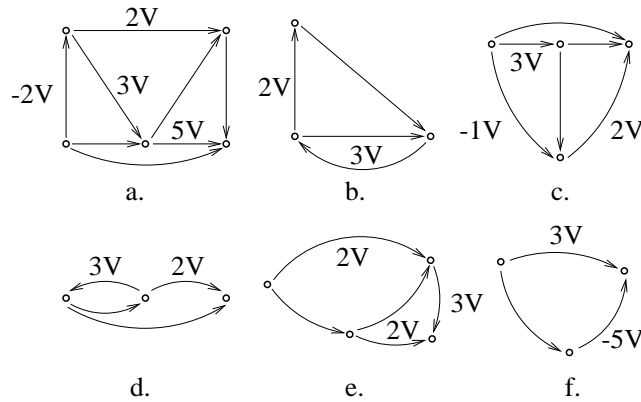


Fig. 1.1.7.

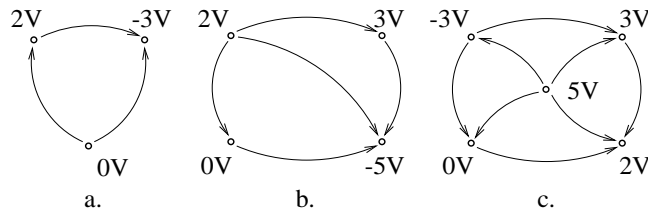


Fig. 1.1.8.

**1.1.9.** Să se calculeze potențialele nodurilor la grafurile de tensiune prezentate în figura 1.1.9 și să se completeze aceste grafuri.

**1.1.10.** Să se calculeze potențialele nodurilor la grafurile de tensiune din figura 1.1.10, presupunând, pe rând, fiecare nod ca nod de referință.

**1.1.11.** Să se determine toți arborii grafurilor din figura 1.1.11.

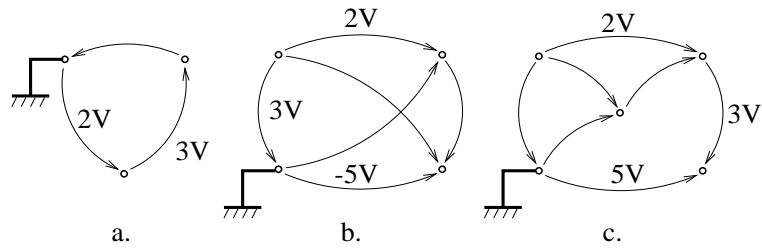


Fig. 1.1.9.

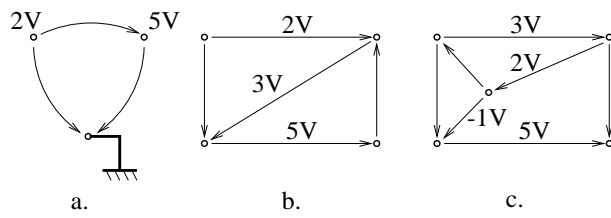


Fig. 1.1.10.

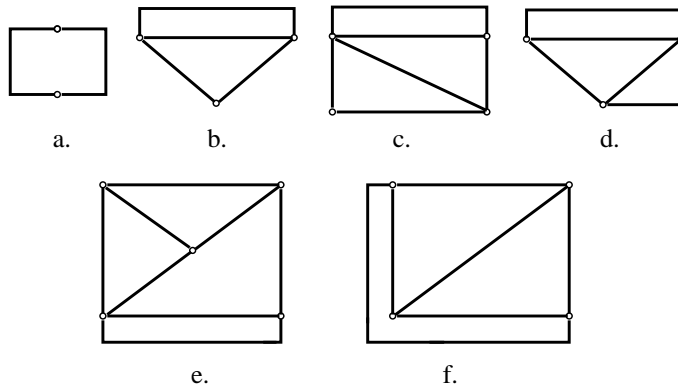


Fig. 1.1.11.

1. FUNDAMENTELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

---

**1.1.12.** Considerând că grafurile din figura 1.1.12, sunt grafuri de curent, să se aleagă pe coardele unui coarboare curenți arbitrari și să se calculeze curenții din ramuri.

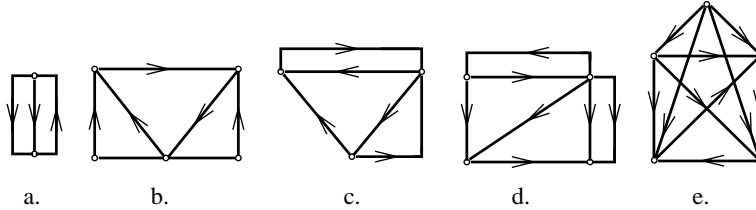


Fig. 1.1.12.

**1.1.13.** Presupunând că grafurile din figura 1.1.13, sunt grafuri de tensiune, să se aleagă pe ramurile unui arbore tensiuni arbitrare și să se calculeze tensiunile din coarde. Să se verifice rezultatele aplicând ecuația Kirchhoff II pe alte bucle decât cele fundamentale.

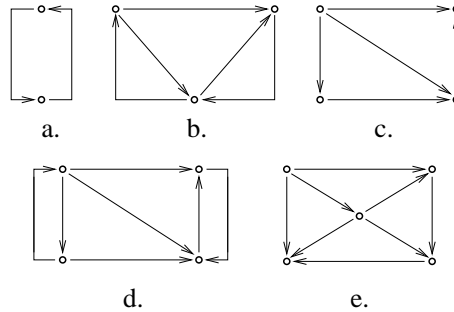


Fig. 1.1.13.

**1.1.14.** Să se determine care din grafurile reprezentate în figura 1.1.14 sunt grafuri de curent consistente (la care ecuațiile Kirchhoff I sunt verificate).

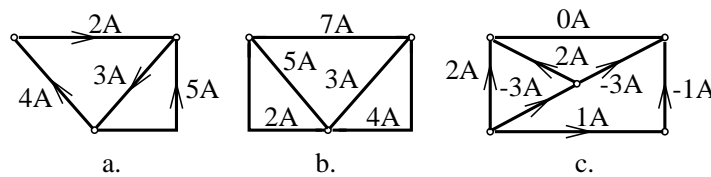


Fig. 1.1.14.

**1.1.15.** Să se determine care din grafurile reprezentate în figura 1.1.15 sunt grafuri de tensiune consistente (la care ecuațiile Kirchhoff II sunt verificate).

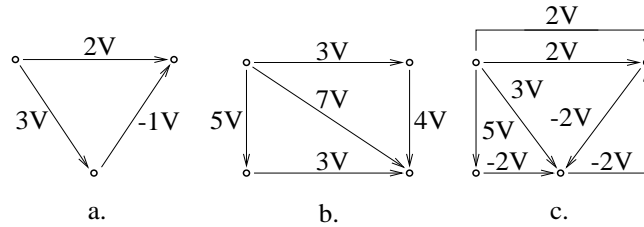


Fig. 1.1.15.

## 1.2 Puteri transferate de elementele de circuit

### BREVIAR

Elementele dipolare de circuit electric sunt capabile să absoarbă, de la rețeaua din care fac parte, energie electrică pe care o pot înmagazina sau disipa sub alte forme de energie; deasemenea ele pot livra energie electrică circuitului. Transferul de energie electrică se realizează pe la borne iar **puterea transferată** de un element dipolar (măsurabil în Wați) satisface relația:

$$\boxed{p = ui.} \quad (1.5)$$

Pentru a cunoaște sensul transferului energetic (de la element spre rețea sau invers) este necesară cunoașterea semnului produsului  $ui$  și a modului în care au fost alese sensurile de referință ale tensiunii  $u$  și ale curentului  $i$ .

Cele patru moduri în care se pot asocia sensurile de referință ale tensiunii și curentului la un element dipolar se împart în două categorii numite **reguli de asociere a sensurilor**.

*Regula de asociere a sensurilor de la receptoare* (fig. 1.17) corespunde cazului în care tensiunea și intensitatea curentului au același sens de referință față de borne. În acest caz sensul convențional al puterii  $p$  este de la circuit spre element.

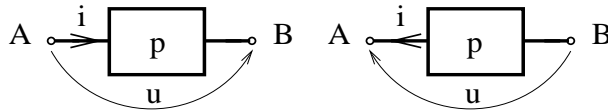


Fig. 1.17.

*Regula de asociere a sensurilor de la generatoare* (fig. 1.18) corespunde cazului în care tensiunea și intensitatea curentului au sensuri de referință opuse față de borne. În acest caz sensul convențional al puterii  $p$  este de la element către circuit.

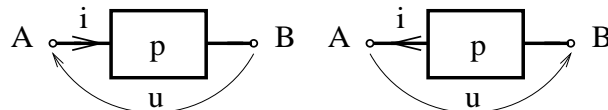


Fig. 1.18.

Determinarea sensului real al transferului de energie se face după următoarele

1.2. PUTERI TRANSFERATE DE ELEMENTELE DE CIRCUIT

reguli, reprezentate în figura 1.19.

semnul lui $p=ui$	regula de asociere	sensul real de transfer al puterii
+	receptoare	absorbită de element
+	generatoare	produsă de element
-	receptoare	produsă de element
-	generatoare	absorbită de element

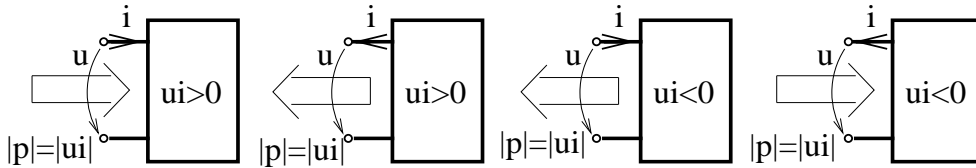


Fig. 1.19.

Puterile transferate de elementele unui circuit electric satisfac o ecuație de conservare dată de **teorema Tellegen**. Dacă două grafuri, unul de curent  $G_I$  și unul de tensiune  $G_U$ , sunt echivalente ca grafuri orientate, atunci:

$$\sum_{k=1}^L u_k i_k = 0. \quad (1.6)$$

Dacă cele două grafuri sunt echivalente doar ca grafuri neorientate atunci relația (1.6) rămâne valabilă cu condiția ca suma să fie algebrică. Convenția de semn adoptată constă în considerarea semnelui plus pentru laturile cu sensurile asociate conform regulii de la generatoare și a semnelui minus în caz contrar. În consecință dacă grafurile  $G_U$  și  $G_I$  sunt asociate aceleași rețele electrice, suma algebrică a puterilor transferate de toate elementele rețelei este nulă.

$$\sum_{k=1, L}^{alg} p_k = 0. \quad (1.7)$$

Condiția de echivalență a grafurilor orientate reprezintă faptul că rețeaua are adoptată, pentru toate elementele, regula de asociere a sensurilor de la receptoare.

Rezultă deci că în orice circuit electric, în orice moment suma aritmetică a puterilor consumate este egală cu suma puterilor generate.

Relația (1.6) este valabilă și atunci când se consideră tensiunile  $u_k$  ale unui circuit  $C_1$  și curenții  $i_k$  ai unui circuit  $C_2$ , cu condiția ca circuitele  $C_1$  și  $C_2$  să admită același graf  $G$  (circuitele au aceeași structură topologică). În acest caz



produsul  $u_k i_k$  se măsoară tot în Wați dar nu reprezintă o putere transferată ci o "pseudoputere". În concluzie se poate spune că teorema lui Tellegen garantează nu numai bilanțul puterilor, ci și pe cel al pseudoputerilor.

**PROBLEME**

**1.2.1.** Să se determine regulile de asociere a sensurilor la dipolii din figura 1.2.1 și să se calculeze puterile transferate și sensul acestora.

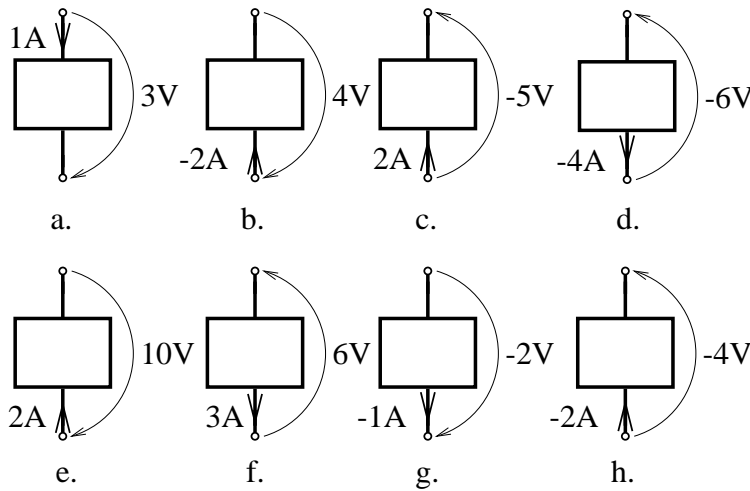


Fig. 1.2.1.

**1.2.2.** Să se calculeze intensitățile curenților la dipolii din figura 1.2.2.

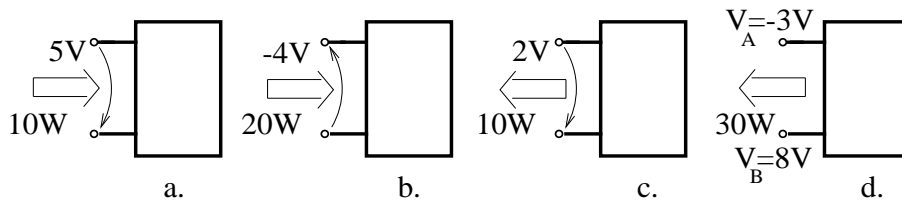


Fig. 1.2.2.

**1.2.3.** Să se calculeze tensiunile la bornele dipolilor din figura 1.2.3.

**1.2.4.** Să se completeze grafurile de curent  $G_I$  și grafurile de tensiune  $G_U$  din figura 1.2.4 și să se indice regulile de asociere a sensurilor pentru laturile grafurilor. Să se compare suma puterilor absorbite de elemente cu suma puterilor

1.2. PUTERI TRANSFERATE DE ELEMENTELE DE CIRCUIT

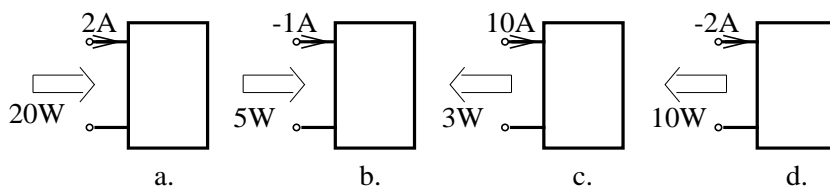


Fig. 1.2.3.

generate de elemente, pentru fiecare pereche de grafuri.

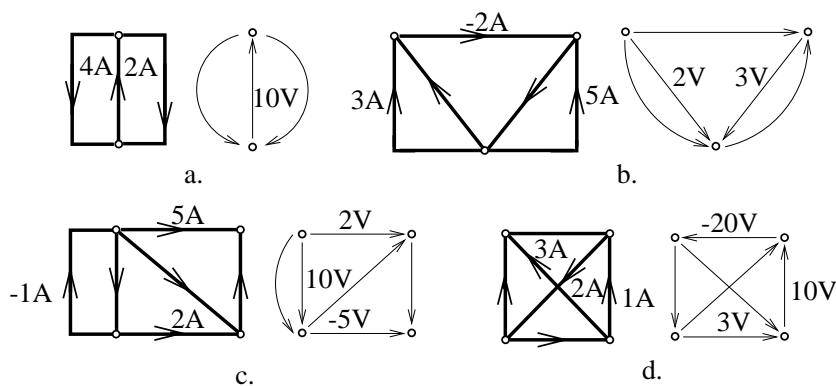


Fig. 1.2.4.

**1.2.5.** Să se genereze un graf  $G$  cu  $L$  laturi și  $N$  noduri. Pe un arbore al acestui graf să se aleagă tensiuni arbitrare și să se completeze grafurile  $G_v$ . Să se aleagă curenți arbitrari în laturile unui coarboare și să se completeze grafurile de curent  $G_I$ , astfel încât sensurile de referință să fie asociate după regula de la generatoare. Să se verifice teorema Tellegen determinându-se pentru fiecare latură sensul real al puterii.

Aplicație:

- a)  $N=3, L=6$ ;
- b)  $N=4, L=7$ ;
- c)  $N=5, L=8$ .

### 1.3 Matrice de incidență

#### BREVIAR

Pentru reprezentarea numerică a structurii circuitelor electrice se utilizează matricele de incidență (sau apartenență). Acestea se numesc și matrice topologice deoarece descriu topologia circuitelor și au valori ale elementelor 0, +1 sau -1. În continuare, se adoptă următoarea convenție de numerotare a laturilor: primele (N-1) laturi aparțin unui arbore, iar celelalte (L-N+1) laturi aparțin unui coarbore.

**Matricea de incidență a laturilor la noduri**  $A'$  este o matrice cu L coloane și N linii având elementele:

- $a_{ij} = 1$ , dacă latura j iese din nodul (i);
- $a_{ij} = -1$ , dacă latura j intră în nodul (i);
- $a_{ij} = 0$ , dacă latura j nu este incidentă la nodul (i).

Matricea  $A'$  se descompune în două submatrici:

$$A' = [A'_a, A'_c],$$

în care  $A'_a$  conține primele (N-1) coloane, asociate laturilor din arbore, iar  $A'_c$  conține ultimele (L-N+1) coloane, asociate laturilor din coarbore. Dacă din matricea  $A'$  se elimină o linie, se obține o matrice  $A$  numită *matrice redusă* de apartenență a laturilor la noduri.

**Matricea de incidență a laturilor la bucele fundamentale**  $B$  este o matrice cu L coloane și (L-N+1) linii având elementele:

- $b_{ij} = 1$ , dacă latura j aparține buclei [i] și are sensul de referință identic cu sensul de parcurs al buclei;
- $b_{ij} = -1$ , dacă latura j nu aparține buclei [i] și are sensul de referință opus sensului de parcurs al buclei;
- $b_{ij} = 0$ , dacă latura j nu aparține buclei [i].

Matricea  $B$  se descompune în două submatrici:

$$B = [B_a, B_c],$$

în care  $B_a$  conține primele (N-1) coloane, asociate laturilor din arbore, iar  $B_c$  conține (L-N+1) coloane asociate coarborelui. Dacă bucele fundamentale, generate fiecare de către o coardă, sunt numerotate în ordinea dată de coardele care le generează, atunci:

$$B = [B_a, U] \tag{1.8}$$

unde  $U$  este matricea unitate de ordinul (L-N+1).

**Matricea de incidență a laturilor la secțiunile fundamentale**  $D$  este o matrice cu L coloane și (N-1) linii având elementele:

- $d_{ij} = 1$ , dacă latura j aparține secțiunii {i} și are sensul de referință identic cu sensul de orientare a secțiunii;

$d_{ij} = -1$ , dacă latura  $j$  aparține secțiunii  $\{i\}$  și are sensul de referință opus sensului de orientare a secțiunii;

$d_{ij} = 0$ , dacă latura  $j$  nu aparține secțiunii  $\{i\}$ .

Matricea  $D$  se descompune în două submatrici:

$$D = [D_a : D_c],$$

în care  $D_a$  conține  $(N-1)$  coloane, corespunzătoare laturilor din arbore, iar  $D_c$  are  $(L-N+1)$  coloane, corespunzătoare laturilor din coarbore. Dacă secțiunile fundamentale, generate fiecare de câte o ramură, sunt numerotate cu numerele ramurilor ce le generează, atunci:

$$D = [U : D_c], \quad (1.9)$$

în care  $U$  este matricea unitate de ordinul  $(N-1)$ .

Matricele  $A$ ,  $B$  și  $D$  au linii independente, rangul matricilor  $A$  și  $D$  este  $(N-1)$  iar rangul matricei  $B$  este  $(L-N+1)$ .

Matricea  $B$  este ortogonală față de matricele  $A$  și  $D$ :

$$BA^T = 0, \quad BD^T = 0, \quad (1.10)$$

în care s-a notat cu  $M^T$  transpusa matricei  $M$ .

Dacă  $B_c = U$  și  $D_a = U$  atunci:

$$B_a = -D_c^T = F. \quad (1.11)$$

Submatricea  $F = B_a$  cu  $(L-N+1)$  linii și  $(N-1)$  coloane este *matricea de apartenență a ramurilor arborelui la buclele fundamentale*, egală și de semn opus cu *transpusa matricei de apartenență a corzilor la secțiunile fundamentale* și se numește **matrice redusă de conexiune** (sau matricea apartenențelor esențiale).

**Prima ecuație a lui Kirchhoff** se scrie matriceal, pentru noduri, sub forma:

$$\boxed{Ai = 0}, \quad (1.12)$$

iar pentru secțiunile fundamentale ale unui circuit sub forma:

$$\boxed{Di = 0}, \quad (1.13)$$

în care matricele  $A$  și  $D$  sunt matricele de apartenență ale grafului de curent iar  $i = [i_1, i_2, \dots, i_L]^T$  este *vectorul curenților* din laturile circuitului.

**A doua ecuație a lui Kirchhoff** se scrie matriceal, pentru buclele fundamentale ale unui circuit, sub forma:

$$\boxed{Bu = 0}, \quad (1.14)$$

în care matricea  $B$  este matricea de apartenență pentru graful de tensiune iar  $u = [u_1, u_2, \dots, u_L]^T$  este *vectorul tensiunilor* din laturile circuitului.

Matricele coloană, cu  $L$  elemente, ale curenților  $i$  și tensiunilor  $u$  se pot descompune:

$$i = \begin{bmatrix} i_a \\ i_c \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_c \end{bmatrix},$$

în care  $i_a$  și  $u_a$  reprezintă curenții, respectiv tensiunile din ramuri, iar  $i_c$  și  $u_c$  reprezintă curenții, respectiv tensiunile din coarde.

Într-un graf consistent de curent, curenții din arbore se exprimă, în baza relațiilor (1.13) și (1.9), în funcție de cei din coarbore, cu relația (valabilă pentru  $D_a = U$ ):

$$i_a = -D_c i_c \quad \text{sau} \quad i = B^T i_c. \quad (1.15)$$

Ultima relație este valabilă dacă graful de curent este echivalent cu graful de tensiune (asocierea sensurilor de referință este făcută după regula de la receptoare pentru toți dipolii).

Într-un graf consistent de tensiune, tensiunile din coarbore se exprimă, în baza relațiilor (1.14) și (1.8) în funcție de cele din arbore, cu relația (valabilă pentru  $B_c = U$ ):

$$u_c = -B_a u_a \quad \text{sau} \quad u = D^T u_a. \quad (1.16)$$

Ultima relație este valabilă doar dacă graful de tensiune este echivalent cu cel de curent.

Tensiunile laturilor se exprimă în funcție de potențialele nodurilor cu relația (1.4), care pentru întreg circuitul are următoarea formă matriceală, valabilă atunci când  $G_U$  și  $G_I$  sunt ordonate similar:

$$\boxed{u = A^T v}, \quad (1.17)$$

în care  $v = [v_1, v_2, \dots, v_{N-1}]^T$  este *vectorul potențialelor nodurilor*, presupunând nodul  $N$  ca nod de referință.

Se poate afirma că oricare din relațiile (1.12), (1.13), (1.15) reprezintă forme matriceale echivalente al ecuațiilor Kirchhoff I, iar relațiile (1.14), (1.16), (1.17) reprezintă forme matriceale ale ecuațiilor Kirchhoff II.

**Teorema lui Tellegen** (1.6) capătă următoarea formă matriceală:

$$\boxed{u^T i = 0}. \quad (1.18)$$

## PROBLEME

**1.3.1.** Să se scrie matricele de apartenență  $A$ ,  $B$ ,  $D$  pentru grafurile reprezentate în figura 1.3.1.

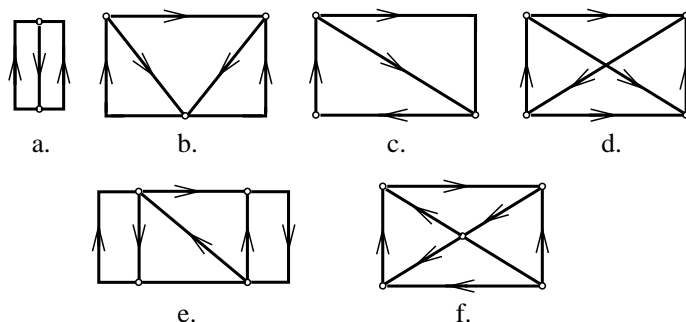


Fig. 1.3.1.

**1.3.2.** Să se stabilească matricele reduse de conexiune pentru grafurile prezentate în figura 1.3.1.

**1.3.3.** Să se reprezinte grafurile ce au următoarele matrice de apartenență:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**1.3.4.** Să se calculeze intensitățile curenților din grafurile de curent reprezentate în figura 1.1.5, utilizând matricele  $D_c$  și  $B$ .

1. FUNDAMENTELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

---

**1.3.5.** Să se calculeze tensiunile din grafurile de tensiune reprezentate în figura 1.1.7 utilizând matricele  $B_a$  și  $D$ .

**1.3.6.** Să se calculeze tensiunile din grafurile de tensiune reprezentate în figura 1.3.2 în funcție de potențialele nodurilor, utilizând matricea de apartenență  $A$ .

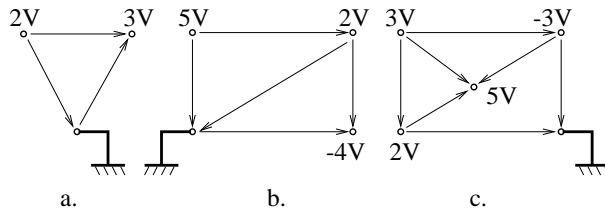


Fig. 1.3.2.

**1.3.7.** Pornind de la matricea  $A$  să se calculeze matricile de apartenență  $A'$ ,  $B$  și  $D$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

## 1.4 Elemente ideale de circuit

### BREVIAR

Elementele ideale de circuit reprezintă concepte fundamentale ale teoriei circuitelor electrice, ele fiind definite ca elemente dipolare ce impun o anumită restricție tensiunii și intensității curentului, restricție ce poartă numele de **ecuația constitutivă caracteristică sau de funcționare** a elementului ideal. Elementele ideale, prin faptul că au ecuațiile caracteristice extrem de simplificate, nu trebuie confundate cu elementele reale de circuit, în schimb sunt utile în modelarea acestora.

**1. Rezistorul ideal** este un element dipolar la care tensiunea la borne este funcție univocă de intensitatea curentului ce-l străbate (rezistorul controlat în curent) sau la care intensitatea curentului este funcție univocă de tensiune (rezistorul controlat în tensiune). Dacă relația dintre tensiune și curent este o relație liniară, atunci elementul se numește rezistor liniar. În figura 1.20.a este prezentat simbolul rezistorului neliniar, iar în figura 1.20.b este prezentat simbolul rezistorului liniar.



Fig. 1.20.

Ecuația constitutivă a rezistorului neliniar, invariant în timp este:

$$u = f(i), \quad (1.19)$$

pentru cazul rezistorului controlat în curent, și respectiv

$$i = g(u), \quad (1.20)$$

pentru cazul rezistorului controlat în tensiune. În cazul rezistorului liniar:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = Ri; \\ i = Gu. \end{array}} \quad (1.21)$$

Mărimile  $R$  și  $G = 1/R$  se numesc *rezistența*, respectiv *conductanța* rezistorului și sunt parametrii caracteristici ai elementului. Relațiile (1.19) și (1.21) sunt valabile pentru sensurile de referință prezentate în figura 1.20. În cazul schimbării



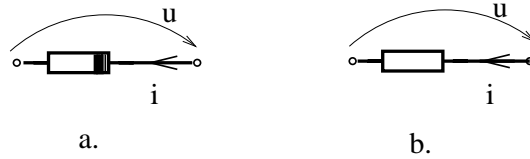


Fig. 1.21.

sensurilor de referință se modifică în mod corespunzător ecuațiile. De exemplu, în cazul prezentat în figura 1.21: Ecuațiile de funcționare au forma :

$$u = -f(-i), \quad (1.22)$$

pentru rezistorul neliniar controlat în curent,

$$i = -f(-u), \quad (1.23)$$

pentru rezistorul neliniar controlat în tensiune și:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = -Ri; \\ i = -Gu, \end{array}} \quad (1.24)$$

pentru rezistorul liniar.

**Cazuri particulare:**

a) rezistorul cu rezistență nulă  $R = 0$ , care are ecuația de funcționare:

$$u = 0, \quad (1.25)$$

se numește **conductor perfect** și are simbolul din figura 1.22.a;

b) rezistorul cu conductanța nulă  $G = 0$ , care are ecuația de funcționare:

$$i = 0, \quad (1.26)$$

se numește **izolator perfect** și are simbolul prezentat în figura 1.22.b.

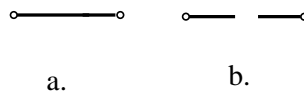


Fig. 1.22.

**Puterea absorbită** de un rezistor liniar este:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2 \quad (1.27)$$

și este pozitivă dacă rezistența rezistorului este pozitivă. Rezistoarele cu rezistență pozitivă  $R > 0$  sunt elemente pasive disipative.

**2. Bobina ideală** este un element dipolar la care tensiunea la borne este egală cu derivata în raport cu timpul a unei funcții. Valoarea  $\varphi$  a acestei funcții se numește flux de intensitatea curentului electric prin element. Dacă fluxul depinde liniar de intensitatea curentului, atunci bobina se numește liniară, caz în care tensiunea la borne este proporțională cu viteza de variație în timp a curentului. Simbolul bobinei neliniare este prezentat în figura 1.23.a, iar cel al bobinei liniare în figura 1.23.b.

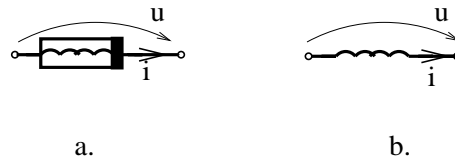


Fig. 1.23.

Ecuția constitutivă a bobinei neliniare invariante în timp este:

$$u = \frac{d\varphi(i)}{dt}, \quad (1.28)$$

iar în cazul particular al bobinei liniare  $\varphi = Li$ , deci:

$$\boxed{u = L \frac{di}{dt}}, \quad (1.29)$$

în care  $L$  este parametrul caracteristic al bobinei, numit *inductivitate*. Ecuțiile (1.28) și (1.29) sunt asociate sensurilor de referință din figura 1.23 și trebuie modificate o dată cu modificarea sensurilor de referință. De exemplu, pentru figura 1.24 ele au forma:

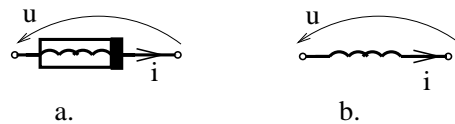


Fig. 1.24.

$$u = -\frac{d\varphi(i)}{dt}, \quad (1.30)$$

în cazul bobinei neliniare și:

$$\boxed{u = -L \frac{di}{dt}}, \quad (1.31)$$

în cazul bobinei liniare.

În cazul în care curentul este constant în timp, bobina ideală se comportă ca un conductor perfect ( $u = 0$ ), situație ce are loc și atunci când inductivitatea este nulă.

Puterea absorbită de o bobină ideală este:

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Li^2}{2} \right) = \frac{dW}{dt}, \quad (1.32)$$

pozitivă (bobina absoarbe energie) sau negativă (bobina generează energie), după cum energia inductorului  $W = Li^2/2$  crește sau scade în timp. Din acest motiv se spune că bobina este element pasiv, acumulator de energie, având ca mărime de stare intensitatea curentului.

**3. Condensatorul ideal** este un element dipolar la care intensitatea curentului este egală cu derivata față de timp a unei funcții. Valoarea acestei funcții  $q$  se numește sarcină de tensiunea electrică la bornele elementului. Dacă sarcina depinde liniar de tensiune, atunci condensatorul se numește liniar, caz în care curentul este proporțional cu viteza de variație a tensiunii la borne. Simbolul condensatorului neliniar este prezentat în figura 1.25.a, iar cel al condensatorului liniar în figura 1.25.b.

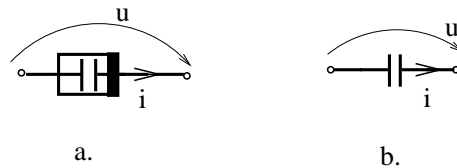


Fig. 1.25.

Ecuția constitutivă a condensatorului neliniar invariant în timp este:

$$i = \frac{dq(u)}{dt}, \quad (1.33)$$

iar a condensatorului liniar invariant în timp este:

$$\boxed{i = C \frac{du}{dt}}, \quad (1.34)$$

în care  $C$  este parametrul caracteristic al condensatorului numit *capacitate*. Ecuațiile de funcționare sunt valabile în cazul sensurilor de referință prezentate în

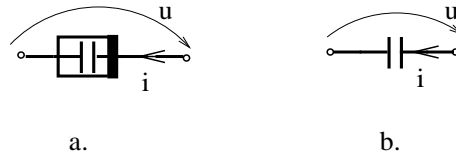


Fig. 1.26.

figura 1.25 și trebuie modificate corespunzător, în cazul schimbării sensurilor de referință. De exemplu, pentru figura 1.26 ecuațiile sunt:

$$i = -\frac{dq(u)}{dt}, \quad (1.35)$$

pentru condensatorul neliniar și:

$$i = -C \frac{du}{dt}, \quad (1.36)$$

în cazul condensatorului liniar.

Dacă tensiunea la bornele condensatorului este constantă în timp, atunci acesta se comportă ca un izolator perfect ( $i = 0$ ), situație ce are loc și atunci când capacitatea condensatorului este nulă.

Puterea absorbită de un condensator ideal este:

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{Cu^2}{2} \right) = \frac{dW}{dt}, \quad (1.37)$$

pozitivă (condensatorul absoarbe energie) sau negativă (condensatorul debitează energie), după cum energia condensatorului  $W = Cu^2/2$  crește sau scade în timp. Condensatorul este un element pasiv acumulator de energie, având ca mărime de stare tensiunea la borne.

**4. Generatorul ideal de tensiune** este un element pasiv dipolar la care tensiunea la borne nu depinde de intensitatea curentului prin element (putând fi în schimb funcție de timp). Simbolurile utilizate pentru generatorul ideal de tensiune sunt prezentate în figura 1.27; borna din dreapta se numește borna "plus", iar cea din stânga borna "minus".

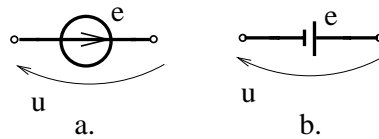


Fig. 1.27.

Ecuția constitutivă a generatorului ideal de tensiune, pentru sensul tensiunii adoptat în figura 1.27, este:

$$u = e(t), \quad (1.38)$$

în care mărimea  $e$  este parametrul caracteristic al generatorului ideal de tensiune și se numește *tensiune electromotoare*. Dacă tensiunea la borne are sensul de referință de la borna minus la borna plus a generatorului ca în figura 1.28, atunci ecuația de funcționare devine:

$$u = -e(t). \quad (1.39)$$

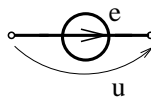


Fig. 1.28.

Generatorul de tensiune electromotoare nulă are ecuația de funcționare  $u = 0$  și în consecință se comportă ca un conductor perfect.

Puterea transferată pe la bornele unui generator ideal de tensiune este:

$$p = ui = ei, \quad (1.40)$$

putând fi pozitivă sau negativă, în funcție de sensul curentului. Deoarece acest element poate produce energie se spune că generatorul ideal de tensiune este un element activ.

**5. Generatorul ideal de curent** este un element dipolar la care intensitatea curentului ce-l străbate nu depinde de tensiunea la bornele elementului. Simbolul utilizat pentru generatorul ideal de curent este prezentat în figura 1.29 (borna din dreapta se numește borna "plus", iar borna din stânga se numește borna "minus" a generatorului).

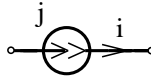


Fig. 1.29.

Ecuția constitutivă a generatorului ideal de curent, pentru sensul de referință adoptat în figura 1.29, este:

$$i = j(t), \quad (1.41)$$

în care mărimea  $j$  este parametrul caracteristic al generatorului ideal de curent și se numește *curent electromotor*. Dacă intensitatea curentului are sensul de referință opus dublei săgeți ca în figura 1.30, atunci ecuația de funcționare devine:

$$i = -j(t). \quad (1.42)$$

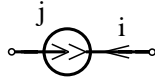


Fig. 1.30.

Generatorul ideal de curent ce are curentul electromotor nul are ecuația de funcționare  $i = 0$  și în consecință se comportă ca un izolator perfect.

Puterea transferată pe la borne de un generator ideal de curent este:

$$p = ui = uj, \quad (1.43)$$

putând fi negativă sau pozitivă, în funcție de tensiunea aplicată la borne. Generatorul ideal de curent este deci un element activ din punct de vedere energetic.

**6. Generatoarele comandate** sunt generatoare ideale de curent sau tensiune al căror curent electromotor respectiv tensiune electromotoare sunt funcții de intensitatea curentului sau de tensiunea electrică dintr-o latură a circuitului, alta decât aceea în care se află elementul comandat. Se deosebesc patru tipuri de surse comandate liniar (cu simbolurile din figura 1.31), ale căror ecuații de funcționare sunt:

$$\boxed{u_2 = \rho i_1}, \quad (1.44)$$

pentru *sursa de tensiune comandată în curent* (fig 1.31.a),

$$\boxed{u_2 = \alpha u_1}, \quad (1.45)$$

pentru *sursa de tensiune comandată în tensiune* (fig 1.31.b),

$$\boxed{i_2 = \beta i_1}, \quad (1.46)$$

pentru *sursa de curent comandată în curent* (fig 1.31.c), și

$$\boxed{i_2 = \gamma i_1}. \quad (1.47)$$

pentru *sursa de curent comandată în tensiune* (fig 1.31.d).

Pentru cele patru tipuri de surse comandate, parametrii caracteristici sunt:  $\rho[\Omega]$  rezistența de transfer;  $\alpha$  coeficientul de transfer al tensiunii;  $\beta$  coeficientul de transfer al curentului și  $\gamma[S]$  conductanța de transfer. Coeficienții de transfer  $\alpha$  și  $\beta$  sunt adimensionali.

**7. Bobinele cuplate** reprezintă un sistem de bobine cu proprietatea că fluxul din fiecare depinde de curenții prin toate bobinele sistemului. Ecuația de funcționare a bobinei  $k$  dintr-un sistem de  $m$  bobine cuplate este:

$$u_k = \frac{d}{dt} \varphi(i_1, i_2, \dots, i_m). \quad (1.48)$$

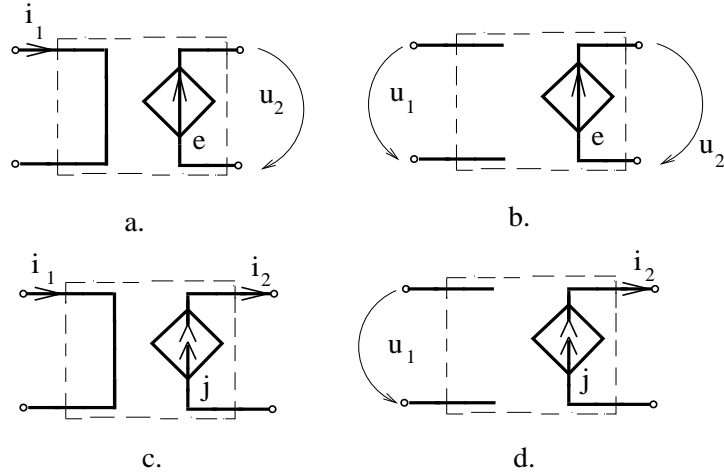


Fig. 1.31.

În cazul bobinelor cuplate liniar, fluxul este o combinație liniară a curenților, iar ecuația de funcționare devine:

$$u_k = \sum_{j=1}^m L_{kj} \frac{di_j}{dt}, \quad (1.49)$$

în care suma este aritmetică pentru orientările prezentate în figura 1.32, și anume dacă asocierea sensurilor se face după regula de la receptoare și dacă toți curenții au sensurile de referință intrând în borna polarizată. Parametrii unui sistem de bobine liniare cuplate sunt inductivitățile  $L_{kj}$  ce alcătuiesc o matrice pătrată de ordin  $m$  numită *matricea inductivităților*. Termenii diagonali ai matricii  $L$  se numesc *inductivități proprii*, iar termenii nediagonali se numesc *inductivități mutuale*.

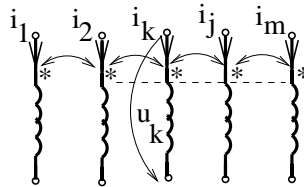


Fig. 1.32.

Dacă sensurile de referință nu sunt conform celor din figura 1.32, atunci ecuația de funcționare se modifică în mod corespunzător, suma devenind o sumă algebrică.

**Regula de determinare a semnului termenului  $j$**  din această sumă, se bazează pe observația că, orice curent  $i_j$  care **intră** într-o bornă polarizată induce, prin cuplaj, în bobina  $k$  o tensiune la borne  $L_{kj}(di_j/dt)$ , cu sensul de referință orientat de la borna polarizată către cealaltă bornă (prin abuz de limbaj se spune că ea **intră** în borna polarizată). Dacă intensitatea  $i_j$  **iese** din borna polarizată, atunci ea induce în bobina  $k$  o tensiune la borne  $L_{kj}(di_j/dt)$  cu sensul de referință orientat de la cealaltă bornă spre borna polarizată (prin abuz de limbaj se spune că **iese** din borna polarizată). Această regulă de semn este exemplificată în figura 1.33 în care se constată că semnul tensiunii induse depinde de sensul de referință al curentului inductor ( $i_1$ ) dar nu depinde de sensul de referință al curentului indus ( $i_2$ ).

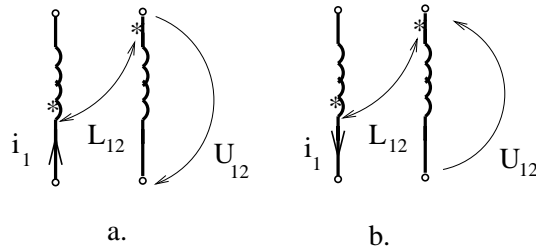


Fig. 1.33.

Marcajele pentru bornele polarizate nu au semnificație fizică dar ele sunt necesare în cazul sistemelor de bobine cuplate, deoarece ele definesc valoarea (mai exact semnul) inductivităților mutuale, urmând ca schimbarea unei borne polarizate la bobina  $k$  să determine modificarea semnului tuturor inductivităților mutuale (de cuplaj) ale bobinei  $k$  (sunt afectate linia  $k$  și coloana  $k$  din matricea  $[L_{ij}]$ , a inductivităților cu excepția termenului diagonal).

**Formularea corectă a circuitelor cu elemente ideale.** Cu ajutorul elementelor ideale de circuit prin conexiuni pe la borne se alcătuiesc circuite electrice. Nu orice mod de conexiune a elementelor ideale este permis în teoria circuitelor; trebuie avut grijă ca ecuațiile de funcționare să fie compatibile cu ecuațiile Kirchhoff. Dacă ele sunt incompatibile, analiza circuitului este fără sens, neexistând o soluție care să verifice ecuațiile circuitului. Dacă un circuit electric conține generatoare ideale de tensiune ce alcătuiesc bucle, atunci, pentru valori arbitrare ale tensiunilor electromotoare, acestea pot fi în contradicție cu ecuația a doua a lui Kirchhoff. Dacă un circuit conține secțiuni alcătuite din generatoare ideale de curent, atunci, pentru valori arbitrare ale curenților electromotori, acestea pot fi în contradicție cu prima ecuație a lui Kirchhoff. Circuitele ce conțin bucle de generatoare ideale de tensiune sau secțiuni de generatoare ideale de curent se numesc circuite cu **generatoare în exces**. Atunci când generatoarele în exces contravin ecuațiilor lui Kirchhoff **circuitul este incompatibil**. Chiar dacă



generatoarele în exces nu contravin ecuațiilor lui Kirchhoff, totuși analiza unui astfel de circuit nu poate fi completă deoarece el nu are soluție unică: curenții din generatoarele ideale de tensiune în exces și tensiunile din generatoarele ideale de curent în exces sunt mărimi arbitrare (nu pot fi determinate din ecuațiile circuitului). În acest caz se spune că circuitul este nedeterminat. Condiția ca într-un circuit să nu existe generatoare în exces este ca circuitul să aibă un arbore în ramurile căruia să se afle toate generatoarele ideale de tensiune, iar generatoarele ideale de curent să se afle în coarbore. La analiza unui circuit în vederea determinării generatoarelor în exces nu trebuie uitat faptul că izolatorul perfect este un generator ideal de curent ( $j = 0$ ), iar conductorul perfect este un generator ideal de tensiune ( $e = 0$ ). Analiza circuitelor cu generatoare compatibile în exces se reduce la analiza circuitelor fără generatoare în exces, prin înlocuirea generatoarelor ideale de tensiune în exces (câte unul pentru fiecare buclă) cu generatoare ideale de curent, având curenți electromotori nedeterminați și prin înlocuirea generatoarelor ideale de curent în exces (câte unul pentru fiecare secțiune) cu generatoare ideale de tensiune având tensiuni electromotoare nedeterminate.

**Bilanțul puterilor** în rețelele electrice este o consecință directă a teoremei lui Tellegen și a ecuațiilor constitutive ale elementelor și reprezintă ecuația de egalitate între suma puterilor debitate de generatoarele rețelei  $P_g$  și puterile absorbite de elementele pasive  $P_c$ . Pentru rețelele liniare ecuația de bilanț este :

$$\boxed{P_g = P_c}; \quad (1.50)$$

unde:

$$P_g = \sum_{k=1}^{n_{gt}} e_k i_k + \sum_{k=1}^{n_{gc}} u_k j_k; \quad (1.51)$$

$$P_c = \sum_{k=1}^{n_R} R_k i_k^2 + \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=1}^{n_C} \frac{C_k u_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_L} \sum_{m=1}^{n_L} \frac{L_{km} i_k i_m}{2} \right],$$

în care  $n_{gt}$  este numărul generatoarelor ideale de tensiune,  $n_{gc}$  este numărul generatoarelor de curent,  $n_R$  este numărul rezistoarelor,  $n_C$  este numărul condensatoarelor, iar  $n_L$  este numărul bobinelor din rețea. Primele două sume sunt sume algebrice, convenția de semn fiind prezentată în figura 1.34. În cazul a. termenii se consideră cu semnul plus, iar în cazul b. ei se consideră cu semnul minus.

Sumele corespunzătoare rezistoarelor, condensatoarelor și inductivităților proprii sunt sume aritmetice dar termenii corespunzători inductivităților mutuale se consideră în suma algebrică, convenția de semn fiind semnul plus atunci când cei doi curenți au aceeași poziție față de bornele polarizate (ambii intră sau ambii ies ca în figura 1.35.a, 1.35.b) și semnul minus atunci când cei doi curenți au poziții inverse față de bornele polarizate (unul intră și altul iese ca în figura 1.35.c) .

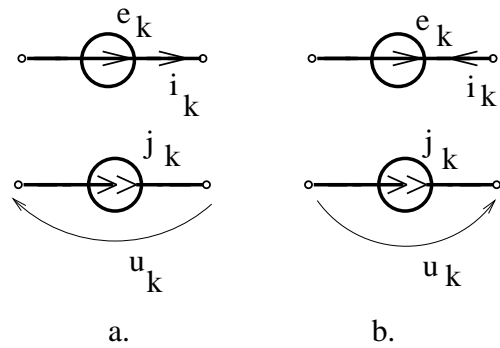


Fig. 1.34.

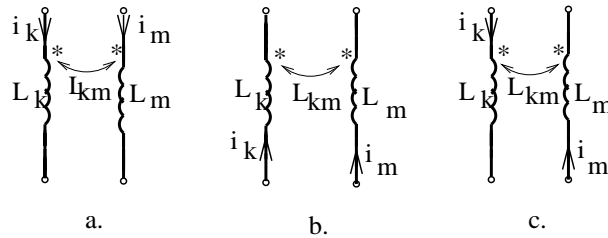


Fig. 1.35.

## PROBLEME

**1.4.1.** Să se reprezinte grafic variația intensității  $i$  în funcție de tensiunea  $u$  la bornele rezistorului neliniar, pentru diverse sensuri de referință, pornind de la faptul că graficul din figura 1.4.1.a corespunde sensurilor din figura 1.4.1.b.

**1.4.2.** Să se determine mărimile necunoscute corespunzătoare rezistoarelor liniare din figura 1.4.2.

**1.4.3.** Să se calculeze tensiunea  $u(t)$  la bornele unei bobine ideale presupunând că ea este parcursă de unul din curenții:

- a)  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ;
- b)  $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ ;
- c)  $i(t) = I_0$ ,

dacă fluxul bobinei  $\varphi(i)$  este dat de una din funcțiile:

- a)  $\varphi = a_1 \cdot \arctg a_2 i + L_0 i \sin(\omega_0 t)$ ;
- b)  $\varphi = \frac{i}{a + b|i|}$ ;
- c)  $\varphi = a \cdot \text{th}(bi)$ ;
- d)  $\varphi = \frac{L_0 i}{1 + \alpha \sin(\omega_0 t)}$ ;
- e)  $\varphi = Li$ .

1. FUNDAMENTELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

---

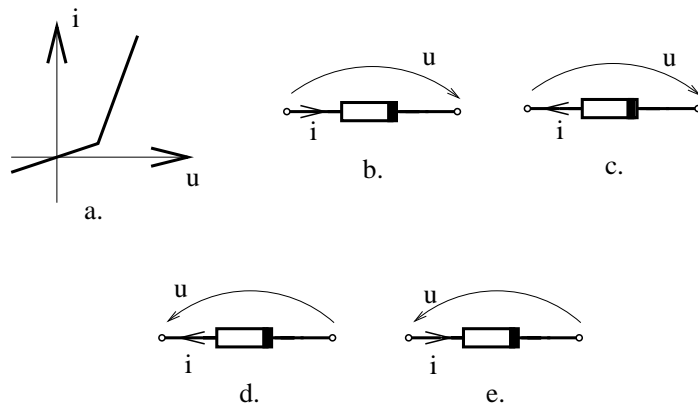


Fig. 1.4.1.

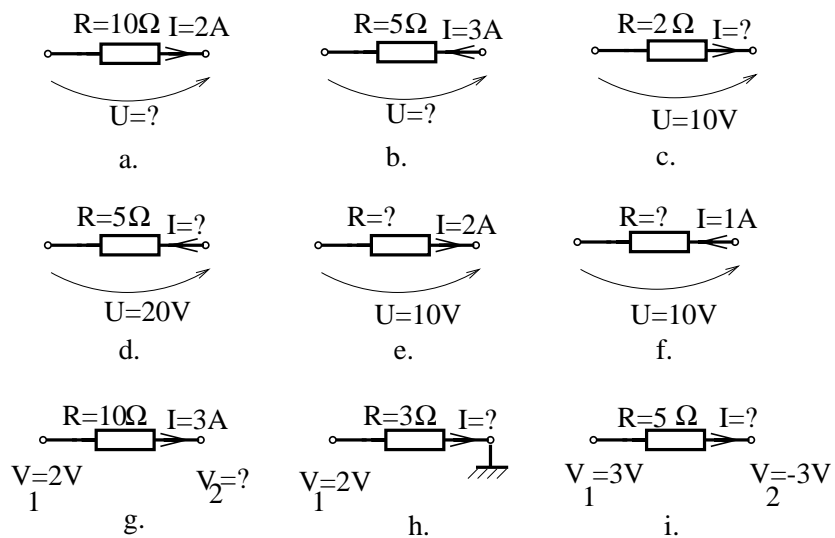


Fig. 1.4.2.

Să se exprime tensiunea la bornele bobinei pentru cele patru modalități de asociere a sensurilor de referință ale tensiunii și curentului. Să se calculeze puterea transferată pe la bornele bobinei.

**1.4.4.** Să se calculeze intensitatea curentului electric ce străbate o bobină ideală, dacă aceasta are la borne tensiunea:

- a)  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ;
- b)  $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ ;
- c)  $u(t) = U_0$ ;
- d)  $u(t) = 0$ ,

atunci când fluxul bobinei  $\varphi(i)$  este dat de una din funcțiile:

- a)  $\varphi = a \cdot \operatorname{arctg}(bi)$ ;
- b)  $\varphi = Li$ .

Să se calculeze puterea transferată pe la bornele bobinei. Să se discute rezultatul în funcție de constanta de integrare.

**1.4.5.** Să se calculeze intensitatea curentului ce străbate un condensator ideal alimentat la tensiunea:

- a)  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ ;
- b)  $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ ;
- c)  $u(t) = U_0$ ,

atunci când sarcina condensatorului  $q(u)$  depinde de tensiunea  $u$  conform relațiilor:

- a)  $q = a_1 \cdot \operatorname{arctg}(a_2 u)$ ;
- b)  $q = \frac{au}{1 + \alpha \sin(\omega_0 t)}$ ;
- c)  $q = Cu$ .

Să se calculeze puterea transferată pe la bornele condensatorului.

**1.4.6.** Să se calculeze tensiunea la bornele unui condensator străbatut de curentul:

- a)  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$ ;
- b)  $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ ;
- c)  $i(t) = I_0$ ;
- d)  $i(t) = 0$ ,

presupunând că sarcina condensatorului  $q(u)$  depinde de tensiune conform relațiilor:

- a)  $q = a_1 \cdot \operatorname{arctg}(a_2 u)$ ;
- b)  $q = Cu$ .

Să se calculeze puterea transferată pe la borne, discutându-se în funcție de constanta de integrare.

1. FUNDAMENTELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

1.4.7. Să se calculeze mărimile necunoscute la generatoarele ideale prezentate în figura 1.4.3.

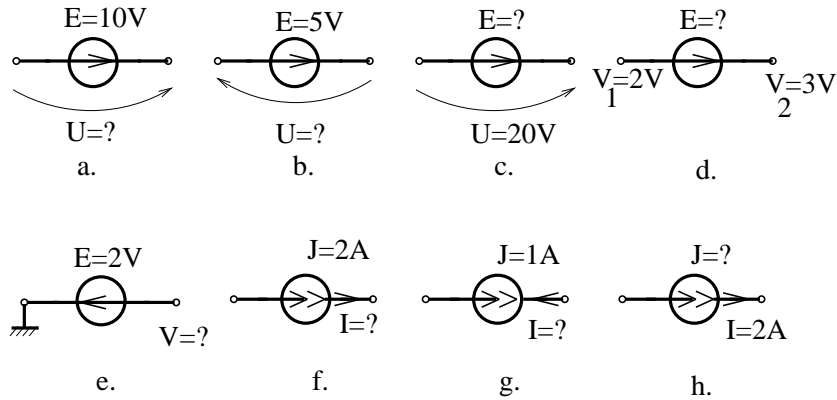


Fig. 1.4.3.

1.4.8. Să se calculeze puterile transferate pe la bornele generatoarelor din figura 1.4.4 și să se indice sensul acestora.

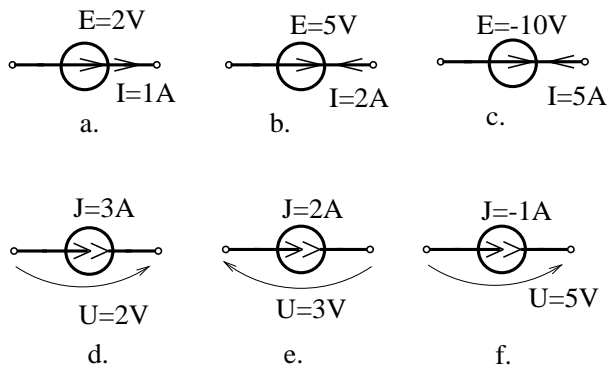


Fig. 1.4.4.

1.4.9. Să se calculeze tensiunile la bornele bobinelor liniare cuplate magnetic prezentate în figura 1.4.5.

1.4.10. Să se studieze influența pe care o are asupra ecuațiilor modificarea poziției unei borne polarizate la bobinele din figura 1.4.5.

1.4.11. Să se calculeze puterea absorbită de perechile de bobine cuplate prezentate în figura 1.4.5.

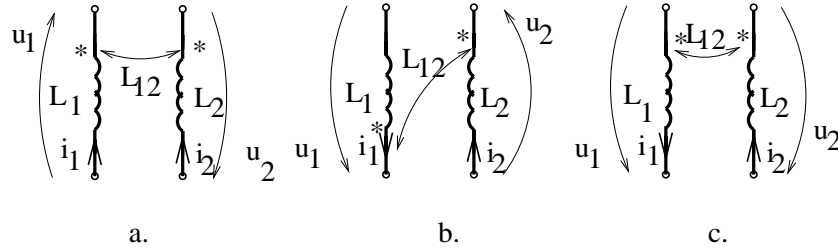


Fig. 1.4.5.

**1.4.12.** Să se determine condițiile care trebuie îndeplinită de inductivitățile proprii și mutuale ale unui sistem de bobine, astfel încât energia asociată sistemului să fie pozitivă, oricare ar fi semnele curenților.

**1.4.13.** Să se calculeze tensiunile la bornele bobinelor liniare cuplate prezentate în figura 1.4.6, pentru:

$$i_1 = I_{01}\sin(\omega t), \quad i_2 = I_{02}\cos(\omega t);$$

$$L_1 = L_2 = 0.1H, \quad L_{12} = L_1/2.$$

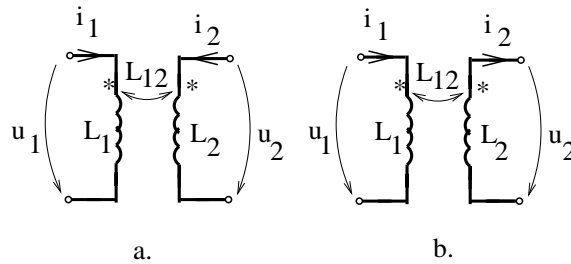


Fig. 1.4.6.

**1.4.14.** Să se calculeze intensitățile curenților prin bobinele liniare cuplate din figura 1.4.6, pentru:

$$u_1 = U_{01}\sin(\omega t), \quad u_2 = U_{02}\cos(\omega t);$$

$$L_1 = L_2 = 0.1H, \quad L_{12} = L_1/2.$$

Problema va fi rezolvată în două variante:

- a)  $i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0;$
- b)  $i_1(0) = I_{10}, \quad i_2(0) = I_{20}.$

Să se calculeze puterea absorbită de sistemul de bobine.

**1.4.15.** Să se determine parametrii elementelor ideale ale rețelelor din figura 1.4.7, știind că aceste rețele admit drept grafuri de tensiune și curent grafurile

# 1. FUNDAMENTELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

reprezentate în aceeași figură. Să se verifice bilanțul puterilor.

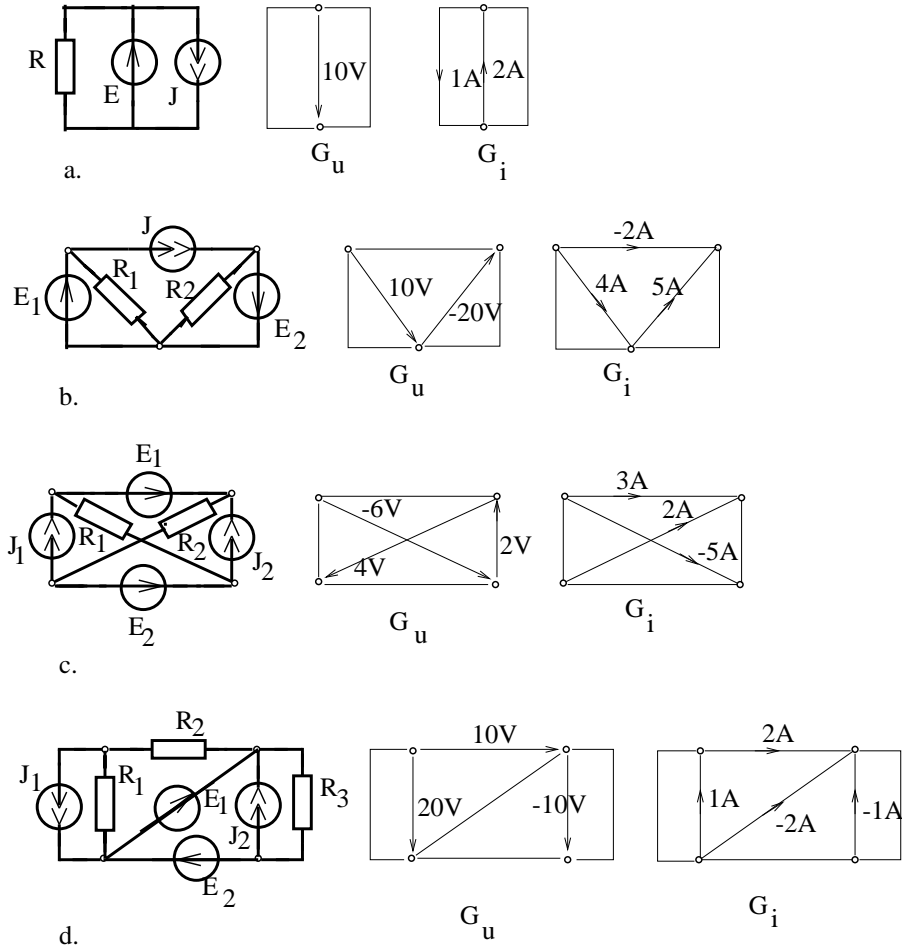


Fig. 1.4.7.

**1.4.16.** Să se determine generatoarele în exces din rețelele prezentate în figura 1.4.8. Care sunt condițiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii generatoarelor pentru ca rețelele să fie compatibile ?

**1.4.17.** Se consideră rețelele prezentate în figura 1.4.9. Pentru fiecare rețea să se determine un arbore în ramurile căruia se află doar generatoare ideale de tensiune. Aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff, să se determine tensiunile din coarde. Prin aplicarea ecuațiilor de funcționare ale elementelor din coarde, să se determine curenții din coarboare și apoi curenții din ramuri. Să se verifice bilanțul puterilor.

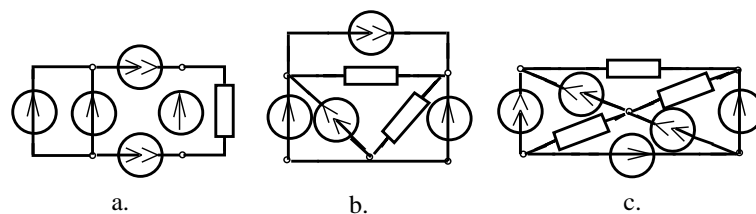


Fig. 1.4.8.

**1.4.18.** Se consideră rețelele prezentate în figura 1.4.11. Pentru fiecare rețea să se determine un coarboare în coardele căruia se află doar generatoare ideale de curent. Prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff, să se determine curenții din arbore. Aplicând ecuațiile caracteristice ale elementelor din ramuri să se calculeze tensiunile din arbore. Să se determine tensiunile din coarboare. Să se verifice bilanțul puterilor.

**1.4.19.** Să se reprezinte grafurile complete de tensiune și curent ale rețelelor reprezentate în figura 1.4.10. Să se verifice bilanțul puterilor. Pentru rezolvare se va folosi algoritmul convenabil dintre cei prezentați în problemele 1.4.9 și 1.4.11.



1. FUNDAMENTELE TEORIEI CIRCUITELOR ELECTRICE

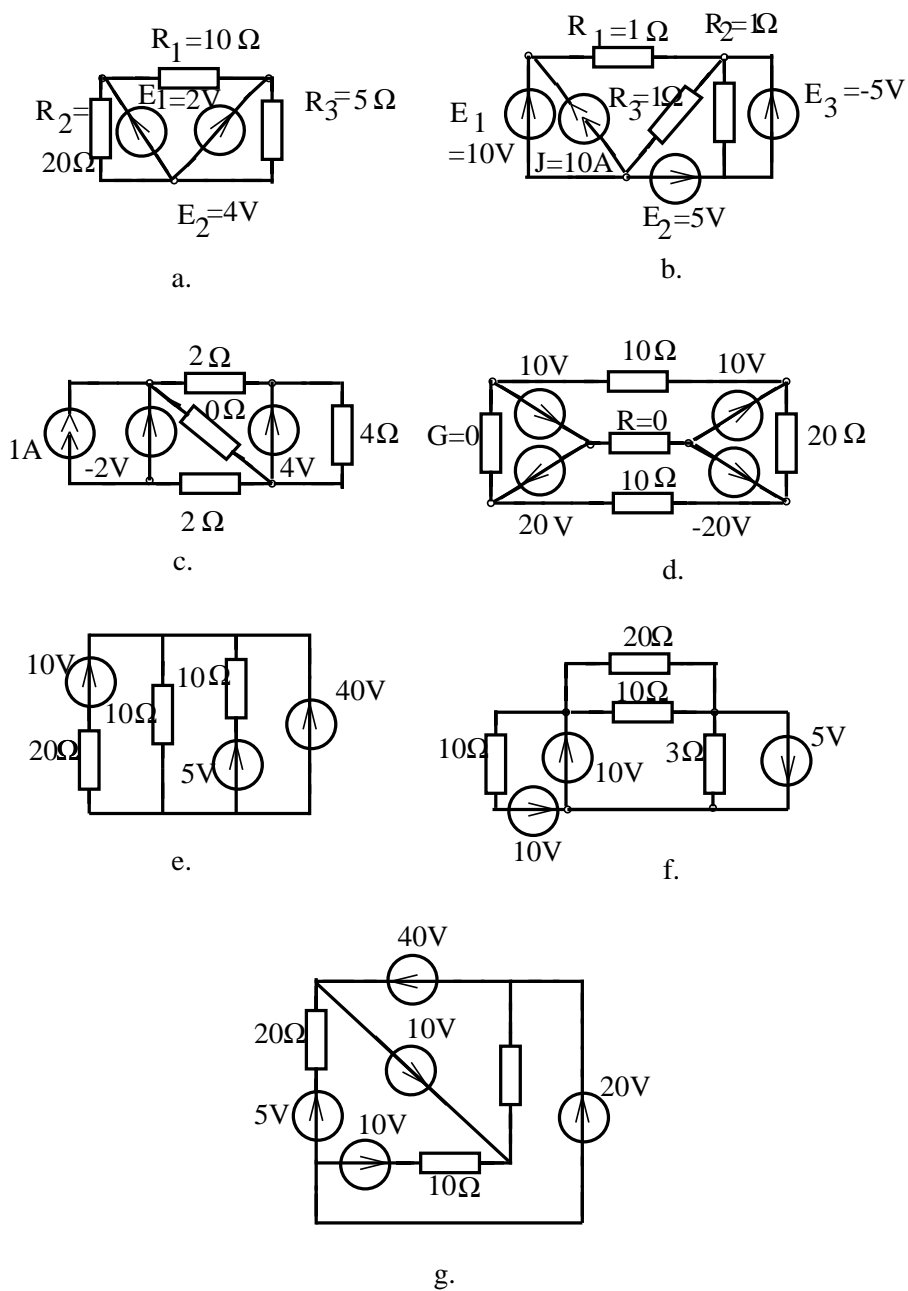


Fig. 1.4.9.

1.4. ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT

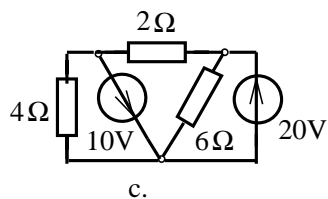
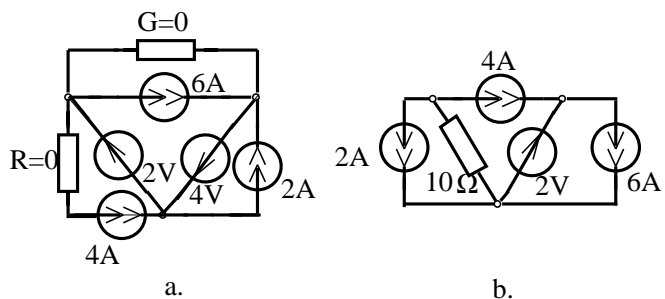


Fig. 1.4.10.

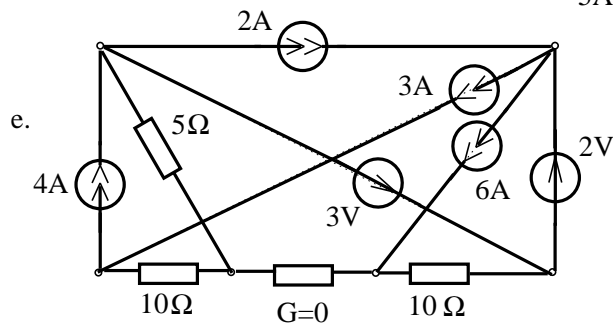
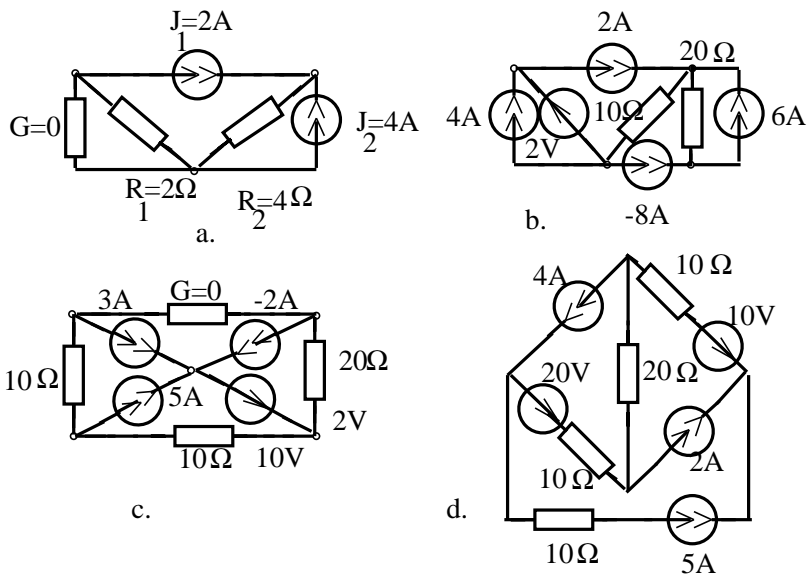


Fig. 1.4.11.



# Capitolul 2

## Circuite electrice rezistive liniare

### 2.1 Teoreme de echivalență

#### BREVIAR

Două elemente dipolare de circuit electric sunt *echivalente* dacă au ecuații caracteristice identice, respectiv dacă elementele impun aceeași relație între tensiunea la borne și curentul prin element.

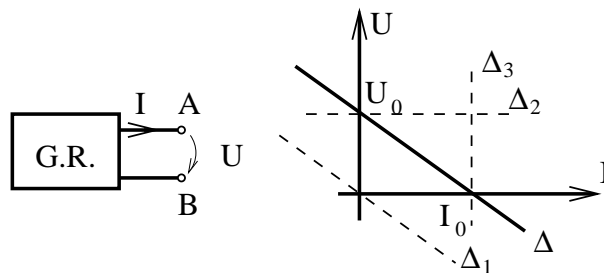


Fig. 2.1.

Un element dipolar de circuit electric se numește **generator real** dacă reprezentarea grafică a ecuației caracteristice în planul  $U, I$  este o dreaptă ce intersectează ambele axe (dreapta  $\Delta$  figura 2.1).

Elementele rezistor liniar ideal, generator ideal de tensiune și generator ideal de curent sunt cazuri limită ale generatorului real și anume: dreapta  $\Delta_1$  trece prin origine; dreapta  $\Delta_2$  este paralelă cu axa curentului, respectiv dreapta  $\Delta_3$  paralelă cu axa tensiunii. În cazul izolatorului perfect dreapta  $\Delta$  se identifică cu axa tensiunii, iar în cazul conductorului perfect ea se identifică cu axa curentului.

Intersecția dreptei caracteristice a unui generator real cu axele determină cei doi parametri caracteristici ai generatorului. *Tensiunea de mers în gol* este tensiunea  $U_0 = U(0)$  pentru un curent nul prin generator. *Curentul de scurtcircuit*

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

este curentul  $I_0$  ce străbate generatorul real atunci când tensiunea la bornele sale este nulă.

Generatorul real admite schemele echivalente alcătuite din elemente ideale prezentate în figura 2.2.

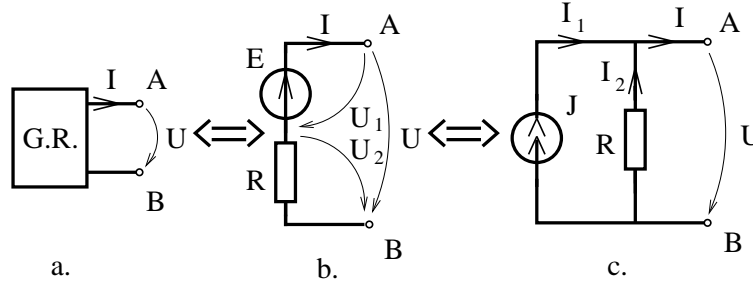


Fig. 2.2.

Circuitul dipolar realizat dintr-un generator ideal de tensiune înseriat cu un rezistor (fig. 2.2.b) se numește **generator real de tensiune**. Un generator real de tensiune caracterizat de parametrii  $(E,R)$ , în care  $E$  se numește *tensiune electromotoare a generatorului* real de tensiune, iar  $R$  se numește *rezistență internă* a generatorului real de tensiune.

Circuitul dipolar realizat dintr-un generator ideal de curent în paralel cu un rezistor (fig. 2.2.c) se numește **generator real de curent**. Un generator real de curent este caracterizat de parametrii  $(J,R)$  în care  $J$  se numește *curentul electromotor* al generatorului, iar  $R$  se numește *rezistența sa internă*.

Următoarele afirmații permit evidențierea echivalenței între elementele introduse. Un generator real este echivalent cu un generator real de tensiune dacă tensiunea de mers în gol a generatorului real este egală cu tensiunea electromotoare a generatorului real de tensiune  $U_0 = E$  iar rezistența internă a generatorului real de tensiune este egală cu raportul dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit  $R = U_0/I_0$ . Pentru demonstrarea acestei afirmații, este suficient să se aplice a doua teoremă a lui Kirchhoff în figura 2.2.b:

$$U = U_1 + U_2 = E - RI, \quad (2.1)$$

obținându-se ecuația de funcționare a generatorului real de tensiune care este o funcție afină al cărei grafic este o dreaptă ce intersectează axele în punctele  $U_0 = E$  și  $I_0 = U_0/R$ .

Analizând ecuația de funcționare (2.1) rezultă că un generator real de tensiune degenerază într-un generator ideal de tensiune dacă rezistența internă  $R = 0$ , sau poate degenera într-un rezistor dacă tensiunea electromotoare  $E$  se anulează. Din acest motiv se spune că generatorul ideal de tensiune are rezistența internă nulă.

Un generator real este echivalent cu un generator real de curent având curentul electromotor egal cu curentul de scurtcircuit al generatorului real și rezistența internă egală cu raportul dintre tensiunea de mers în gol și curentul de scurtcircuit  $R = U_0/I_0$ . Pentru demonstrație, se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în figura 2.2.c:

$$I = I_1 + I_2 = J - \frac{U}{R}, \quad (2.2)$$

obținându-se ecuația de funcționare a generatorului real de curent, ca o funcție afină al cărei grafic este o dreaptă având tăieturile :  $I_0 = J$  și  $U_0 = RJ$ .

Analizând relația (2.2) rezultă că un generator real de curent poate degenera într-un generator ideal de curent dacă rezistența internă  $R \rightarrow \infty$  (conductanța internă  $G = 1/R$  se anulează), sau poate degenera într-un rezistor atunci când se anulează curentul electromotor  $J = 0$ . Din acest motiv se spune că rezistența internă a unui generator ideal de curent este infinită.

Ca o consecință a acestor afirmații rezultă **teorema de echivalență dintre un generator real de tensiune și un generator real de curent** care afirmă că circuitele din figura 2.2.b și 2.2.c sunt echivalente dacă au aceeași rezistență internă și dacă:

$$\boxed{\begin{array}{l} J = E/R; \\ E = RJ. \end{array}} \quad (2.3)$$

Condiția de echivalență dintre cele două generatoare este o consecință a tranzitivității relației de echivalență sau poate fi obținută prin identificarea relațiilor de funcționare (2.1) și (2.2).

Importanța practică a teoremelor de echivalență constă în faptul că, dacă se înlocuiește într-o rețea un element dipolar (sau o subrețea dipolară) cu un element echivalent, atunci curenții și tensiunile din restul rețelei nu se modifică. Această observație permite simplificarea rețelelor electrice prin transfigurări succesive.

**Generatoare reale de tensiune conectate în serie.** Un grup de  $n$  generatoare reale de tensiune cu parametrii  $(E_k, R_k)$   $k=1\dots n$ , conectate în serie (fig. 2.3) este echivalent cu un generator real de tensiune având tensiunea electromotoare:

$$\boxed{E = \sum_{k=1}^n E_k} \quad (2.4)$$

și rezistența internă:

$$\boxed{R = \sum_{k=1}^n R_k.} \quad (2.5)$$

Suma (2.4) este algebrică, în sensul că se trec cu plus termenii  $E_k$  dacă au același sens cu tensiunea electromotoare echivalentă  $E$  și se trec cu minus tensiunile electromotoare care au sens opus.

Ținând cont că un generator real de tensiune degenerază într-un rezistor ideal sau într-un generator ideal dacă  $E=0$  sau respectiv dacă  $R=0$ , rezultă că relația

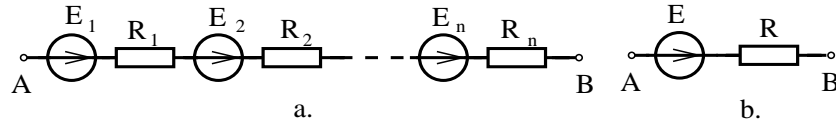


Fig. 2.3.

(2.4) permite calculul tensiunii electromotoare echivalente în cazul generatoarelor ideale conectate în serie, iar relația (2.5) permite calculul rezistenței echivalente în cazul rezistoarelor conectate în serie.

**Generatoare reale de tensiune conectate în paralel.** Un grup de  $n$  generatoare reale de tensiune cu parametrii  $(E_k, R_k)$ ,  $k=1\dots n$ , conectate în paralel (fig. 2.4) este echivalent cu un generator de tensiune având tensiunea electromotoare:

$$E = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} \quad (2.6)$$

și rezistența internă:

$$R = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}. \quad (2.7)$$

Suma de la numărătorul relației (2.6) este algebrică, în sensul că se trec cu plus tensiunile electromotoare  $E_k$  dacă au același sens cu tensiunea electromotoare echivalentă  $E$  și se trec cu minus tensiunile electromotoare care au sensuri opuse tensiunii electromotoare echivalente.

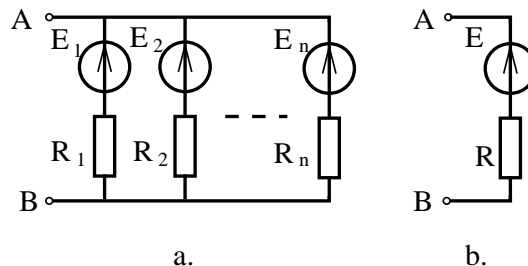


Fig. 2.4.

Relația (2.6) exprimă faptul că tensiunea electromotoare echivalentă  $E$  este

media ponderată a tensiunilor  $E_k$  cu ponderile  $G_k = 1/R_k$ :

$$E = \frac{\sum_{k=1}^n E_k G_k}{\sum_{k=1}^n G_k}. \quad (2.8)$$

Cu notația  $G = 1/R$ , rezultă pentru conductanța internă expresia:

$$\boxed{G = \sum_{k=1}^n G_k}; \quad (2.9)$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}. \quad (2.10)$$

Prezintă interes practic următoarele cazuri particulare:

**a)** rezistoare conectate în paralel ( $E_k=0$ ):

$$G = \sum_{k=1}^n G_k, \quad E = 0; \quad (2.11)$$

**b)** rezistențe interne egale ( $R_k = R_0$ ):

$$E = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_k, \quad R = \frac{R_0}{n}, \quad (2.12)$$

situație în care tensiunea electromotoare echivalentă este media aritmetică a tensiunilor electromotoare  $E_k$ , iar rezistența internă este de  $n$  ori mai mică decât cea a fiecărui rezistor;

**c)** una din rezistențele interne nulă ( $R_1 = 0, G_1 \rightarrow \infty$ ):

$$E = E_1, \quad R = 0; \quad (2.13)$$

**d)** mai multe rezistențe interne nule generează o nedeterminare ce se explică prin faptul că rețeaua este incompatibilă dacă tensiunile electromotoare sunt diferite;

**e)** cazul a două surse conectate în paralel ( $n=2$ ):

$$E = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}, \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.14)$$

Din cazul particular **c** rezultă că un generator ideal de tensiune electromotoare  $E$ , conectat în paralel cu un generator real, este echivalent cu generatorul ideal de tensiune electromotoare  $E$ . Afirmatia este valabilă și pentru conductorul perfect deoarece acesta este un caz particular de generator ideal de tensiune (fig. 2.7.a).



**Generatoare reale de curent conectate în paralel.** Un grup de  $n$  generatoare reale de curent cu parametrii  $(J_k, R_k)$ ,  $k=1\dots n$ , conectate în paralel (fig. 2.5) este echivalent cu un generator real de curent având curentul electromotor:

$$J = \sum_{k=1}^n J_k \quad (2.15)$$

și conductanța internă:

$$G = \sum_{k=1}^n G_k, \quad (2.16)$$

sau echivalent

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}. \quad (2.17)$$

Suma (2.15) este o sumă algebrică, în care termenii  $J_k$  se trec cu plus dacă au același sens față de curentul electromotor echivalent  $J$  și cu minus în caz contrar.

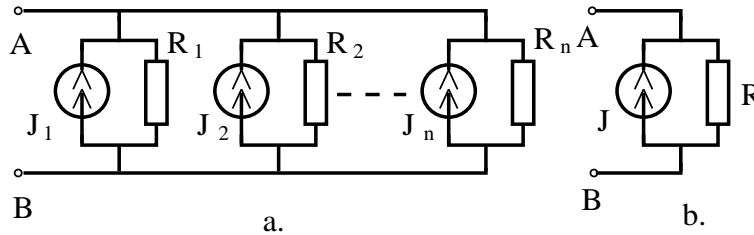


Fig. 2.5.

Ținând cont că un generator real de curent degenerează într-un generator ideal de curent atunci când  $G_k = 0$  ( $R_k \rightarrow \infty$ ), rezultă că relația (2.15) poate fi utilizată la calculul curentului electromotor echivalent generatoarelor ideale de curent conectate în paralel.

**Generatoare reale de curent conectate în serie.** Un grup de  $n$  generatoare reale de curent cu parametrii  $(J_k, R_k)$ ,  $k=1\dots n$ , conectate în serie (fig. 2.6), este echivalent cu un generator real de curent având curentul electromotor:

$$J = \frac{\sum_{k=1}^n J_k R_k}{\sum_{k=1}^n R_k} \quad (2.18)$$

și rezistența internă:

$$R = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (2.19)$$

Suma de la numărătorul relației (2.18) este o sumă algebrică în sensul că se trec cu plus curenții  $J_k$  dacă sunt în sensul curentului echivalent  $J$  și cu minus în caz contrar.

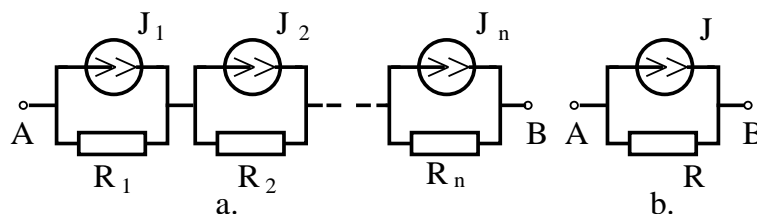


Fig. 2.6.

Relația (2.18) exprimă faptul că, pentru generatorul echivalent, curentul electromotor este media ponderată a curenților electromotori  $J_k$ , având drept ponderi rezistențele  $R_k$ .

Se constată că, atunci când se consideră  $n$  generatoare ideale de curent în serie ( $R_k \rightarrow \infty$ ), relația (2.18) generează o nedeterminare care poate fi explicată prin faptul că acest circuit este incompatibil pentru curenți electromotori diferiți.

Dacă un singur generator are rezistența internă infinită (este generator ideal), atunci curentul electromotor echivalent este egal cu curentul electromotor al acestui generator iar rezistența internă echivalentă este infinită. Rezultă că un generator ideal de curent  $J$  conectat în serie cu un generator real este echivalent cu generatorul ideal de curent  $J$  (fig. 2.7.b). Afirmarea este valabilă și pentru izolatorul perfect care este un caz limită al generatorului ideal de curent.

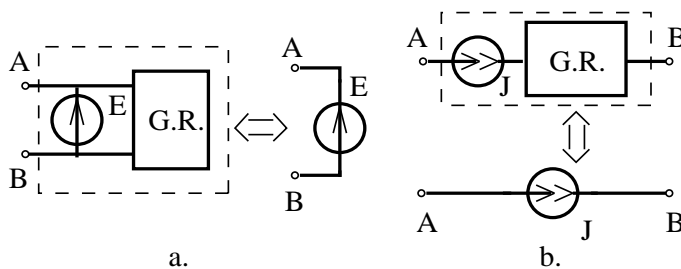


Fig. 2.7.

În anumite situații, conceptul de element dipolar de circuit nu este suficient și este necesară utilizarea *elementului multipolar de circuit electric*, definit ca un domeniu spațial ce interacționează electric cu exteriorul prin intermediul a  $n$  borne. Caracterizarea stării unui multipol se face cu ajutorul celor  $n$  curenți  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , unde  $k=1 \dots n$ , injectați în borne și a celor  $(n-1)$  tensiuni  $U_{1n}, U_{2n}, \dots, U_{n-1,n}$ .

Echivalența între doi multipoli trebuie înțeleasă în sensul că ei impun aceeași relație între curenții și tensiunile la borne.

**Echivalența stea-poligon complet.** Condiția ca un multipol cu  $n$  borne, cu o structură internă în stea (fig. 2.8.a), să fie echivalent la borne cu un multipol având structura internă de tip poligon complet (fig. 2.8.b) este:

$$G_{kj} = \frac{G_k G_j}{\sum_{i=1}^n G_i}; \quad (2.20)$$

$$E_{kj} = E_k - E_j. \quad (2.21)$$

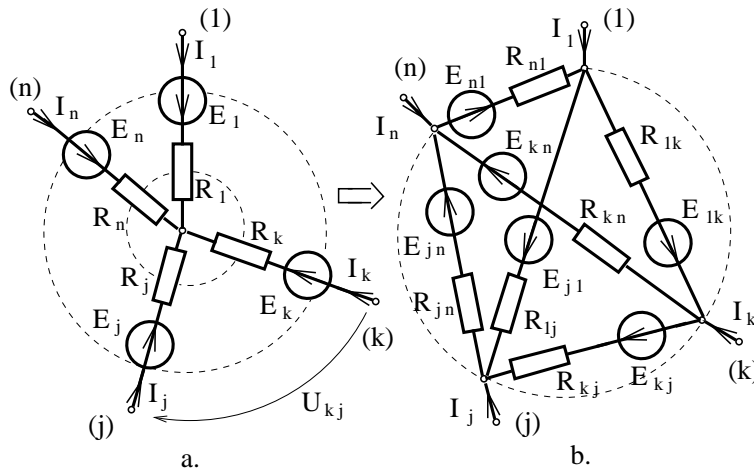


Fig. 2.8.

Relațiile (2.20), (2.21) permit transfigurarea unei stele într-un poligon complet prin eliminarea nodului central. În cazul în care steaua este pasivă (nu conține generatoare) atunci și poligonul va fi pasiv și va avea între nodurile  $k$  și  $j$  un rezistor de conductanță  $G_{kj} = 1/R_{kj}$ , a cărei valoare se calculează cu relația (2.20).

Valorile date de relația (2.21) pentru tensiunile electromotoare ale poligonului nu sunt singurele posibile, problema transfigurării din stea activă în poligon complet activ neavând soluție unică.

În cazul particular  $n=3$  transfigurarea stea-triunghi se face cu relațiile:

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, & E_{12} &= E_1 - E_2; \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, & E_{23} &= E_2 - E_3; \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}, & E_{31} &= E_3 - E_1; \end{aligned} \quad (2.22)$$

sau în funcție de rezistențe:

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}; \\ R_{23} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}; \\ R_{31} &= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dacă rezistențele din brațele stelei sunt egale atunci  $R_{\Delta} = 3R_Y$ .

Problema transfigurării stea-poligon complet are totdeauna soluție pe când problema inversă a transfigurării poligon-stea are soluție doar în cazul particular  $n=3$ .

Pentru transfigurarea triunghi-stea (fig. 2.9) se aplică relațiile:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, & J_1 &= J_{12} - J_{31}; \\ R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, & J_2 &= J_{23} - J_{12}; \\ R_3 &= \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, & J_3 &= J_{31} - J_{23}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

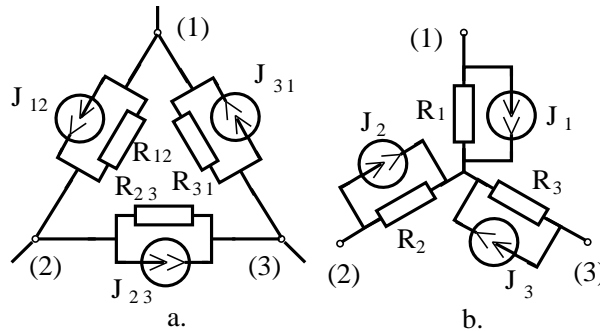


Fig. 2.9.

Faptul că orice stea poate fi transfigurată în poligon complet are importanță deoarece în acest fel orice nod al unei rețele poate fi eliminat și, prin transfigurări repetate, orice rețea electrică poate fi redusă, față de două borne, la un generator echivalent. Această metodă care permite calculul curentului ce străbate o latură a unui circuit prin reducerea restului circuitului la generatorul echivalent ce alimentează acea latură se numește **metoda generatoarelor echivalente**. Pentru calculul curenților și tensiunilor din celelalte laturi ale circuitului se parcurge drumul invers, calculând din aproape în aproape tensiunile și curenții.

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

Metoda generatoarelor echivalente este eficientă, mai ales atunci când laturile sunt conectate serie, paralel și interesează curentul printr-o singură latură.

Pentru exploatarea rezultatelor obținute în această metodă sunt utilizate relațiile prezentate în continuare.

**Relația divizorului de tensiune** permite calculul tensiunilor la bornele a două rezistoare  $R_1$  și  $R_2$ , conectate în serie, în funcție de tensiunea totală aplicată (fig. 2.10a).

$$\begin{aligned} U_1 &= U \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \\ U_2 &= U \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

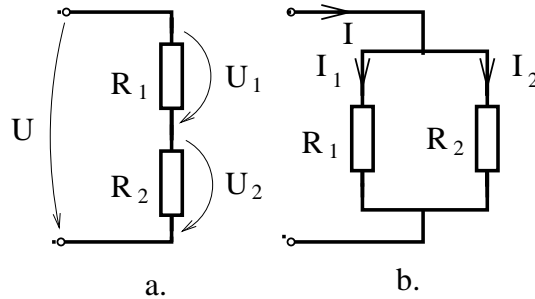


Fig. 2.10.

**Relația divizorului de curent** permite calculul curentilor ce străbat două rezistoare  $R_1$  și  $R_2$ , conectate în paralel, în funcție de curentul total  $I$  (fig. 2.10.b).

$$\begin{aligned} I_1 &= I \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \\ I_2 &= I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

### Observații asupra relațiilor de echivalență:

Relațiile de echivalență între rețelele electrice pot fi de mai multe feluri, între aceste relații putându-se stabili chiar o ordine, unele fiind mai fine, altele mai grosiere.

Relația de echivalență cea mai fină este exemplificată de circuitele din figura 2.11.a și 2.11.b. Cele două circuite au aceeași matrice de apartenență a laturilor la noduri și au aceleași elemente pe laturile corespondente. Cele două rețele nu pot fi deosebite una de cealaltă în teoria circuitelor, această relație de echivalență fiind o relație de identitate.

Circuitul reprezentat în figura 2.11.c se deosebește de cel din figura 2.11.a prin faptul că numerotarea laturilor este făcută în alt mod, fără ca sensurile de referință, conexiunea sau elementele din laturi să fie schimbate. Circuitul din figura 2.11.c este echivalent cu cel din figura 2.11.a, dar cu o relație de echivalență mai slabă decât identitatea definită anterior. În acest nou caz, două circuite se consideră echivalente dacă matricea de incidență a unuia se obține din matricea de incidență a celuilalt prin permutarea coloanelor.

Un al treilea tip de echivalență, mai slab decât cele anterioare, este evidențiat în circuitul din figura 2.11.d, care se deosebește de circuitul din figura 2.11.a prin ordinea adoptată la numerotarea laturilor, dar mai ales prin faptul că sensurile de referință ale laturilor nu coincid la laturile corespondente. În acest caz matricile de incidență pentru grafurile neorientate (obținute prin eliminarea semnelor elementelor matricilor de incidență) sunt fie egale, fie se obțin una din alta prin permutările coloanelor.

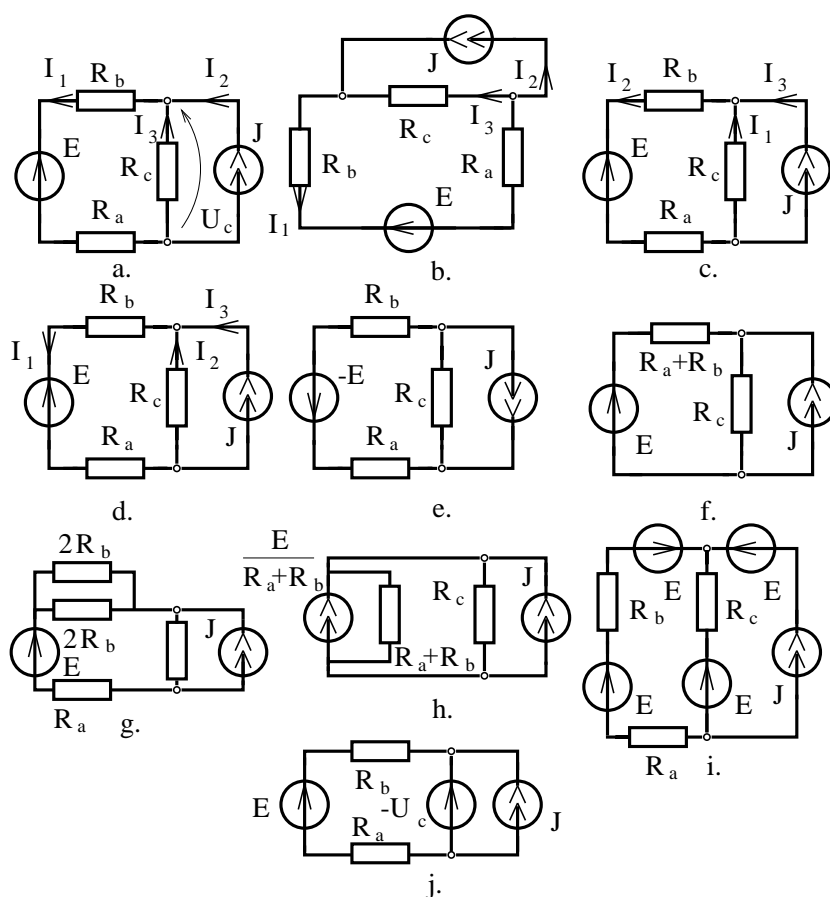


Fig. 2.11.

Din punctul de vedere al generatoarelor, se poate defini o nouă relație de

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

echivalență pornind de la observația că săgeata tensiunii electromotoare și dubla săgeată a curentului electromotor își pot schimba sensurile, cu condiția să se schimbe semnul parametrului  $E$  sau  $J$  iar curenții și tensiunile circuitului nu se modifică. Din acest punct de vedere circuitul din figura 2.11.a și cel din figura 2.11.e sunt echivalente.

O altă relație de echivalență între circuite se poate obține dacă se consideră că o clasă de echivalență conține toate circuitele ce diferă unul de celălalt, doar printr-o subrețea (eventual dipolară), iar toate circuitele dintr-o clasă de echivalență au aceleași tensiuni și aceiași curenți în exteriorul subrețelei transfigurată.

Dacă o clasă de echivalență se desparte în subclase la care condiția de echivalență este ca suma puterilor consumate de rezistoare să fie aceeași, atunci se obține o relație de echivalență mai fină.

De exemplu, circuitele din figurile 2.11.a, f, g și h sunt echivalente în sensul definit anterior, subrețeaua transfigurată fiind latura din stânga circuitului. Dacă în condiția de echivalență se impune ca puterea consumată să nu se modifice, atunci circuitele a, f, g sunt echivalente, în schimb circuitul h face parte din altă clasă de echivalență.

Dintre echivalențele pe la borne evidențiate de teoremele prezentate anterior, numai echivalențele definite de generatoarele de tensiune serie și generatoarele de curent paralel satisfac condiția că elementul echivalent disipă aceeași putere în rezistoare ca elementele inițiale. Această condiție nu este îndeplinită în cazul echivalenței generator de tensiune - generator de curent, sau al echivalențelor definite de generatoarele de tensiune paralel - generatoarele de curent serie.

Din aceeași categorie de relații de echivalență face parte și echivalența indusă de teorema lui Vaschy (enunțată în paragraful 3.5). Circuitul din figura 2.11.i este echivalent cu circuitul din figura 2.11.a, nodul superior fiind echivalent cu steaua celor trei generatoare.

Un ultim fel de relație de echivalență este generat de teorema substituției (fig. 2.11.j). Spre deosebire de echivalențele anterioare, cele generate de teorema substituției sunt mai slabe, deoarece curenții din cele două circuite, inițial echivalente, nu se mai păstrează egali dacă parametrul unui element de circuit se modifică simultan la cele două circuite (fig. 2.11.a, j).

**PROBLEME**

**2.1.1.** Să se determine generatorul real de tensiune echivalent generatorului din figura 2.1.1 și să se reprezinte grafic ecuația sa de funcționare.

**2.1.2.** Să se determine generatorul real de curent echivalent generatorului din figura 2.1.2 și să se se reprezinte grafic ecuația sa de funcționare.

**2.1.3.** Să se demonstreze că ecuația de funcționare a elementului dipolar reprezentat în figura 2.1.3 nu depinde de poziția comutatorului K.

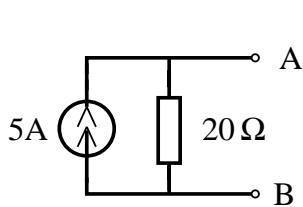


Fig. 2.1.1.

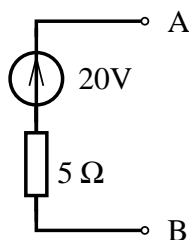


Fig. 2.1.2.

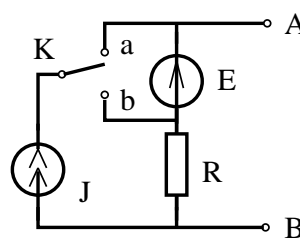


Fig. 2.1.3.

**2.1.4.** Să se determine generatoarele echivalente dipolului din figura 2.1.4.a, a cărei ecuație de funcționare este reprezentată grafic în figurile 2.1.4.b-h.

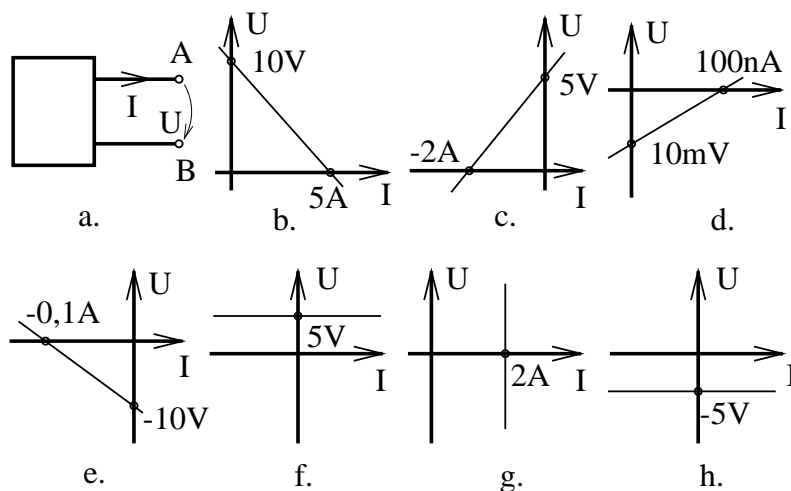


Fig. 2.1.4.

**2.1.5.** Să se determine generatoarele echivalente dipolului din figura 2.1.5 a cărei ecuație de funcționare se consideră reprezentată grafic în figurile 2.1.4.b-h.

**2.1.6.** Să se demonstreze relațiile (2.5) - (2.10).



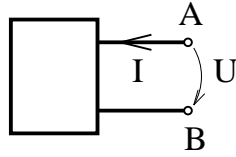


Fig. 2.1.5.

**2.1.7.** Să se demonstreze relațiile (2.18) și (2.19).

**2.1.8.** Să se demonstreze relațiile (2.20) și (2.21).

**2.1.9.** Să se demonstreze relațiile (2.24).

**2.1.10.** Să se determine generatoarele reale de curent și de tensiune echivalente elementelor dipolare reprezentate în figura 2.1.6.

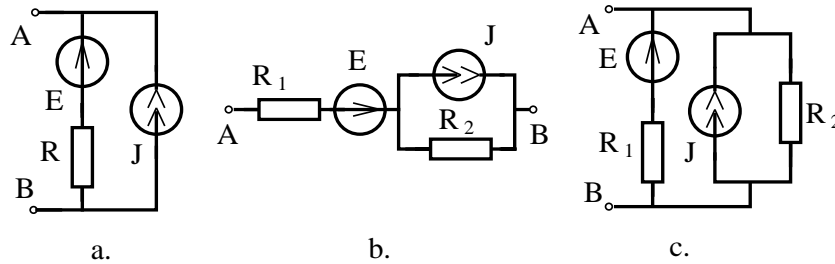


Fig. 2.1.6.

**2.1.11.** Se consideră pe rând toate combinațiile de câte două elemente din lista prezentată în figura 2.1.7. Să se determine ecuația de funcționare și schema echivalentă a perechii de elemente considerate, conectate în serie.

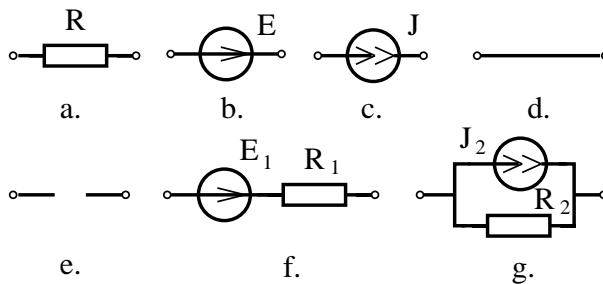


Fig. 2.1.7.

**2.1.12.** Să se rezolve problema 2.1.11 considerând elementele conectate în paralel.

**2.1.13.** Să se calculeze rezistența echivalentă între bornele A și B pentru rețelele rezistive din figura 2.1.10.

**2.1.14.** Să se determine rezistențele echivalente între perechile de borne A-B, B-C, A-C pentru circuitele reprezentate în figurile 2.1.8.a-f.

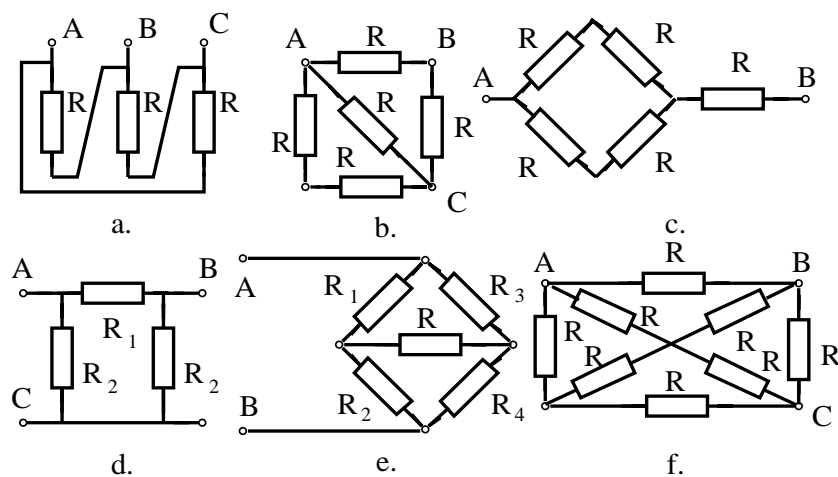


Fig. 2.1.8.

**2.1.15.** Să se calculeze rezistența  $R_{AB}$  pentru diferite poziții ale comutatoarelor din circuitul reprezentat în figura 2.1.9.

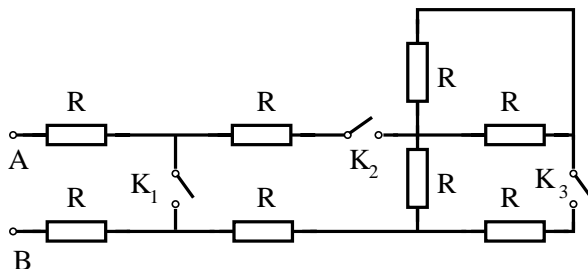


Fig. 2.1.9.

**2.1.16.** Să se determine generatoarele echivalente față de bornele A și B ale rețelelor din figurile 2.1.11 și 2.1.12.

2. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE LINEARI

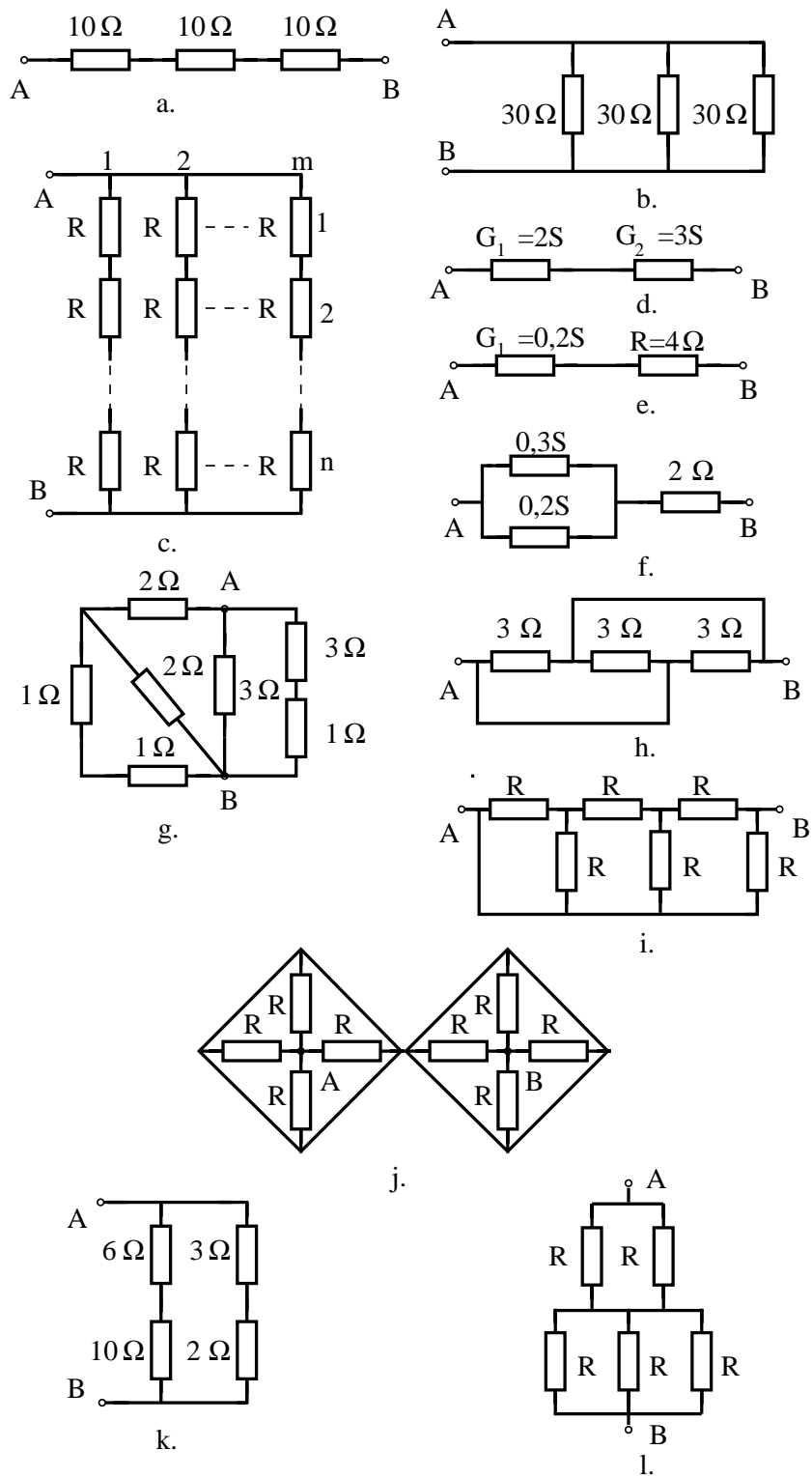


Fig. 2.1.10.

2.1. TEOREME DE ECHIVALENȚĂ

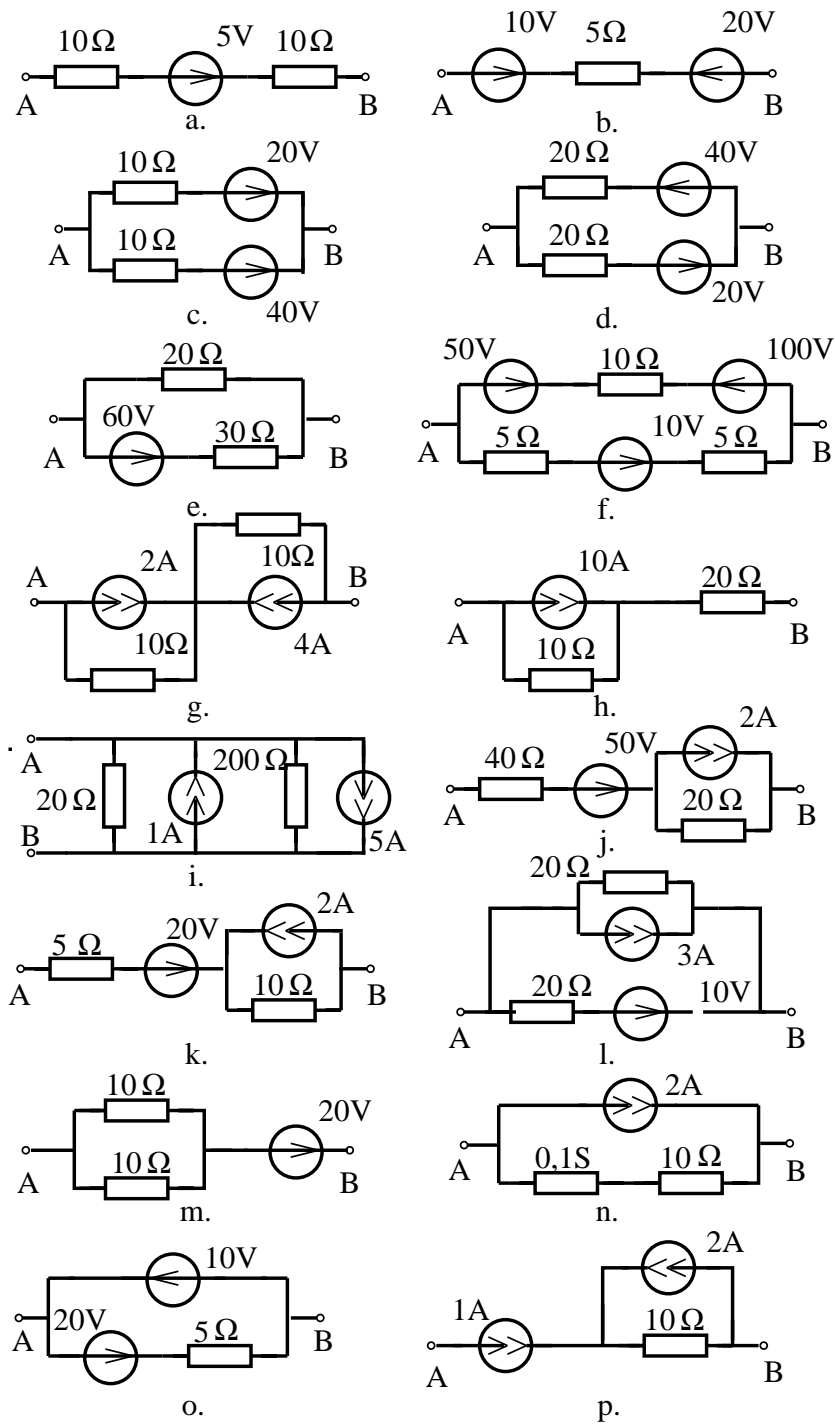


Fig. 2.1.11.

2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

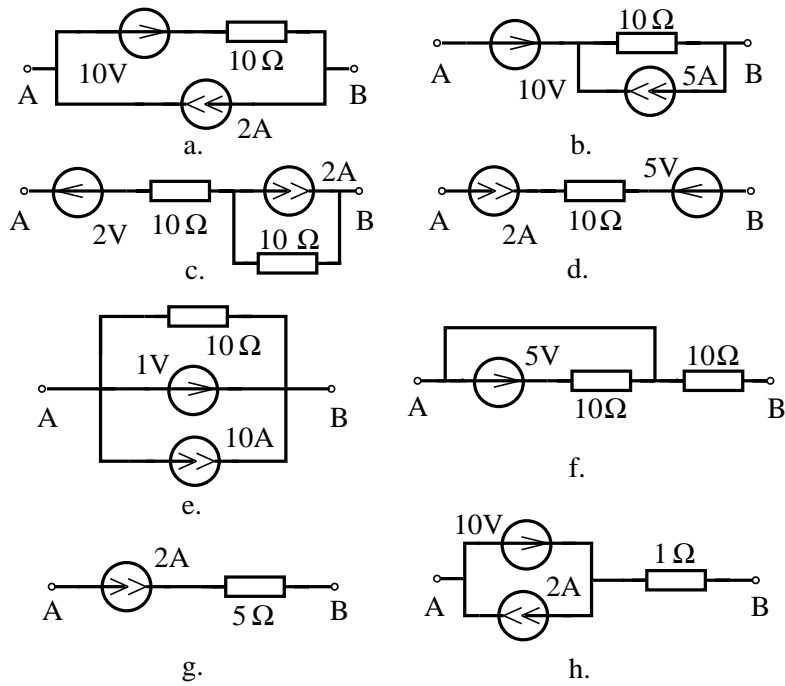


Fig. 2.1.12.

2.1.17. Să se calculeze rezistențele echivalente între bornele A și B pentru circuitele infinite din figura 2.1.13.

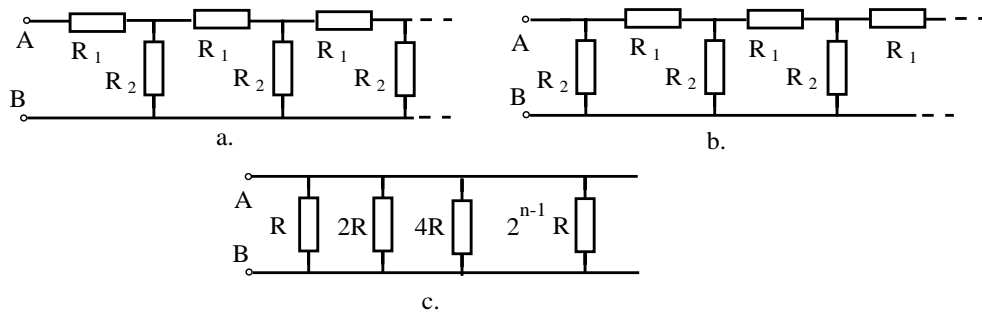


Fig. 2.1.13.

**2.1.18.** Să se determine generatoarele echivalente de curent față de perechile de borne A-B, B-C, A-C pentru circuitele din figura 2.1.14.

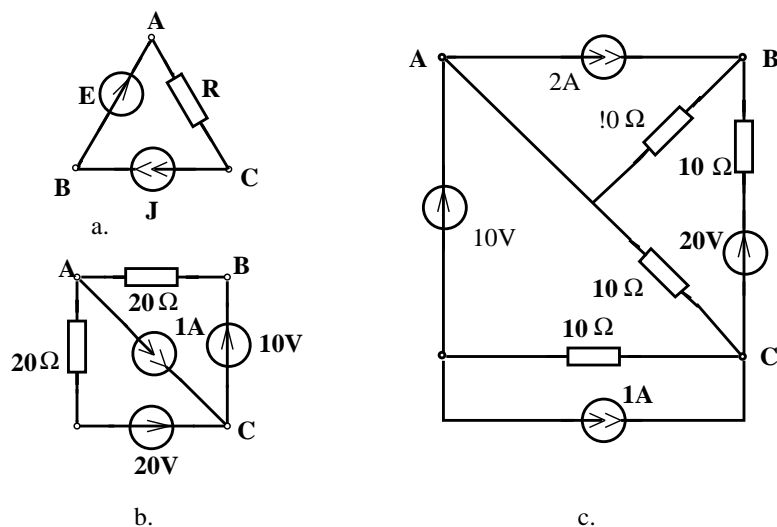


Fig. 2.1.14.

**2.1.19.** Să se determine generatoarele echivalente de tensiune față de perechile de borne A-B, B-C, A-C pentru circuitele din figura 2.1.14.

**2.1.20.** Să se calculeze rezistența echivalentă între bornele A și B aplicând configurarea stea-polygon în circuitele din figurile 2.1.15.a-c.

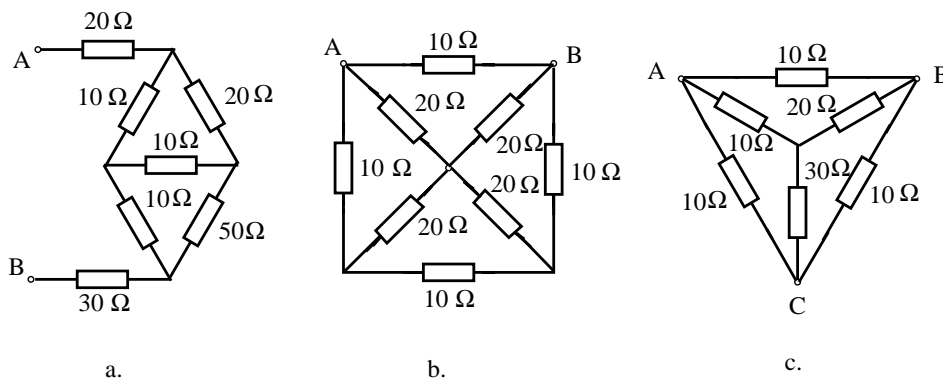


Fig. 2.1.15.

**2.1.21.** Să se determine generatorul echivalent între bornele A și B aplicând

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

transfigurarea stea-polygon în circuitele din figurile 2.1.16.a-c.

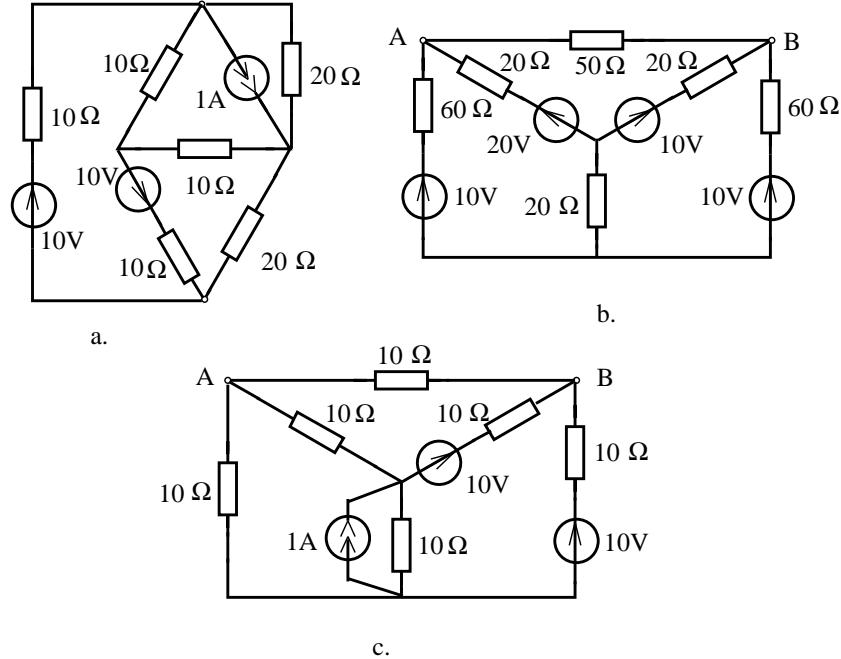


Fig. 2.1.16.

**2.1.22.** Să se transfigureze circuitele triunghi reprezentate în figura 2.1.17 în circuite stea.

**2.1.23.** Să se determine generatoarele echivalente de curent și tensiune față de bornele A și B pentru circuitele din figura 2.1.18.

**2.1.24.** Să se determine intensitățile curenților și tensiunile la circuitele din figura 2.1.19, prin calculul rezistenței echivalente la bornele generatorului și apoi cu ajutorul relațiilor divizorului de curent și de tensiune.

**2.1.25.** Fie grafurile prezentate în figura 2.1.20. Să se prezinte lista transfigurărilor serie, paralel sau stea-polygon ce trebuie efectuate pentru a reduce graful la o latură între două noduri. Se vor considera pe rând diferite perechi de noduri.

**2.1.26.** Aplicând metoda generatoarelor echivalente, să se calculeze intensitatea curentului I pentru circuitele din figura 2.1.21. Pornind de la curentul I să se determine apoi ceilalți curenți.

**2.1.27.** Fie două rezistoare având rezistențele  $R_1$  și  $R_2$  conectate în serie. Să se calculeze și să se reprezinte grafic eroarea relativă  $\varepsilon_r(R_1) = (R_a - R_e)/R_e$  ce se

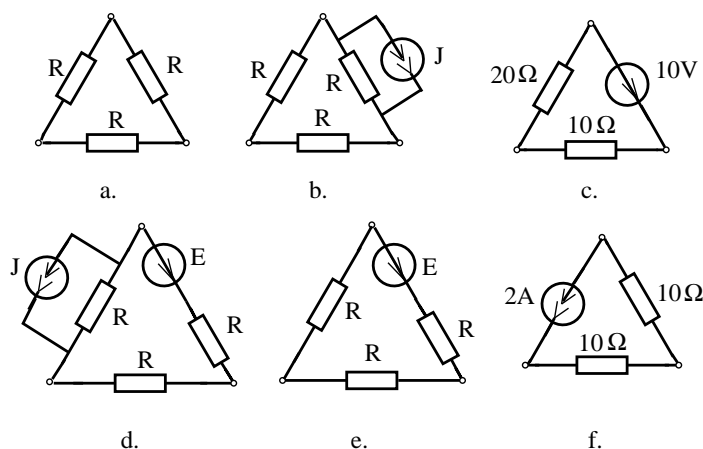


Fig. 2.1.17.

face asupra rezistenței echivalente  $R_e$  atunci când se presupune în circuit numai rezistența  $R_a=R_2$ .

**2.1.28.** Fie două rezistoare având rezistențele  $R_1$  și  $R_2$ , conectate în paralel. Să se calculeze și să se reprezinte grafic eroarea relativă  $\varepsilon_r(R_1) = (R_a - R_e)/R_e$  ce se face asupra rezistenței echivalente  $R_e$  atunci când se presupune în circuit numai rezistența  $R_a=R_2$ .

**2.1.29.** Ținând seama de soluția problemelor 2.1.27 și 2.1.28, să se calculeze valoarea aproximativă a rezistenței echivalente între bornele A și B în circuitele din figura 2.1.22.

**2.1.30.** Fie un generator real de tensiune cu parametrii  $(E,r)$  la bornele căruia este conectată o rezistență de sarcină  $R$ . Să se calculeze eroarea relativă ce se face asupra curentului de sarcină  $\varepsilon_I = (I - I_a)/I$  și asupra tensiunii  $\varepsilon_U = (U - U_a)/U$  și să se reprezinte grafic aceste erori în funcție de rezistența  $R$ , atunci când se înlocuiește generatorul real cu un generator ideal cu tensiune electromotoare  $E$  (se neglijează rezistența internă  $r$  ca în figura 2.1.23.b).

**2.1.31.** Fie un generator real de curent cu parametrii  $(J,r)$ , la bornele căruia este conectată o rezistență de sarcină  $R$ . Să se calculeze eroarea relativă ce se face asupra curentului de sarcină  $\varepsilon_I = (I - I_a)/I$  și asupra tensiunii  $\varepsilon_U = (U - U_a)/U$  și să se reprezinte grafic aceste erori în funcție de conductanța de sarcină  $G=1/R$ , atunci când se înlocuiește generatorul real de curent cu un generator ideal de curent (se neglijează conductanța internă ca în figura 2.1.24.b).

**2.1.32.** Fie un generator real având tensiunea de mers în gol  $U_0=10V$  și curentul de scurtcircuit  $I_0=10mA$ . Să se determine valorile rezistențelor de sarcină



2. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE LINEARI

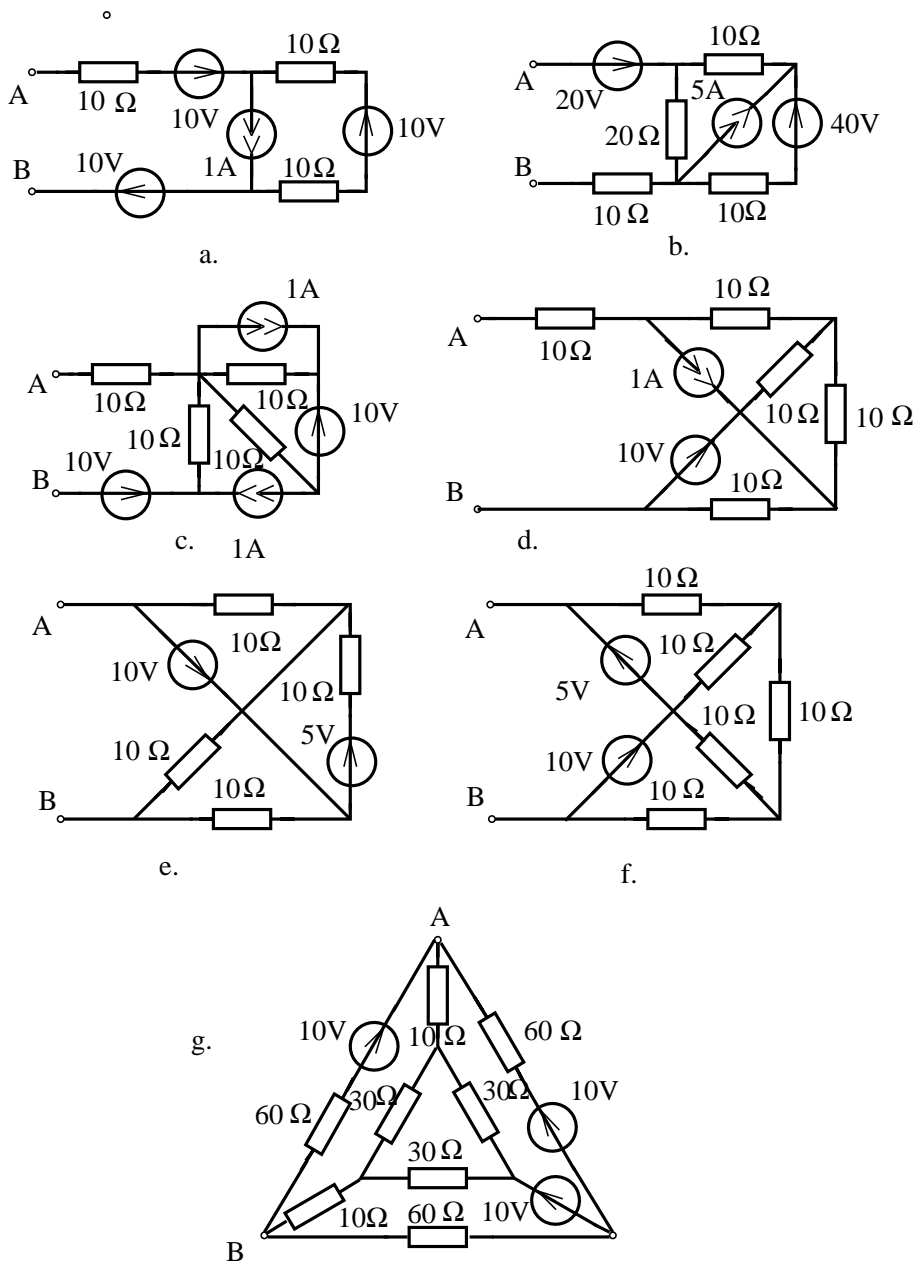


Fig. 2.1.18.

2.1. TEOREME DE ECHIVALENȚĂ

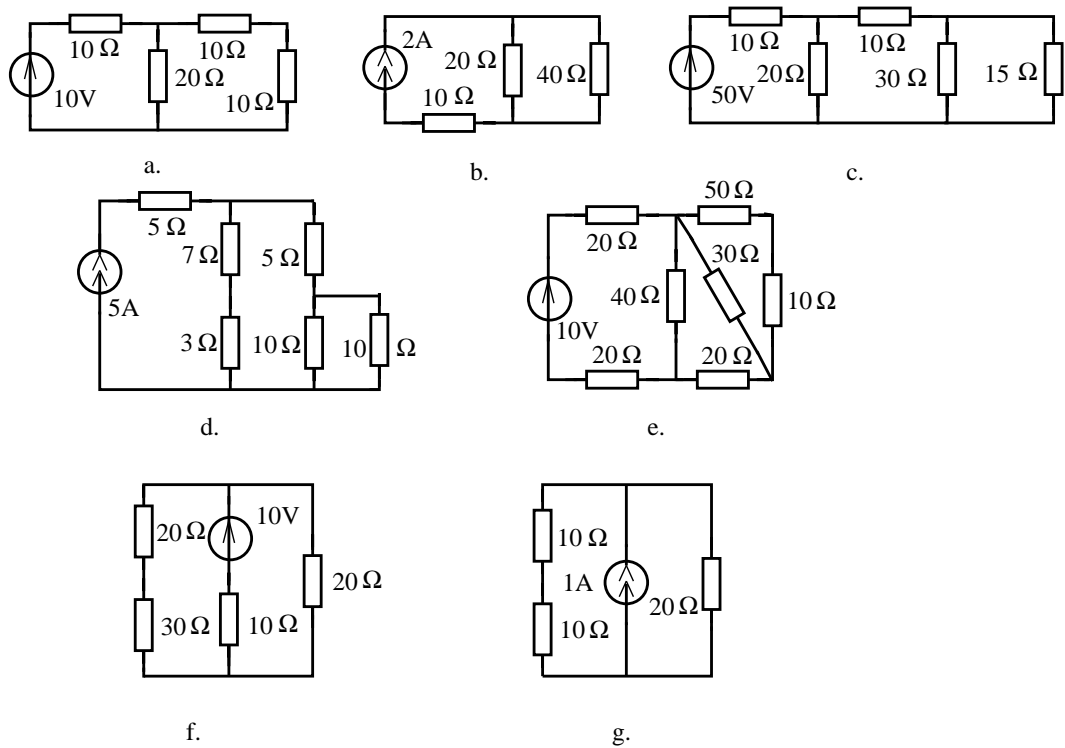


Fig. 2.1.19.

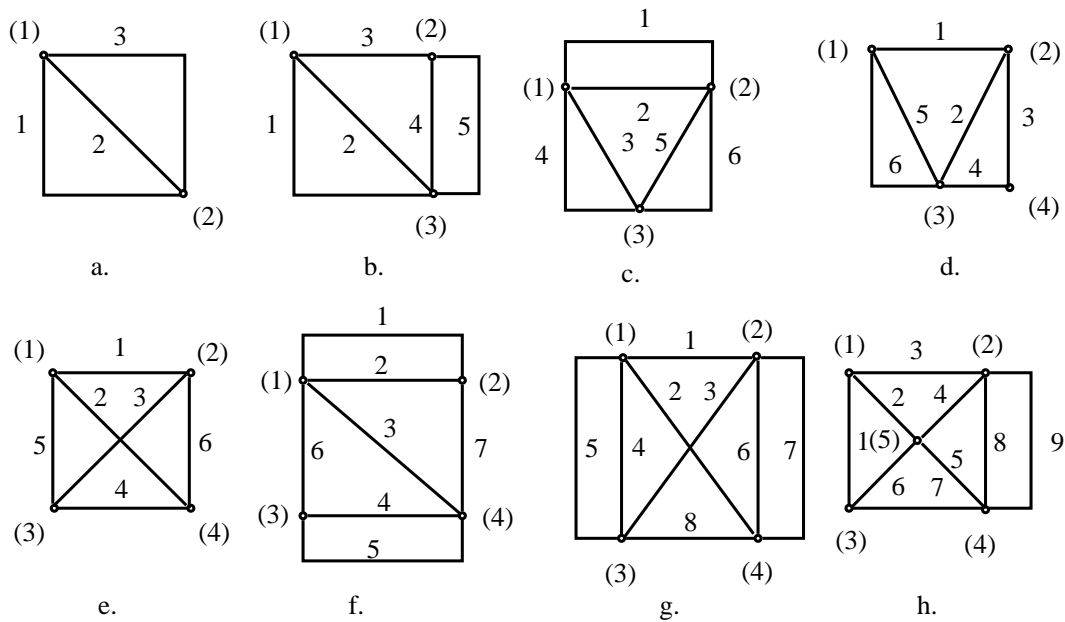


Fig. 2.1.20.

2. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE LINEARI

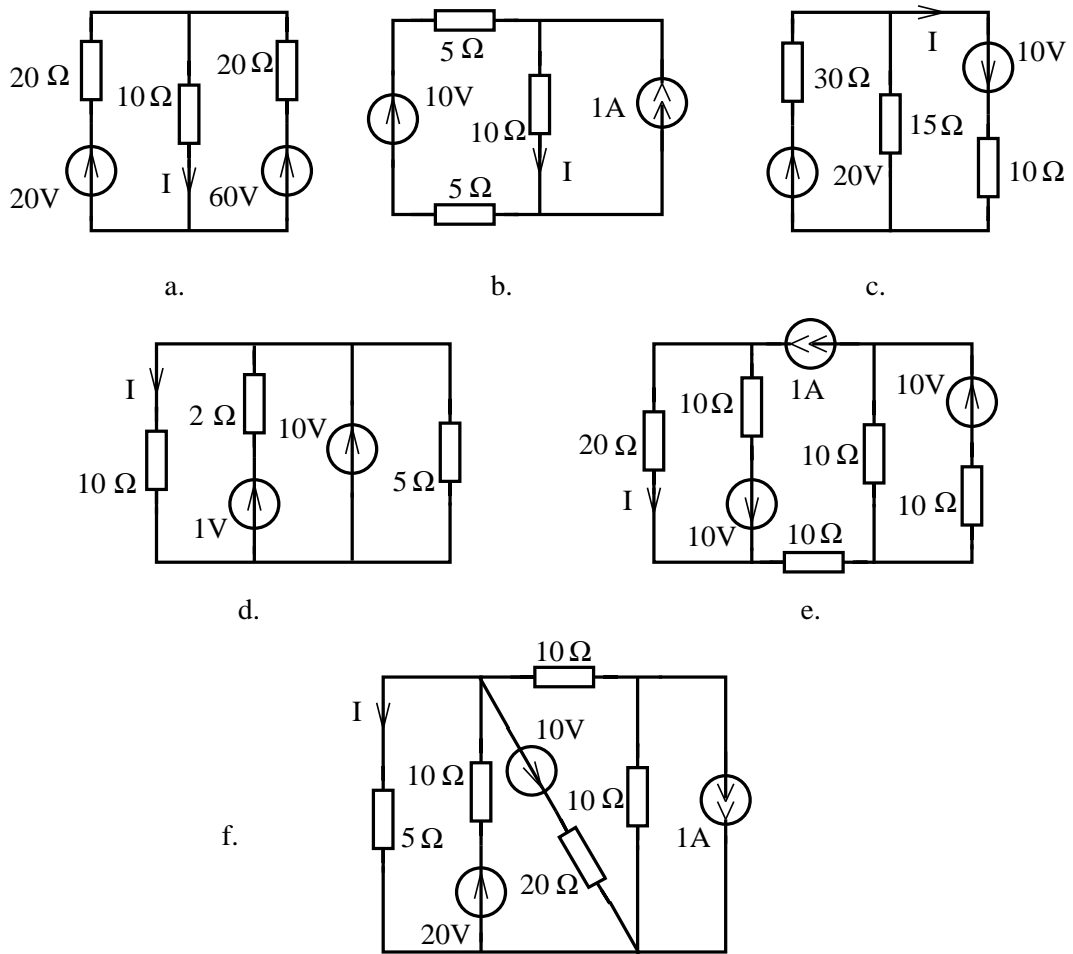


Fig. 2.1.21.

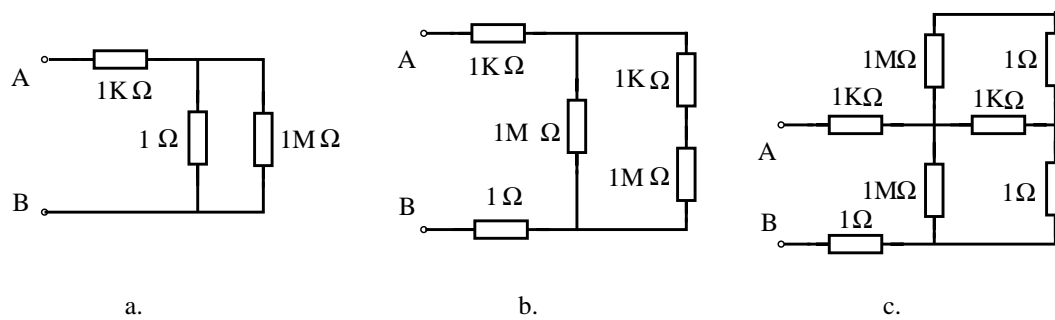


Fig. 2.1.22.

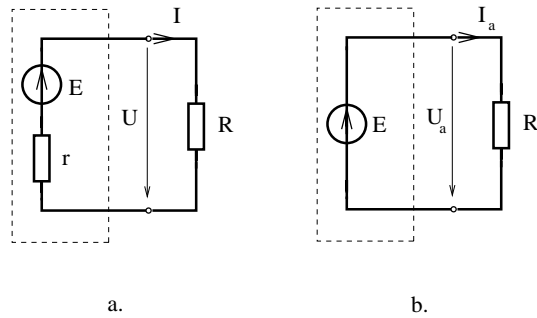


Fig. 2.1.23.

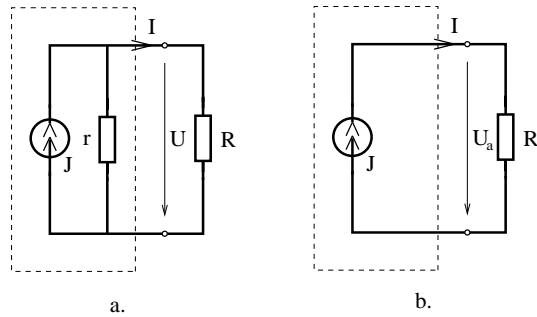


Fig. 2.1.24.

R ce pot fi conectate la bornele acestui generator pentru ca eroarea de aproximare între acest dipol și un generator ideal de tensiune să fie mai mică decât 1%.

**2.1.33.** În ce condiții referitoare la rezistența  $R$  generatorul din problema 2.1.32 poate fi aproximat cu un generator ideal de curent, astfel încât eroarea relativă să fie mai mică decât 1% ?

**2.1.34.** Să se determine relațiile aproximative ale divizorului de tensiune și de curent aplicabile în cazul în care cele două rezistențe satisfac inegalitatea  $R_1 \ll R_2$ . Care este eroarea de calcul ce apare atunci când se operează cu aceste relații ?

**2.1.35.** Să se determine generatoarele ideale ce pot aproxima funcționarea generatoarelor reale din figura 2.1.25.

**2.1.36.** Să se calculeze valorile aproximative ale curenților și tensiunilor din circuitele reprezentate în figura 2.1.26.

2. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE LINEARI

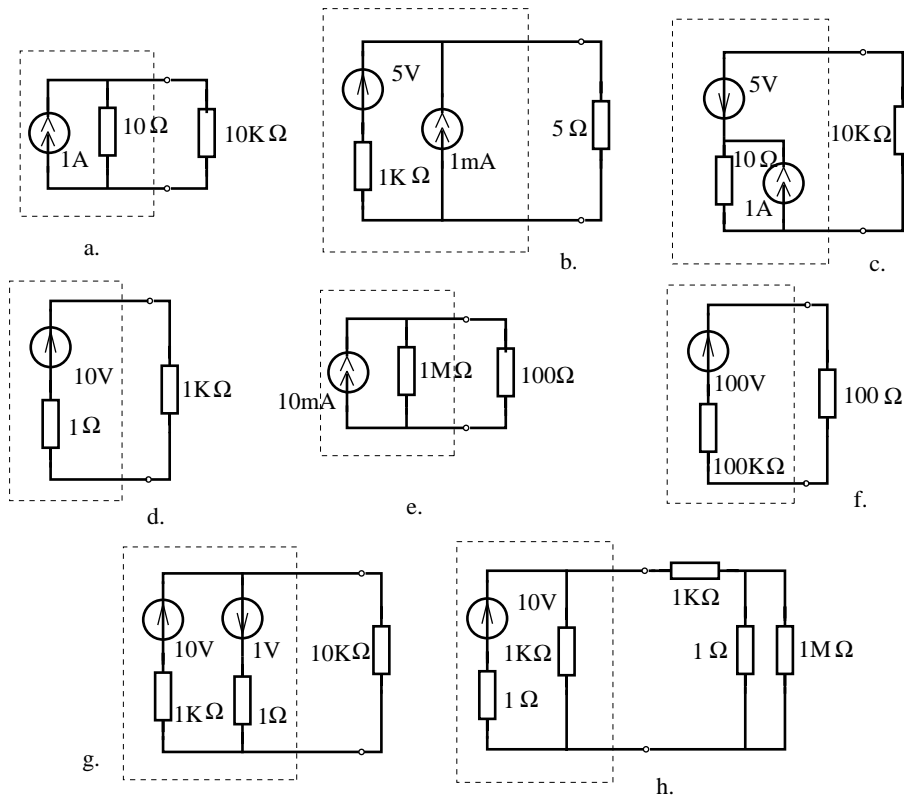


Fig. 2.1.25.

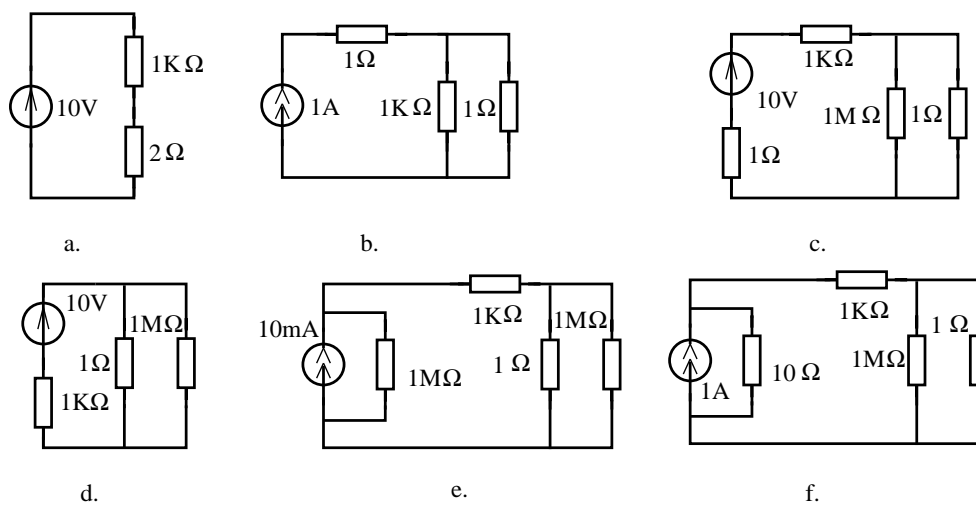


Fig. 2.1.26.

## 2.2 Metoda ecuațiilor lui Kirchhoff

### BREVIAR

**Problema fundamentală** a analizei unui circuit electric rezistiv constă în determinarea intensității curenților  $I_k$ , pentru  $k=1, \dots, L$  și a tensiunilor  $U_k$ , pentru  $k=1, \dots, L$  în toate laturile, considerând cunoscută topologia circuitului (schema electrică) și parametrii elementelor  $R_k, E_k, J_k$ , pentru  $k=1, \dots, L$ .

Pentru determinarea **parametrilor topologici**  $L$  și  $N$  este necesară definirea conceptului de latură și a celui de nod. Într-o primă accepțiune se va înțelege prin *latură* un element ideal de circuit, iar prin *nod* se înțelege o bornă la care concură cel puțin două laturi. În această accepțiune pentru circuitul din figura 2.11.a parametrii topologici sunt  $L_0 = 5, N_0 = 4$ .

O altă accepțiune este aceea în care *latura* este considerată ca o mulțime de elemente ideale conectate în serie, iar prin *nod* se înțelege o bornă la care concură **cel puțin trei laturi**. În această accepțiune, circuitul din figura 2.11.a are  $L_1 = 3$  laturi și  $N_1 = 2$  noduri.

Un alt mod în care este posibilă definirea acestor concepte constă în acceptarea ca latură, fie a generatorului real de tensiune (fig. 2.12.a), care poate degenera în generator ideal de tensiune atunci când  $R = 0$  sau în rezistor când  $E = 0$ , fie latura de tip generator real de curent (fig. 2.12.b), care poate degenera în generator ideal de curent atunci când  $G = 0$ . În această accepțiune circuitul din figura 2.11.a are  $L_2 = 3$  laturi și  $N_2 = 3$  noduri. O modalitate eficientă de definire a laturii standard este cea din figura 2.12.c, în care rezistorul este caracterizat prin rezistența  $R$  sau conductanța  $G$ .

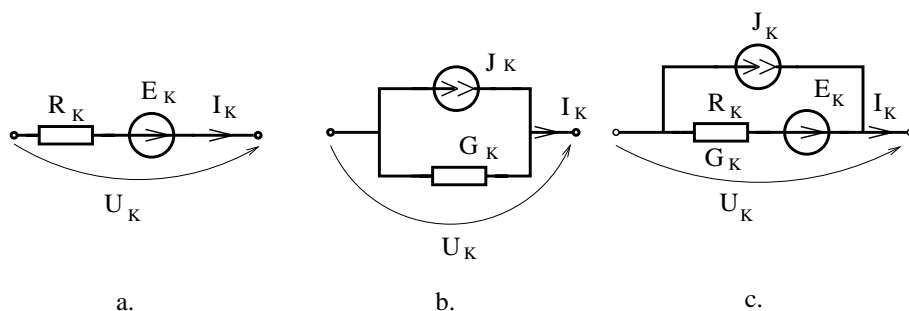


Fig. 2.12.

Se constată că parametrii topologici  $L$  și  $N$  ai unui circuit depind de tipul laturii standard adoptate în definirea conceptului de latură. Pentru analiza rețelelor rezistive liniare cu metoda generală a ecuațiilor lui Kirchhoff se rezolvă un sistem format din  $2L$  ecuații algebrice liniare, a cărui soluție reprezintă curenții  $I_k$  și tensiunile  $U_k$  din laturile rețelei. Acest sistem este alcătuit din  $(N - 1)$  ecuații

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

independente ce reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff,  $(L - N + 1)$  ecuații independente ce reprezintă a doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in (n)}^{alg} I_k = 0, \quad n = 1, 2, \dots, (N - 1); \quad (2.27)$$

$$\sum_{k \in [b]}^{alg} U_k = 0, \quad b = 1, 2, \dots, (L - N + 1); \quad (2.28)$$

iar restul de  $L$  ecuații reprezintă ecuațiile de funcționare ale laturilor rețelei, respectiv pentru laturile de tip generator real de tensiune (fig. 2.12.a):

$$U_k = R_k I_k - E_k; \quad (2.29)$$

iar pentru laturile de tip generator real de curent (fig. 2.12.b):

$$I_k = J_k + G_k U_k. \quad (2.30)$$

Sub formă matriceală, ecuațiile (2.27)-(2.30) devin:

$$\begin{aligned} Ai &= 0; \\ Bu &= 0; \\ \alpha i + \beta u &= \gamma, \end{aligned} \quad (2.31)$$

în care  $A$  este matricea redusă de apartenență a laturilor la noduri,  $B$  este matricea de apartenență a laturilor la buclele fundamentale,  $i$  este vectorul coloană al curenților,  $u$  este vectorul coloană al tensiunilor, iar  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sunt matrici ce conțin parametrii elementelor de circuit.

Datorită dimensiunii mari a sistemului de ecuații de mai sus, și anume  $2L$  ecuații cu tot atâtea necunoscute, această metodă nu este utilizată în calculul manual. Pentru micșorarea dimensiunii sistemului se utilizează următoarele două variante ale metodei ecuațiilor lui Kirchhoff: analiza rețelelor în raport cu curenții și analiza în raport cu tensiunile.

**Analiza rețelelor în raport cu intensitățile curenților** se face eliminând tensiunile din sistemul (2.27)-(2.29):

$$\boxed{\sum_{k \in (n)}^{alg} I_k = 0;} \quad (2.32)$$

$$\boxed{\sum_{k \in [b]}^{alg} R_k I_k + \sum_{k \in [b]}^{alg} U_k = \sum_{k \in [b]}^{alg} E_k,} \quad (2.33)$$

unde:  $n=1, 2, \dots, (N-1)$  și  $b=1, 2, \dots, (L-N+1)$ . Sistemul obținut are  $L$  ecuații cu  $L$  necunoscute și anume curenții din laturi  $I_1, I_2, \dots, I_L$ , cu excepția curenților

din generatoarele ideale de curent prin care curenții sunt cunoscuți  $I_k = \pm J_k$  dar tensiunile  $U_k$  la borne sunt necunoscute. Ecuația (2.33) poartă numele de **a doua teoremă a lui Kirchoff sub formă particulară**. Cele trei sume ce intervin în relația (2.33) sunt algebrice, în sensul că termenii respectivi se adaugă cu plus dacă sensurile de referință ale curentului  $I_k$ , ale tensiunii la bornele generatoarelor de curent  $U_k$ , respectiv ale tensiunii electromotoare  $E_k$  ale generatoarelor ideale de tensiune coincid cu sensul de parcurs al ochiului ( $I_1, I_4, U_2$  și  $E_3$  în figura 2.13) și se adaugă cu minus în caz contrar ( $I_3, U_5$  și  $E_4$  în figura 2.13).

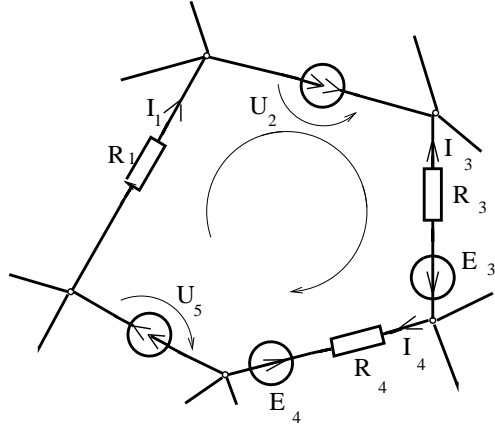


Fig. 2.13.

Pentru scrierea sub formă matriceală a ecuațiilor referitoare la curenți, se consideră că rețeaua conține  $N_{GC}$  generatoare de curent. Dacă laturile se numerează astfel încât generatoarele de curent să fie situate pe ultimele laturi, atunci ecuațiile (2.31) se pot scrie sub forma:

$$Ai = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0; \quad (2.34)$$

$$Bi = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.35)$$

în care vectorul coloană al curenților  $i = [I_1, I_2, \dots, I_L]^T$  și vectorul coloană al tensiunilor  $u = [U_1, U_2, \dots, U_L]^T$  sunt partiționați în componentele vectoriale  $i_1$  și  $u_1$  corespunzătoare laturilor ce nu conțin generatoare de curent și respectiv  $i_2$  și  $u_2$  corespunzătoare celor  $N_{GC}$  generatoare ideale de curent. Dacă vectorul curenților electromotori este  $j$  atunci:

$$i_2 = j = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_{N_{GC}} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$



## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

Ecuatiile de funcționare ale laturilor ce nu conțin generatoare de curent sunt:

$$u_1 = Ri_1 - e, \quad (2.37)$$

în care  $R$  este matricea diagonală a rezistențelor laturilor și  $e$  este vectorul coloană al tensiunilor electromotoare de tensiune. Înlocuind (2.36) în (2.34) și (2.37) în (2.35) rezultă următoarea **formă matriceală a ecuațiilor**:

$$A_1 i_1 = -A_2 j B_1 R i_1 + B_2 u_2 = B_1 e, \quad (2.38)$$

sau sub forma bloc:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 R & B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_2 j \\ B_1 e \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Dacă circuitul nu conține generatoare de curent sau dacă este posibilă transformarea acestora în generatoare de tensiune atunci  $N_{GC} = 0$ , iar ecuațiile (2.38) devin:

$$\begin{cases} Ai = 0 \\ BRi = Be, \end{cases} \quad (2.40)$$

sau sub formă bloc matriceală:

$$\begin{bmatrix} A \\ BR \end{bmatrix} \cdot i = \begin{bmatrix} 0 \\ Be \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar compatibil, cu ajutorul metodei teoremelor lui Kirchhoff în raport cu curenții, trebuie parcurse următoarele **etape ale algoritmului metodei**:

1. *Se determină parametrii topologici*: numărul de noduri  $N$ , numărul de laturi  $L$  și numărul de bucle fundamentale  $O = L - N + 1$ ; în acest sens este utilă trasarea grafului  $G$  al rețelei, ținând seama de faptul că elementele conectate în serie pot fi considerate ca aparținând aceleiași laturi;
2. *Se alege sensurile de referință* și se notează intensitățile curenților  $I_1, I_2, \dots, I_L$  și tensiunile la bornele generatoarelor de curent  $U_1, U_2, \dots, U_{N_{GC}}$ ;
3. *Se scrie prima ecuație a lui Kirchhoff* (2.32) în toate nodurile cu excepția unuia arbitrar;
4. *Se alege sensurile de parcurs* pentru  $O=L-N+1$  bucle independente. Buclele independente pot fi "ochiurile" (similar ochiurilor unei plase, în cazul rețelelor plane), în cazul rețelelor plane, sau buclele fundamentale generate de coardele unui coarbore. În acest ultim caz arborele se va alege astfel încât să conțină toate laturile generatoare ideale de tensiune și să nu conțină generatoare de curent. Este necesar ca sistemul de bucle să conțină

toate laturile rețelei (conform condiției de independență) și este preferabil ca fiecare buclă să conțină cât mai puține rezistoare (pentru simplificarea rezolvării sistemului);

5. *Se scrie a doua ecuație a lui Kirchhoff sub formă particulară (2.33) parcurgând fiecare buclă de două ori, la prima trecere urmărind rezistoarele și generatoarele de curent, iar la a doua trecere urmărind generatoarele ideale de tensiune. La ambele treceri căderile de tensiune pe rezistoare  $R_k I_k$ , tensiunile  $U_k$  la bornele generatoarelor de curent și tensiunile electromotoare  $E_k$  se adaugă cu plus sau minus după cum sensurile mărimilor  $I_k$ ,  $U_k$  și  $E_k$  coincid sau nu cu sensul de parcurs al buclei;*
6. *Se rezolvă sistemul format din cele  $L$  ecuații algebrice liniare determinându-se necunoscutele și anume curenții din laturi  $I_1, I_2, \dots, I_L$  și tensiunile  $U_1, U_2, \dots, U_{N_{GC}}$  la bornele generatoarelor de curent. În rezolvarea sistemului se va ține seama că intensitățile curenților din generatoarele de curent sunt date de curenții electromotori ai acestor generatoare  $I_k = \pm J_k$ ;*
7. *Se aleg sensurile de referință, se notează și se calculează tensiunile la bornele elementelor, în funcție de curenți, aplicând ecuațiile de funcționare ale elementelor respective;*
8. Pentru *verificarea soluției* obținute se pot aplica următoarele metode:
  - se verifică prima teoremă a lui Kirchhoff în ultimul nod sau pe o secțiune;
  - se verifică a doua teoremă a lui Kirchhoff pe o buclă pe care ea nu a fost scrisă;
  - se verifică bilanțul puterilor:

$$\boxed{\sum_{k=1}^L R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^L E_k I_k + \sum_{k=1}^{N_{GC}} U_k J_k.} \quad (2.42)$$

În ecuația (2.42) suma din membrul stâng este aritmetică în timp ce sumele din membrul drept sunt algebrice, în sensul că termenii se adaugă cu semnul plus dacă satisfac regulile de asociere ale sensurilor din figura 2.14.a și se adaugă cu semn minus dacă sensurile de referință sunt ca în figura 2.14.b.

Tehnici pentru **reducerea efortului de calcul** în metoda ecuațiilor lui Kirchhoff:

1. Rezistoarele conectate în serie sau paralel pot fi echivalate de la început cu un singur rezistor, urmând ca în final să se aplice relațiile divizorului de tensiune sau respectiv de curent pentru determinarea tensiunilor și curenților;

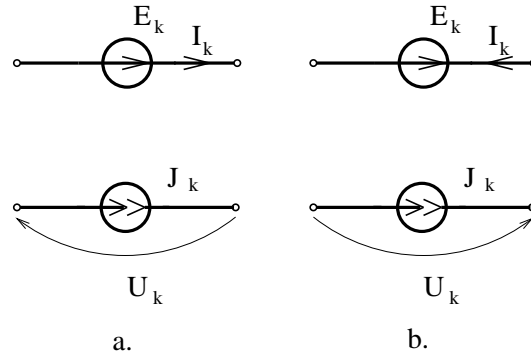


Fig. 2.14.

2. Generatoarele reale de curent vor fi înlocuite cu generatoarele echivalente de tensiune micșorând în acest fel numărul de laturi, deci și dimensiunea sistemului;
3. Laturile active conectate în serie sau chiar în paralel pot fi înlocuite cu un generator real de tensiune echivalent;
4. O variantă a metodei, ce reduce foarte mult efortul de calcul, se bazează pe observația că dacă în etapa 2 a algoritmului se notează cu  $I_1, I_2, \dots, I_0$  curenții din coarde iar curenții din arbore se notează direct pe figură, ca sume algebrice de curenți de coardă, atunci etapa 3 este inutilă, iar sistemul de ecuații conține  $(L-N+1)$  necunoscute, în loc de  $L$  necunoscute. Alegerea arborelui se face astfel încât să conțină toate laturile generatoare ideale de tensiune și să nu conțină generatoare de curent.

**Analiza rețelelor în raport cu tensiunile** se face eliminând intensitățile din sistemul (2.27)-(2.30), obținându-se un sistem cu  $L$  ecuații și anume:

$$\boxed{\sum_{k \in (n)}^{alg} G_k U_k + \sum_{k \in (n)}^{alg} I_k + \sum_{k \in (n)}^{alg} J_k = 0} \quad (2.43)$$

$$\boxed{\sum_{k \in [b]}^{alg} U_k = 0} \quad (2.44)$$

cu  $n=1, 2, \dots, (N-1)$  și  $b=1, 2, \dots, (L-N+1)$ .

Ecuația (2.43) este cunoscută sub numele de **prima teoremă a lui Kirchoff sub formă particulară**.

Necunoscutele sistemului (2.43)-(2.44) sunt în număr de  $L$ . Acestea sunt tensiunile la bornele laturilor cu excepția laturilor generatoare ideale de tensiune, la care tensiunea este cunoscută  $U_k = \pm E_k$ , în schimb curentul  $I_k$  este necunoscut.

Ecuția (2.43) poartă numele de **prima teoremă a lui Kirchhoff sub formă particulară**, iar sumele ce intervin în ea sunt algebrice, adăugându-se cu plus termenii  $G_k U_k, I_k, J_k$  dacă sensurile de referință ale mărimilor  $U_k, I_k$  și  $J_k$  intră în nod (ca de exemplu,  $U_5, I_4, J_5$ , în figura 2.15) și cu minus în caz contrar.

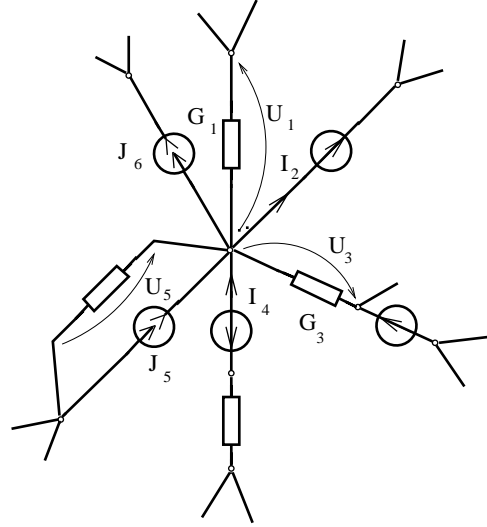


Fig. 2.15.

În aplicarea acestei metode, generatorul real de tensiune se consideră alcătuit din două laturi conectate în serie, o latură rezistor și o latură generator ideal de tensiune. Pentru a evita introducerea unui nod suplimentar între rezistor și generatorul ideal de tensiune este preferabil, în acest caz, să se înlocuiască toate generatoarele reale de tensiune prin generatoare reale de curent echivalente. Dacă circuitul conține  $N_{GT}$  generatoare de tensiune și laturile se numerează astfel încât aceste generatoare sunt plasate în ultimele laturi, atunci matricele de incidență se partiționează:

$$A = [A_1 : A_2]; \quad B = [B_1 : B_2], \quad (2.45)$$

iar vectorii curenților și tensiunilor vor fi:

$$i = [I_1, I_2, \dots, I_L]^T = [i_1 : i_2]^T;$$

$$u = [U_1, U_2, \dots, U_L]^T = [u_1 : u_2]^T;$$

$$u_2 = -[E_1, E_2, \dots, E_{N_{GT}}]^T = -e.$$

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

Cu aceste notații **forma matriceală a ecuațiilor** este:

$$\begin{aligned} B_1 u_1 &= B_L e; \\ A_1 G u_1 + A_2 i_2 &= -A_1 j, \end{aligned} \quad (2.46)$$

în care  $G$  este matricea diagonală a conductanțelor laturilor și  $j$  este vectorul coloană al curenților electromotori. Forma bloc-matriceală a ecuațiilor (2.46) este :

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ A_1 G & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 e \\ -A_1 j \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Dacă circuitul nu conține generatoare de tensiune,  $N_{GT} = 0$ , atunci ecuațiile (2.46) devin:

$$\begin{aligned} B u &= 0; \\ A G u &= -A j, \end{aligned} \quad (2.48)$$

sau sub formă bloc matriceală:

$$\begin{bmatrix} B \\ A G \end{bmatrix} \cdot u = \begin{bmatrix} 0 \\ -A j \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar se parcurg următoarele etape ale **algoritmului metodei teoremelor lui Kirchoff în raport cu tensiunile**:

1. *Se determină parametrii topologici*: numărul de noduri  $N$ , numărul de laturi  $L$  și numărul de bucle fundamentale  $O = L - N + 1$ . La determinarea parametrilor topologici  $L$  și  $N$ , trebuie ținut seama de faptul că elementele conectate în serie trebuie considerate ca aparținând unor laturi diferite, dar elementele conectate paralel pot fi considerate ca aparținând aceleiași laturi;
2. *Se alege sensurile de referință* și se notează tensiunile  $U_1, U_2, \dots, U_L$ , la bornele laturilor și curenții  $I_1, I_2, \dots, I_{N_{GT}}$  ce străbat generatoarele ideale de tensiune;
3. *Se scrie prima teoremă a lui Kirchoff* sub formă particulară (2.43) pe toate nodurile cu excepția unuia arbitrar. La scrierea relației (2.43) trebuie ținut seama de faptul că cele trei sume sunt algebrice, urmând ca pentru un nod laturile rezistență să contribuie cu  $\pm G_k U_k$ , laturile generator ideal de tensiune să contribuie cu curenții  $\pm I_k$ , iar laturile generator ideal de curent să contribuie cu  $\pm J_k$ ; semnul plus se adoptă atunci când sensul de referință al mărimii  $U_k, I_k$  respectiv  $J_k$  intră în nod, iar semnul minus în caz contrar;

4. *Se alege un sistem de bucle independente, pe care se scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff sub formă generală (2.44).* Pentru aceasta este util graful de tensiune redus al rețelei în care sunt notate tensiunile  $U_1, U_2, \dots, U_L$ . La scrierea acestor  $(L-N+1)$  ecuații se va ține seamă de faptul că tensiunile la bornele generatoarelor ideale de tensiune sunt cunoscute  $U_k = \pm E_k$  și că suma (2.44) este o sumă algebrică ;
5. *Se rezolvă sistemul* format din cele  $L$  ecuații algebrice liniare, determinându-se necunoscutele și anume tensiunile  $U_1, U_2, \dots, U_L$ , la bornele tuturor laturilor cu excepția tensiunilor de la bornele generatoarelor ideale de tensiune, la care necunoscutele sunt curenții  $I_1, I_2, \dots, I_{N_{GT}}$ ;
6. Pornind de la tensiunile determinate în etapa anterioară *se calculează curenții* din laturile rețelei inițiale aplicând ecuațiile de funcționare ale laturilor respective;
7. *Se verifică soluția* obținută aplicând una din următoarele metode:
  - se verifică prima teoremă a lui Kirchhoff pe ultimul nod;
  - se verifică teorema a doua a lui Kirchhoff pe o buclă ce nu face parte din sistemul de bucle independente ales;
  - se verifică bilanțul puterilor (2.42).

Pentru **reducerea efortului de calcul** se pot utiliza următoarele tehnici:

1. Laturile conectate serie, paralel sau mixt se înlocuiesc cu generatoare echivalente de curent;
2. Generatoarele reale de tensiune se înlocuiesc cu generatoare reale de curent echivalente, micșorând în acest fel numărul de laturi deci și dimensiunea sistemului;
3. Dacă în etapa 2 a algoritmului se notează cu  $U_1, U_2, \dots, U_{(N-1)}$  tensiunile din laturile unui arbore, iar tensiunile din coarde se notează direct pe figură ca sume algebrice ale tensiunilor de ramuri, atunci etapa 4 a algoritmului este inutilă, iar numărul ecuațiilor din sistem scade de la  $L$  la  $(N-1)$ . Alegerea arborelui se face astfel încât acesta să conțină toate laturile generatoare de tensiune și să nu conțină generatoare de curent.

PROBLEME

2.2.1. Să se scrie sistemul de ecuații asociat metodei generale a teoremelor lui Kirchhoff (2.27)-(2.30) pentru circuitele din figura 2.2.1.

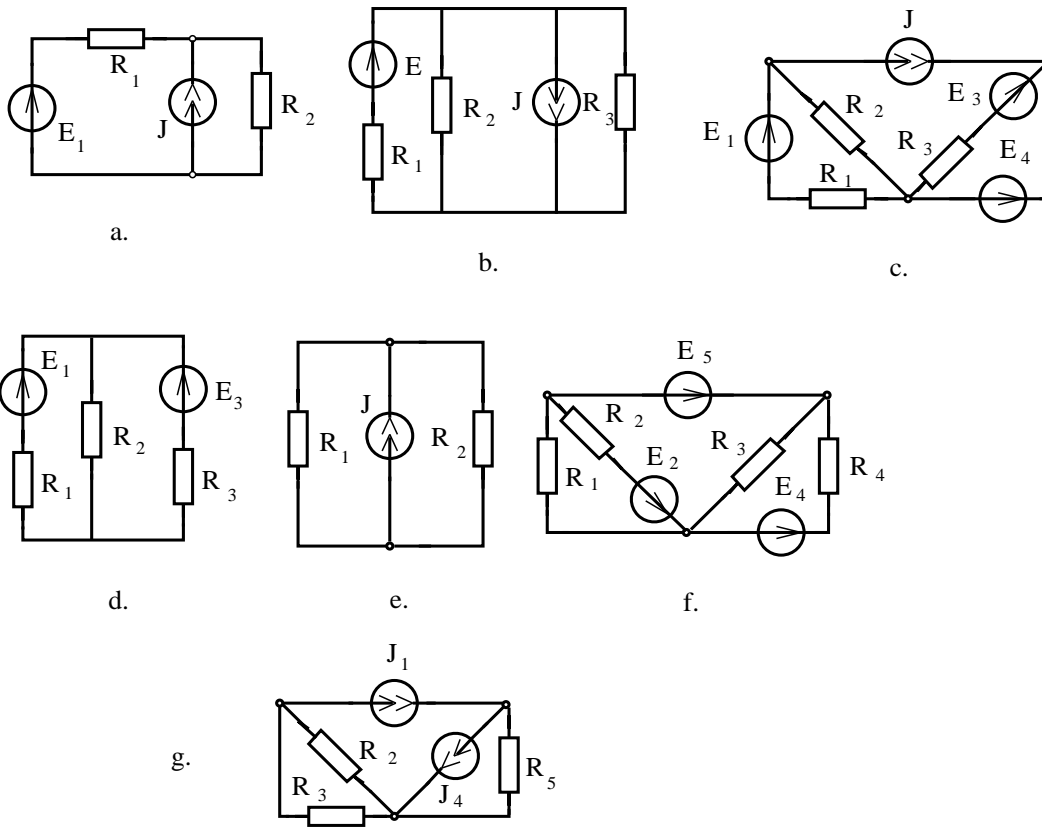


Fig. 2.2.1.

2.2.2. Să se analizeze circuitele din figura 2.2.2 cu ajutorul metodei lui Kirchhoff în raport cu curenții. Se va verifica bilanțul puterilor.

2.2.3. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.2.2 cu ajutorul metodei ecuațiilor lui Kirchhoff în raport cu curenții utilizând tehnicile de reducere a efortului de calcul.

2.2.4. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.2.2 cu ajutorul metodei ecuațiilor lui Kirchhoff în raport cu tensiunile. Se va verifica soluția cu ajutorul bilanțului puterilor.

2.2. METODA ECUAȚILOR LUI KIRCHHOFF

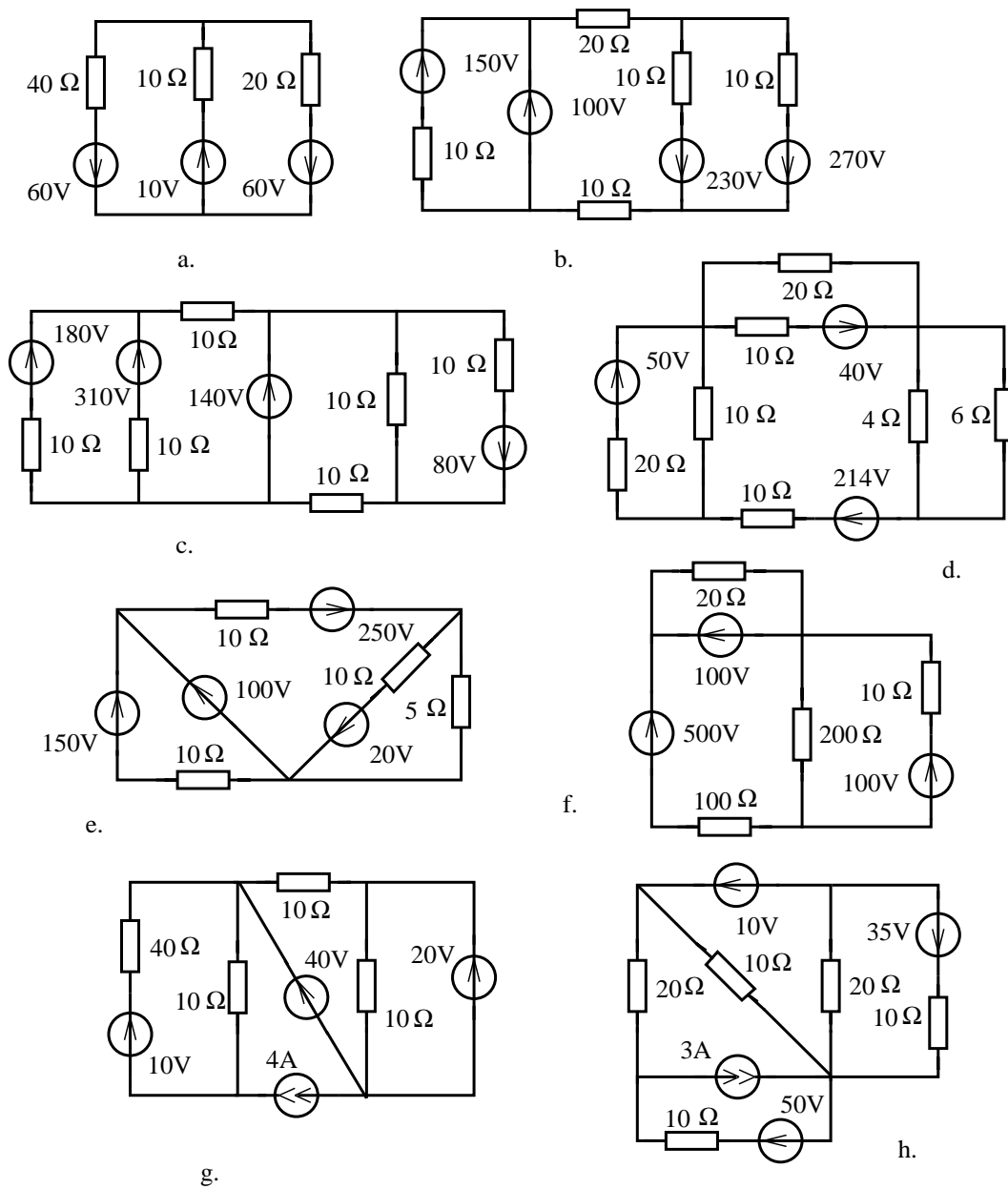


Fig. 2.2.2.



## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

**2.2.5.** Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.2.2 cu ajutorul metodei teoremelor lui Kirchhoff în raport cu tensiunile utilizând tehnicile de reducere a efortului de calcul.

**2.2.6.** Să se scrie forma matriceală a ecuațiilor Kirchhoff în raport cu curenții pentru circuitele reprezentate în figura 2.2.1.

**2.2.7.** Să se scrie forma matriceală a ecuațiilor Kirchhoff în raport cu tensiunile pentru circuitele reprezentate în figura 2.2.1.

**2.2.8.** Să se analizeze cu ajutorul metodei ecuațiilor lui Kirchhoff circuitele ale căror parametri au fost determinați în problema 1.4.13. Pentru rezolvare se va aplica acea variantă a metodei care este cea mai avantajoasă pentru problema respectivă.

**2.2.9.** Să se analizeze circuitele reprezentate în figurile 1.4.9, 1.4.11 și 1.4.10 cu ajutorul metodei ecuațiilor lui Kirchhoff.

**2.2.10.** Să se analizeze cu ajutorul metodei ecuațiilor lui Kirchhoff circuitele reprezentate în figura 2.1.21.

**2.2.11.** Generați circuite electrice având parametrii topologici  $N, L$  impuși și apoi pornind de la tensiuni de ramuri și curenți de coarde arbitrari, calculați după modelul din problema 1.4.13, determinați parametrii elementelor. Analizați apoi circuitele generate cu ajutorul metodei teoremelor lui Kirchhoff.

## 2.3 Metoda curenților ciclici

### BREVIAR

Metoda curenților ciclici este o metodă sistematică de rezolvare a problemei fundamentale a analizei circuitelor rezistive liniare. Ea este o metodă de substituție în care necunoscutele principale sunt **curenții ciclici**, adică un set de  $O = L - N + 1$  curenți fictivi care parcurg fiecare câte o buclă dintr-un set de bucle fundamentale. Dacă se notează matricea coloană a curenților ciclici cu  $i'$  atunci matricea curenților circuitului este:

$$i = B^T \cdot i', \quad (2.50)$$

în care  $B$  este matricea de apartenență a laturilor la bucle. Deoarece relația (2.50) permite determinarea curenților din toate laturile circuitului în funcție de curenții ciclici, metoda curenților ciclici reduce problema analizei unui circuit la determinarea curenților ciclici deci la rezolvarea unui sistem liniar cu  $O = L - N + 1$  ecuații, reducând în acest fel efortul de calcul. Pentru determinarea sistemului de ecuații asociat acestei metode, se presupune latura standard a circuitului de forma celei din figura 2.16. În această situație, pe lângă mărimile caracteristice laturii  $U_k$ ,  $I_k$  intervin tensiunea  $U_{Rk}$  și curențul  $I_{Rk}$  prin rezistor, între acestea existând relațiile :

$$\begin{aligned} I_k &= I_{Rk} + J_k; \\ U_k &= U_{Rk} - E_k, \end{aligned}$$

sau sub formă matriceală:

$$i = i_R + j; \quad (2.51)$$

$$u = u_R - e, \quad (2.52)$$

unde:

$$i = [I_1, I_2, \dots, I_L]^T; \quad i_R = [I_{R1}, I_{R2}, \dots, I_{RL}]^T;$$

$$u = [U_1, U_2, \dots, U_L]^T; \quad u_R = [U_{R1}, U_{R2}, \dots, U_{RL}]^T;$$

$$j = [J_1, J_2, \dots, J_L]^T; \quad e = [E_1, E_2, \dots, E_L]^T.$$

Dacă se aplică a doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$Bu = 0 \quad (2.53)$$

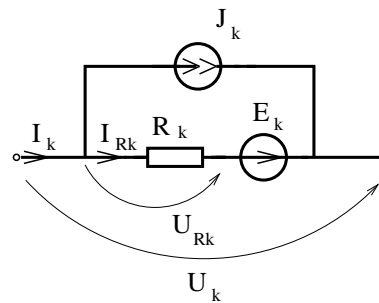


Fig. 2.16.

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

și se ține seama de ecuațiile de funcționare ale rezistoarelor:

$$U_R = R \cdot I_R, \quad (2.54)$$

în care  $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_L)$  este o matrice pătrată ce conține pe diagonală rezistențele, atunci rezultă ecuația curenților ciclici:  $BRB^T \cdot i' = B(e + Rj)$ , sau utilizând notațiile  $R' = BRB^T$ ,  $e' = B(E + RJ)$  :

$$\boxed{R' \cdot i' = e'} \quad (2.55)$$

Din analiza elementelor matricii  $R'$  rezultă că  $R'_{ij} = R'_{ji}$  reprezintă suma rezistențelor de pe laturile comune buclelor  $i$  și  $j$ , sumă considerată cu plus sau minus, după cum sensurile buclelor  $i$  și  $j$  coincid sau nu în laturile comune. Elementul  $E_j$  al matricii  $e'$  reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor ideale de tensiune de pe ochiul  $j$  la care se adaugă tensiunile electromotoare echivalente generatoarelor de curent de pe acel ochi, transformate în generatoare de tensiune. Un caz degenerat îl reprezintă ochiurile în care există laturi ce conțin doar generatoare ideale de curent ( $G_k = 0, R_k \rightarrow \infty$ ). Datorită rezistenței infinite ecuația asociată ochiului respectiv nu are sens, în schimb curentul ciclic din ochiul respectiv va fi impus de generatorul ideal de curent. Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar se parcurg următoarele etape ale **algoritmului metodei curenților ciclici**:

1. *Se determină parametrii topologici*: numărul de noduri  $N$ , numărul de laturi  $L$  și numărul de bucle fundamentale  $O = L - N + 1$  pentru circuitul în care generatoarele reale de curent au fost echivalate cu generatoare de tensiune;
2. *Se alege un sistem de bucle independente* notate cu  $I_1', I_2', \dots, I_0'$  pentru care se marchează sensurile de parcurs. La alegerea buclelor trebuie avut grijă ca prin fiecare generator ideal de curent să treacă o singură buclă și nu mai multe, iar pe o buclă să se afle un singur generator de curent. Pentru alegerea buclelor fundamentale se poate utiliza un arbore care nu conține generatoare de curent, urmând ca fiecare coardă să închidă o buclă fundamentală;
3. *Se scrie sistemul de ecuații* al metodei curenților ciclici:

$$\begin{cases} R'_{11}I_1' + R'_{12}I_2' + \dots + R'_{1O}I_O' = E_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ R'_{O1}I_1' + R'_{O2}I_2' + \dots + R'_{OO}I_O' = E_O \end{cases}$$

sistem care conține  $O$  ecuații cu  $O$  necunoscute;

4. *Se elimină ecuațiile degenerate* corespunzătoare buclelor ce conțin generatoare de curent, substituindu-le cu ecuații de forma  $I_k' = \pm J_k$ , în care semnul se determină în funcție de orientarea sensului de parcurs al ochiului  $I_k'$  față de curentul electromotor  $J_k$ ;

5. *Se calculează termenii diagonali  $R'_{ii}$  din matricea sistemului, ca sumă a rezistențelor de pe buclă;*
6. *Se calculează termenii nedijagonali  $R'_{ij} = R'_{ji}$  ca sumă a rezistențelor de pe laturile comune buclelor  $i$  și  $j$ , sumă luată cu semnul plus în cazul în care sensurile de parcurs ale buclelor coincid în laturile comune și luate cu semnul minus în caz contrar;*
7. *Se calculează termenii liberi  $E'_j$ , ca sumă algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor de tensiune de pe bucla  $j$ , convenția de semn fiind aceeași ca la teorema a doua a lui Kirchhoff sub formă particulară;*
8. *Se rezolvă sistemul de ecuații algebrice cu una din metodele algebrei liniare determinându-se curenții ciclici  $I'_1, I'_2, \dots, I'_O$ ;*
9. *Se aleg sensurile de referință și se notează curenții din laturile circuitului  $I_1, I_2, \dots, I_L$ ;*
10. *Se calculează curenții din laturi ca sume algebrice ale curenților ciclici ce străbat latura respectivă;*
11. *Se verifică soluția prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff pe o buclă, alta decât cele parcurse de curenții ciclici sau prin verificarea bilanțului de puteri.*

Pentru estimarea efortului de calcul în metoda curenților ciclici este util să se observe că sistemul ce trebuie rezolvat are  $L - N + 1 - N_{GC}$  necunoscute în care  $N_{GC}$  este numărul generatoarelor de curent. Din acest punct de vedere metoda curenților ciclici este avantajoasă față de metoda teoremelor lui Kirchhoff.

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

### PROBLEME

2.3.1. Să se scrie ecuațiile curenților ciclici pentru circuitele din figura 2.3.1.

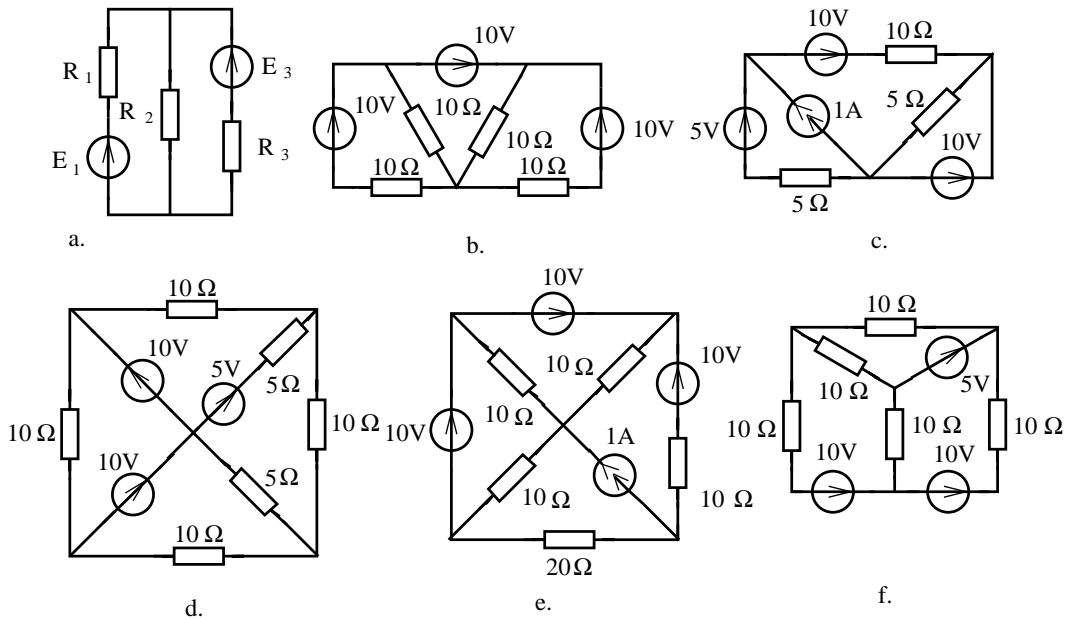


Fig. 2.3.1.

2.3.2. Să se calculeze curenții din laturi în funcție de curenții ciclici la circuitele din figura 2.3.2.

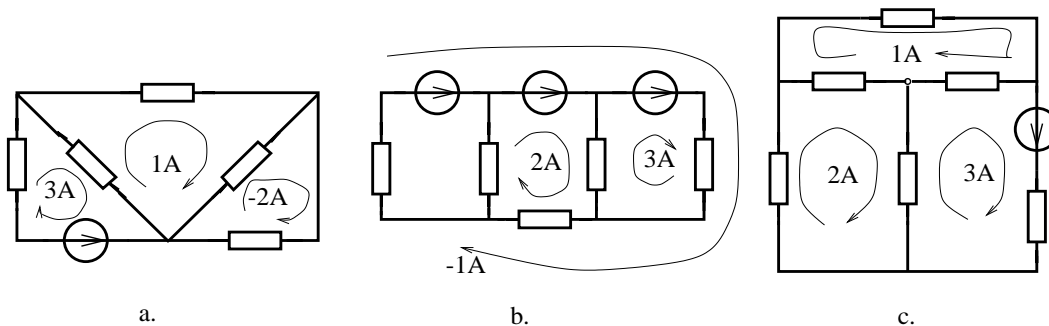


Fig. 2.3.2.

2.3.3. Să se analizeze circuitele din figura 2.3.3 cu ajutorul metodei curenților ciclici și să se verifice bilanțul puterilor.

### 2.3. METODA CURENȚILOR CICLICI

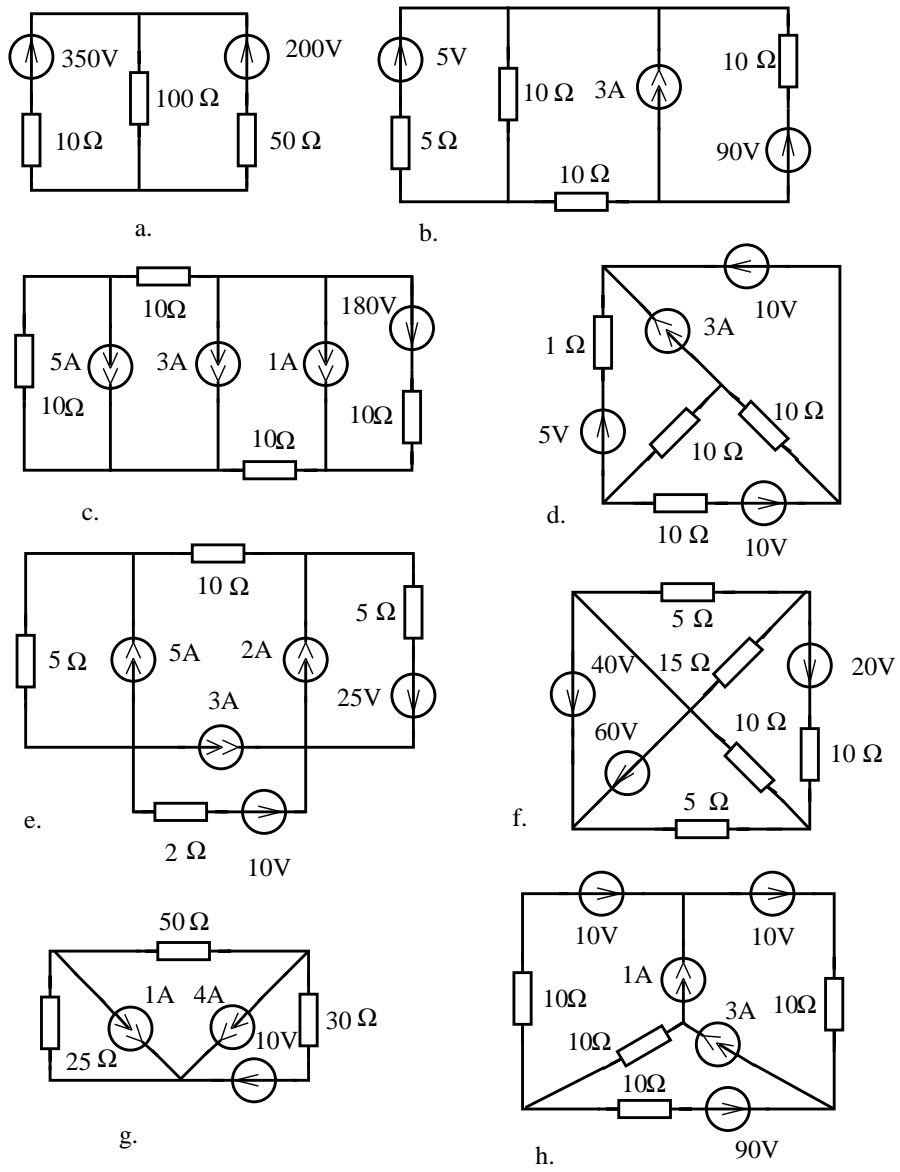


Fig. 2.3.3.

**2.3.4.** Să se analizeze cu ajutorul metodei curenților ciclici circuitele ale căror parametri au fost determinați în problema 1.4.13.

**2.3.5.** Să se analizeze cu ajutorul metodei curenților ciclici circuitele reprezentate în figurile 1.4.9, 1.4.11 și 1.4.10.

## 2.4 Metoda potențialelor nodurilor

### BREVIAR

Metoda potențialelor nodurilor este o metodă sistematică de analiză a circuitelor rezistive liniare, în care necunoscutele principale sunt **potențialele nodurilor**.

Dacă se notează cu  $v = [V_1, V_2, \dots, V_{N-1}]^T$  vectorul potențialelor nodurilor, presupunând ultimul potențial nul, atunci vectorul tensiunilor la bornele laturilor este:

$$u = A^T \cdot v, \quad (2.56)$$

unde  $A$  este matricea redusă de incidență a laturilor la noduri. Deoarece relația (2.56) permite determinarea tensiunilor în toate laturile circuitului în funcție de potențiale, metoda potențialelor reduce problema analizei unui circuit la determinarea potențialelor prin rezolvarea unui sistem liniar de  $(N-1)$  ecuații, reducând în acest fel efortul de calcul față de metoda teoremelor lui Kirchhoff. Dacă se presupune latura standard de forma celei reprezentate în figura 2.16, atunci sunt valabile relațiile (2.51),(2.52) și pornind de la prima teoremă a lui Kirchhoff:

$$A \cdot i = 0 \quad (2.57)$$

și ecuațiile de funcționare ale rezistoarelor:

$$i_R = G \cdot u_R, \quad (2.58)$$

în care  $G = \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_L)$ , se obține sistemul potențialelor nodurilor  $AGA^T v = -A(j + Ge)$ , care, utilizând notațiile  $G' = AGA$ ,  $J' = -A(j + Ge)$  capătă forma:

$$\boxed{G' \cdot v = j'}. \quad (2.59)$$

Analizând elementele matricii  $G'$  rezultă că  $G'_{ij} = G'_{ji}$  reprezintă suma conductanțelor laturilor ce unesc nodurile  $i$  și  $j$ , sumă luată cu semn schimbat, iar  $G'_{ii}$  reprezintă suma conductanțelor laturilor ce concură la nodul  $i$ . Elementul  $J'_i$  al vectorului  $J'$ , reprezintă suma algebrică a curenților de scurtcircuit ai laturilor ce concura la nodul  $i$ . Curenții de scurtcircuit se consideră cu plus atunci când săgețile generatoarelor înțeapă nodul și cu minus în caz contrar. Din acest motiv elementele  $J'_i$  se numesc injecțiile de curent în nod și nu trebuie confundate cu suma curenților din laturile circuitului, care este nulă conform primei teoreme a lui Kirchhoff. Laturile de tip generator ideal de tensiune sunt laturi degenerate ( $R = 0$ ,  $G \rightarrow \infty$ ) și trebuie tratate aparte în cadrul acestei metode. Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar se parcurg următoarele etape ale **algoritmului** metodei potențialelor la noduri:

1. *Se determină parametrii topologici:* numărul de noduri  $N$  și numărul de laturi  $L$ ;
2. *Se alege nodul de referință* analizând distribuția în rețea a laturilor de tip generator ideal de tensiune (cu rezistență nulă pe latură). Dacă nu există astfel de laturi este preferabil ca nodul de referință să fie ales nodul cel mai stufos (la care vin cele mai multe laturi). Dacă există o singură latură generator ideal de tensiune, atunci nodul de referință se alege la una din bornele acestui generator (fig. 2.17.a). Dacă laturile generatoare ideale de tensiune formează un subgraf conex (fig. 2.17.b.), atunci nodul de referință se alege ca aparținând acestui subgraf. Dacă laturile de tip generator ideal de tensiune formează subgrafuri neconexe atunci nodul de referință se alege ca aparținând subgrafului cu cele mai multe generatoare (fig. 2.17.c).

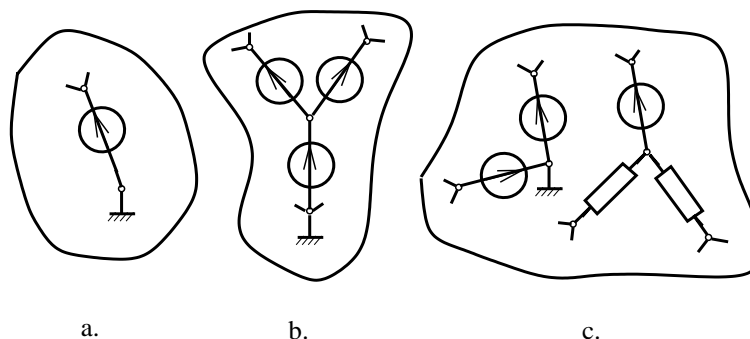


Fig. 2.17.

Dacă mulțimea laturilor de tip generator ideal de tensiune alcătuiește subgrafuri neconexe atunci, se elimină cu ajutorul teoremei lui Vaschy generatoarele ce fac parte din subgrafurile ce nu conțin nodul de referință (ca în figura 2.18 ce se referă la rețeaua din figura 2.17.c). Se constată că eliminarea fiecărui generator determină apariția a două ”pseudo-noduri” conectate printr-un conductor perfect, ce pot fi considerate un singur nod. În felul acesta, cu fiecare generator eliminat scade cu o unitate numărul de noduri  $N$ ;

3. *Se notează potențialele nodurilor  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$  cu excepția nodului de referință căruia i se atribuie potențialul  $V_0 = 0$ ;*
4. *Se scrie sistemul de ecuații liniare satisfăcut de potențialele nodurilor:*

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_{11}V_1 + G'_{12}V_2 + \dots\dots\dots + G'_{1,N-1}V_{N-1} = J'_1 \\ \dots\dots\dots \\ G'_{N-1,1}V_1 + \dots\dots\dots + G'_{N-1,N-1}V_{N-1} = J'_{N-1} \end{array} \right.,$$



## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

ce conține  $(N - 1)$  ecuații cu  $(N - 1)$  necunoscute.

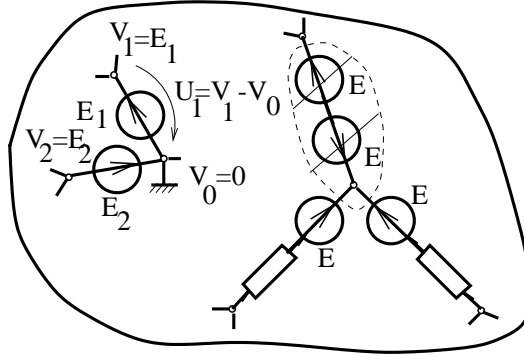


Fig. 2.18.

5. *Se elimină ecuațiile degenerate* corespunzătoare nodurilor la care concură laturile de tip generator ideal de tensiune înlocuindu-se cu ecuații de forma  $V_i = \pm E_i$ ; ce se determină ținând cont de faptul că la acele noduri potențialele sunt impuse de generatoarele ideale de tensiune (ca în figura 2.18).
6. *Se calculează termenii diagonali* ai matricii  $G'_{ii}$ ; ca suma conductanțelor laturilor ce concură la nodul  $i$ . Conductanța unei laturi reprezintă inversul rezistenței echivalente a laturii pasivizate. Prin pasivizarea unei laturi se înțelege înlocuirea generatoarelor prin rezistența lor internă;
7. *Se calculează termenii nediagonali* ai matricii  $G'_{ij} = G'_{ji}$ ; ca fiind suma conductanțelor laturilor ce conectează direct nodul  $i$  cu nodul  $j$ , **sumă ce se consideră cu semnul minus**;
8. *Se calculează termenii liberi*  $J'_k$  ca sumă algebrică a curenților de scurtcircuit ai laturilor ce concură la nodul  $k$ . În această sumă se consideră cu plus termenii corespunzatori generatoarelor a căror săgeată înțeapă nodul și cu minus în caz contrar;
9. *Se rezolvă sistemul* de ecuații cu una din metodele algebrei liniare, determinându-se potențialele  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$ ;
10. *Se aleg sensurile de referință ale tensiunilor* la bornele laturilor și se calculează aceste tensiuni ca diferență de potențial  $U_{ij} = V_i - V_j$ ;
11. *Se aleg sensurile de referință ale curenților* din laturi, se notează cu  $I_1, I_2, \dots, I_L$  și se calculează acești curenți în funcție de tensiunea la borne, aplicând ecuația de funcționare a laturii. Curenții din generatoarele ideale de tensiune se determină în rețeaua inițială, prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff;

**12.** *Se verifică soluția* prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în nodul de referință sau prin verificarea bilanțului puterilor.

Pentru a estima efortul de calcul în această metodă se constată că sistemul de ecuații ce trebuie rezolvat are  $N - 1 - N_{gt}$  ecuații, în care  $N_{gt}$  reprezintă numărul de laturi de tip generator ideal de tensiune. Din acest punct de vedere această metodă este avantajoasă față de metoda teoremelor lui Kirchhoff și **mai avantajoasă decât metoda curenților ciclici**, dacă  $N - N_{gt} - 1 \leq L - N - N_{gc} + 1$ , unde  $N_{gc}$  este numărul generatoarelor ideale de curent.

## PROBLEME

**2.4.1.** Să se scrie ecuațiile potențialelor la noduri pentru circuitele reprezentate în figura 2.4.1.

**2.4.2.** Să se analizeze circuitele din figura 2.4.1 cu ajutorul metodei potențialelor la noduri și să se verifice bilanțul puterilor.

**2.4.3.** Să se analizeze cu ajutorul metodei potențialelor la noduri circuitele ale căror parametri au fost determinați în problema 1.4.13.

**2.4.4.** Să se analizeze cu ajutorul metodei potențialelor nodurilor circuitele din figurile 1.4.9, 1.4.11 și 1.4.10.

**2.4.5.** Să se analizeze circuitele din figura 2.4.1 cu metoda sistematică de analiză care necesită un efort de calcul minim.

2. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE LINEARI

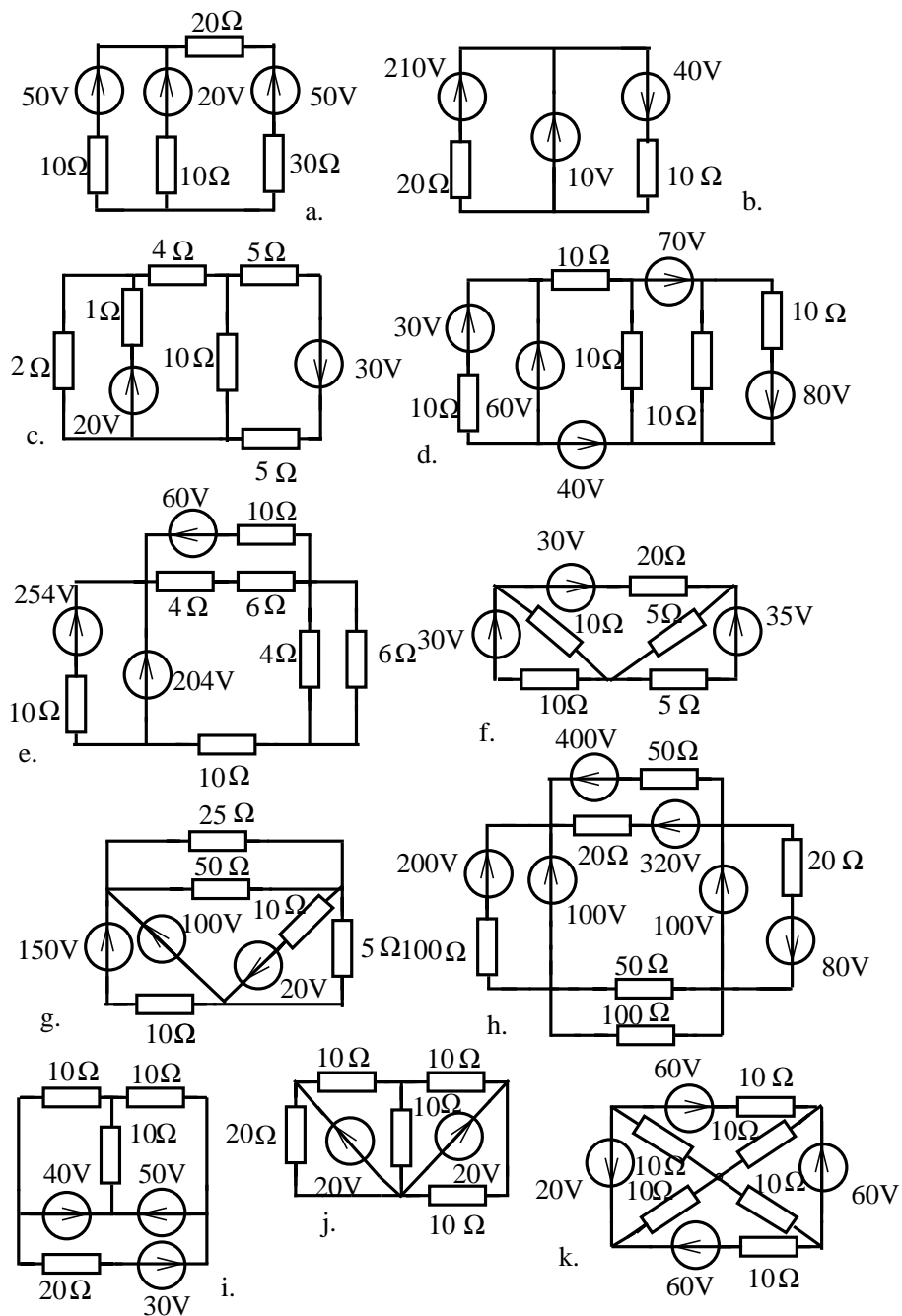


Fig. 2.4.1.

## 2.5 Metodele Thévenin și Norton

**Relația lui Thévenin** exprimă curentul printr-o rezistență  $R_{AB}$  (fig. 2.19.a) a unei rețele liniare:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_{AB_0}}, \quad (2.60)$$

în care  $U_{AB_0}$  este tensiunea de mers în gol a rețelei (fig. 2.19.b), iar  $R_{AB_0}$  este rezistența echivalentă a rețelei pasivizate (fig. 2.19.c).

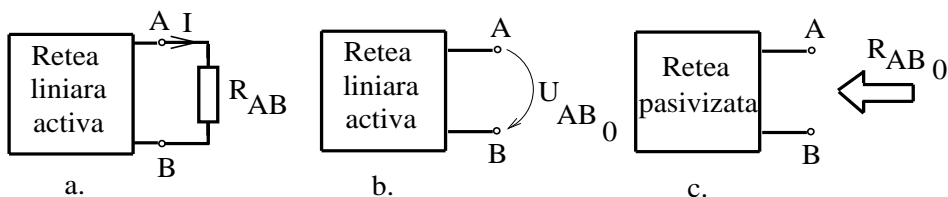


Fig. 2.19.

Pentru calculul curentului dintr-o latură a unui circuit se parcurg următoarele etape ale **algoritmului Thévenin**:

1. Se aleg bornele  $A$  și  $B$  pe latura în care interesează curentul cu condiția ca între bornele alese pe latura respectivă să nu existe surse;
2. Se elimină rezistorul  $R_{AB}$  (înlocuindu-l cu un izolator perfect) și se calculează tensiunea de mers în gol  $U_{AB_0}$  cu una din metodele sistematice de analiză (metoda Kirchhoff, metoda curentilor ciclici sau metoda potențialelor nodurilor). Se constată că rețeaua ce trebuie analizată are cu o latură mai puțin decât cea inițială;
3. Se pasivizează rețeaua și se calculează rezistența echivalentă  $R_{AB_0}$  între bornele  $A$  și  $B$  (cu rezistorul  $R_{AB_0}$  eliminat). Pentru pasivizare se înlocuiesc generatoarele cu rezistențele lor interne ca în figura 2.20.

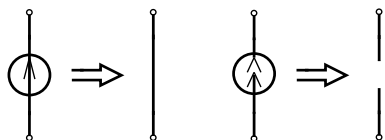


Fig. 2.20.

Pentru calculul rezistenței echivalente  $R_{AB_0}$  se utilizează una din următoarele metode:

- a. Transfigurări serie-parallel, stea-triunghi sau triunghi-stea;
- b. Se alimentează circuitul pasiv cu un generator ideal de tensiune electromotoare  $E$  și se calculează curentul absorbit de rețea cu ajutorul unei metode sistematice de analiză (fig. 2.21.a), urmând ca  $R_{AB_0} = E/I$ ;

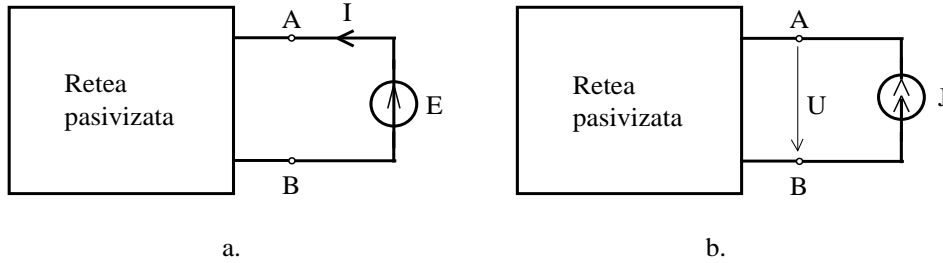


Fig. 2.21.

- c. Se alimentează circuitul pasiv cu un generator ideal de curent electromotor  $J$  și se calculează tensiunea  $U$  la bornele AB cu ajutorul unei metode sistematice de analiză (fig. 2.21.b), urmând ca  $R_{AB_0} = U/J$ ;
- d. Se calculează curentul de scurtcircuit  $I_{sc_{AB}}$  al rețelei (fig. 2.22.b), urmând ca rezistența rețelei pasivizate să fie:

$$R_{AB_0} = \frac{U_{AB_0}}{I_{sc_{AB}}}. \quad (2.61)$$

4. Se calculează curentul  $I_{AB}$  cu relația (2.60);
5. Se calculează tensiunea la bornele rezistenței  $R_{AB}$  cu relația:

$$U_{AB} = R_{AB} \cdot I_{AB}. \quad (2.62)$$

**Relația lui Norton** permite calculul tensiunii la bornele unui rezistor de conductanță  $G_{AB}$  dintr-o rețea liniară (fig. 2.22.a):

$$U_{AB} = \frac{I_{sc_{AB}}}{G_{AB} + G_{AB_0}}, \quad (2.63)$$

în care  $I_{sc_{AB}}$  este curentul de scurtcircuit al rețelei (fig. 2.22.b), iar  $G_{AB_0} = 1/R_{AB_0}$  este conductanța echivalentă a rețelei pasivizate (fig. 2.22.c).

**Algoritmul metodei Norton** cuprinde următoarele etape:

1. Se alege bornele A și B pe latura în care interesează tensiunea astfel încât între acestea să nu existe o sursă ci doar un element pasiv;
2. Se scurtcircuitează bornele A și B prin înlocuirea rezistorului dintre ele cu un conductor perfect și se calculează curentul de scurtcircuit  $I_{sc_{AB}}$  prin acel conductor cu una din metodele sistematice de analiză;

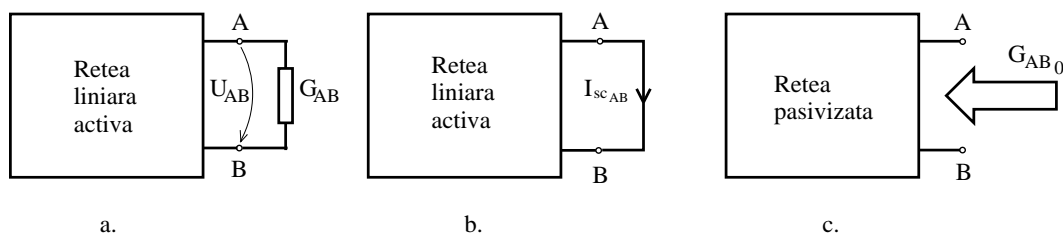


Fig. 2.22.

3. Se pasivizează rețeaua prin înlocuirea generatoarelor cu rezistențele lor interne (fig. 2.20) și se calculează conductanța echivalentă  $G_{AB_0} = 1/R_{AB_0}$  cu una din metodele prezentate la punctul 3 al algoritmului Thévenin;
4. Se calculează tensiunea  $U_{AB}$  la bornele rezistorului de conductanță  $G_{AB}$  cu relația (2.63);
5. Se calculează intensitatea curentului prin rezistorul de conductanță  $G_{AB}$  cu relația:

$$I_{AB} = G_{AB} \cdot U_{AB}. \quad (2.64)$$

Metodele Thévenin și Norton permit atât calculul curentului cât și al tensiunii la bornele unui rezistor. Alegerea uneia sau alteia dintre cele două metode se face din considerente topologice în vederea micșorării efortului de calcul. De exemplu, la circuitele de tipul celui prezentat în figura 2.23.a este avantajoasă aplicarea metodei Thévenin, pe când la circuitele de tipul celui prezentat în figura 2.23.b este avantajoasă metoda Norton.

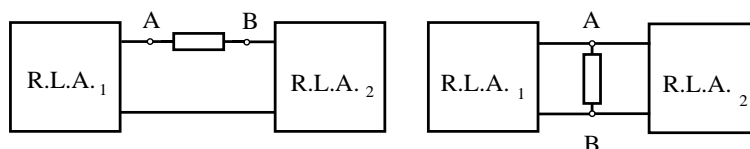


Fig. 2.23.

Procedând în acest mod, la calculul mărimii  $U_{AB_0}$  sau  $I_{sc_{AB}}$  se constată că cele două subrețele  $R.L.A._1$  și  $R.L.A._2$  funcționează independent, lucru ce micșorează efortul de calcul.

Deoarece metodele Thévenin și Norton pun în evidență **generatoarele echivalente de tensiune** ( $U_{AB_0}, R_{AB_0}$ ) și respectiv **de curent** ( $I_{sc_{AB}}, G_{AB_0}$ ), aceste metode sunt utile în cazul în care se studiază curentul printr-un rezistor la diferite valori ale rezistenței (fig. 2.24). În această situație *metodele Thévenin și Norton sunt net avantajoase față de metodele sistematice de analiză.*

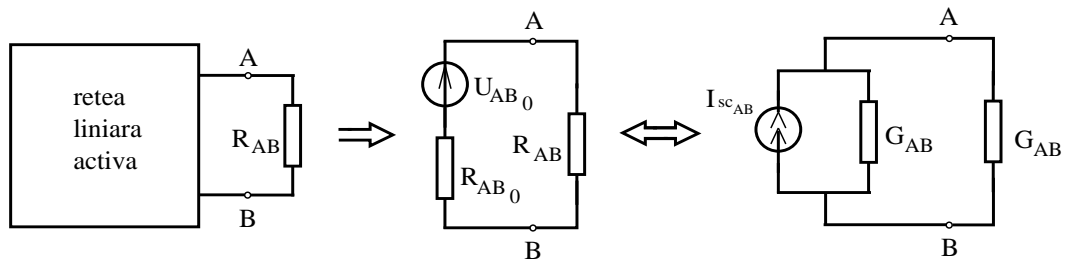


Fig. 2.24.

**Teorema transferului maxim de putere** afirmă că puterea  $P$  disipată de un rezistor de rezistență  $R_{AB}$  conectat într-o rețea este maximă atunci când rezistența  $R_{AB}$  este egală cu rezistența echivalentă a rețelei pasivizate  $R_{AB_0}$ :

$$\boxed{\max_{R_{AB}} P(R_{AB}) = P(R_{AB_0})} \quad (2.65)$$

**PROBLEME**

**2.5.1.** Să se calculeze intensitatea curentului  $I$  la circuitele reprezentate în figura 2.5.1, aplicând metoda teoremei Thévenin.

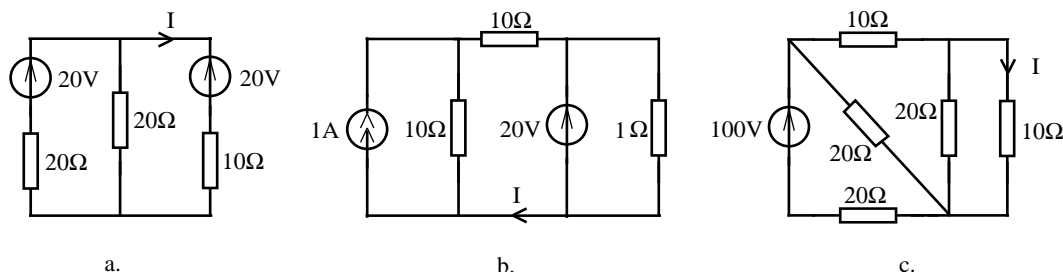


Fig. 2.5.1.

**2.5.2.** Să se calculeze tensiunea  $U$  la circuitele reprezentate în figura 2.5.2, aplicând metoda teoremei Norton.

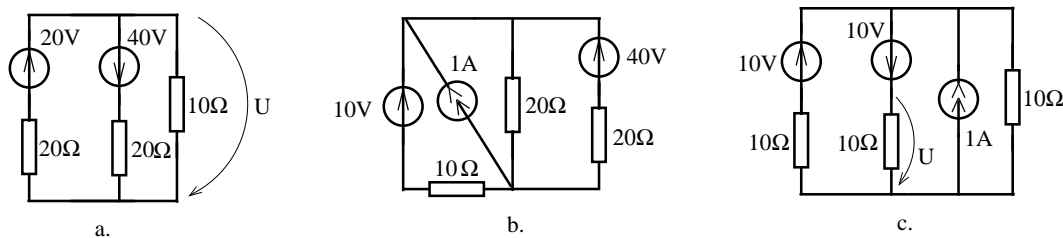


Fig. 2.5.2.

**2.5.3.** Să se calculeze intensitatea curentului prin rezistoarele a căror tensiune la borne este  $U$ , aplicând metoda teoremei Norton la circuitele reprezentate în figura 2.5.2.

**2.5.4.** Să se calculeze intensitatea curentului și tensiunea la bornele rezistoarelor notate cu  $R$  din circuitele reprezentate în figura 2.5.3. Se va aplica metoda cea mai avantajoasă dintre metodele Thévenin sau Norton.

**2.5.5.** Să se calculeze curenții și tensiunile la bornele rezistoarelor  $R$  reprezentate în figura 2.5.3 atunci când  $R = 10\Omega$  și  $R = 20\Omega$ .

**2.5.6.** În cazul circuitelor din figura 2.5.3 să se calculeze rezistența  $R$ , astfel încât ea să disipe putere maximă. Cât este această putere?



## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

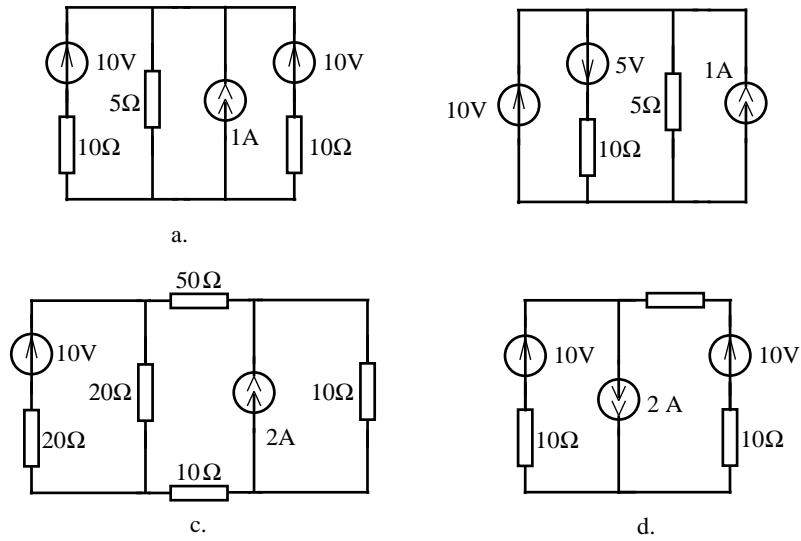


Fig. 2.5.3.

**2.5.7.** Ce rezistență trebuie conectată între bornele A și B ale circuitelor din figura 2.1.22 pentru ca ea să disipe putere maximă?

**2.5.8.** Să se calculeze intensitatea curentului  $I$  la circuitele reprezentate în figura 2.1.21 cu ajutorul metodei Thévenin sau Norton. Ce valoare trebuie să aibă rezistența parcursă de curentul  $I$  pentru ca ea să disipe putere maximă? Să se determine valoarea acestei puteri.

## 2.6 Circuite electrice liniare nereciproce

### BREVIAR

Circuitele electrice care conțin surse comandate nu satisfac teorema de reciprocitate, motiv pentru care ele fac parte din categoria rețelelor nereciproce. Analiza circuitelor liniare ce conțin astfel de surse se poate face utilizând **metodele sistematice de rezolvare**: metoda teoremelor lui Kirchhoff, metoda curenților ciclici sau metoda potențialelor nodurilor.

Pentru aplicarea acestor metode se utilizează algoritmi prezentați în paragrafele anterioare făcând abstracție, inițial, de caracterul comandat al surselor. După ce au fost scrise ecuațiile, înainte de rezolvarea sistemului liniar se adaugă o nouă etapă în algoritmi, și anume exprimarea tensiunilor electromotoare și a curenților electromotori ce corespund surselor comandate în funcție de necunoscutele principale ale metodei: curenții din laturi în metoda teoremelor lui Kirchhoff raportată la curenți; tensiunile în metoda Kirchhoff referitoare la tensiuni; curenții ciclici în metoda curenților ciclici și potențialele nodurilor în metoda potențialelor nodurilor. Pentru aceasta se exprimă mărimile de comandă în funcție de necunoscutele principale ale problemei, utilizând ecuațiile de funcționare ale laturilor de comandă și apoi se trec necunoscutele nou apărute din membrul drept în membrul stâng al ecuației. În urma acestei operații, de regulă, matricea curenților ciclici sau a potențialelor de noduri își pierde simetria, lucru ce explică nereciprocitatea circuitului ce conține surse comandate.

Efortul de calcul în această etapă este mai mic, dacă la circuitele ce conțin surse comandate în curenți se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff raportată la curenți sau metoda curenților ciclici, iar la circuitele ce conțin generatoare comandate în tensiuni se aplică metoda lui Kirchhoff raportată la tensiuni sau metoda potențialelor nodurilor.

Analiza circuitelor cu generatoare comandate se poate face utilizând **metoda teoremelor Thévenin sau Norton**, dar cu anumite restricții impuse la calculul rezistenței rețelei pasivizate  $R_{AB_0}$  și anume pasivizarea rețelei conform figurii 2.20 se aplică doar surselor independente, nu și celor comandate. Acest lucru face imposibil calculul rezistenței  $R_{AB_0}$  cu ajutorul metodei transformării serie-paralel, fiind necesară aplicarea uneia din celelalte trei metode de calcul a rezistenței  $R_{AB_0}$ , prezentate în algoritmul Thévenin.

**Observații referitoare la circuitele cu surse comandate:**

- a. Circuitele ce conțin doar rezistoare liniare și surse comandate liniar admit ca soluție a problemei de analiză soluția banală (toți curenții și toate tensiunile sunt nule). Din această observație rezultă că sursele comandate liniar nu pot fi "surse de curent" într-un circuit electric, doar generatoarele independente pot avea acest statut.

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

- b. Un circuit ce conține rezistoare liniare și surse comandate liniar este echivalent față de orice pereche de borne A, B cu un rezistor. Este posibil ca rezistența echivalentă  $R_{AB}$  să fie negativă, chiar dacă toate rezistențele au rezistență pozitivă.  
Pe baza acestor observații rezultă că generatoarele comandate având ecuația de funcționare liniară se aseamănă cu rezistoarele și nu cu generatoarele independente.
- c. Un circuit cu rezistențe strict pozitive și generatoare independente ce nu sunt în exces are soluție unică, dar nu se poate afirma același lucru despre un circuit ce conține și surse comandate.
- d. Conform teoremei substituției, un generator independent poate fi înlocuit cu un generator comandat, aceasta fiind una din tehnicile de generare a problemelor cu surse comandate. Aplicând teorema substituției în acest fel este posibil să se piardă unicitatea soluției.

Una din aplicațiile cele mai importante ale surselor comandate constă în modelarea unei componente electronice frecvent întâlnită în aplicații, numită amplificator operațional. **Amplificatorul operațional** are simbolul prezentat în figura 2.25.a, simbol ce pune în evidență două borne de intrare notate cu + (intrarea neinversoare) și - (intrarea inversoare), o bornă de masă, o bornă de ieșire notată cu O și două borne de alimentare, având potențialele  $+V_a$  și respectiv  $-V_a$ .

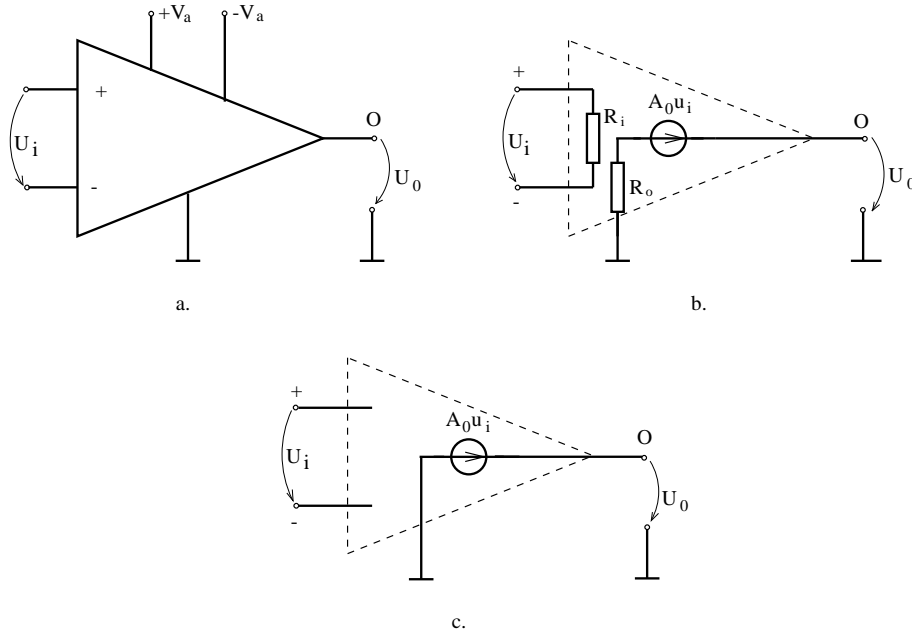


Fig. 2.25.

Comportarea amplificatorului operațional între bornele de intrare este asemănătoare cu cea a unui rezistor de rezistență  $R_i$  (*rezistență de intrare*). Între borna de ieșire și borna de masă, amplificatorul operațional se comportă ca un generator de tensiune comandat în tensiunea de intrare, în serie cu o *rezistență de ieșire*  $R_o$ . Coeficientul de transfer  $A_0$  al sursei comandate, se numește ”*amplificarea în buclă deschisă*” a amplificatorului operațional.

Deoarece rezistența de intrare  $R_i$  este mult mai mare decât rezistențele uzuale dintr-un circuit electronic, iar rezistența de ieșire  $R_o$  este mult mai mică decât rezistențele din restul circuitului, deseori se utilizează *modelul simplificat* al amplificatorului operațional constând într-o sursă de tensiune comandată în tensiune, prezentat în figura 2.25.c și obținut presupunând  $R_i = \infty$  și  $R_o = 0$ .

Specific amplificatoarelor operaționale este și faptul că amplificarea în buclă deschisă este foarte mare,  $A > 10^5$ . Acest lucru permite ca în anumite cazuri (de exemplu în circuitele cu reacție negativă) să se poată presupune  $A_0 \rightarrow \infty$ . Pentru ca într-un circuit în care coeficientul  $A_0$  tinde spre infinit să se obțină tensiuni finite este necesar ca  $u_i$  să tindă către zero. În acest model, numit amplificator operațional perfect, poarta de intrare are proprietăți cu totul speciale, impunând anularea atât a tensiunii cât și a curentului, pe când la poarta de ieșire atât tensiunea cât și curentul pot avea orice valoare. În ultimă instanță, curentul și tensiunea de ieșire sunt stabilite de restul circuitului și nu de elementul considerat. Modelul perfect al amplificatorului operațional pune în evidență două elemente dipolare de circuit complet degenerate, numite nulator și norator.

**Nulatorul** este elementul dipolar (fig. 2.26.a) având ecuațiile de funcționare:

$$\begin{cases} u = 0, \\ i = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

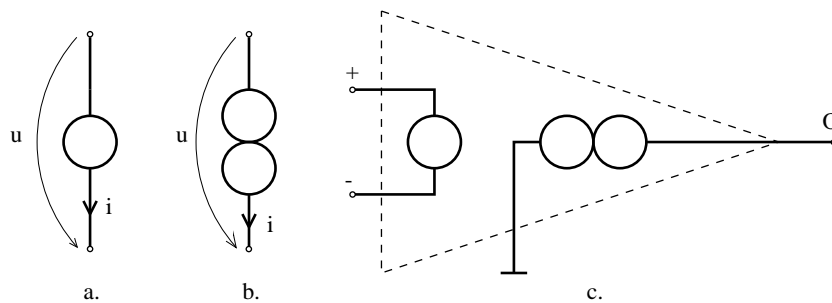


Fig. 2.26.

**Noratorul** este elementul dipolar de circuit electric cu simbolul prezentat în figura 2.26.b la care tensiunea la borne  $u$  și curentul  $i$  pot avea orice valoare.

Cu ajutorul acestor elemente de circuit, amplificatorul operațional poate fi modelat prin schema echivalentă prezentată în figura 2.26.c. Perechea de elemente degenerate ce alcătuiesc această schemă echivalentă se numește **nulor**.

**PROBLEME**

**2.6.1.** Să se stabilească condițiile de echivalență între elementele de circuit prezentate în figura 2.6.1.

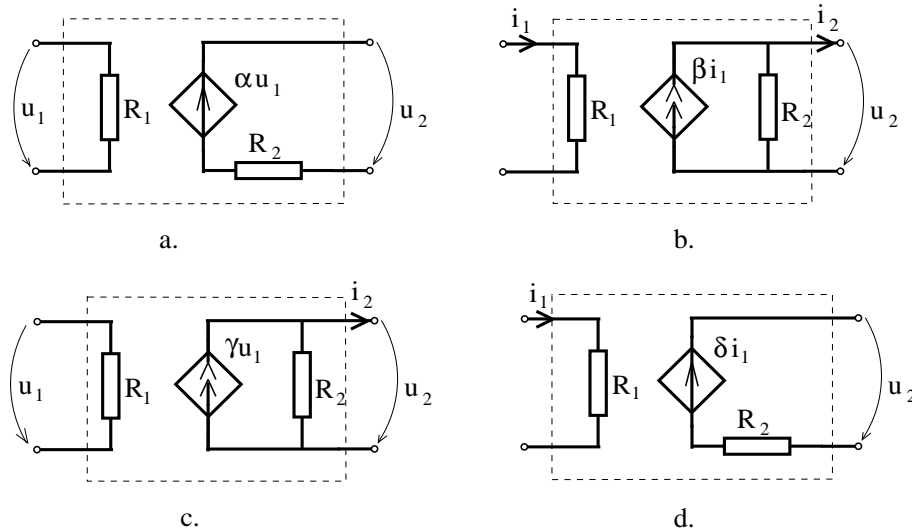


Fig. 2.6.1.

**2.6.2.** Să se determine elementul echivalent grupării serie a unui nulator cu unul din elementele ideale: rezistor, conductor perfect, izolator perfect, generator ideal de tensiune, generator ideal de curent și norator. Să se rezolve problema în cazul grupării paralel a elementelor ideale.

**2.6.3.** Să se determine elementul echivalent grupării serie a unui norator cu unul din elementele ideale: rezistor, conductor perfect, izolator perfect, generator ideal de tensiune și generator ideal de curent. Să se rezolve problema în cazul grupării în paralel a acestor elemente ideale.

**2.6.4.** Să se determine rezistența echivalentă între bornele A și B pentru circuitele reprezentate în figura 2.6.2.

**2.6.5.** Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.6.3 cu ajutorul metodelor sistematice de analiză.

2.6. CIRCUITE ELECTRICE LINIARE NERECIPROCE

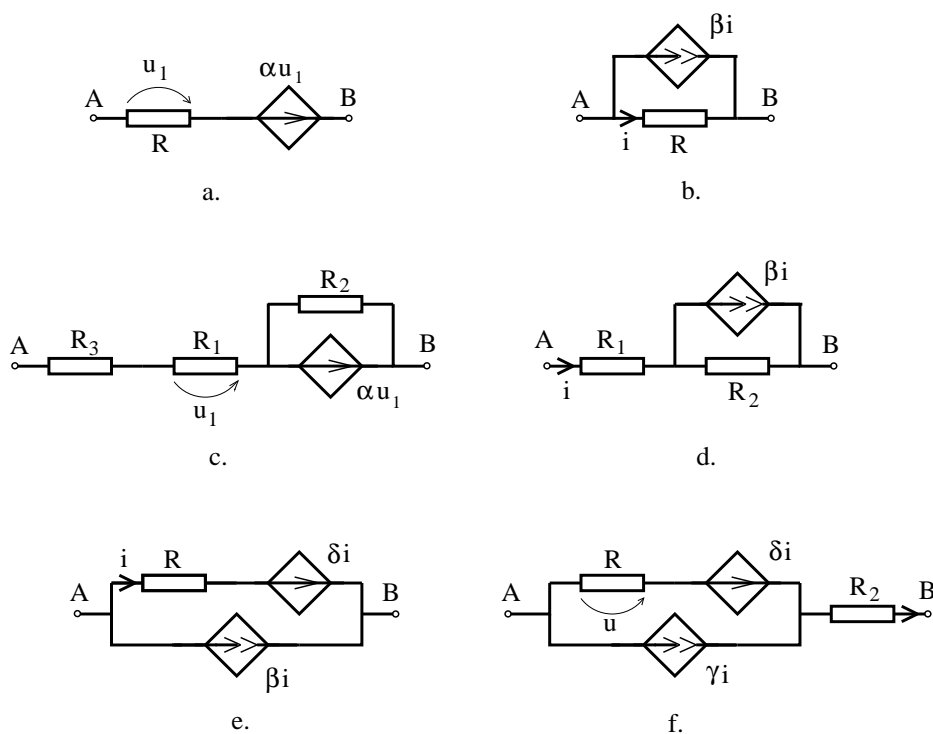


Fig. 2.6.2.

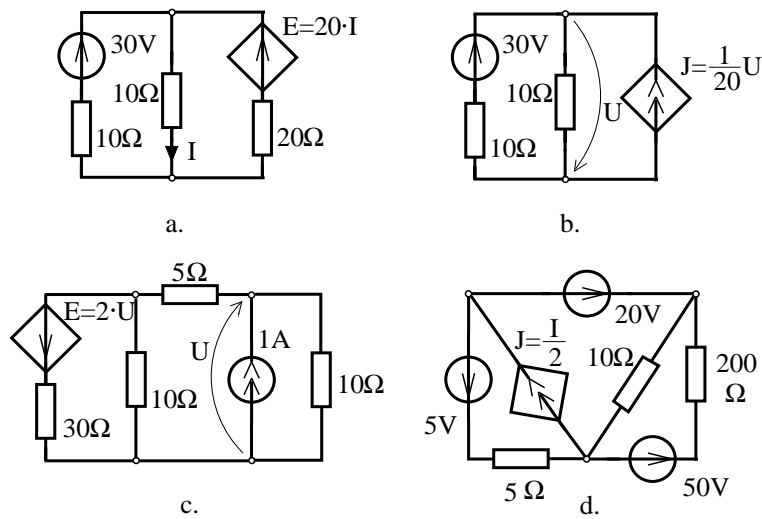


Fig. 2.6.3.

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

**2.6.6.** Circuitul reprezentat în figura 2.6.4.a poartă numele de amplificator inversor cu reacție negativă. Acest circuit poate fi echivalat cu schema din figura 2.6.4.b. Utilizând schema echivalentă a amplificatorului operațional prezentată în figura 2.25.b, să se determine rezistența de intrare echivalentă  $R_{ie}$ , rezistența de ieșire echivalentă  $R_{oe}$  și amplificarea  $A$  a circuitului. Să se determine valorile acestor parametri dacă se utilizează schema echivalentă a amplificatorului operațional prezentată în figura 2.25.b. Care este valoarea amplificării  $A$ , atunci când amplificarea în bucla deschisă  $A_0$  tinde către infinit?

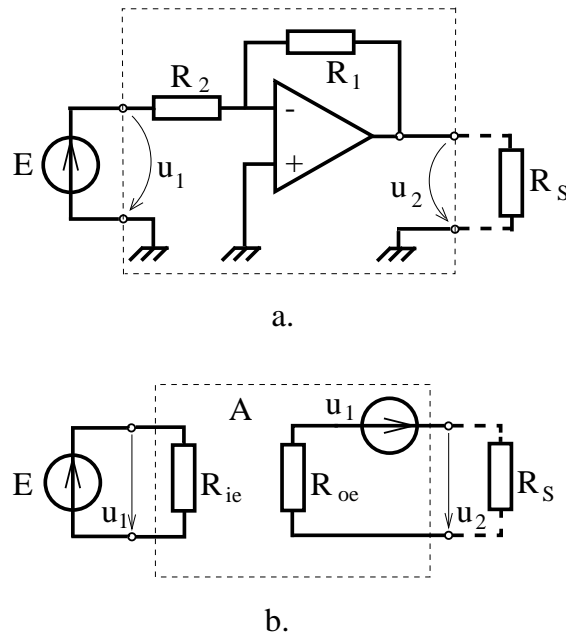


Fig. 2.6.4.

**2.6.7.** Să se calculeze rezistența echivalentă de intrare  $R_{ie}$ , rezistența echivalentă de ieșire  $R_{oe}$  și amplificarea echivalentă  $A$  pentru circuitul de tip amplificator neinversor prezentat în figura 2.6.5.

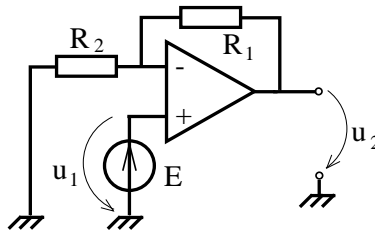


Fig. 2.6.5.

Calcululele vor fi efectuate utilizând, pe rând, cele trei modele ale amplificatorului

operațional reprezentate în figurile 2.25.b, 2.25.c și 2.26.c.

**2.6.8.** Să se calculeze tensiunile de ieșire  $U_2$  pentru circuitul sumator reprezentat în figura 2.6.6.a și circuitul de diferență reprezentat în figura 2.6.6.b. Se va utiliza schema echivalentă a amplificatorului operațional prezentată în figura 2.25.c, iar în final se va discuta cazul în care  $A_0 \rightarrow \infty$ .

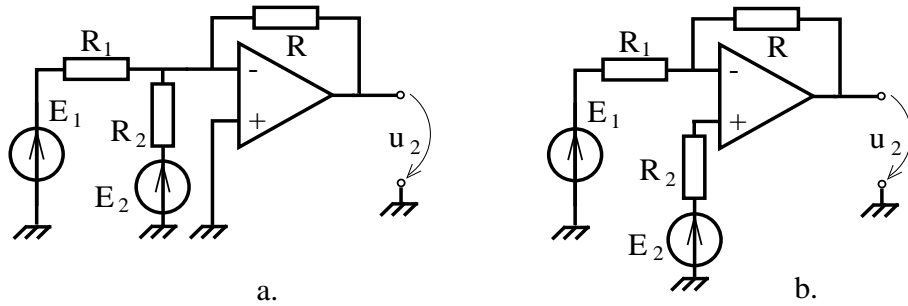


Fig. 2.6.6.

**2.6.9.** Să se calculeze rezistența de intrare, rezistența de ieșire și amplificarea circuitului repetor reprezentat în figura 2.6.7. Să se calculeze eroarea care se face asupra tensiunii de ieșire atunci când se adoptă modelul perfect pentru amplificatorul operațional, dacă parametrii amplificatorului operațional au valorile  $R_i = 10M\Omega$ ,  $A_0 = 10^5$ ,  $R_0 = 10\Omega$ .

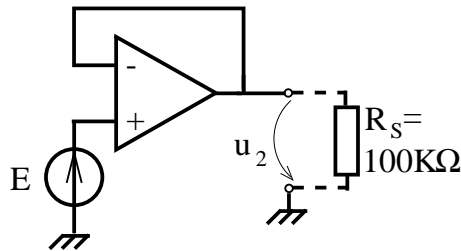


Fig. 2.6.7.

**2.6.10.** Să se arate că circuitele reprezentate în figura 2.6.8 pot simula următoarele tipuri de surse comandate: (a) sursa de tensiune comandată în curent, (b) sursa de curent comandată în curent, (c) sursa de curent comandată în tensiune. S-a notat cu  $R_s$  rezistența de sarcină conectată la bornele sursei comandate iar cu  $i_1$  și  $u_1$  mărimile de comandă. Calculele vor fi efectuate cu ajutorul schemei echivalente din figura 2.25.c, la care se va presupune  $A_0 \rightarrow \infty$ .



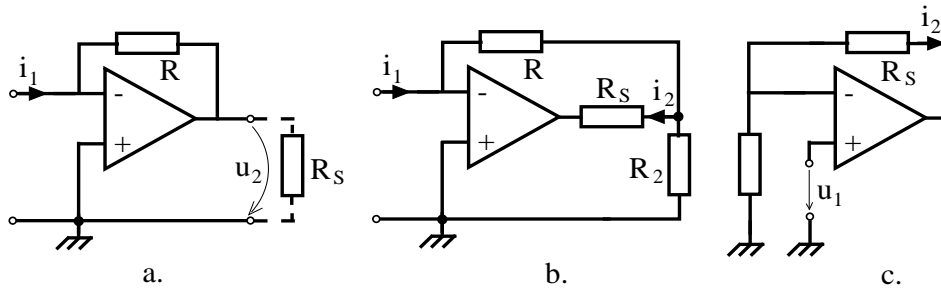


Fig. 2.6.8.

**2.6.11.** Circuitele cuadripolare prezentate în figurile 2.6.9.a și b se numesc convertoare de negativare INIC, respectiv UNIC. Să se stabilească relația dintre mărimile de intrare  $i_1, u_1$  și mărimile de ieșire  $i_2, u_2$ . Să se arate că rezistența echivalentă între bornele de intrare A și B este opusul rezistenței conectate între bornele de ieșire. Se va utiliza modelul perfect al amplificatorului operațional.

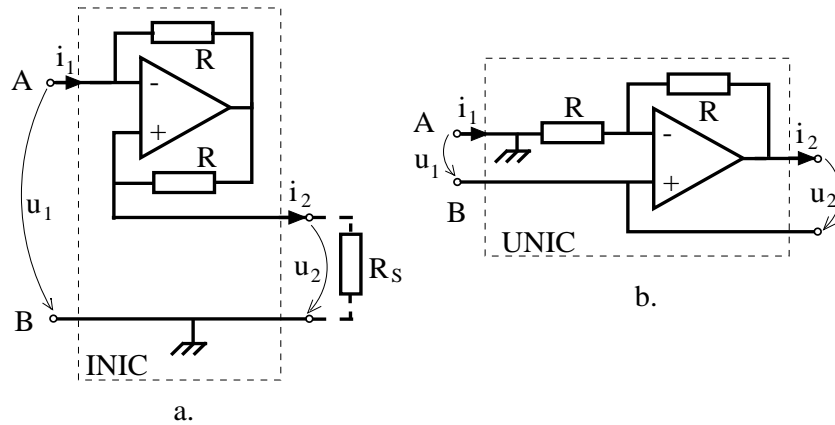


Fig. 2.6.9.

**2.6.12.** Să se calculeze erorile ce se fac asupra mărimilor de ieșire ale circuitelor prezentate în figurile 2.6.4 - 2.6.9 atunci când se utilizează pentru amplificatorul operațional modelul cu nulul în locul schemei din figura 2.25.c.

**2.6.13.** Pornind de la observația că un norator poate fi substituit cu un generator de curent având curentul electromotor nedeterminat să se genereze un algoritm de analiză cu metoda potențialelor de noduri pentru circuite ce conțin noratori.

## 2.7 Teoremele circuitelor rezistive liniare

### BREVIAR

În acest paragraf sunt analizate acele teoreme ale circuitelor electrice liniare care pun în evidență corelații între soluția problemei de analiză și datele acestei probleme. În acest fel se pune în evidență modul în care depind curenții și tensiunile unui circuit de parametrii rețelei.

**Teorema liniarității** afirmă că dacă un circuit electric conține rezistoare liniare, surse comandate liniar și un singur generator independent, atunci toate tensiunile și curenții rețelei vor depinde liniar de parametrul generatorului.

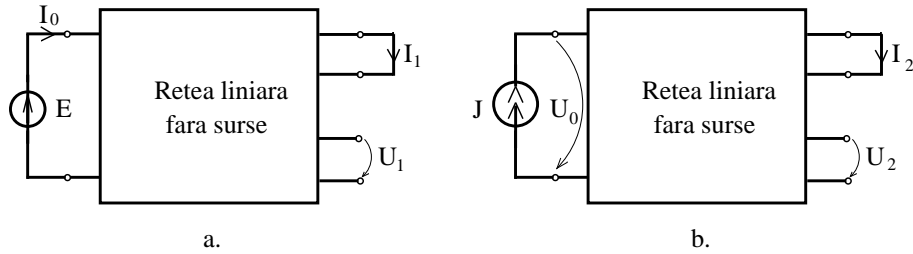


Fig. 2.27.

Utilizând notațiile din figura 2.27, teorema liniarității are forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_t \cdot E; & I_2 &= A_i \cdot J; \\ U_1 &= A_u \cdot E; & U_2 &= R_t \cdot J, \end{aligned} \quad (2.67)$$

în care s-au pus în evidență coeficienții de proporționalitate  $G_t$  (conductanța de transfer),  $A_u$  (coeficientul de transfer al tensiunii),  $A_i$  (coeficientul de transfer al curentului) și  $R_t$  (rezistența de transfer). Cei patru coeficienți de transfer, numiți și transmitanțe, sunt parametrii caracteristici ai rețelei față de cele două porți, nedepinzând de mărimile de excitație  $E$  sau  $J$ .

**Teorema răspunsurilor maxime** afirmă că pentru circuitele ce conțin numai rezistoare cu rezistențe pozitive, coeficienții de transfer în tensiune sau curent au modulul subunitar:

$$|A_u| \leq 1 \quad ; \quad |A_i| \leq 1, \quad (2.68)$$

deci tensiunile unui circuit rezistiv alimentat de la o singură sursă nu depășesc tensiunea de alimentare:  $|U_1| \leq |E|$  iar curenții nu depășesc curenții de alimentare  $|I_2| \leq |J|$ .

Aplicând teorema substituției (paragraful 3.5) rezultă următoarea consecință a teoremei anterioare:

$$\begin{aligned} |I_1| \leq |I_0| = |G_t E| &\implies |G_t| \leq G_i; \\ |U_2| \leq |U_0| = |R_t J| &\implies |R_t| \leq R_i, \end{aligned} \quad (2.69)$$

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

în care s-a notat cu  $R_i = 1/G_i$  rezistența echivalentă a circuitului rezistiv față de intrare și cu  $G_t$ ,  $R_t$  conductanța, respectiv rezistența de transfer intrare - ieșire.

**Teorema reciprocității** afirmă că pentru un circuit ce conține numai rezistoare, sunt valabile egalitățile:

$$\begin{aligned} I_a &= I_b; \\ U_a &= U_b, \end{aligned} \quad (2.70)$$

pentru mărimile definite în figura 2.28.

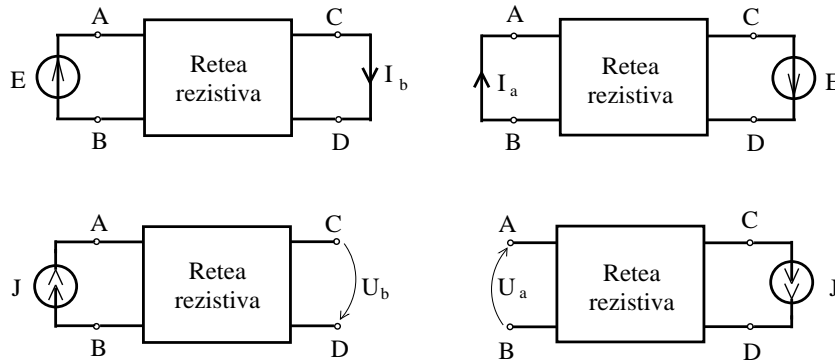


Fig. 2.28.

O consecință a teoremei reciprocității este faptul că pentru o rețea rezistivă coeficienții de transfer pentru două porți 1 și 2 sunt egali:

$$G_{t_{12}} = G_{t_{21}} ; R_{t_{12}} = R_{t_{21}}. \quad (2.71)$$

**Teorema superpoziției** afirmă că dacă un circuit conține rezistoare liniare, surse comandate liniar și generatoare independente, atunci curentul și tensiunea unei laturi sunt suma curenților, respectiv a tensiunilor din latura respectivă produse de fiecare generator, în condițiile în care celelalte generatoare sunt pasivizate.

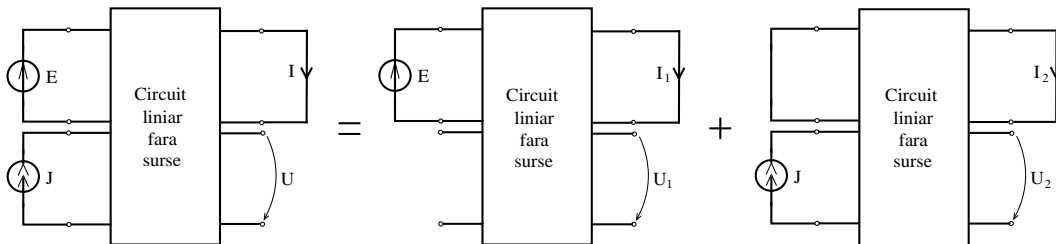


Fig. 2.29.

Utilizând notațiile din figura 2.29, din teorema superpoziției rezultă:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2; \\ U &= U_1 + U_2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

În general, pentru un circuit ce conține  $n$  surse, curentul  $I_k$  din latura  $k$  și tensiunea  $U_k$  la bornele laturii  $k$  satisfac egalitățile:

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{i=1}^n I_{ki}; \\ U_k &= \sum_{i=1}^n U_{ki}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

în care  $I_{ki}$  și  $U_{ki}$  sunt curentul, respectiv tensiunea din latura  $k$ , în condițiile în care în circuit se află doar generatorul independent din latura  $i$ , toate celelalte fiind pasivizate.

Dacă un circuit liniar este excitat de generatoare de tensiune (fig. 2.30.a), atunci curenții absorbiți de porți sunt, conform teoremelor liniarității și superpoziției, de forma:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

în care  $[G_{ij}]$  este *matricea conductanțelor*, elementele diagonale reprezentând conductanțele echivalente de intrare ale porților, iar cele nediagonale reprezentând conductanței de transfer:

$$G_{ij} = \left. \frac{I_i}{E_j} \right|_{E_k=0, k \neq j}. \quad (2.75)$$

Dacă circuitul liniar este reciproc atunci relația (2.71) garantează simetria matricei  $G$ .

Dacă circuitul liniar este excitat de  $m$  generatoare de curent (fig. 2.30.b), atunci tensiunile la bornele porților satisfac relația:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

în care  $[R_{ij}]$  este *matricea rezistențelor de transfer*, cu elementele:

$$R_{ij} = \left. \frac{U_i}{J_j} \right|_{J_k=0, k \neq j}. \quad (2.77)$$

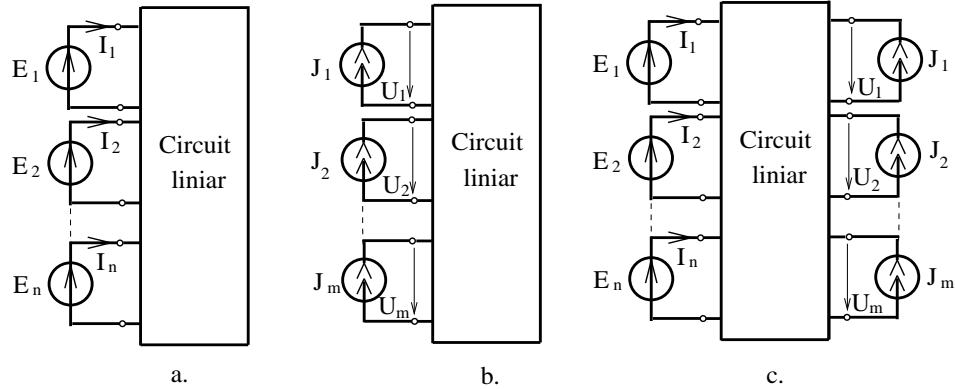


Fig. 2.30.

Această matrice este simetrică în cazul circuitelor reciproce.

Dacă un circuit liniar este excitat de  $n$  generatoare de tensiune și  $m$  generatoare de curent, atunci mărimile necunoscute ale porților satisfac relația:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \vdots & H_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{21} & \vdots & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \\ J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

în care matricea  $H$  se numește *matrice hibridă a multiportului* fiind alcătuită din *conductanțe de transfer* (elementele din submatricea bloc  $H_{11}$ ), definite prin:

$$h_{ij} = \left. \frac{I_i}{E_j} \right|_{\substack{E_k=0; k \neq j \\ J_k=0; k=1, m}}, \quad (2.79)$$

*coeficienții de transfer în curent* (elementele din submatricea bloc  $H_{12}$ ), definiți de:

$$h_{ij} = \left. \frac{I_i}{J_j} \right|_{\substack{E_k=0; k \neq j \\ E_k=0; k=1, n}}, \quad (2.80)$$

*coeficienții de transfer în tensiune* (elementele din submatricea bloc  $H_{21}$ ), definiți de:

$$h_{ij} = \left. \frac{U_i}{E_j} \right|_{\substack{E_k=0; k \neq j \\ J_k=0; k=1, m}}, \quad (2.81)$$

rezistențele de transfer (submatricea  $H_{22}$ ):

$$h_{ij} = \frac{U_i}{J_j} \bigg|_{\substack{J_k=0; k \neq j \\ E_k=0; k=1, n}} \quad (2.82)$$

În consecință, pentru caracterizarea unui multiport liniar cu  $n$  porți se utilizează o matrice pătrată de transmitanțe, de dimensiune  $n \times n$ . Definirea acestei matrici depinde de modul în care sunt controlate porțile, în curent sau în tensiune. Între matricile caracteristice unui multiport se pot stabili diverse relații; de exemplu, dacă matricea conductanțelor  $G$  este inversabilă atunci matricea rezistențelor este inversa sa:

$$R = G^{-1}. \quad (2.83)$$

În cazul rețelelor rezistive cu rezistențe pozitive matricile  $R$  și  $G$  sunt, conform teoremelor anterioare, matrici simetrice, pozitiv definite, cu diagonală dominantă.

Teoremele anterioare au pus în evidență modul în care variază curenții și tensiunile unei rețele în funcție de surse. Modificarea valorii unei rezistențe determină, în general, modificarea tuturor tensiunilor și curenților din circuitul respectiv. Pentru evidențierea modului în care se modifică tensiunile și curenții unei rețele față de modificarea unei rezistențe este utilă următoarea teoremă.

**Teorema variației** afirmă că derivatele parțiale ale curenților și tensiunilor dintr-o latură a unei rețele față de o rezistență  $R$  sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial R} &= -G_t \cdot I_1; \\ \frac{\partial U}{\partial R} &= -A_u \cdot I_1, \end{aligned} \quad (2.84)$$

în care  $I_1$  este curentul prin rezistorul supus variației, iar  $G_t$  și  $A_u$  sunt transmitanțele porților la care s-au definit mărimile  $I$  respectiv  $U$  față de o poartă controlată de tensiune înseriată cu rezistența  $R$  (fig. 2.31.a), în condițiile în care rețeaua se presupune pasivizată.

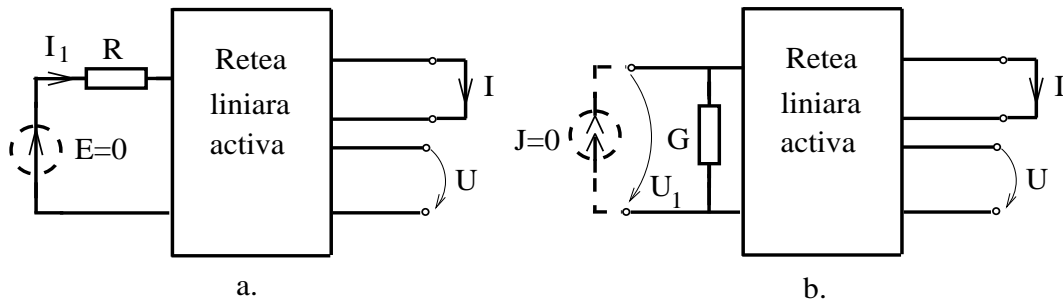


Fig. 2.31.

## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

---

Derivatele curentului  $I$  și a tensiunii  $U$  față de conductanța  $G$  a unui rezistor din rețea sunt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial G} &= -A_i \cdot U_1; \\ \frac{\partial U}{\partial G} &= -R_t \cdot U_1,\end{aligned}\tag{2.85}$$

în care  $U_1$  este tensiunea la bornele rezistorului supus variației, iar  $A_i$  și  $R_t$  sunt transmitanțele porților la care s-au definit mărimile  $I$  respectiv  $U$  față de o poartă controlată în curent, conectată în paralel cu rezistorul de conductanță  $G$ , în condițiile în care rețeaua se presupune pasivizată (fig. 2.31.b).

Utilizând relațiile (2.84) și (2.85) se poate stabili influența unei rezistențe sau a unei conductanțe asupra unei transmitanțe, calculând derivata transmitanței față de acea rezistență sau conductanță. Deoarece orice transmitanță  $T = Y/X$  este raportul unei mărimi de ieșire  $Y$  și al unei mărimi de intrare  $X$ , presupunând mărimea de intrare constantă, rezultă că derivata parțială a transmitanței  $T$  este:

$$\frac{dT}{dR} = \frac{1}{X} \cdot \frac{dY}{dR},$$

exprimabilă în funcție de derivata mărimii de ieșire, curent sau tensiune. Calculul derivatelor transmitanțelor față de rezistențele și conductanțele unui circuit poartă numele de *analiza sensibilităților* circuitului respectiv.

PROBLEME

2.7.1. Să se verifice teorema liniarității pentru circuitele din figura 2.7.1. Să se calculeze transmitanțele tuturor laturilor față de latura generator.

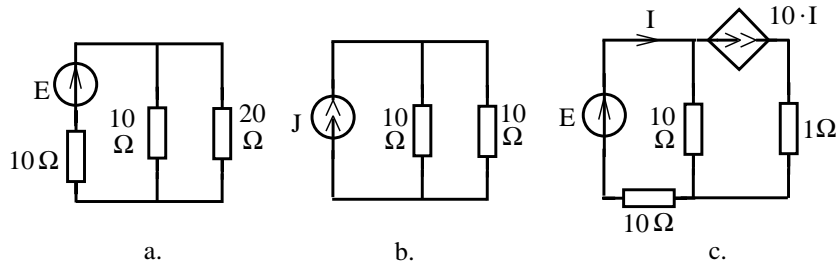


Fig. 2.7.1.

2.7.2. Să se verifice teorema reciprocității și teorema răspunsurilor maxime pentru circuitele cuadripolare din figura 2.7.2.

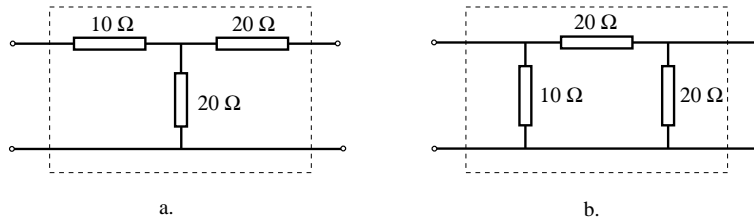


Fig. 2.7.2.

2.7.3. Să se calculeze curenții notați cu  $I$  în circuitele din figura 2.7.3, aplicând teorema superpoziției.

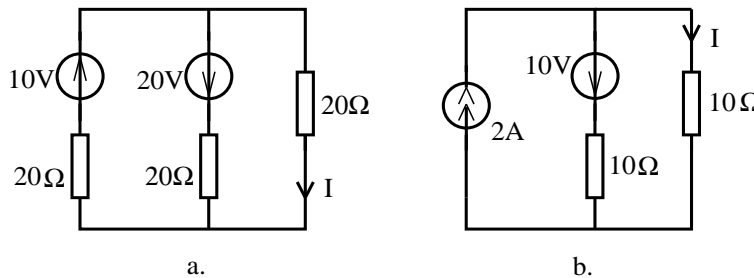


Fig. 2.7.3.



## 2. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE LINIARE

**2.7.4.** Să se calculeze, pentru cuadripolii diporți din figura 2.7.4, matricile rezistență, conductanță și a parametrilor hibridi. Să se discute condițiile de existență a acestor matrici.

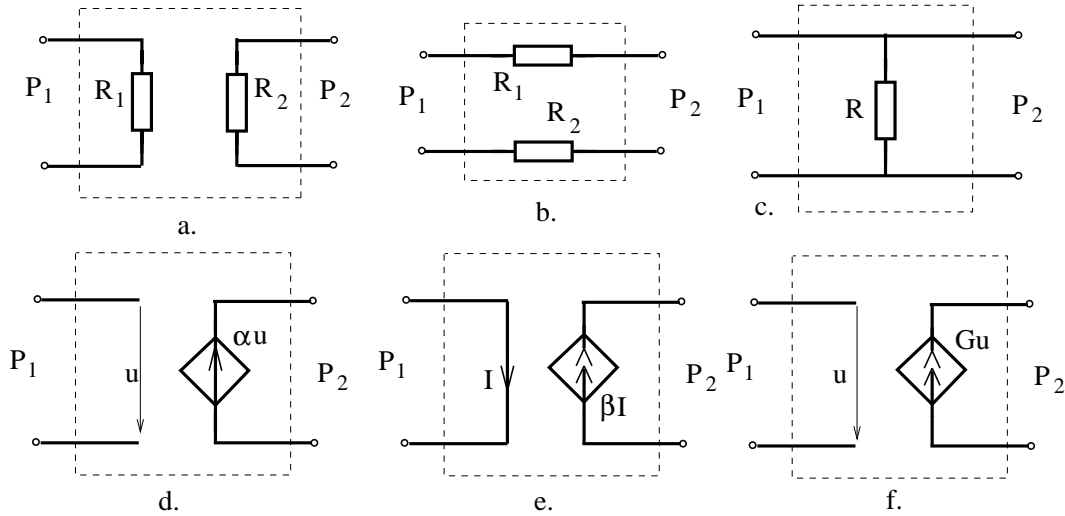


Fig. 2.7.4.

**2.7.5.** Să se calculeze matricile rezistență, conductanță și hibride pentru cuadripolii diporți din figura 2.7.5. Să se stabilească condițiile de echivalență între acești cuadripoli.

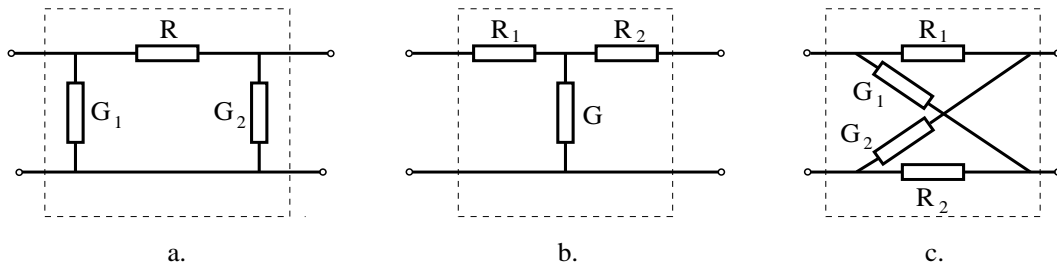


Fig. 2.7.5.

**2.7.6.** Să se calculeze matricile caracteristice ale cuadripolilor prezentați în figura 2.7.6. În ce condiții acești cuadripoli sunt echivalenți cu cei din figura 2.7.5?

**2.7.7.** Să se calculeze derivatele parțiale ale intensității  $I$  față de rezistențele circuitului, la circuitele din figura 2.7.3. În ce sens trebuie modificate rezistențele pentru a mări modulul curentului  $|I|$ ?

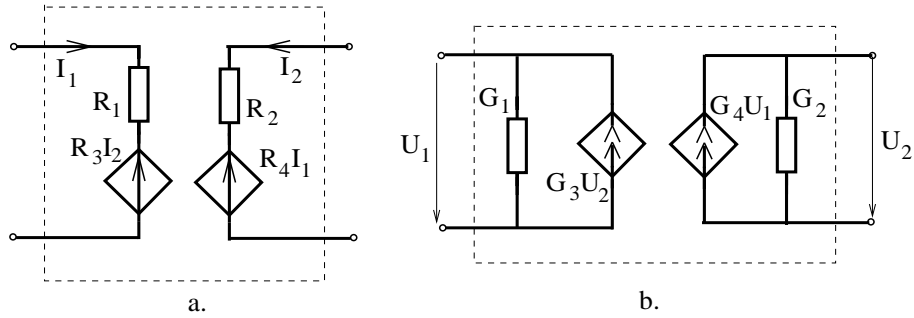


Fig. 2.7.6.

**2.7.8.** Să se calculeze derivatele parțiale ale transmitanțelor circuitelor din figura 2.7.5, față de rezistențele și conductanțele rezistoarelor ce alcătuiesc rețeaua.

**2.7.9.** Să se calculeze derivatele parțiale ale parametrilor calculați în problema 2.6.7. față de datele problemei. În ce sens trebuie modificate datele problemei pentru a mări modulul tensiunii  $u_2$  ?

**2.7.10.** Să se determine cu câte procente trebuie modificată valoarea rezistenței  $R_1$  la circuitul din figura 2.6.5, pentru ca tensiunea  $u_2$  să crească cu un procent.

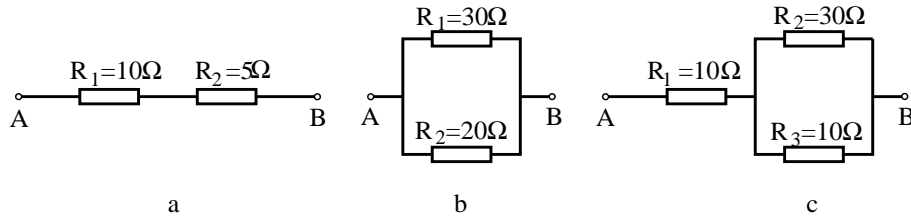


Fig. 2.7.7.

**2.7.11.** Să se studieze influența rezistențelor asupra rezistenței echivalente între bornele A, B în cazul circuitelor din figura 2.7.7. Presupunând satisfacătoare aproximarea liniară să se determine cu câte procente se va modifica rezistența echivalentă, dacă fiecare rezistor își mărește rezistența cu 1%.

## *2. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE LINEARI*

---

# Capitolul 3

## Circuite electrice rezistive neliniare

### 3.1 Circuite liniare cu un dipol neliniar

#### BREVIAR

Pentru caracterizarea unui **rezistor dipolar neliniar controlat în curent** (fig. 3.1.a) se utilizează următoarele funcții:

– *caracteristica curent-tensiune:*

$$u = f(i); \quad (3.1)$$

– *rezistența statică:*

$$R_s(i) = \frac{f(i)}{i}; \quad (3.2)$$

– *rezistența dinamică:*

$$R_d(i) = \frac{df}{di}, \quad (3.3)$$

ultima funcție utilizându-se atunci când funcția caracteristică  $f$  este derivabilă.

Pentru caracterizarea unui **rezistor neliniar controlat în tensiune** (fig. 3.1.b) se utilizează următoarele funcții:

– *caracteristica tensiune-curent:*

$$i = g(u); \quad (3.4)$$

– *conductanța statică:*

$$G_s(u) = \frac{g(u)}{u}; \quad (3.5)$$

### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

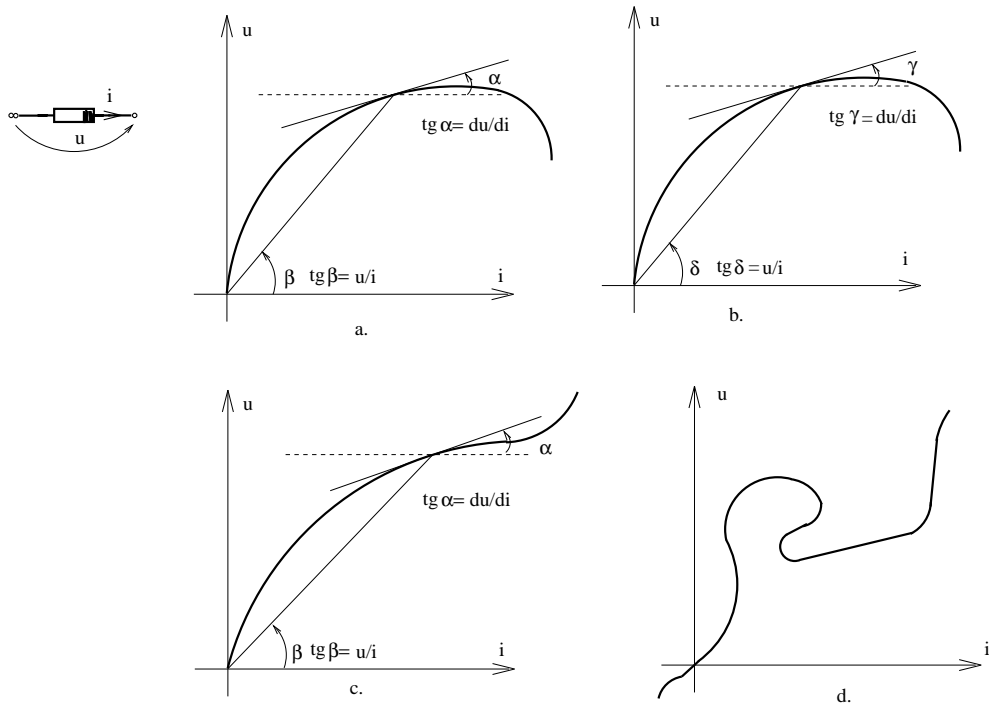


Fig. 3.1.

– conductanța dinamică:

$$G_d(u) = \frac{dg}{du}, \quad (3.6)$$

ultima funcție utilizându-se atunci când funcția caracteristică  $g$  este derivabilă.

În cazul elementelor ce au caracteristica  $f$  inversabilă (fig. 3.1.c) se pot utiliza toate cele patru funcții, elementele putând fi controlate atât în curent cât și în tensiune. Elementele ce nu sunt controlate în curent sau în tensiune (fig. 3.1.d) necesită două funcții pentru a reprezenta relația  $u-i$  sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} u &= f(\lambda); \\ i &= g(\lambda). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Un rezistor care are funcția caracteristică impară:

$$f(-i) = -f(i) \quad \text{sau} \quad g(-i) = -g(i), \quad (3.8)$$

se numește cu bornele nepolarizate, în caz contrar el face parte din categoria elementelor polarizate.

În general, schimbarea sensurilor de referință pentru tensiuni și curenți determină modificarea graficului relației  $u-i$ , din acest motiv graficul unei caracteristici  $u-i$  trebuie asociat unei figuri cu sensuri de referință pentru tensiuni și curenți. La

### 3.1. CIRCUITE LINIARE CU UN DIPOL NELINIAR

elementele nepolarizate este suficient să se specifice regula de asociere a sensurilor pentru a interpreta graficul în mod univoc.

Rezistoarele liniare având ecuația de funcționare:

$$u = Ri,$$

pot fi controlate fie în curent (dacă  $G = 1/R \neq 0$ ), fie în tensiune (dacă  $R \neq 0$ ), iar  $R_S = R_d = R = 1/G_d = 1/G_s$ . Rezistoarele liniare fac parte din categoria rezistoarelor nepolarizate.

Cea mai simplă metodă pentru analiza circuitelor liniare ce conțin un rezistor neliniar este metoda grafică a **dreptei de sarcină**. Pentru aplicarea acestei metode se determină generatorul echivalent părții liniare a rețelei (fig. 3.2.b) și se reprezintă grafic relația dintre tensiune și curent impusă de acest generator. Graficul acestei funcții va fi o dreaptă, numită dreaptă de sarcină, iar soluția problemei, punctul de operare al elementului neliniar este punctul de coordonate  $(i, u)$ , aflat la intersecția acestei drepte cu caracteristica neliniară. Pentru trasarea dreptei sunt suficiente două puncte și anume tensiunea de mers în gol  $U_{AB0}$  și curentul de scurtcircuit  $I_{sc_{AB}}$ . În consecință, analiza se reduce la înlocuirea elementului neliniar cu un izolator, respectiv cu un conductor perfect, determinându-se tăieturile dreptei de sarcină.

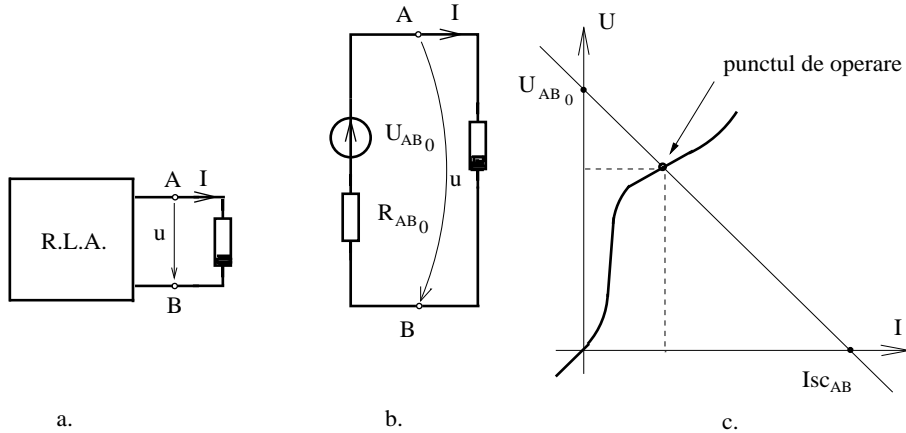


Fig. 3.2.

Dezavantajele metodei dreptei de sarcină constau în imprecizia implicită a unei metode grafice și în faptul că metoda poate fi aplicată doar la circuite cu un singur element neliniar. Metoda poate fi extinsă la circuite ce conțin mai multe elemente neliniare conectate în serie sau în paralel, ce alcătuiesc un dipol echivalent neliniar. Dacă elementele neliniare sunt conectate în serie ( $i_1 = i_2, u = u_1 + u_2$ ), atunci caracteristica elementului echivalent se determină prin sumare grafică pe orizontală, în planul  $u-i$  ca în figura 3.3.

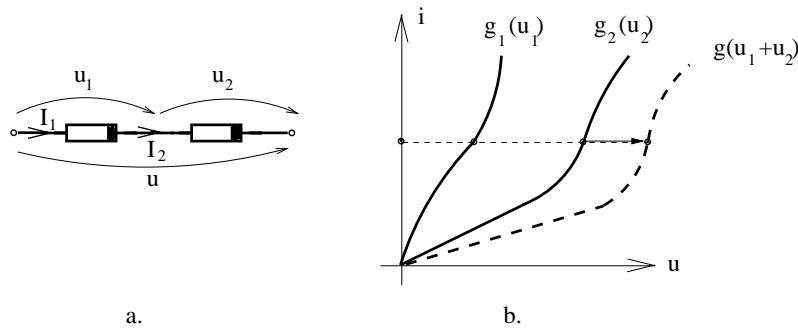


Fig. 3.3.

Dacă elementele neliniare sunt conectate în paralel, ( $u_1 = u_2, i = i_1 + i_2$ ), atunci caracteristica elementului echivalent se determină prin sumare grafică pe verticală, în planul  $u-i$ , ca în figura 3.4.

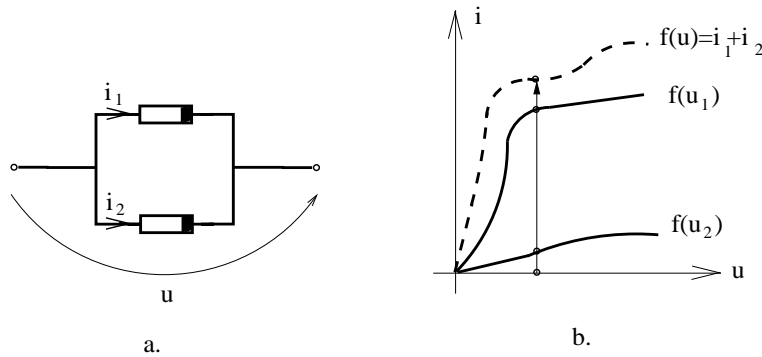


Fig. 3.4.

Conectarea în serie a unui generator ideal de tensiune cu un rezistor neliniar translatează caracteristica neliniară a acestuia cu tensiunea electromotoare  $E$  (fig. 3.5).

Conectarea în paralel a unui generator ideal de curent cu un rezistor neliniar translatează caracteristica neliniară a acestuia cu curentul electromotor  $J$  (fig. 3.6).

Observațiile anterioare permit să se afirme că orice rezistor neliniar este echivalent cu un generator neliniar de tensiune (fig. 3.5.a) sau cu un generator neliniar de curent (fig. 3.6.a). Această observație permite generalizarea metodei grafice la circuite alcătuite din elemente neliniare conectate serie-paralel obținându-se metoda numită a **curbei de sarcină**, în care punctul de operare  $[u, i]$  al unui element neliniar se obține prin intersecția caracteristicii elementului cu curba de sarcină a restului rețelei neliniare determinată prin însumări grafice.

3.1. CIRCUITE LINIARE CU UN DIPOL NELINIAR

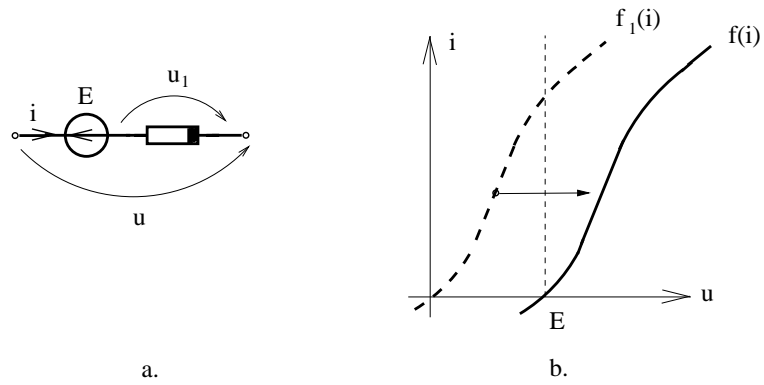


Fig. 3.5.

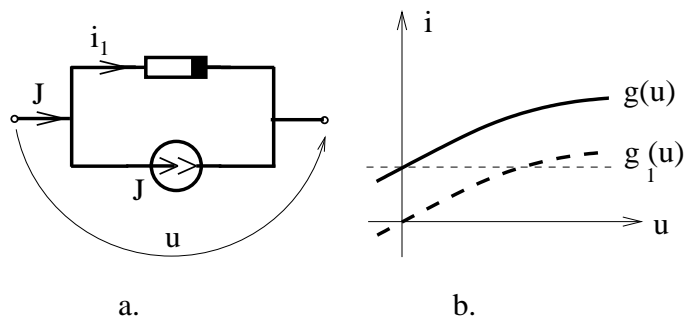


Fig. 3.6.



**PROBLEME**

**3.1.1.** Să se reprezinte grafic caracteristicile  $i(u)$ , rezistența statică  $R_s(u)$  și rezistența dinamică  $R_d(u)$  pentru o diodă semiconductoare (fig. 3.1.1) pentru care s-au măsurat următoarele perechi de valori U-I.

$U[V]$	-40	-30	-20	-10	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$I[mA]$	-0,1	-0,06	-0,04	-0,02	0	1	3	6	9	12

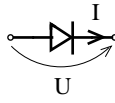


Fig. 3.1.1.

**3.1.2.** Să se calculeze rezistența statică și dinamică pentru tensiunile  $u_1 = 1V$  și  $u_2 = -1V$  aplicate la bornele unei diode având funcția caracteristică:

$$i = g(u) = I_s(e^{u/U_t} - 1),$$

în care  $I_s=0,05mA$  și  $U_T = 25mV$ .

**3.1.3.** Să se calculeze rezistența dinamică pe diferite porțiuni ale caracteristicilor neliniare reprezentate în figura 3.1.2: (a) dioda semiconductoare; (b) dioda Zener; (c) dioda tunel; (d) dioda tiristor; (e) tubul cu neon și (f) varistorul.

**3.1.4.** Să se reprezinte grafic caracteristica  $u-i$  pentru dioda semiconductoare alegând pe rând sensurile de referință din figura 3.1.3. Să se reprezinte, în mod asemănător, graficele tuturor celorlalte elemente neliniare din figura 3.1.2, pentru diferite sensuri de referință.

**3.1.5.** Să se reprezinte caracteristica  $u-i$  pentru elementele dipolare reprezentate în figura 3.1.4. Se va înlocui dioda semiconductoare cu celelalte elemente neliniare din figura 3.1.2.

**3.1.6.** Să se reprezinte grafic caracteristica  $u-i$  pentru elementele dipolare din figura 3.1.5. Se va studia apoi combinația altor elemente neliniare din cele prezentate în figura 3.1.2.

**3.1.7.** Să se reprezinte grafic caracteristica  $u-i$  pentru diferite combinații de elemente dipolare neliniare conectate în serie sau paralel (fig. 3.1.6).

### 3.1. CIRCUITE LINIARE CU UN DIPOL NELINIAR

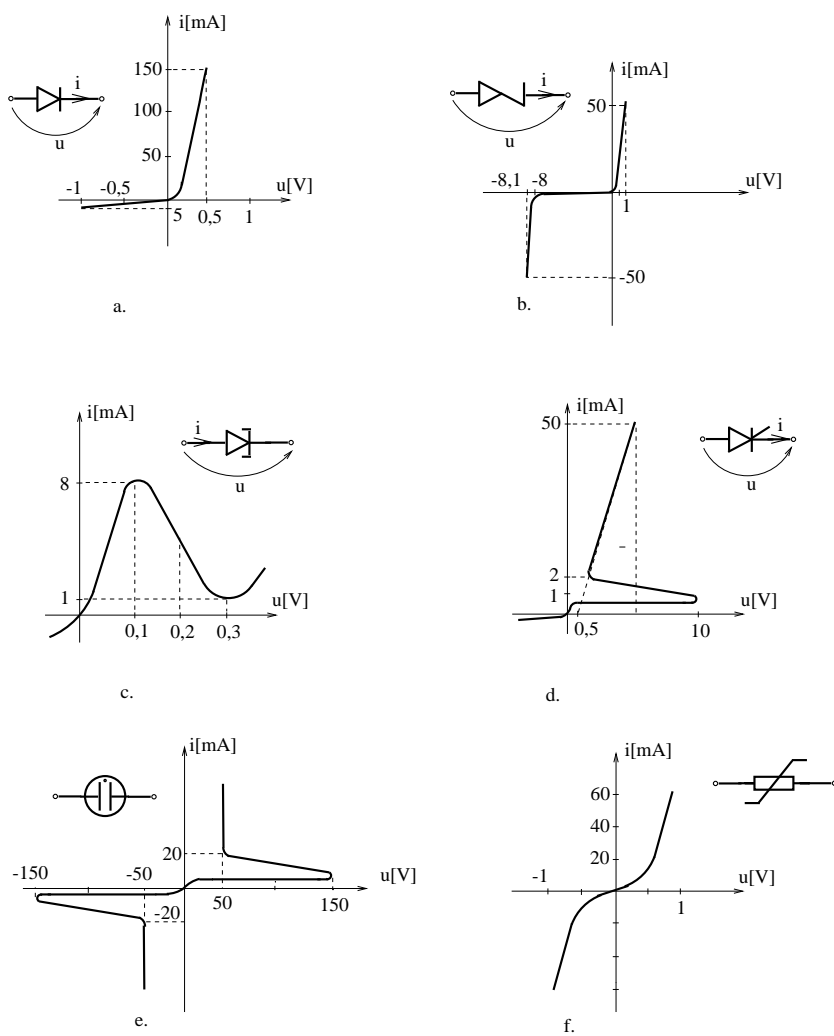


Fig. 3.1.2.

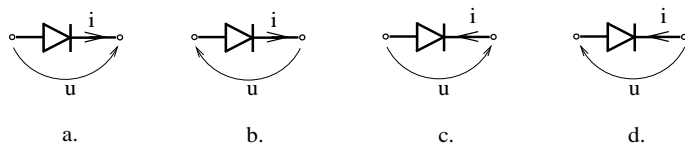


Fig. 3.1.3.

3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

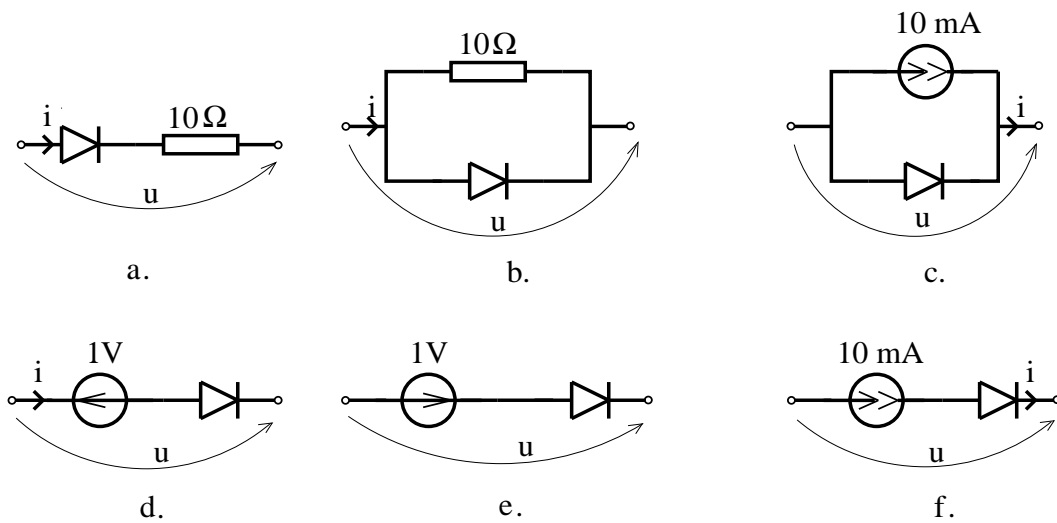


Fig. 3.1.4.

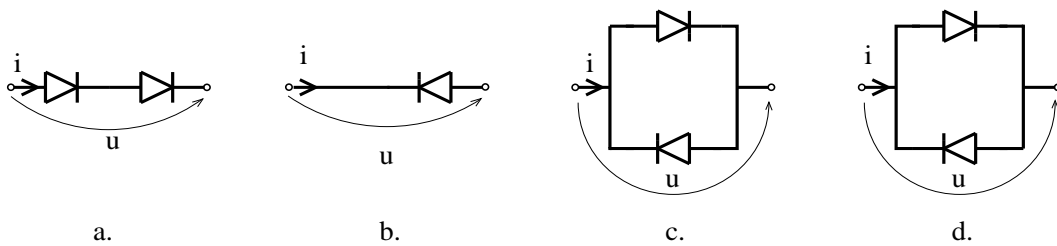


Fig. 3.1.5.

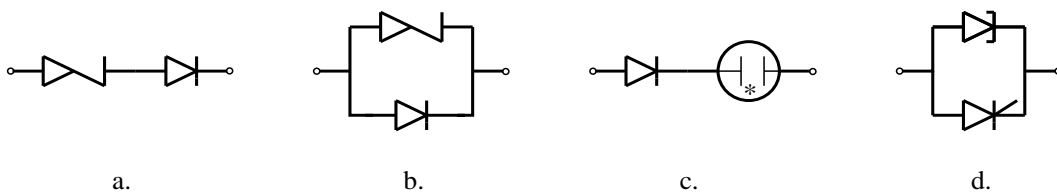


Fig. 3.1.6.

**3.1.8.** Să se determine coordonatele punctului de operare  $[u, i]$  pentru elementul neliniar din circuitul reprezentat în figura 3.1.7. Se vor considera pe rând elementele neliniare ale căror caracteristici sunt prezentate în figura 3.1.2. Ce efect are asupra punctului de operare inversarea poziției elementului neliniar? Este acest efect echivalent inversării poziției generatorului?

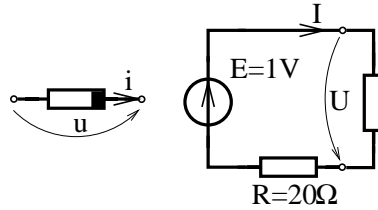


Fig. 3.1.7.

**3.1.9.** Să se determine porțiunea din caracteristica neliniară pe care se află punctul de operare al elementului neliniar  $[u, i]$ , în cazul circuitelor reprezentate în figura 3.1.8. Se vor considera, pe rând, elementele neliniare ale căror caracteristici sunt prezentate în figura 3.1.2.

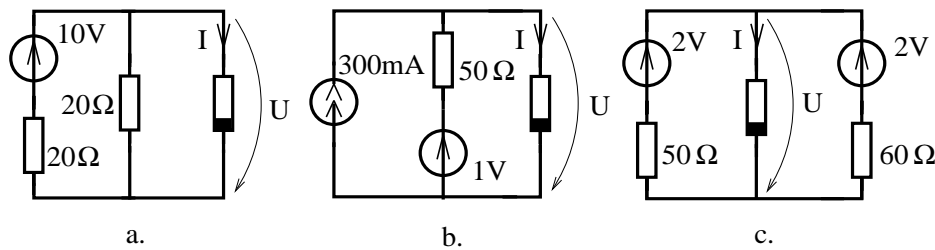


Fig. 3.1.8.

**3.1.10.** Să se determine numărul de soluții pe care le poate avea problema determinării punctului de operare în cazul circuitului reprezentat în figura 3.1.9.

**3.1.11.** Ce rezistență trebuie conectată în paralel cu dioda tunel a cărei caracteristică este prezentată în figura 3.1.2.c, pentru ca elementul obținut să poată fi utilizat ca stabilizator de curent?

**3.1.12.** Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 3.1.10 și să se determine punctele de operare pentru elementele neliniare. Vor fi considerate caracteristicile elementelor neliniare reprezentate în figura 3.1.2.

3. CIRCUITE ELETTRICHE RESISTIVE NON LINEARI

---

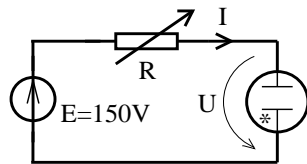


Fig. 3.1.9.

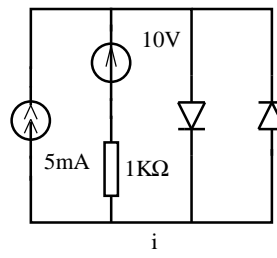
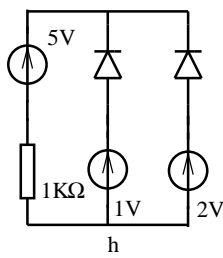
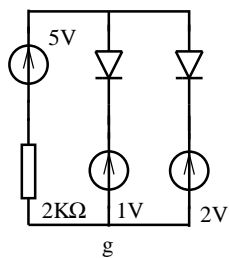
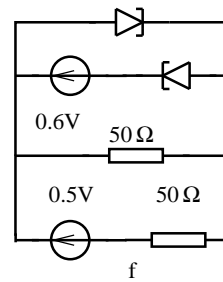
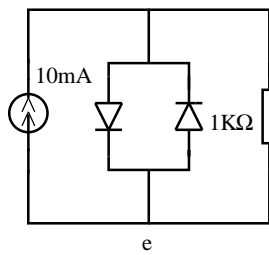
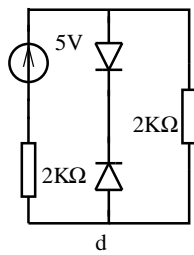
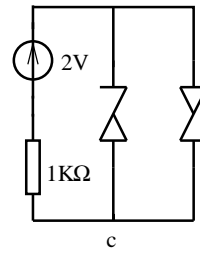
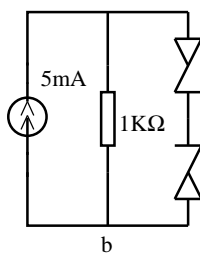
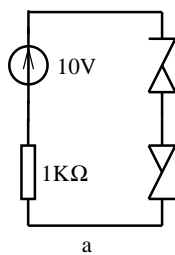


Fig. 3.1.10.

3.1. CIRCUITE LINIARE CU UN DIPOL NELINIAR

**3.1.13.** Aplicând metoda curbei de sarcină să se determine valorile tensiunii  $U$  și curentului  $I$  pentru circuitele din figura 3.1.11. Se vor considera caracteristicile elementelor neliniare reprezentate în figura 3.1.2.

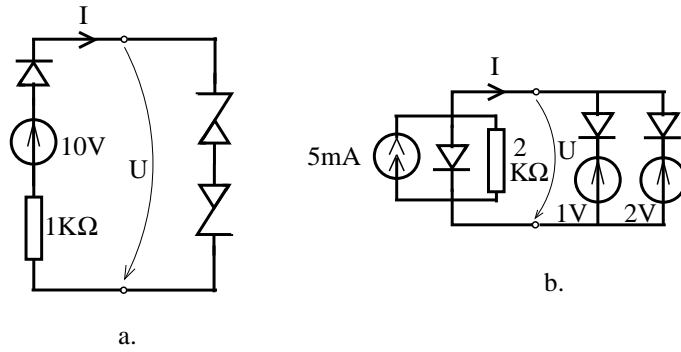


Fig. 3.1.11.

**3.1.14.** Să se urmărească traiectoria punctului de operare și să se reprezinte grafic variația tensiunii  $u(t)$  dacă tensiunea electromotoare variază sinusoidal în timp  $e(t) = 20 \sin(\omega t)$  (fig. 3.1.12).

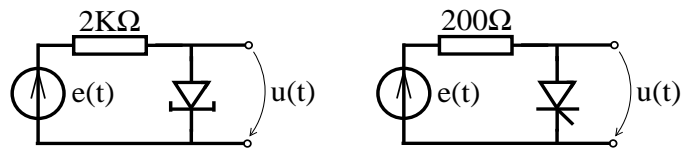


Fig. 3.1.12.

## 3.2 Elemente cu caracteristici liniare pe porțiuni

### BREVIAR

Metoda dreptei de sarcină și în general orice metodă grafică are dezavantajul principal de imprecizie în obținerea soluției, imprecizie condiționată de calitatea reprezentării grafice. Pentru a evita acest lucru, în analiza circuitelor neliniare se preferă aproximarea caracteristicii neliniare printr-o caracteristică de tip linie poligonală, alcătuită din segmente de dreaptă pe porțiuni (fig. 3.7). Pe fiecare porțiune, caracteristica u-i fiind o dreaptă, elementul neliniar poate fi echivalat cu un generator real, valabil pe porțiunea respectivă.

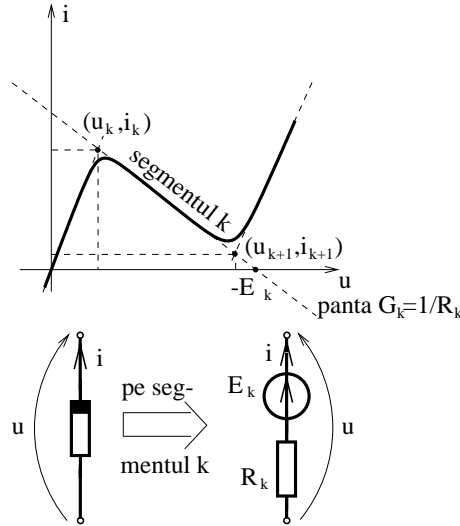


Fig. 3.7.

**Generatorul echivalent corespunzător segmentului de dreaptă** ce are extremitățile  $(u_k, i_k)$  și  $(u_{k+1}, i_{k+1})$  are parametrii:

$$R_k = R_{dk} = \frac{u_{k+1} - u_k}{i_{k+1} - i_k}; \quad E_k = R_k i_k - u_k, \quad (3.9)$$

în care  $R_k$  este panta dreptei (rezistența dinamică), iar  $E_k$  este intersecția dreptei cu axa tensiunii.

Pentru analiza circuitelor ce conțin elemente neliniare cu caracteristici liniare pe porțiuni trebuie identificată, pentru fiecare element neliniar, porțiunea în care se află punctul de operare și apoi înlocuindu-se schema liniară echivalentă pe porțiunea respectivă se analizează circuitul obținut cu una din metodele de

### 3.2. ELEMENTE CU CARACTERISTICI LINIARE PE PORȚIUNI

analiză a circuitelor liniare. Pentru identificarea porțiunii în care se află punctul de operare se pot utiliza metode grafice ca metoda dreptei sau curbei de sarcină.

O altă metodă de analiză a acestor circuite neliniare ce nu utilizează tehnici grafice este aceea în care se analizează toate circuitele liniare obținute prin combinarea schemelor echivalente pe porțiunile liniare și eliminarea soluțiilor ce corespund punctelor de operare ce nu aparțin segmentelor pe care sunt valabile schemele utilizate.

Dacă se analizează un circuit ce conține  $n$  elemente neliniare, fiecare element  $k = 1 \dots n$  având caracteristica alcătuită din  $m_k$  segmente de dreaptă, atunci cu această metodă, în cazul cel mai defavorabil, trebuie analizate  $\prod_{k=1}^n m_k$  circuite liniare pentru a determina soluția.

Prin aproximarea liniară pe porțiuni se obțin diferite *modele liniarizate* (de semnal mare) ale elementelor neliniare. De exemplu, pentru diode semiconductoare se pot utiliza modelele din figura 3.8.

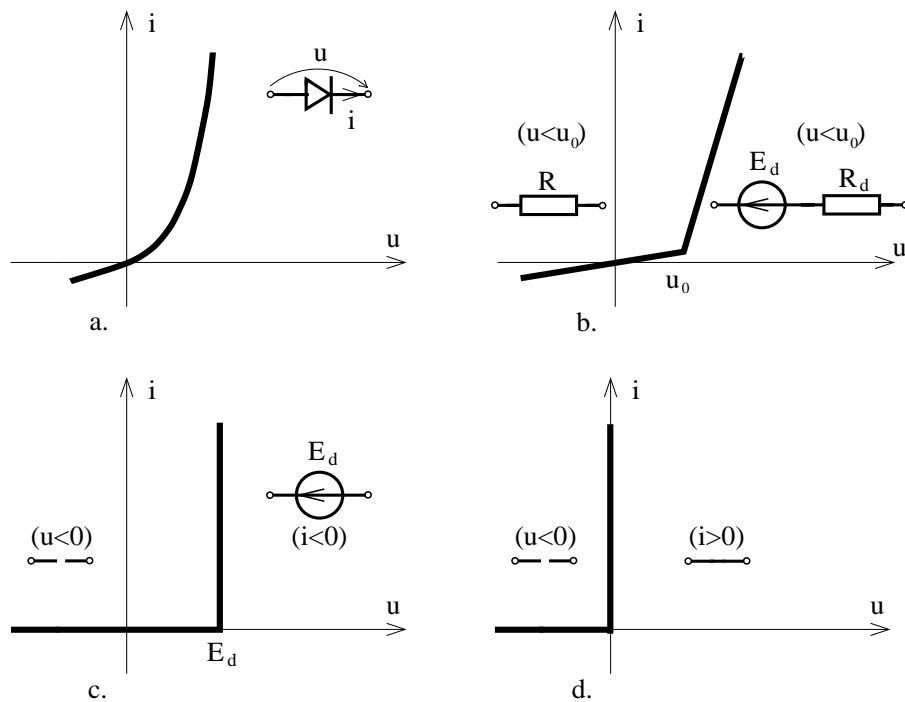


Fig. 3.8.

În cazul elementelor tripolare schemele echivalente liniarizate vor conține și generatoare comandate. De exemplu, **tranzistorul npn**, un element tripolar (cu cele trei terminale numite B - bază, E - emitor, C - colector), are caracteristicile statice:

$$\begin{aligned} U_{BE} &= \hat{U}_{BE}(I_B, U_{CE}); \\ I_C &= \hat{I}_C(I_B, U_{CE}), \end{aligned} \quad (3.10)$$



### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

în care funcțiile neliniare de două variabile  $\hat{U}_{BE}$ ,  $\hat{I}_C$  sunt reprezentate grafic în figura 3.9. S-a considerat că mărimile de comandă (de intrare) sunt: curentul de bază  $I_B$  și tensiunea colector - emitor  $U_{CE}$ , iar mărimile comandate (de ieșire) sunt: tensiunea bază - emitor  $U_{BE}$  și curentul de colector  $I_C$ . Deoarece terminalul E este comun intrării se spune că această alegere corespunde *conexiunii cu emitor comun*, poarta de intrare (BE) fiind controlată în curent, iar cea de ieșire (CE) fiind controlată în tensiune. Dacă se aproximează cele două funcții reținând primii termeni din seria Taylor rezultă:

$$\begin{aligned} U_{BE} &\simeq H_{11}I_B + H_{12}U_{CE} + U_{BE_0}; \\ I_C &\simeq H_{21}I_B + H_{22}U_{CE} + I_{CE_0}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

în care coeficienții  $H_{ij}$  sunt *parametrii hibridi de semnal mare* ai tranzistorului și au următoarele semnificații:

$H_{11} = R_B$  este rezistența directă a joncțiunii bază-emitor;

$H_{12} = K_E$  este coeficientul invers de transfer al tensiunii;

$H_{21} = \beta$  este coeficientul de amplificare în curent;

$H_{22} = 1/R_C$  este conductanța colector-emitor în regiunea activă

normală;

$U_{BE_0}$  este tensiunea de deschidere a joncțiunii bază-emitor;

$I_{CE_0}$  este curentul colector-emitor pentru un curent de bază nul.

Parametrii ce intervin în ecuațiile (3.11) variază relativ puțin dacă tranzistorul se află în *regiunea activă normală* (R.A.N.). Dacă tranzistorul funcționează în *regiunea de saturație* (fig. 3.9.c), atunci ecuațiile pot fi approximate prin:

$$I_C = \frac{U_{CE}}{R_\alpha}, \quad (3.12)$$

iar dacă funcționează în *regiunea de blocare*:  $I_C = 0$ ,  $I_B = 0$ .

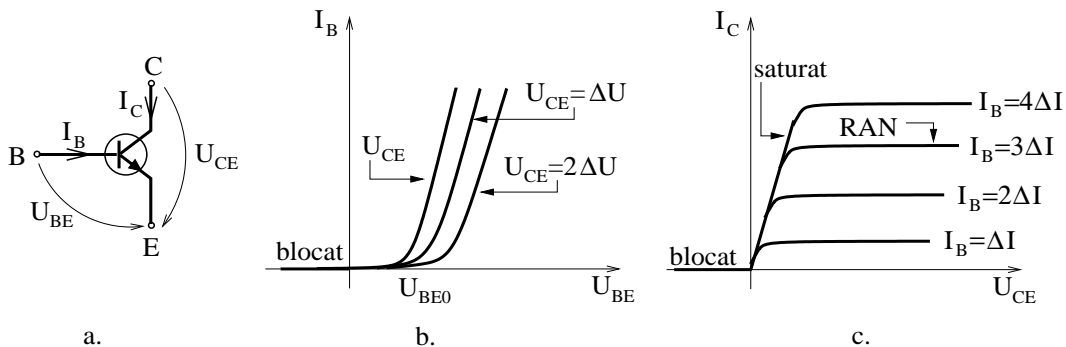


Fig. 3.9.

*Aproximarea liniară pe porțiuni* a ecuațiilor tranzistorului este prezentată în figura 3.10.

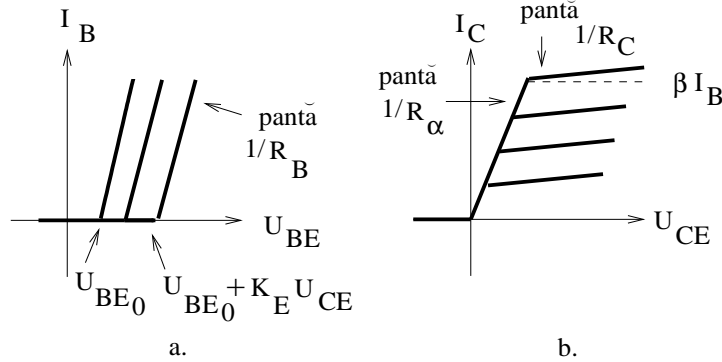


Fig. 3.10.

Pentru jonțiunea bază-emitor caracteristica se aproximează cu două segmente de dreaptă: baza blocată ( $I_B = 0$ ) și baza în conducție ( $I_B > 0$ ), iar caracteristica colector-emitor este aproximată prin trei segmente de dreaptă: tranzistorul blocat ( $I_B = 0$ ), tranzistorul saturat ( $I_B > 0$ ,  $I_C < \beta I_B$ ) și tranzistorul în regiunea activă normală ( $I_B > 0$ ,  $I_C > \beta I_B$ ). Schemele echivalente de semnal mare valabile pentru diferite regiuni, corespunzătoare acestor ecuații sunt prezentate în figura 3.12:

- a) tranzistorul blocat ( $U_B < 0$ );
- b) tranzistorul blocat cu baza în conducție ( $U_{CE} < 0$ ,  $I_B > 0$ );
- c) tranzistorul saturat ( $U_{CE} > 0$ ,  $I_B > \frac{I_C}{\beta}$ );
- d) tranzistorul în regiunea activă normală ( $U_{CE} > 0$ ,  $0 < I_B < \frac{I_C}{\beta}$ ).

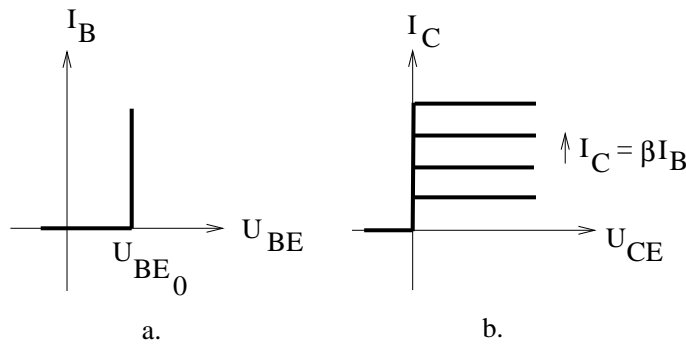


Fig. 3.11.

### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

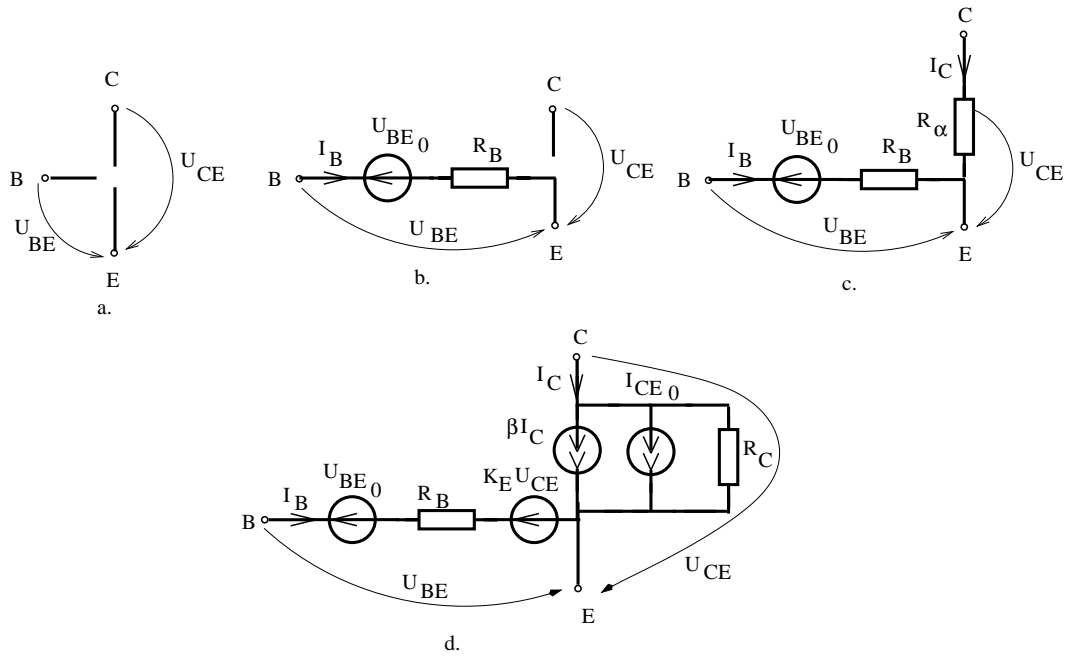


Fig. 3.12.

Dacă se adoptă următoarele aproximații:  $R_B = 0$ ,  $K_E = 0$ ,  $R_\alpha = 0$ ,  $R_C = \infty$ ,  $I_{CE_0} = 0$ , atunci se obține *modelul liniar pe porțiuni simplificat* al tranzistorului prezentat în figura 3.11, cu schemele echivalente în cele patru regiuni prezentate în figura 3.13.

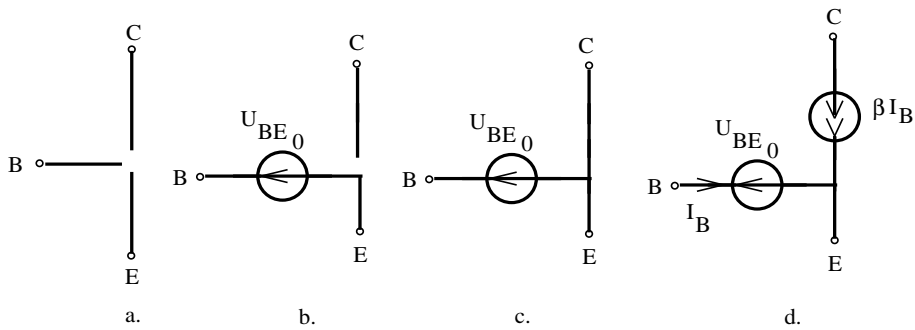


Fig. 3.13.

**PROBLEME**

**3.2.1.** Să se aproximeze caracteristicile elementelor neliniare din figura 3.1.2 cu segmente de dreaptă pe porțiuni și să se determine schemele echivalente liniarizate pe fiecare porțiune.

**3.2.2.** Să se aproximeze caracteristicile elementelor neliniare analizate în problema 3.1.6 cu segmente de dreaptă pe porțiuni și să se determine schemele echivalente liniarizate pe fiecare porțiune.

**3.2.3.** Să se determine punctul de operare cu ajutorul metodei schemelor echivalente pe porțiuni pentru circuitele analizate în problema 3.1.9.

**3.2.4.** Să se aplice metoda combinației schemelor echivalente pe porțiuni la analiza cicutelor din figura 3.1.10.

**3.2.5.** Să se determine schemele echivalente pe porțiuni la trioda ale cărei caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.1.

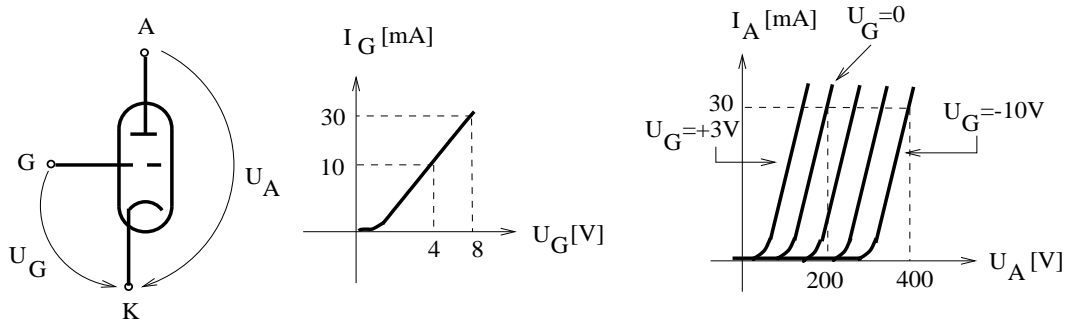


Fig. 3.2.1.

**3.2.6.** Să se determine schemele echivalente liniarizate pe porțiuni pentru pentoda ale cărei caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.2.

**3.2.7.** Să se determine schemele echivalente liniarizate pe porțiuni pentru tranzistorul cu efect de câmp TEC cu canal n ale cărui caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.3.

**3.2.8.** Să se determine schemele echivalente liniarizate pe porțiuni pentru tiristorul ale cărui caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.4.

### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

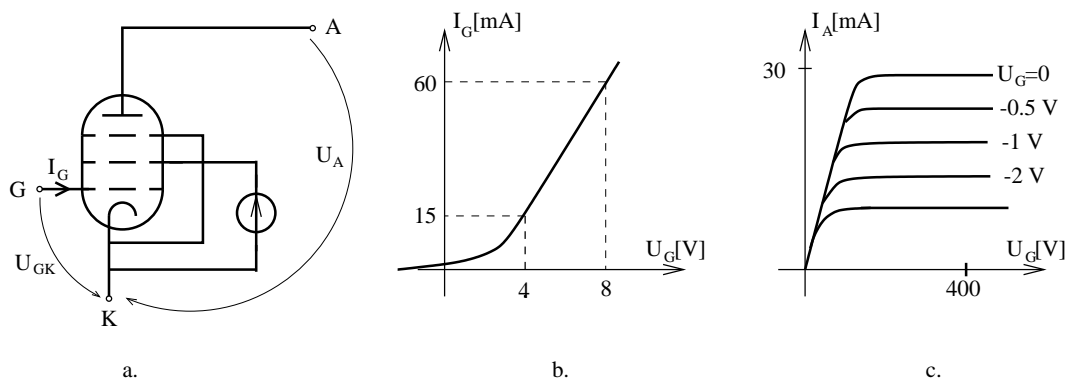


Fig. 3.2.2.

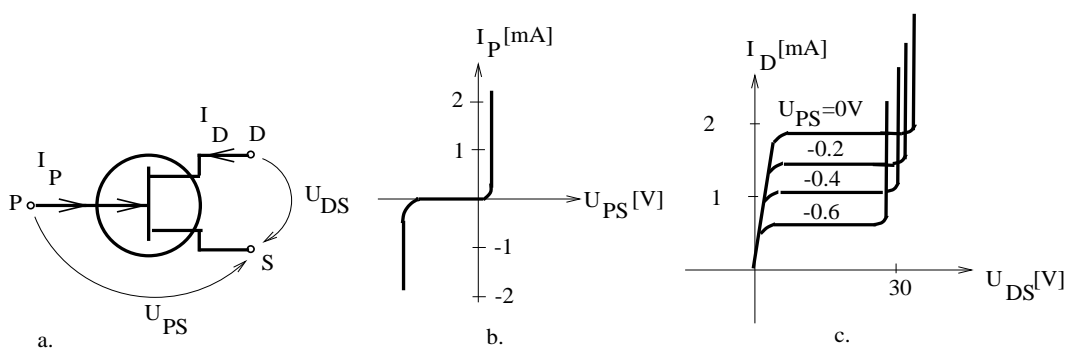


Fig. 3.2.3.

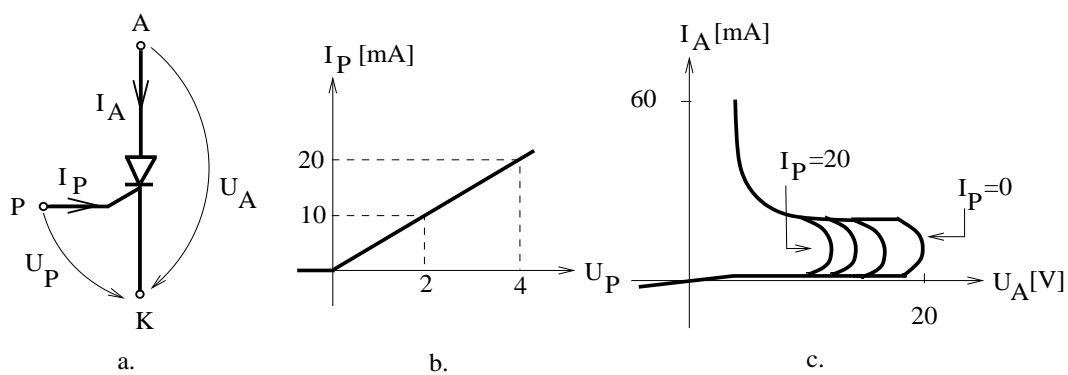


Fig. 3.2.4.

**3.2.9.** Să se determine grafic porțiunea pe care se află punctul de operare al tranzistorului din figura 3.2.5 și să se calculeze coordonatele acestui punct cu ajutorul metodei schemelor echivalente liniarizate pe porțiuni. Se vor folosi schemele echivalente din figura 3.12 cu valorile  $R_B=1k\Omega$ ,  $K_E = 10^{-4}$ ,  $\beta = 50$ ,  $R_C=50k\Omega$ ,  $U_{BE_0} = 0.6V$ ,  $R_\alpha = 5\Omega$ ,  $I_{CE_0} = 0$ .

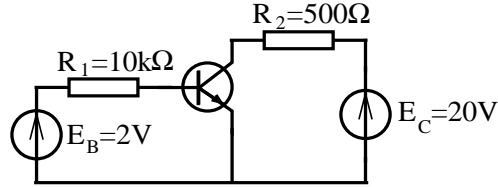


Fig. 3.2.5.

**3.2.10.** Să se determine poziția punctului de funcționare în condițiile în care sursele  $E_B$  și/sau  $E_C$  din problema 3.2.9. își schimbă polaritatea.

**3.2.11.** Să se calculeze eroarea care se face asupra punctului static de funcționare dacă se utilizează pentru tranzistor modelul din figura 3.13.

**3.2.12.** Să se determine poziția punctului static de funcționare pentru tranzistoarele reprezentate în figura 3.2.6 despre care se știe că funcționează în regiunea activă normală. Se va folosi pentru tranzistor schema echivalentă prezentată în figura 3.13.d cu  $\beta = 50$  și  $U_{CB_0} = 0$ .

**3.2.13.** Pentru circuitele analizate în problema 3.2.12. să se determine sensibilitatea curentului de colector  $I_C$  și a tensiunii de colector-emitor  $U_{CE}$  față de factorul de amplificare  $\beta$  al tranzistorului.

**3.2.14.** Să se analizeze circuitele prezentate în figura 3.2.7 cu ajutorul metodei combinațiilor schemelor echivalente liniarizate.

**3.2.15.** Să se determine în ce stare (blocat sau în conducție) se află diodele ce alcătuiesc circuitele din figura 3.2.8. Să se determine valorile tensiunii  $u$  pentru următoarele valori ale tensiunilor generatoarelor:

$e_1$	0	0	1	1
$e_2$	0	1	0	1

**3.2.16.** Știind că tranzistoarele ce alcătuiesc circuitele din figurile 3.2.10 și 3.2.9 funcționează în regim de comutație (sunt polarizate astfel încât să aibă punctele de operare în regiunea de blocaj sau în cea de saturație) să se determine tensiunile notate cu  $u$  și să se identifice tranzistoarele blocate sau în conducție.

3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

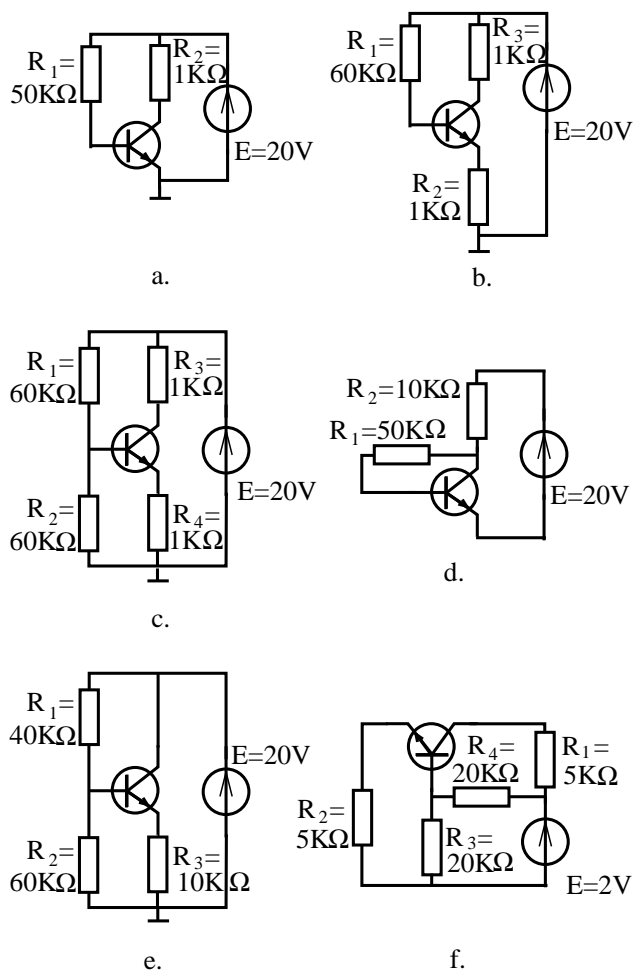


Fig. 3.2.6.

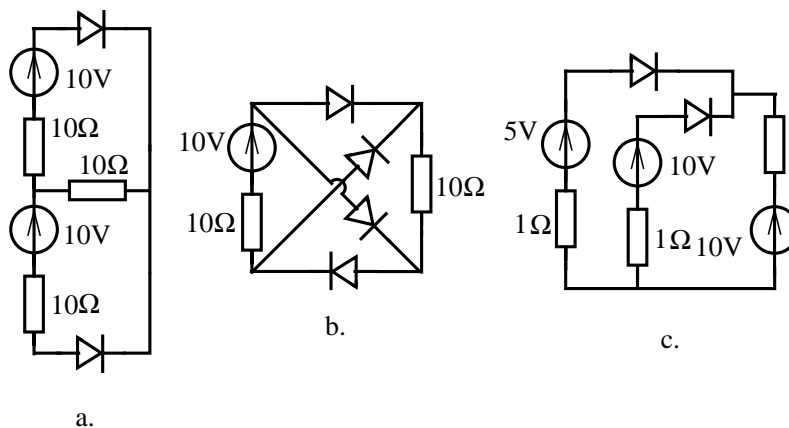


Fig. 3.2.7.

3.2. ELEMENTE CU CARACTERISTICI LINIARE PE PORȚIUNI

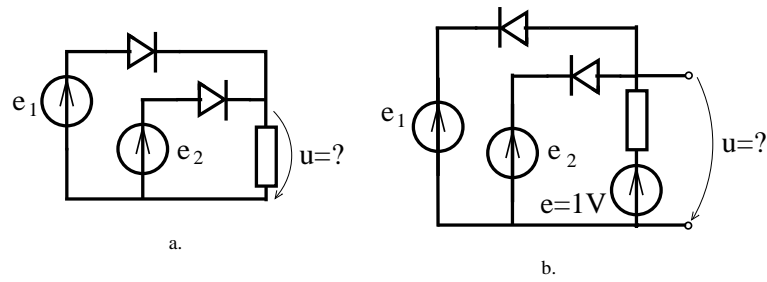


Fig. 3.2.8.

Se vor considera sursele având două valori  $e = 0$  și  $e = 5V$ .

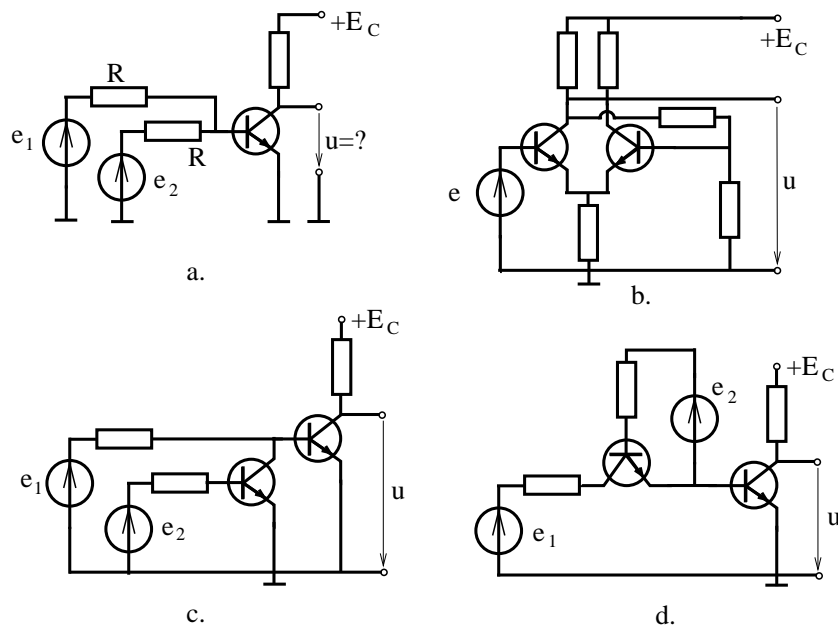


Fig. 3.2.9.



3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

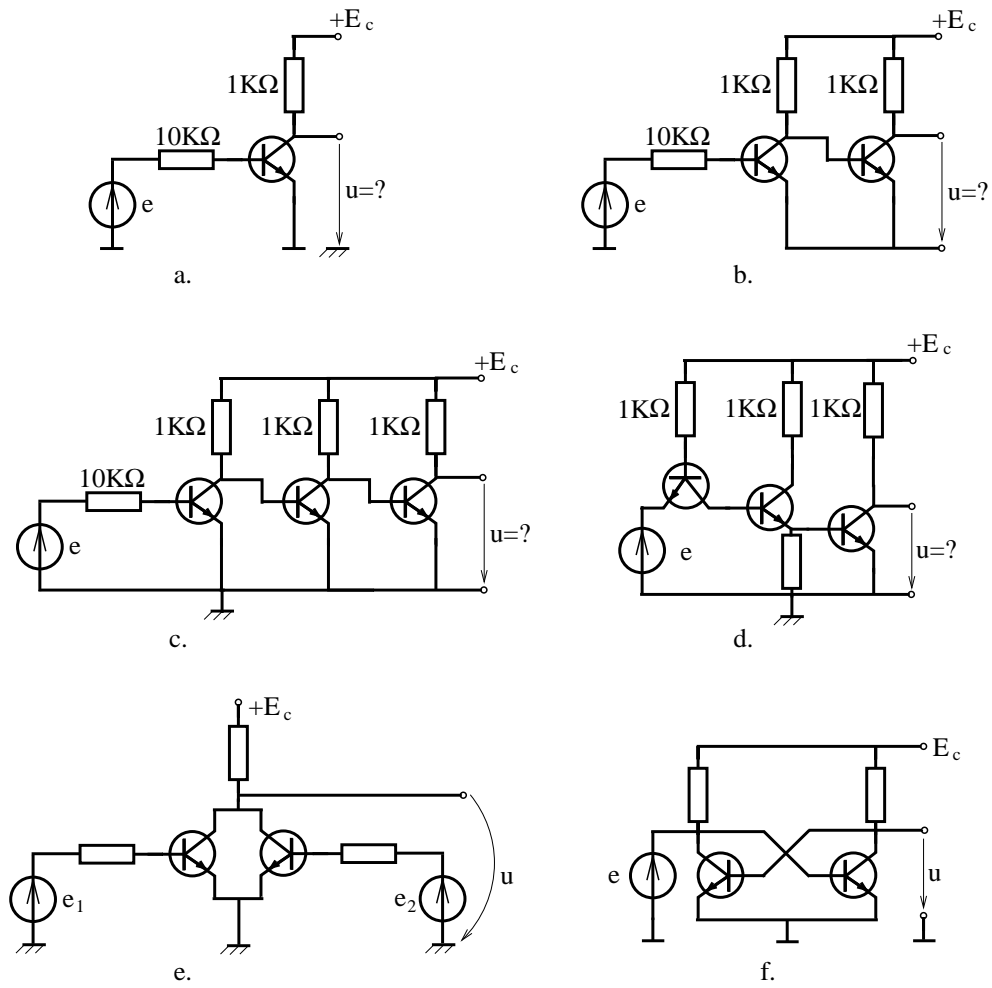


Fig. 3.2.10.

### 3.3 Metoda micilor variații

#### BREVIAR

O metodă eficientă de analiză a unui circuit neliniar în condițiile variației parametrilor anumitor generatoare din circuit este **metoda micilor variații**. În această metodă se presupune că sursele au variații ale parametrilor suficient de mici, astfel încât punctele de operare ale elementelor neliniare se pot deplasa pe dreapta ce aproximează caracteristica neliniară, și nu pe caracteristica reală, fără ca acest lucru să introducă erori inacceptabile. În cazul elementelor cu caracteristici liniare pe porțiuni, dacă variația surselor nu scoate punctele de operare din segmentul de dreaptă pe care se află, atunci metoda micilor variații este o metodă exactă.

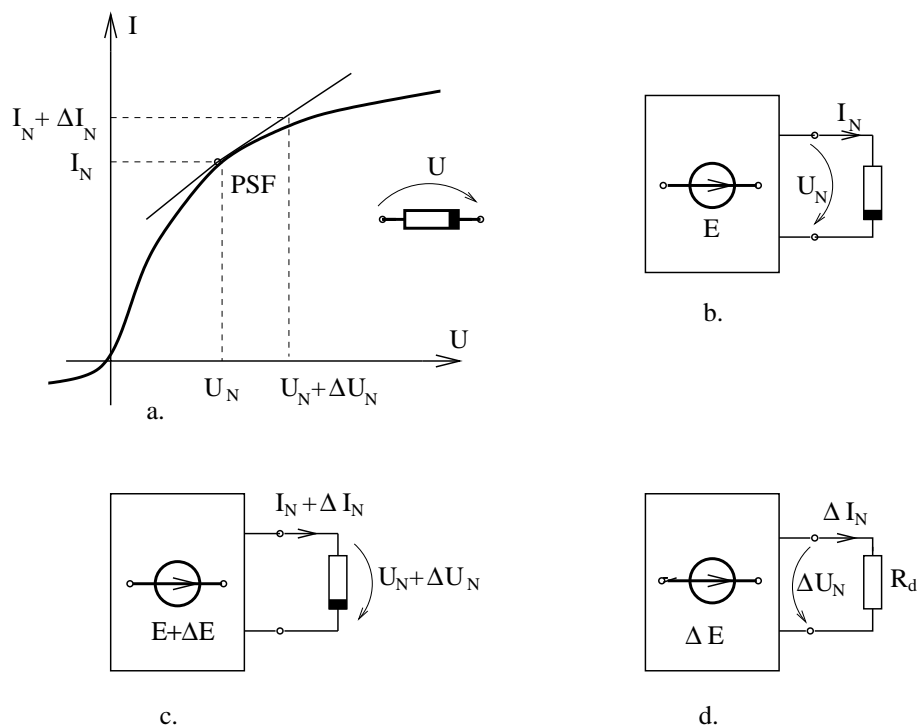


Fig. 3.14.

Fie un circuit neliniar (fig. 3.14.b) având punctul de operare  $(U_N, I_N)$  numit în continuare *punct static de funcționare (P.S.F.)*. Tensiunile și curenții din circuitul neliniar considerat satisfac ecuațiile lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in (n)} I_{N_k} &= 0, & n &= 1, 2, \dots, (N - 1); \\
 \sum_{k \in [b]} U_{N_k} &= 0, & b &= 1, 2, \dots, (L - N + 1)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

---

și ecuațiile de funcționare ale laturilor:

$$U_{N_k} = \begin{cases} \hat{U}_{N_k}(I_{N_k}), & \text{pentru laturile neliniare;} \\ R_k \cdot I_{N_k} - E_k, & \text{pentru laturile liniare.} \end{cases}$$

Dacă tensiunile electromotoare au o variație  $\Delta E$ , atunci punctele de operare se deplasează pe caracteristicile neliniare părăsind punctele statice de funcționare (fig. 3.14.a), iar soluția noii probleme de analiză satisface ecuațiile lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in (n)} (I_{N_k} + \Delta I_{N_k}) &= 0, & n &= 1, 2, \dots, (N-1), \\ \sum_{k \in [b]} (U_{N_k} + \Delta U_{N_k}) &= 0, & b &= 1, 2, \dots, (L-N-1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

și ecuațiile de funcționare ale laturilor:

$$\begin{cases} U_{N_k} + \Delta U_{N_k} = \hat{U}_{N_k}(I_{N_k} + \Delta I_{N_k}), & \text{pentru laturile neliniare;} \\ U_{N_k} + \Delta U_{N_k} = R_k \cdot (I_{N_k} + \Delta I_{N_k}) - E_k - \Delta E_k, & \text{pentru laturile liniare.} \end{cases}$$

Dacă funcțiile caracteristice ale elementelor neliniare se aproximează:

$$\hat{U}_{N_k} \simeq \hat{U}_{N_k}(I_{N_k}) + \left. \frac{d\hat{U}}{dI} \right|_{P.S.F.} \cdot \Delta I_{N_k}, \quad (3.15)$$

prin neglijarea termenilor de ordin superior din dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului static de funcționare, atunci variațiile tensiunilor și curenților satisfac ecuațiile:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in (n)} \Delta I_{N_k} &= 0; \\ \sum_{k \in [b]} \Delta U_{N_k} &= 0; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\Delta U_{N_k} = \begin{cases} R_d \Delta I_{N_k}, & \text{pentru laturile neliniare;} \\ R_k \Delta I_{N_k} - \Delta E_k, & \text{pentru laturile liniare.} \end{cases}$$

Analizând ecuațiile (3.16) se constată că ele pot fi asociate unui circuit, numit circuit de mici variații (fig. 3.14.d) ce se obține pornind de la circuitul neliniar în care se operează substituțiile prezentate în figura 3.15 în care  $R_d = d\hat{U}/dI$  este rezistența dinamică a elementului neliniar în punctul static de funcționare.

Pentru analiza unui circuit electric neliniar cu metoda micilor variații se parcurg următoarele etape ale **algoritmului metodei**:

1. Se calculează *rezistențele dinamice* ale elementelor neliniare în punctele statice de funcționare:

$$R_d = \left. \frac{d\hat{U}}{dI} \right|_{I=I_N}. \quad (3.17)$$

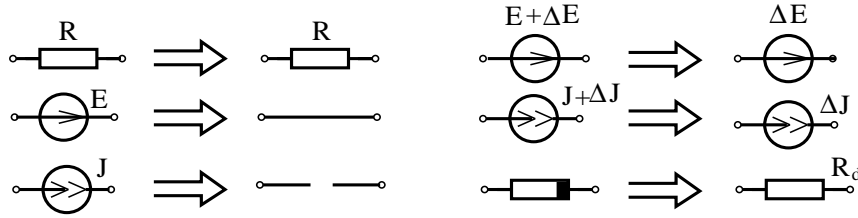


Fig. 3.15.

2. Se construiește *circuitul liniar de mici variații* înlocuind elementele neliniare cu rezistoare liniare având rezistențele egale cu rezistențele dinamice, păstrând toate sursele comandate, iar dintre generatoare se păstrează numai cele care variază;
3. Se analizează circuitul de mici variații determinându-se curenții  $I_n = \Delta I_N$  și tensiunile  $U_n = \Delta U_N$  prin una din metodele de analiză a circuitelor liniare;
4. Se calculează *soluția circuitului neliniar* în urma variațiilor, adăugând la punctele statice de funcționare soluția obținută la punctul anterior:

$$\begin{aligned} I_{Nnou} &= I_N + \Delta I_N; \\ U_{Nnou} &= U_N + \Delta U_N. \end{aligned} \quad (3.18)$$

În multe aplicații practice sunt utile doar variațiile punctelor statice de funcționare astfel încât ultima etapă a algoritmului nu mai este necesară.

**Schema echivalentă de mici variații** a tranzistorului npn funcționând în regiunea activă normală este prezentată în figura 3.16.b, iar în cazul modelului simplificat schema este cea din figura 3.16.c.

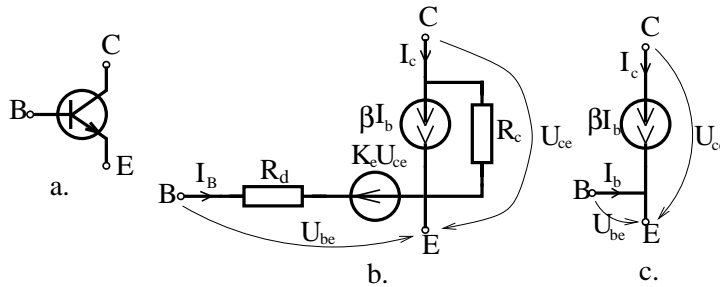


Fig. 3.16.

Se constată că tranzistorul, din punctul de vedere energetic, la mari variații este un element pasiv din punct de vedere energetic, dar la semnal mic el este un element activ, fiind reprezentat de o sursă de curent comandată în curent cu factorul de amplificare  $\beta$ .

**PROBLEME**

**3.3.1.** Să se determine schemele echivalente de semnal mic pentru elementele dipolare neliniare ale căror caracteristici sunt prezentate în figura 3.1.2. Se vor considera diferite puncte statice de funcționare.

**3.3.2.** Să se determine schemele echivalente de semnal mic pentru elementele tripolare neliniare studiate în problemele 3.2.5.-3.2.8, atunci când generatoarele ideale au o variație a parametrilor de +1%.

**3.3.3.** Să se determine noile puncte de operare ale elementelor neliniare ce au fost analizate în problemele 3.1.9.-3.1.12, atunci când generatoarele au o variație a parametrilor de +1%.

**3.3.4.** Să se determine variația tensiunii colector-emitor pentru tranzistorul analizat în problema 3.2.9, atunci când tensiunea electromotoare  $E_B$  variază cu  $\Delta E_B = 0,1V$ .

**3.3.5.** Să se studieze etajul amplificator cu un tranzistor prezentat în figura 3.3.1. Se vor calcula: rezistența echivalentă de intrare, amplificarea și rezistența echivalentă de ieșire pentru semnalele de mici variații. Se vor utiliza atât schema echivalentă a tranzistorului prezentată în figura 3.15.b cât și schema simplificată din figura 3.15.c și se va estima eroarea de aproximare.

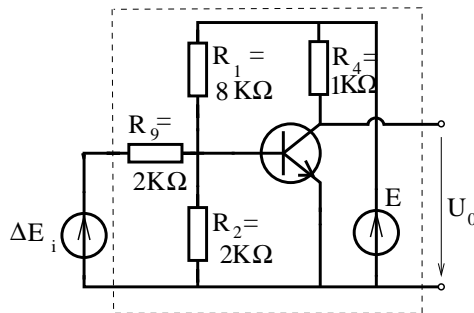


Fig. 3.3.1.

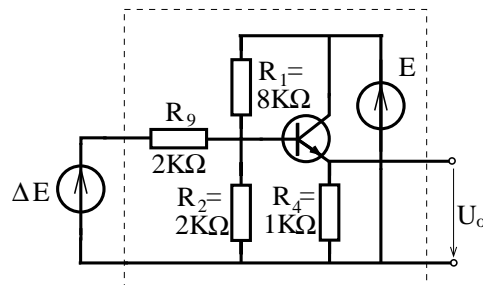


Fig. 3.3.2.

**3.3.6.** Să se studieze comportarea la mici variații a etajului repetor cu un tranzistor, prezentat în figura 3.3.2. Se vor calcula: amplificarea etajului, rezistențele echivalente de ieșire și de intrare. Se va adopta schema echivalentă de semnal mic simplificată pentru tranzistor.

**3.3.7.** Să se studieze comportarea la mici variații a amplificatorului diferențial reprezentat în figura 3.3.3. Se vor calcula amplificarea etajului și rezistențele echi-

valente de intrare și ieșire.

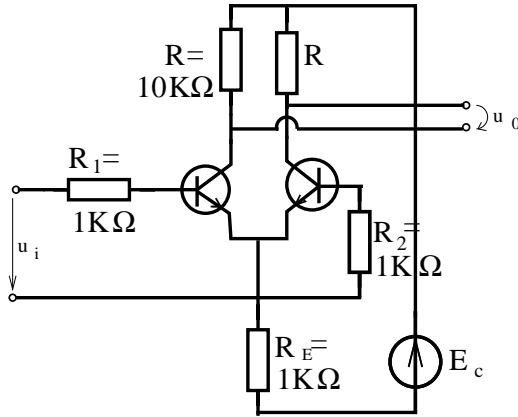


Fig. 3.3.3.

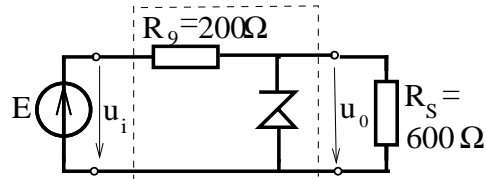


Fig. 3.3.4.

**3.3.8.** Să se calculeze variația procentuală a tensiunii de ieșire la stabilizatorul cu diodă Zener prezentat în figura 3.3.4, atunci când tensiunea de intrare are o variație de 1%. Se va considera rezistența dinamică a diodei pe zona Zener  $R_d = 2\Omega$ .

**3.3.9.** Să se studieze variația procentuală a tensiunii de ieșire la stabilizatorul de tensiune prezentat în figura 3.3.5, atunci când tensiunea de intrare are o variație de 1%. Se va considera rezistența dinamică a diodei pe zona Zener  $R_d = 2\Omega$  iar factorul de amplificare în curent al tranzistorului  $\beta = 50$ .

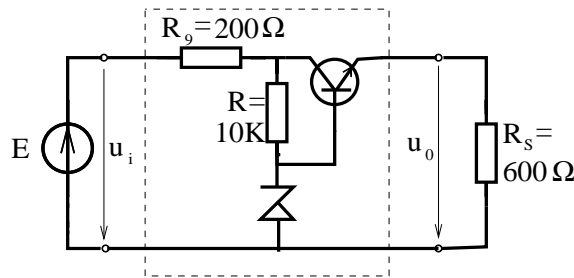


Fig. 3.3.5.

**3.3.10.** Aplicând tehnica schemelor echivalente liniarizate pe porțiuni să se analizeze circuitul din figura 3.3.6. Pentru ce valori ale rezistenței  $R$  variațiile tensiunii de intrare nu sunt transmise la ieșire?

3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

**3.3.11** Se consideră un tranzistor conectat ca un cuadripol diport. Să se determine pentru cele trei conexiuni din figura 3.3.7 și anume: (a) emitor comun, (b) colector comun și (c) bază comună care sunt matricile rezistență, conductanță și hibridă, pentru circuitul echivalent liniar de mici variații. Să se exprime elementele acestor matrici în funcție de cei patru parametri utilizați în figura 3.16.b.

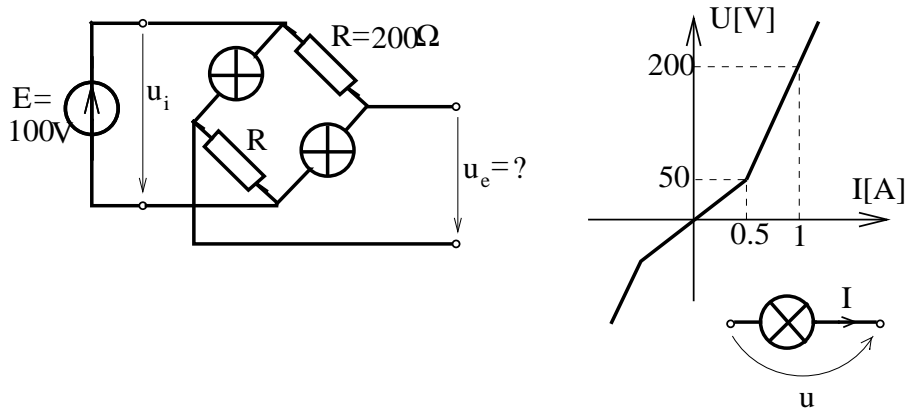


Fig. 3.3.6.

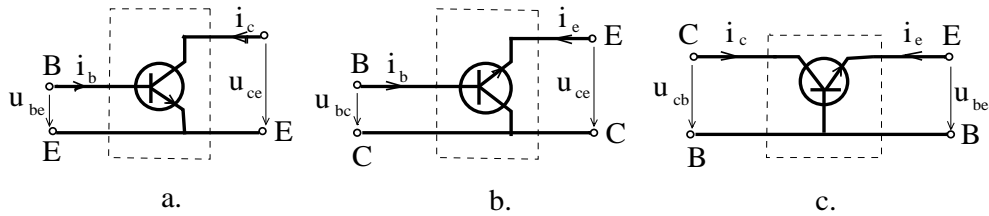


Fig. 3.3.7.

## 3.4 Metode iterative pentru analiza circuitelor rezistive neliniare

### BREVIAR

**Problema analizei circuitelor electrice rezistive neliniare** presupune rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice neliniare alcătuit din ecuațiile lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in (n)}^{alg} I_k = 0, \quad n = 1, 2, \dots, (N - 1); \quad (3.19)$$

$$\sum_{k \in [b]}^{alg} U_k = 0, \quad b = 1, 2, \dots, (L - N + 1);$$

și din ecuațiile de funcționare ale laturilor:

$$U_k = \hat{U}(I_k), \quad k = 1, 2, \dots, L; \quad (3.20)$$

dacă elementele sunt controlate în curent, sau

$$I_k = \hat{I}(U_k), \quad k = 1, 2, \dots, L, \quad (3.21)$$

dacă elementele sunt controlate în tensiune. Sistemul (3.19)-(3.21) alcătuit din L ecuații algebrice liniare și L ecuații neliniare cu necunoscute curenții din laturi  $I_k$  și tensiunile la bornele laturilor  $U_k$ , unde  $k=1,2,\dots,L$ .

Scris sub formă compactă sistemul devine:

$$G(x) = 0, \quad (3.22)$$

în care  $x = [I_1, I_2, \dots, I_L, U_1, U_2, \dots, U_L]^T$  și G este o aplicație de la  $\mathbb{R}^{2L}$  la  $\mathbb{R}^{2L}$ . Cea mai larg utilizată tehnică de soluționare a ecuației (3.22) este **metoda iterativă** bazată pe construcția unui șir  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  convergent către limita  $x^*$  care satisface ecuația (3.22). Dacă norma erorii  $\|x_k - x^*\|$  este suficient de mică, atunci termenul  $x_k$  din șir este o aproximație satisfăcătoare a soluției. O metodă de construire a șirului iterativ este algoritmul numit de *punct fix*, în care ecuația (3.22) se aduce sub forma echivalentă:

$$x = F(x),$$

urmând ca pornind de la o inițializare arbitrară să se genereze șirul iterativ:

$$x_{k+1} = F(x_k). \quad (3.23)$$

Dacă matricea jacobian a aplicației F satisface inegalitatea:

$$\|F'\| < 1, \quad (3.24)$$



### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

---

se poate arăta că șirul generat de (3.23) converge către soluția  $x^*$  a ecuației (3.4), soluție numită punctul fix al aplicației  $F$ . Pentru a aduce ecuația (3.22) la forma (3.4) se poate utiliza relația:

$$x = x - K(x)G(x), \quad (3.25)$$

în care  $K(x)$  este o matrice nesingulară astfel încât să fie satisfăcută condiția (3.24). O alegere avantajoasă este dată de **metoda Newton-Raphson**, în care  $K(x)$  este inversa matricii jacobian a aplicației  $G$ :

$$x_{k+1} = x_k - [G'(x_k)]^{-1} \cdot G(x_k). \quad (3.26)$$

Pentru a reduce efortul de calcul, **metoda Newton-Kantorovici** utilizează pentru  $K(x)$  inversa matricii jacobian a aplicației  $G$  calculată în punctul  $x = x_1$ , corespunzător inițializării:

$$x_{k+1} = x_k - [G'(x_1)]^{-1} \cdot G(x_k). \quad (3.27)$$

Dacă se estimează matricea jacobian pentru un punct  $x_0$ , altul decât un termen al șirului, atunci se obține **metoda iterației simple** în care:

$$x_{k+1} = x_k - [G'(x_0)]^{-1} \cdot G(x_k). \quad (3.28)$$

Analizând relația (3.26) rezultă că la fiecare iterație trebuie rezolvat un sistem liniar de ecuații de forma:

$$G'(x_k) \cdot \Delta x_k = -G(x_k), \quad (3.29)$$

urmând ca:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k. \quad (3.30)$$

Aplicând metoda Newton-Raphson pentru rezolvarea sistemului de ecuații (3.19)-(3.20) și notând:

$$g_i = \sum_{k \in (n)}^{alg} I_k, \quad \text{pentru } n = 1, \dots, (N-1);$$
$$g_i = \sum_{k \in [b]}^{alg} U_k, \quad \text{pentru } b = N, \dots, L; \quad (3.31)$$

$$g_{i+L} = U_i - \hat{U}(I_i), \quad \text{pentru } i = 1, \dots, L$$

rezultă că la fiecare iterație trebuie rezolvat sistemul de ecuații liniare (3.32) în care  $A$  și  $B$  sunt matricile de incidență a laturilor la noduri, respectiv la bucele fundamentale, iar  $R_{dk}$  este rezistența dinamică a elementului neliniar din latura



### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

iar parametrii generatoarelor sunt:

$$\begin{aligned} E &= U_k - \hat{U}(I_k); \\ J &= I_k - \hat{I}(U_k). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Parametrii  $E$  și  $J$  dați de (3.34) pun în evidență abaterea punctului de operare  $P_k$  determinat la iterația anterioară, față de curba caracteristică a elementului (fig. 3.18).

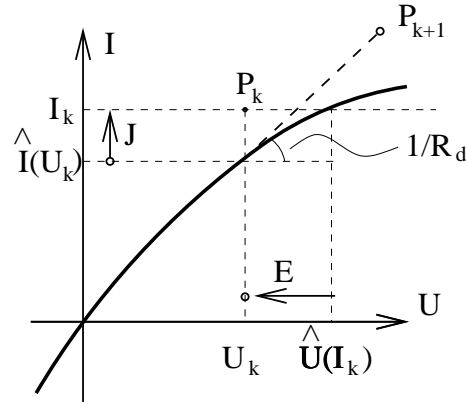


Fig. 3.18.

În urma analizei circuitului liniarizat asociat se determină corecțiile (variațiile) curenților  $\Delta I$  și tensiunilor  $\Delta U$  la bornele laturilor, urmând ca aproximarea soluției la iterația  $k + 1$  să fie:

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k + \Delta U, \\ I_{k+1} &= I_k + \Delta I. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dacă  $\|\Delta U\|$  și  $\|\Delta I\|$  nu sunt suficient de mici, atunci se reia procedura iterativă urmând ca punctul de operare  $P_{k+1}(U_{k+1}, I_{k+1})$  să fie situat pe tangenta la curba de funcționare (fig. 3.18).

Din relația (3.27) rezultă că metoda Newton-Kantorovici presupune la fiecare iterație analiza unui circuit liniar asociat circuitului neliniar construit ca în metoda Newton-Raphson (fig. 3.17), cu deosebirea că rezistențele și conductanțele circuitului asociat sunt calculate în punctele de operare inițiale:

$$R_d = \left. \frac{d\hat{U}}{dI} \right|_{I=I_1}; \quad G_d = \left. \frac{d\hat{I}}{dU} \right|_{U=U_1}. \quad (3.36)$$

În cazul metodei iterației simple, circuitul liniar asociat fiecărei iterații are rezistențele și conductanțele alese apriori (ele sunt numite rezistențe sau conductanțe de calcul). Pentru a obține o convergență cât mai rapidă este preferabil

ca ele să aibă valorile cât mai aproape de rezistențele, respectiv conductanțele dinamice corespunzătoare soluției exacte.

În general, metoda Newton-Raphson este mai rapid convergentă decât celelalte două metode, dar necesită un efort de calcul mai mare datorită evaluării rezistențelor dinamice la fiecare iterație. Metoda Newton-Kantorovici și metoda iterației simple au avantajul că partea rezistivă a circuitului asociat rămâne aceeași la toate iterațiile, deci este necesară inversarea matricei sistemului (3.32) o singură dată. Metoda Newton-Kantorovici aplicată la un circuit liniar permite obținerea soluției exacte după o singură iterație, lucru ce nu se întâmplă în cazul iterației simple. Cu toate acestea, metoda iterației simple poate avea un domeniu mai larg de convergență în condițiile alegerii avantajoase a rezistențelor și conductanțelor de calcul.

Circuitele liniarizate asociate fiecărei iterații, prezentate în figura 3.17, sunt circuite de variații. Dacă se utilizează circuite liniare asociate, din analiza cărora să rezulte curenții și tensiunile la iterația curentă:

$$\Delta U = R_d \cdot \Delta I - E \Rightarrow U_{k+1} = R_d \cdot I_{k+1} - [R_d \cdot I_k - \hat{U}(I_k)], \quad (3.37)$$

atunci acestea vor avea laturile de tipul celor prezentate în figura 3.19.

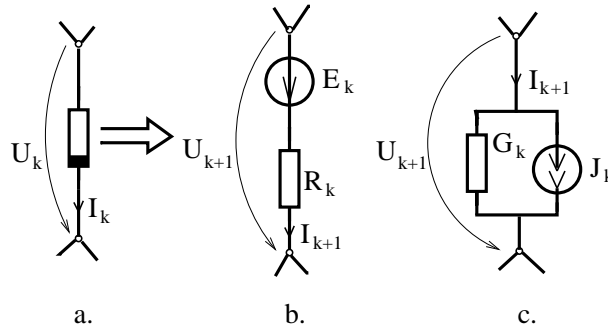


Fig. 3.19.

În cazul metodei Newton-Raphson, conform relației (3.37) rezultă că  $R_k$  este rezistența dinamică asociată curentului  $I_k$ , iar  $E_k = R_d \cdot I_k - \hat{U}(I_k)$ , caracteristica fiind aproximată în iterația următoare prin dreapta  $\Delta_N$  (fig. 3.20).

Dacă se utilizează pentru aproximarea caracteristicii neliniare dreapta  $\Delta_R$  (fig. 3.20), atunci metoda astfel generată se va numi **metoda rezistenței statice**.

Dacă se aproximează caracteristica neliniară, în iterația următoare, cu o dreaptă ce trece prin punctul de operare  $P_k$ , dar are o altă pantă decât derivata caracteristicii în punctul respectiv (dreapta  $\Delta_S$ ), atunci metoda astfel generată se numește **metoda iterației surselor**.

Tehnica de aproximare a caracteristicii neliniare printr-o dreaptă ce trece prin origine și prin punctul de operare determinat la iterația anterioară generează **metoda iterației rezistenței statice**.

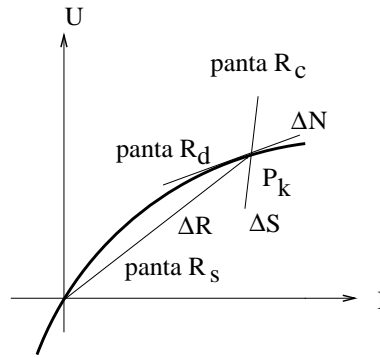


Fig. 3.20.

Dacă un element neliniar are caracteristica monotonă, atunci el poate fi comandat fie de tensiune fie de curent. Din punctul de vedere al iterațiilor, cele două posibilități nu sunt echivalente. Este posibil ca procesul să fie convergent într-un caz și divergent în celălalt. Din acest motiv, în rezolvarea iterativă a circuitelor neliniare trebuie dată atenție modului în care sunt comandate elementele neliniare. De exemplu, în cazul metodei rezistenței statice dacă rezistența statică crește o dată cu curentul ( $R_d > R_s$ ), atunci este preferabilă utilizarea controlului în curent, iar dacă rezistența statică scade cu curentul ( $R_d < R_s$ ) este preferabilă utilizarea controlului în tensiune. În cazul metodei iterației surselor, pentru asigurarea convergenței trebuie aleasă rezistența de calcul  $R_c$  în intervalul cuprins între valoarea minimă și maximă a rezistenței dinamice (de preferință în centrul intervalului), în cazul controlului în curent, iar în cazul controlului în tensiune conductanța de calcul se alege între valoarea minimă și maximă a conductanței dinamice.

În general, metoda rezistenței dinamice este mai rapid convergentă, dar cere un efort mai mare de calcul la fiecare iterație și are domeniul de convergență mai restrâns, în sensul că inițializarea trebuie să fie suficient de aproape de soluție pentru ca procedul să fie convergent. Metoda iterației surselor este mai lent convergentă, dar are un domeniu de convergență ce poate fi mărit prin alegerea convenabilă a rezistenței de calcul.

În cazul elementelor neliniare ce au caracteristica liniarizată pe porțiuni se poate utiliza un algoritm de căutare a intervalelor în care se află punctele de operare ale elementelor neliniare. **Algoritmul Katzenelson**, prezentat în continuare, este garantat convergent într-un număr finit de pași, minimizând într-un anumit sens drumul pe care se caută soluția. Pentru aplicarea acestei metode se consideră o inițializare a soluției într-o combinație de intervale și se substituie elementele neliniare cu schemele lor echivalente liniarizate. Dacă soluția circuitului liniar corespunde unor puncte de operare ale elementelor neliniare ce se află în combinația de intervale considerate, atunci aceasta este și soluția circu-

itului neliniar, iar dacă punctele de operare calculate se află în alte intervale, atunci se modifică, dintre toate schemele echivalente liniarizate, o schemă corespunzătoare unui singur element neliniar. Identificarea elementului neliniar a cărei porțiune de funcționare urmează să se modifice se face analizând soluția aproximativă obținută, urmând să-și modifice porțiunea de funcționare elementul cel mai solicitat în acest sens. La fiecare iterație, doar un singur element neliniar își modifică schema echivalentă trecând într-o porțiune de funcționare nouă, ce este obligatoriu vecină cu cea veche. În acest fel modificările sunt făcute din aproape în aproape fără să aibă loc salturi pe caracteristicile neliniare, până se identifică intervalul în care se află punctul de operare.

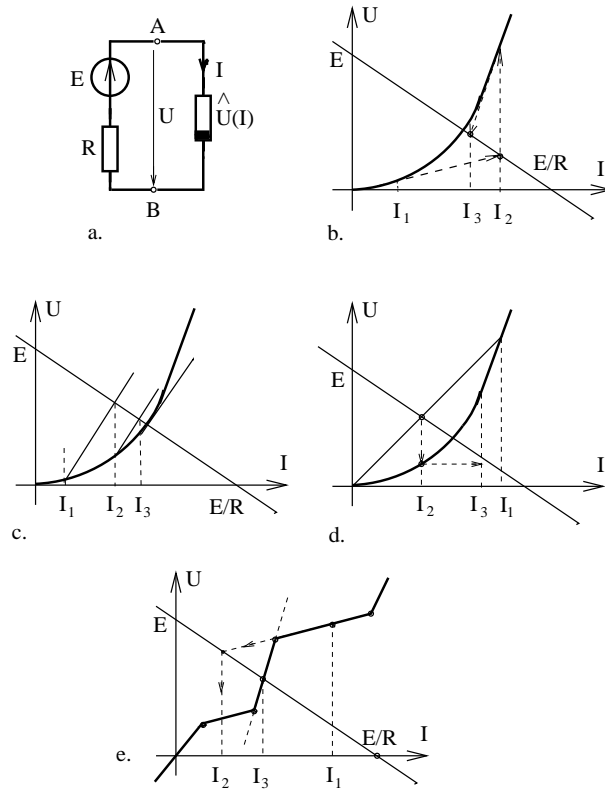


Fig. 3.21.

În figura 3.21 sunt prezentate grafic iterațiile ce se fac la analiza circuitului din figura 3.21.a prin următoarele metode: (b) metoda rezistenței dinamice; (c) metoda iterației surselor; (d) metoda rezistenței statice și (e) metoda Katzenelson.

**PROBLEME**

**3.4.1.** Să se prezinte grafic analiza iterativă a circuitului neliniar din figura 3.21.a cu metodele Newton-Raphson, Newton-Kantorovici și metoda iterației simple.

**3.4.2.** Să se prezinte grafic analiza iterativă a circuitului neliniar din figura 3.21.a cu diferite metode presupunând elementul neliniar controlat în curent.

**3.4.3.** Să se analizeze grafic convergența metodei rezistenței dinamice pentru circuitul din figura 3.21.a cu caracteristica elementului neliniar prezentată în figura 3.4.1. Analiza va fi efectuată pentru diferite inițializări.

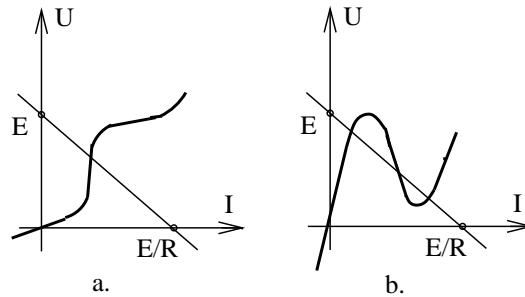


Fig. 3.4.1.

**3.4.4.** Să se analizeze grafic convergența metodei iterației surselor pentru circuitul din figura 3.21.a. Analiza va fi efectuată pentru diferite rezistențe de calcul considerând caracteristicile elementului neliniar cele din figura 3.4.1.

**3.4.5.** Ecuația circuitului din figura 3.4.2  $\hat{U}(I) + R \cdot I = E$  pusă sub forma:

$$I = \frac{E - \hat{U}(I)}{R}$$

generează o procedură iterativă de punct fix.

Utilizând criteriul de convergență (3.24) să se stabilească condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcția caracteristică  $\hat{U}(I)$  a elementului neliniar pentru ca iterațiile să fie convergente.

**3.4.6.** Ecuația de funcționare a circuitului din figura 3.4.3 poate fi pusă sub următoarea formă a unei ecuații cu punct fix:  $U = E - R \cdot \hat{I}(U)$ . Să se determine condiția ce trebuie îndeplinită de funcția caracteristică  $\hat{I}(U)$  pentru ca procedura de punct fix să fie convergentă.

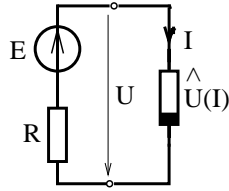


Fig. 3.4.2.

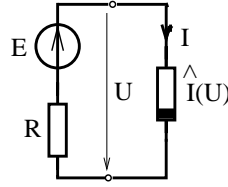


Fig. 3.4.3.

**3.4.7.** Ținând cont de rezultatele problemelor anterioare să se specifice procedura de punct fix ce trebuie aplicată la analiza circuitelor din figura 3.4.4.b și 3.4.4.c. Poate fi analizat circuitul din figura 3.4.4.d cu o procedură simplă de punct fix ?

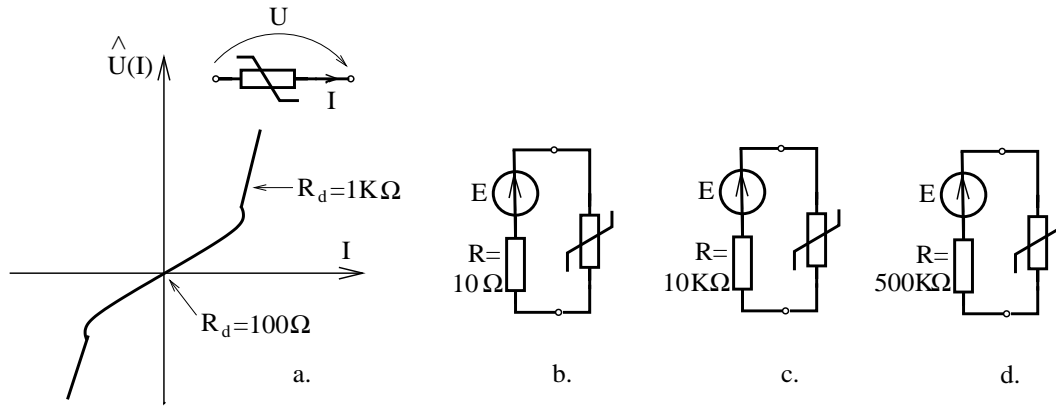


Fig. 3.4.4.

**3.4.8.** Ce valoare poate avea constanta  $K$  astfel încât procedura iterativă de punct fix generată de ecuația:

$$I = I + K \cdot \frac{(E - \hat{U}(I))}{R},$$

scrisă pentru circuitul din figura 3.4.3, să fie garantat convergentă? Ce semnificație fizică poate avea constanta  $K$  ?

**3.4.9.** Conform teoremei Picard-Banach o ecuație  $x = F(x)$  la care  $|F'| \leq \lambda < 1$  generează un șir al aproximațiilor succesive  $x_{k+1} = F(x_k)$  ce tinde către punctul fix  $x^* = F(x^*)$ , iar un termen al șirului satisface inegalitatea:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

Să se estimeze eroarea ce a fost făcută la rezolvarea problemei 3.4.8. în zece iterații. Câte iterații trebuiesc făcute ca eroarea relativă să fie sub 0,1%?



**3.4.10.** Să se determine valoarea constantei  $K$  din problema 3.4.8., pentru ca procedura iterativă să fie cât mai rapid convergentă.

**3.4.11.** Aplicând criteriul de convergență (3.24) să se analizeze convergența metodei Newton-Kantorovici pentru circuitele din figura (3.4.3). Să se determine domeniul în care poate fi aleasă inițializarea pentru ca procesul să fie convergent. Să se estimeze eroarea de aproximare după un număr dat de iterații.

**3.4.12.** Aplicând criteriul de convergență (3.24) să se determine condiția pe care trebuie să o îndeplinească derivata a doua  $U''(I)$  pentru ca procedeul Newton-Raphson aplicat la rezolvarea problemei 3.4.6. să fie convergent.

**3.4.13.** Aplicând criteriul de convergență (3.24) să se analizeze convergența metodei iterației simple pentru rezolvarea problemei din figura 3.4.3. Ce valoare trebuie să aibă rezistența de calcul  $R_c$  pentru ca procedura să fie convergentă?

**3.4.14.** Să se rezolve problemele 3.4.11-3.4.13 presupunând elementul neliniar controlat în tensiune. Să se compare rezultatele obținute.

**3.4.15.** Să se scrie ecuațiile corespunzătoare metodei rezistenței dinamice și iterației surselor pentru circuitele din figura 3.4.3. Să se compare rezultatele obținute cu ecuațiile utilizate în rezolvarea problemelor 3.4.11 și 3.4.12.

**3.4.16.** Să se stabilească forma matriceală a ecuațiilor ce trebuie rezolvate la fiecare iterație în metoda Newton-Raphson dacă din relațiile (3.19)-(3.21) se elimină o parte din necunoscute. Exemplificare pentru metodele Kirchhoff referitoare la curenți sau la tensiuni, sau pentru cazul în care rămân ca necunoscute principale curenții din coardele unui coarboare sau potențialele nodurilor.

**3.4.17.** Să se scrie forma matriceală a ecuațiilor circuitului liniarizat asociat iterațiilor în metoda rezistenței dinamice. Ecuațiile vor fi scrise pentru metodele Kirchhoff, curenților ciclici și potențialelor nodurilor.

**3.4.18.** Să se determine circuitele echivalente liniarizate corespunzătoare iterațiilor metodelor Newton-Raphson și rezistențelor dinamice pentru circuitele neliniare din figura 3.4.5.

**3.4.19.** Să se analizeze circuitele asociate iterațiilor din problema 3.4.18. Să se compare expresiile relațiilor de iterație pentru cele două metode.

**3.4.20.** Să se reprezinte și analizeze circuitele liniare asociate diferitelor metode iterative aplicate circuitelor din figura 3.4.6.

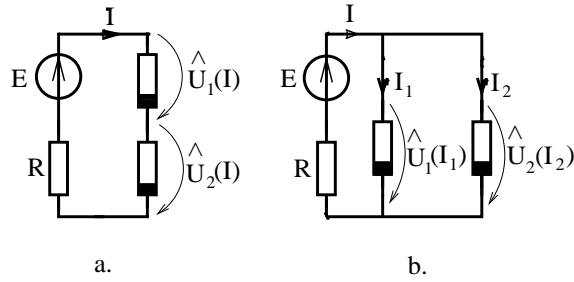


Fig. 3.4.5.

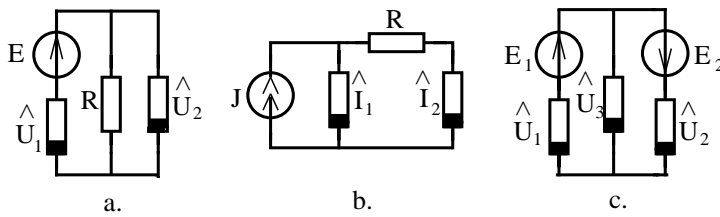


Fig. 3.4.6.

**3.4.21.** Să se calculeze numeric primele două iterații ale diferitelor metode pentru circuitele neliniare din figura 3.4.7.

**3.4.22.** Să se rezolve problema 3.4.21. considerând elementul neliniar controlat în tensiune.

**3.4.23.** Să se analizeze circuitele neliniare din figura 3.4.7 cu ajutorul metodei Katzenelson.

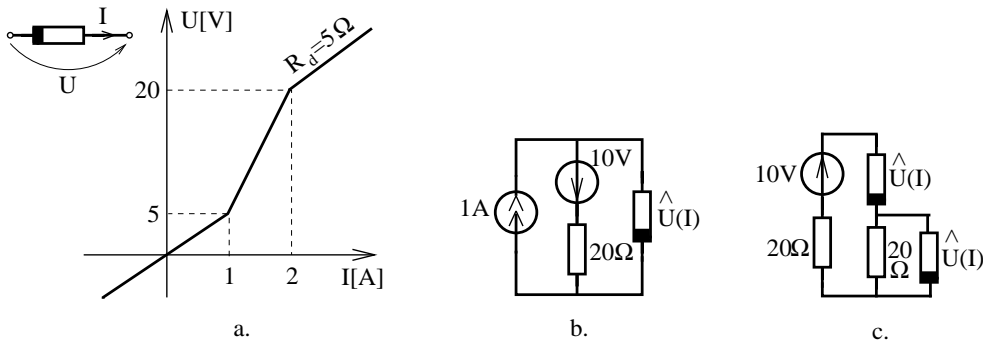


Fig. 3.4.7.

### 3.5 Teoremele circuitelor rezistive neliniare

#### BREVIAR

În continuare sunt prezentate conceptele fundamentale ce intervin în analiza circuitelor rezistive neliniare.

**Punctul de operare** al unui element dipolar rezistiv reprezintă punctul  $P$  din planul  $U$ - $I$ , având drept coordonate tensiunea la bornele elementului  $U$  și curentul  $I$  prin element, stabilite atunci când elementul este introdus într-un anumit circuit. Punctul de operare al unui circuit electric neliniar este un punct în spațiul  $\mathbb{R}^{2L}$ , având coordonatele tensiunilor și curenții din laturile circuitului. Punctul de operare al unui circuit cu surse invariante în timp reprezintă soluția problemei de analiză a circuitului respectiv. După cum se vede din figura 3.22, în funcție de parametrii circuitului ( $E, R$ ) un circuit (a) poate: (b) să nu aibă soluție; (c) poate să aibă soluție unică, (d) să aibă un număr finit de soluții sau (e) să aibă un număr infinit de soluții.

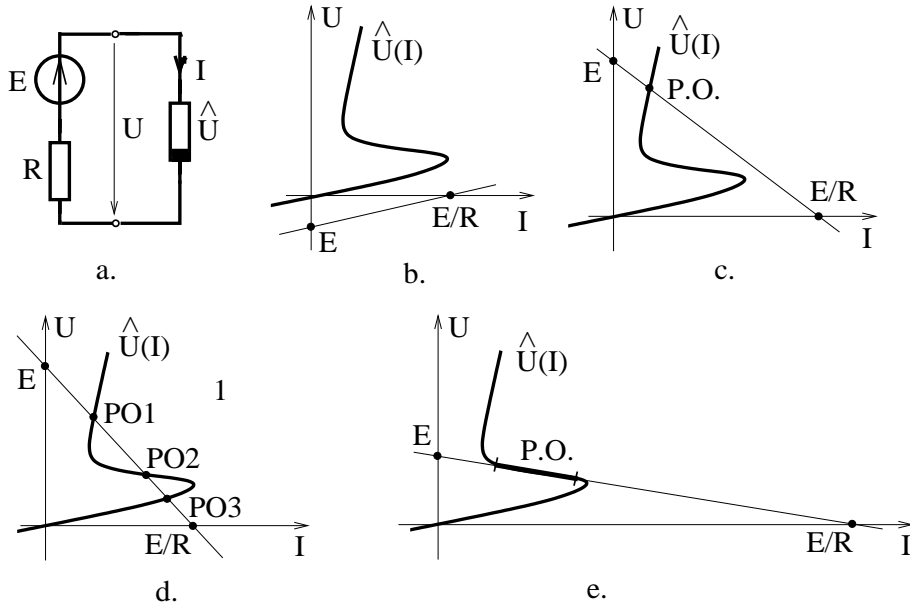


Fig. 3.22.

**Caracteristica de intrare** a unei porți a unui circuit neliniar reprezintă relația între curentul și tensiunea porții. După felul în care este excitată poarta, există două feluri de caracteristici de intrare, cu comandă în tensiune (fig. 3.23.a) sau cu comandă în curent (fig. 3.23.b).

**Caracteristica de transfer** a unui circuit neliniar, față de două porți ale unui circuit este relația dintre o mărime a porții de intrare și una a porții de ieșire. Se pot defini patru feluri de caracteristici de transfer (fig. 3.24).

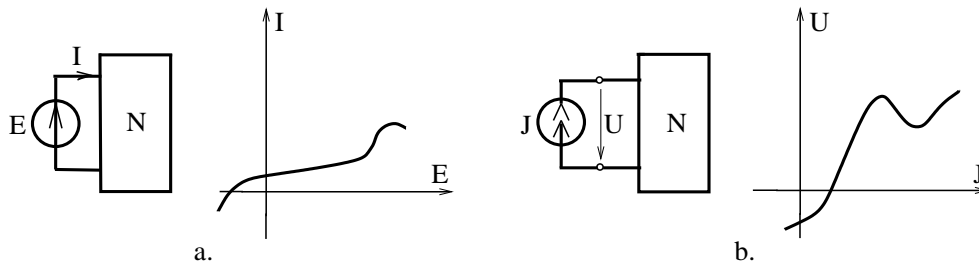


Fig. 3.23.

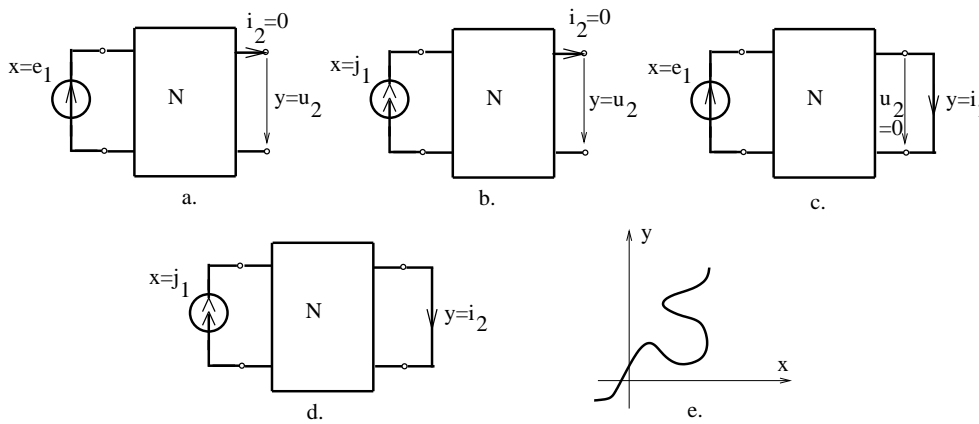


Fig. 3.24.

Se constată că aceste caracteristici de transfer nu sunt în mod necesar funcții (fig. 3.24.e).

**Caracteristica de transfer a puterii** reprezintă relația dintre puterea  $p$  disipată de un element dipolar din circuit și o mărime de excitație a unei porți prin care se alimentează circuitul (fig. 3.25.c).

Din considerente fizice, orice element de circuit are o limită a puterii pe care o poate disipa. Puterea maximă  $P_{max} = U \cdot I$  definește în planul caracteristicii unui element două hiperbole limită (fig. 3.25.b), pe care punctul de operare trebuie să nu le depășească. Caracteristica de transfer a puterii permite identificarea zonelor admisibile pentru mărimea de excitație. Caracteristica de transfer a puterii se obține prin multiplicarea caracteristicilor de transfer ale tensiunii  $u(e)$  și curentului  $i(e)$ . Relațiile fundamentale ale circuitelor neliniare, ca de altfel ale întregii teorii a circuitelor, sunt **teoremele lui Kirchhoff** sub formă generală:

$$\sum_{k \in \{s\}}^{alg.} i_k = 0, \quad s = 1, 2, \dots, (N - 1); \quad (3.38)$$

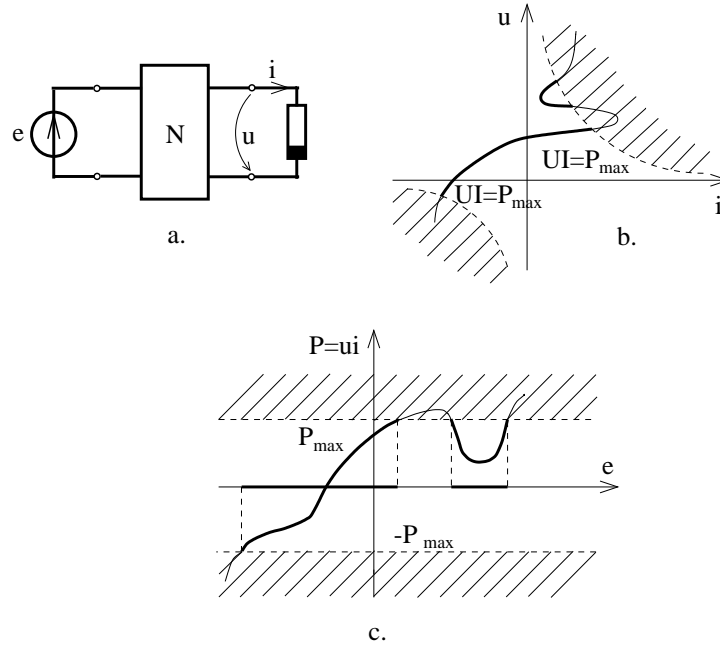


Fig. 3.25.

$$\sum_{k \in [b]}^{alg.} u_k = 0, \quad b = 1, 2, \dots, (L - N + 1); \quad (3.39)$$

Relația (3.38) este valabilă pentru orice secțiune  $\{s\}$  din circuit iar relația (3.39) este valabilă pentru orice buclă  $[b]$  din circuit.

**Problema fundamentală** a analizei circuitelor neliniare constă în determinarea tuturor curenților și tensiunilor din laturile unui circuit atunci când se cunosc parametrii elementelor și topologia circuitului. Pentru rezolvarea problemei fundamentale, se utilizează ecuațiile (3.38) și (3.39) care alcătuiesc un set de ecuații liniare și independente, dacă sunt aplicate pe un sistem de secțiuni și bucle independente. Aceste relații nu sunt suficiente pentru rezolvarea problemei, astfel încât se adaugă ecuațiile neliniare ce dau relațiile între tensiunile și curenții din laturile circuitului:

$$u_k = R_k i_k - e_k, \quad u_k = \hat{U}(i_k) \quad \text{sau} \quad i_k = \hat{I}(u_k); \quad k = 1, 2, \dots, L \quad (3.40)$$

Deoarece sistemul (3.40) este un sistem neliniar rezultă că soluția sa nu poate depinde liniar de datele problemei și în consecință teoremele liniarității, superpoziției și reciprocității nu sunt valabile pentru circuitele neliniare. Aceste teoreme se pot aplica, cel mult, pentru circuitele liniare de mici variații. Din teoremele lui Kirchhoff sub formă generală rezultă ca o consecință **teorema lui**

**Tellegen** (1.5), care este aplicabilă și circuitelor neliniare. Particularizând teorema lui Tellegen rezultă **teorema bilanțului puterilor** într-un circuit neliniar izolat:

$$\sum_{k=1}^L u_k i_k = 0. \quad (3.41)$$

În cazul unei **rețele neizolate** se poate demonstra că aceasta, privită ca un multipol, absoarbe pe la cele  $n$  borne o putere:

$$P = \sum_{k=1}^n i_k v_k, \quad (3.42)$$

în care  $v_k$  sunt potențialele bornelor, iar  $i_k$  sunt curenții ce intră în borne.

Datorită numărului mare de ecuații și necunoscute, sistemul (3.38-3.39) nu este avantajos în analiza circuitelor. Din acest motiv se preferă eliminarea unora dintre necunoscute. Sistemele obținute în urma eliminării (efectuată de regulă în partea liniară a sistemului), sunt date de următoarele teoreme ce stau, fiecare, la baza unei metode de analiză a circuitelor neliniare.

**Teoremele lui Kirchhoff referitoare la curenți** pot fi aplicate la analiza circuitelor cu elemente neliniare controlate în curent și se obțin din (3.38) prin eliminarea tensiunilor  $u_k$ , obținându-se:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in (n)} i_k &= 0, & n &= 1, 2, \dots, (N-1); \\ \sum_{k \in [b]} \hat{U}_k(i_k) + \sum_{k \in [b]} R_k \cdot i_k &= \sum_{k \in [b]} e_k, & b &= 1, 2, \dots, (L-N+1). \end{aligned} \quad (3.43)$$

**Teoremele lui Kirchhoff referitoare la tensiuni** pot fi aplicate la analiza circuitelor cu elemente neliniare controlate în tensiune și se obțin din (3.38) prin eliminarea curenților  $i_k$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in (n)} \hat{I}_k(u_k) + \sum_{k \in (n)} G_k \cdot u_k + \sum_{k \in (n)} j_k &= 0, & n &= 1, 2, \dots, (N-1) \\ \sum_{k \in [b]} u_k &= 0, & b &= 1, 2, \dots, (L-N+1). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dacă un circuit neliniar conține atât elemente comandate în curent cât și elemente comandate în tensiune poate fi utilizată în analiză o **metodă hibridă** a teoremelor lui Kirchhoff, în care necunoscutele sunt tensiunile dintr-un arbore și curenții din coarbore. Pentru aplicarea acestei metode este necesar ca să existe un arbore care să conțină toate elementele controlate în tensiune, urmând ca toate elementele controlate în curent să se afle în coarbore.

**Teorema curenților de coarde** (curenților ciclici în circuite neliniare) poate fi aplicată circuitelor ce conțin doar elemente controlate în curent și se obține din

### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

---

relațiile (3.43) prin eliminarea curenților de ramuri:

$$\sum_{j \in [b]} \widehat{U}_j \cdot \left( \sum_{j \in (k)} i'_k \right) + \sum_{j=1}^L R_j I'_j = \sum_{j \in [b]} e_j, \quad b = 1, 2, \dots, (L - N + 1), \quad (3.45)$$

urmând ca necunoscutele principale să fie curenții  $i_b, b = 1, 2, \dots, (L - N + 1)$  din coarde (curenții dintr-un sistem de bucle fundamentale, numiți și curenți ciclici). **Teorema potențialelor nodurilor** poate fi aplicată circuitelor ce conțin doar elemente controlate în tensiune și se obține din relațiile (3.44) prin exprimarea tensiunilor  $u_k$  ca diferențe dintre potențialele  $v_{ik}$  și  $v_{fk}$  ale capetelor laturilor:

$$\sum_{k \in (n)} \hat{I}_k \cdot (v_{ik} - v_{fk}) + \sum_{j=1}^L G_{nj} v_j = \sum_{k \in (n)} j'_k, \quad n = 1, 2, \dots, (N - 1), \quad (3.46)$$

necunoscutele principale ale acestei metode fiind potențialele  $v_k, k=1,2,\dots,(N-1)$  nodurilor circuitului. O **teoremă de unicitate** pentru soluțiile unui circuit neliniar afirmă că dacă un circuit neliniar rezistiv este alcătuit din elemente dipolare având caracteristici strict monotone care satisfac proprietatea:

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} \widehat{U}(i) = \pm\infty,$$

surse independente de curent ce nu formează secțiuni și surse independente de tensiune ce nu formează bucle (deci circuitul nu are generatoare în exces), atunci:

- circuitul neliniar are soluție unică;
- caracteristicile de intrare sunt funcții strict monotone față de orice poartă a circuitului;
- caracteristicile de transfer  $u_1 - u_2$  și  $i_1 - i_2$  au pantă subunitară.

Teorema de unicitate pentru circuitele neliniare monotone delimitează o clasă de circuite ce au puncte de operare unice, punând în evidență anumite proprietăți de monotonie ale caracteristicilor, utile în aplicații.

**Teorema de invarianță** afirmă că circuitele alcătuite din elemente cu caracteristici  $u - i$  invariabile în timp au caracteristicile de intrare și transfer, față de orice poartă, invariante în timp. Teorema de invarianță permite reducerea analizei circuitelor dinamice, invariabile, rezistive ce sunt excitate de surse variabile în timp, la problema determinării caracteristicilor de intrare și de transfer. De exemplu, fie un circuit la care caracteristica de transfer  $u_1 - i_2$  este o funcție  $i_2 = T(u_1)$ , dacă la poarta 1 se conectează un generator ideal de tensiune electromotoare  $e(t)$ , atunci curentul din poarta 2 este  $i_2 = T(e(t))$ .

**Teorema pasivității** afirmă că subrețelele neliniare alcătuite din elemente pasive transferă pe la borne o putere totală (3.42) nenegativă.

### 3.5. TEOREMELE CIRCUITELOR REZISTIVE NELINIARE

Un rezistor *neliniar este pasiv* atunci când caracteristica sa  $u - i$ , cu sensurile asociate după regula de la receptoare este cuprinsă în cadranele 1 și 3 ale planului  $(u, i)$ , urmând ca intersecția cu axele să se facă în origine. Elementele de circuit care nu sunt pasive se numesc *active*. Un element de circuit rezistiv pasiv nu poate transfera putere spre circuit. Există elemente neliniare pasive care totuși la mici variații sunt active, această proprietate având aplicații importante în practică (dioda tunel, tranzistorul, trioda, etc.). Două circuite neliniare organizate ca multipli se definesc a fi *echivalente* dacă ele stabilesc aceleași relații între curenții și potențialele bornelor terminale.

**Teorema de echivalență** afirmă că dacă două circuite  $N_1$  și  $N_2$  sunt echivalente, atunci prin înlocuirea subrețelelor  $N_1$  prin  $N_2$  într-o rețea nu se modifică tensiunile și curenții din interiorul rețelei complementare  $N$  (fig. 3.26).

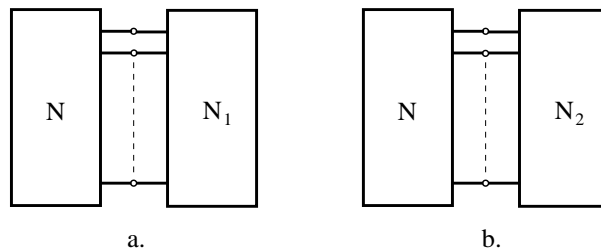


Fig. 3.26.

Aplicarea teoremei de echivalență permite simplificarea analizei unui circuit neliniar prin efectuarea unor transfigurări convenabile. Pentru efectuarea transfigurărilor sunt utile următoarele observații referitoare la echivalența circuitelor. Un circuit neliniar rezistiv, staționar,  $N$  este echivalent, față de o poartă, cu un element rezistiv dipolar (eventual activ) având caracteristica  $u - i$  identică cu caracteristica de intrare a circuitului  $N$  (fig. 3.27.a, b).

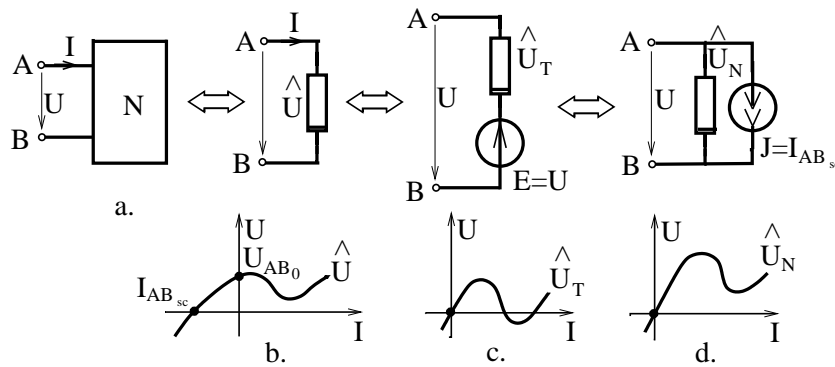


Fig. 3.27.



### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

**Teorema lui Thévenin** pentru circuite neliniare afirmă că, față de orice poartă, un circuit rezistiv este echivalent cu un element dipolar rezistiv pasiv înseriat cu un generator ideal de tensiune electromotoare  $U_{AB0}$  (fig. 3.27.c).

**Teorema lui Norton** pentru circuite neliniare afirmă că, față de orice poartă, un circuit rezistiv este echivalent cu un rezistor pasiv conectat în paralel cu un generator ideal de curent electromotor  $I_{ABsc}$  (fig. 3.27.d).

**Teoremele de echivalență ale generatoarelor ideale.** Sunt evidente deoarece echivalențele prezentate în figura 3.28, cu condiția ca  $N_1$  să fie compatibil cu generatorul ideal de curent (să existe cel puțin un punct de operare pe caracteristica lui  $N_1$  care să corespundă tensiunii  $e$ ), iar  $N_2$  să fie compatibil cu generatorul ideal de tensiune.

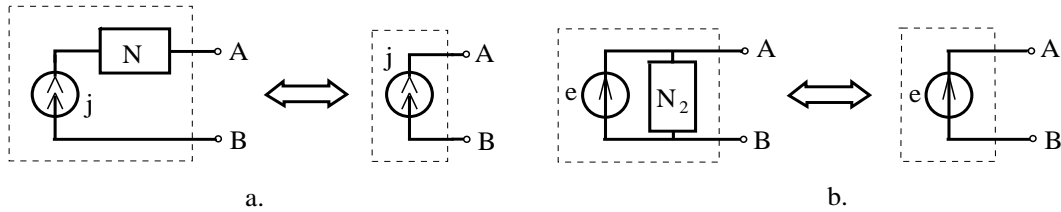


Fig. 3.28.

**Teoremele lui Vaschy** afirmă echivalențele prezentate în figura 3.29, respectiv faptul că o stea de generatoare ideale identice și conectate identic față de nodul central este echivalentă cu o stea de conductoare perfecte, iar o buclă de generatoare ideale de curent orientate similar este echivalentă cu o buclă de izolatoare perfecte.

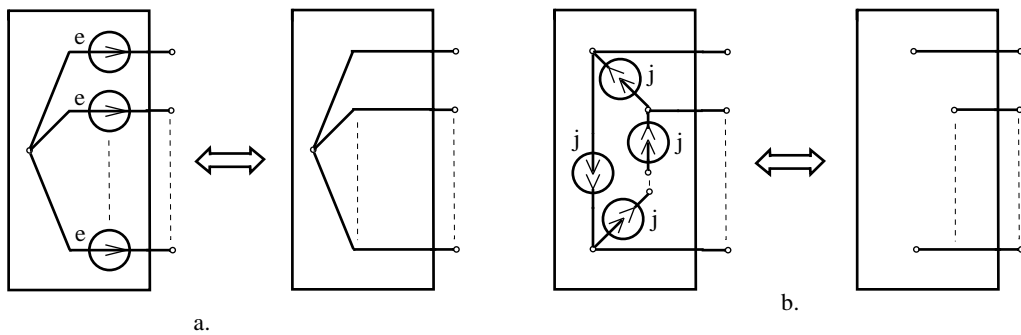


Fig. 3.29.

**Teoremele de substituție** afirmă că dacă un element neliniar dintr-un circuit are punctul de operare  $P_0(u_0, i_0)$ , atunci prin substituția lui cu: un generator ideal de tensiune electromotoare  $e = u_0$ ; un generator ideal de curent electromotor  $j = i_0$  sau un rezistor liniar de rezistență  $R = u_0/i_0$ , mulțimea punctelor de

### 3.5. TEOREMELE CIRCUITELOR REZISTIVE NELINIARE

operare ale noului circuit va conține și punctul de operare al circuitului inițial (fig. 3.30).

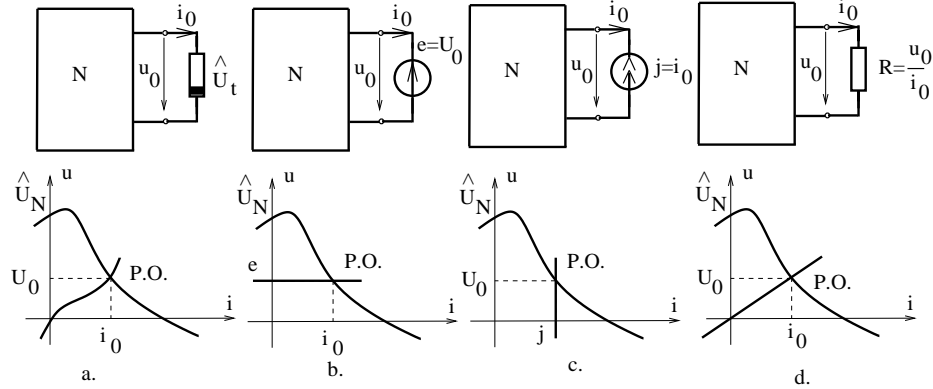


Fig. 3.30.

Ca o consecință a teoremei substituției rezultă că ecuațiile curenților ciclici (2.55) și ecuațiile potențialelor nodurilor (2.59) sunt valabile și în cazul circuitelor neliniare, cu condiția ca rezistențele și conductanțele ce intervin în aceste ecuații să fie rezistențele și conductanțele statice în punctul de operare. Deoarece rezistențele și conductanțele statice depind de punctele de operare, ecuațiile (2.55) și (2.59) își pierd caracterul liniar. O altă consecință a teoremei substituției este **teorema transferului maxim de putere** pentru elemente neliniare, care afirmă că o rețea dipolară liniară și activă transferă putere maximă unui element dipolar neliniar, dacă în punctul de operare elementul neliniar are rezistența statică  $R_s$  egală cu rezistența echivalentă a rețelei pasivizate  $R_s = R_{AB0}$  (fig. 3.31).

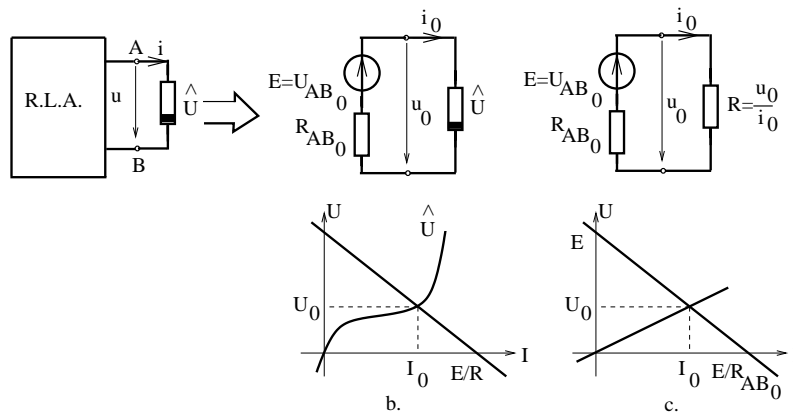


Fig. 3.31.

**Teoremele de simetrie** permit micșorarea efortului de calcul în analiza circuitelor electrice neliniare ce prezintă simetrii. Fie două circuite identice  $N'$

### 3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

și  $N''$  conectate ca în figura 3.32.a. Teorema de simetrie afirmă că intensitățile curenților prin conductoarele directe  $i_1, i_2$  sunt nule, iar tensiunile între firele încrucișate sunt nule. În consecință, analiza se reduce la analiza circuitului  $N'$  conectat ca în figura 3.32.b.

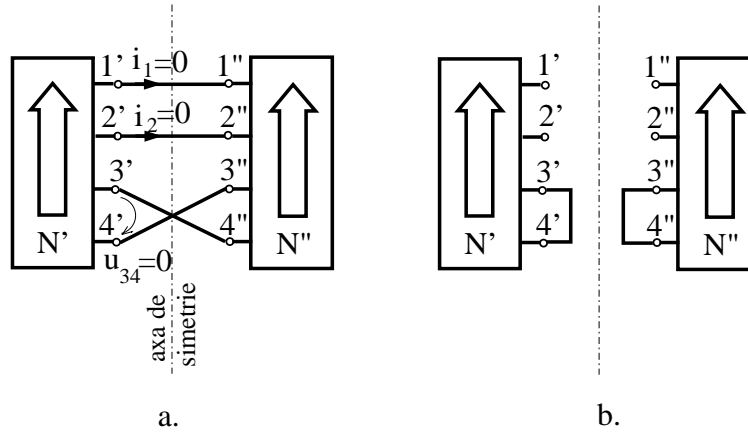


Fig. 3.32.

Dacă cele două circuite identice sunt conectate invers, un circuit fiind răsturnat față de celălalt, ca în figura 3.33, atunci tensiunile  $u_{11'}$  între bornele simetrice conectate direct sunt nule, iar curenții  $i_2, i_3$  prin bornele simetrice încrucișate sunt nuli. În consecință, analiza se reduce la analiza circuitului  $N'$  conectat ca în figura 3.33.b.

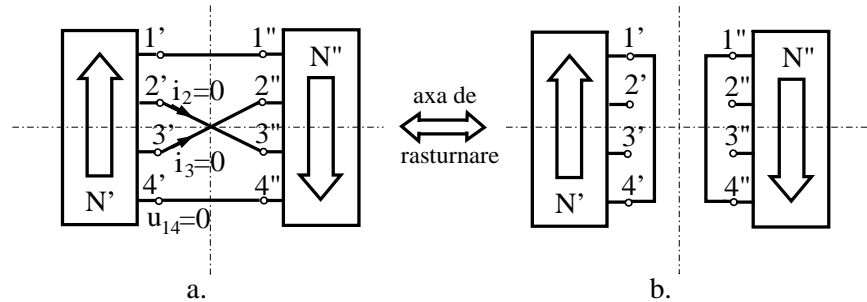


Fig. 3.33.

În alcătuirea circuitelor electrice neliniare pot interveni pe lângă elementele dipolare și elementele cuadripolare de tipul surselor comandate, dar la care comanda se face neliniar. La fel ca în cazul liniar pot exista patru tipuri de surse comandate neliniar, cu deosebirea că în cazul parametrilor de transfer caracterizarea se face prin funcții neliniare de transfer, numite funcții caracteristice. În figura 3.34.a. este prezentată o sursă de tensiune comandată neliniar de curent.

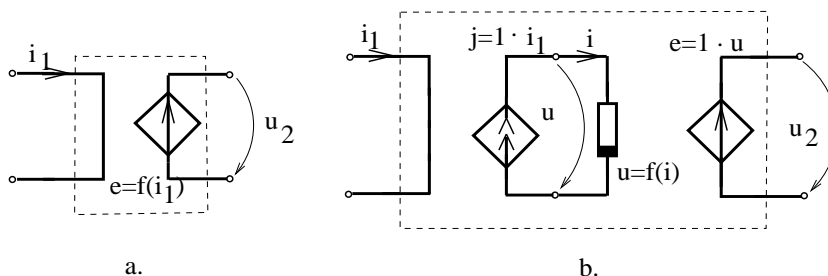


Fig. 3.34.

**Sursele comandate nelinier** admit scheme echivalente cu surse comandate liniar și un rezistor nelinier a cărui caracteristică  $u - i$  este chiar funcția caracteristică a sursei comandate. În figura 3.34.b este prezentată schema echivalentă a sursei de tensiune comandată nelinier de curent. Sursele comandate nelinier sunt utile în stabilirea schemelor echivalente circuitelor neliniare. De exemplu, un circuit nelinier ce are o caracteristică de intrare  $u_1 = \hat{T}_1(i_1)$  față de o poartă  $P_1$  și o caracteristică de transfer  $u_2 = \hat{T}_2(i_1)$  între poarta  $P_1$  și poarta  $P_2$ , poate fi echivalat ca în figura 3.35 (pentru  $i_2 = 0$ ) cu un element nelinier cu caracteristica de intrare  $u = \hat{T}_1(i)$  și o sursă comandată nelinier la poarta de ieșire având caracteristica de transfer  $e = \hat{T}_2(i)$ .

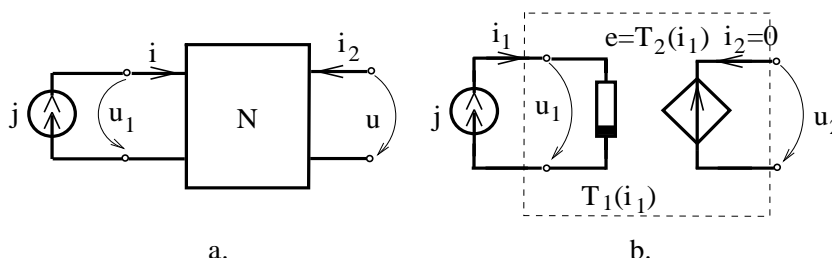


Fig. 3.35.

Un exemplu de element de circuit electronic ce admite o schemă echivalentă cu surse comandate nelinier este **amplificatorul operațional**. Schemele echivalente liniare ale amplificatorului operațional, prezentate în figura 3.25, sunt valabile doar pentru valori mici ale tensiunii de intrare, tensiunea de ieșire  $u_o = A_0 u_i$  neputând depăși o anumită valoare maximă  $|u_o| \leq u_m$ .

Schema echivalentă a amplificatorului operațional cu element nelinier este prezentată în figura 3.36 și conține, pe lângă rezistența de intrare  $R_i$  și cea de ieșire  $R_o$ , o sursă de tensiune controlată de tensiunea de intrare  $u_i$ , a cărei caracteristică de transfer este prezentată în figura 3.36.c. În vecinătatea originii caracteristicii de transfer,  $e = f(u_i)$  este o dreaptă având panta egală cu ampli-

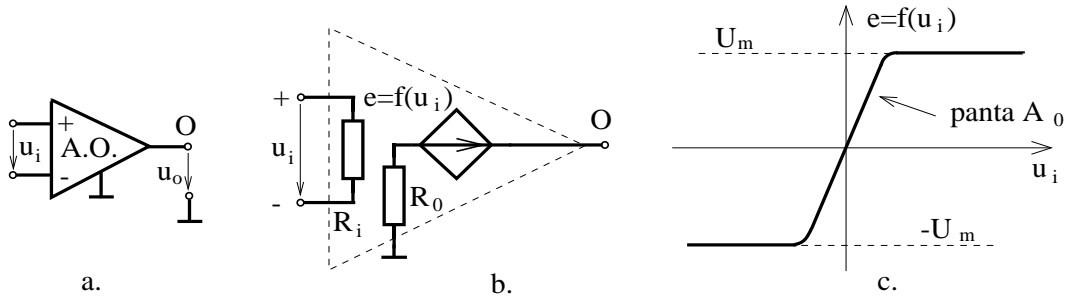


Fig. 3.36.

ficarea în buclă deschisă  $A_o$  a amplificatorului. Tensiunea de ieșire devine  $+U_m$ , pentru  $u_i > \varepsilon$ , sau  $-U_m$  pentru  $u_i < -\varepsilon$ . În acest caz se spune că amplificatorul este saturat superior respectiv inferior. În circuitele cu reacție pozitivă amplificatorul operațional se saturează și nu poate fi utilizată schema echivalentă liniară din figura 3.27.c. Modelul neliniar cel mai simplu pentru amplificatorul operațional  $R_i \rightarrow \infty, A_o \rightarrow \infty, R_o = 0$  este (fig. 3.37), cel ce corespunde unei surse de tensiune comandate în tensiune cu caracteristica  $u_2 = U_n \operatorname{sgn}(u_1)$ .

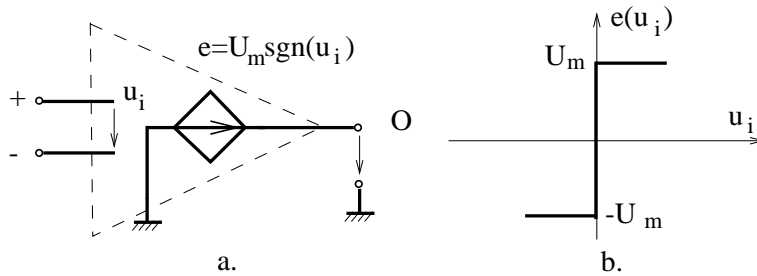


Fig. 3.37.

**Teorema dualității.** Dacă două circuite  $N$  și  $N'$  sunt duale unul altuia, atunci valorile curenților  $i_k$  și tensiunilor  $u_k$  din laturile circuitului  $N$  sunt numeric egale cu valorile din laturile duale, din circuitul  $N'$  :  $u'_k = i_k, i'_k = u_k$ . Condiția necesară și suficientă pentru ca un circuit cu elemente dipolare să admită circuit dual este ca graful lui să fie planar.

Următorul **algoritm** definește circuitul dual  $N'$  al unui circuit dat  $N$  conține următoarele etape:

- se construiește graful orientat  $G$  al circuitului  $N$  (se adoptă regula de asociere a sensurilor de la receptoare);
- în interiorul fiecărui ochi  $[i]$  al grafului  $G$  și în exteriorul grafului se plasează câte un nod  $(i)$  al grafului  $G'$ ;

### 3.5. TEOREMELE CIRCUITELOR REZISTIVE NELINIARE

---

- se consideră fiecare latură  $l$  din graful  $G$ , comună ochiurilor  $[i]$  și  $[j]$  și se trasează latura  $l'$  în graful  $G'$ , unind nodurile  $(i)$  și  $(j)$ ;
- se orientează laturile  $l'$  ale grafului  $G'$  astfel încât nodul de plecare a laturii  $l'$  să vadă latura duală  $l$  orientată în sens trigonometric;
- se introduce în fiecare latură  $l'$  un element dual elementului din latura asociată  $l$ , conform tabelului de dualitate:

curentul $i$	tensiunea $u'$
tensiunea $u$	curentul $i'$
rezistor neliniar $u=f(i)$	rezistor neliniar $i'=f(u')$
rezistor liniar având rezistența $R[\Omega]$	rezistor liniar având conductanța $G'$
generator independent cu t.e.m. $e(t)$	generator independent având c.e.m. $j'(t)$
generator independent de curent $j(t)$	generator independent de tensiune $e'(t)$
conductor perfect	izolator perfect
izolator perfect	conductor perfect
laturi serie	laturi paralel
ramuri	coarde
coarde	ramuri
bucle fundamentale	secțiuni fundamentale
secțiuni fundamentale	bucle fundamentale

De exemplu, un rezistor cu rezistența  $R = 7\Omega$  are corespondent în circuitul dual un rezistor cu conductanța  $G = 7S$ ; un generator cu t.e.m.  $e = 5V$  are corespondent în circuitul dual un generator ideal de curent cu  $j = 5A$ .

PROBLEME

**3.5.1.** Să se analizeze și să se discute numărul punctelor de operare pentru circuitele din figura 3.5.1 pentru diferite valori ale parametrilor  $E$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Va fi utilizat modelul de amplificator operational din figura 3.37.

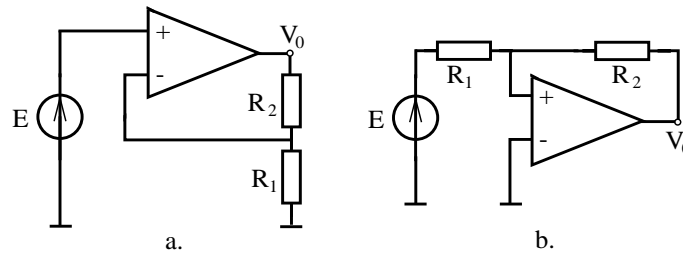


Fig. 3.5.1.

**3.5.2.** Să se determine grafic caracteristica de intrare și caracteristica de transfer pentru circuitele neliniare prezentate în figura 3.5.2.

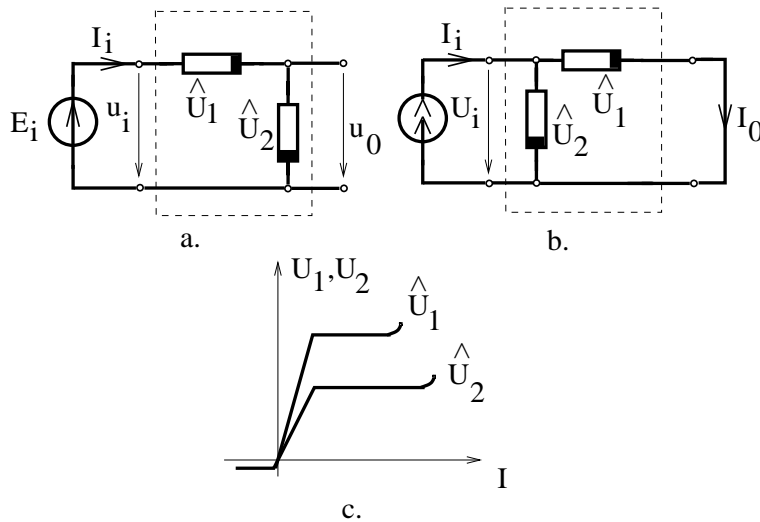


Fig. 3.5.2.

**3.5.3.** Să se determine caracteristicile de transfer  $U_1 - U_2$  pentru circuitele prezentate în figura 3.5.3, utilizând caracteristicile elementelor neliniare dipolare prezentate în figura 3.1.2.

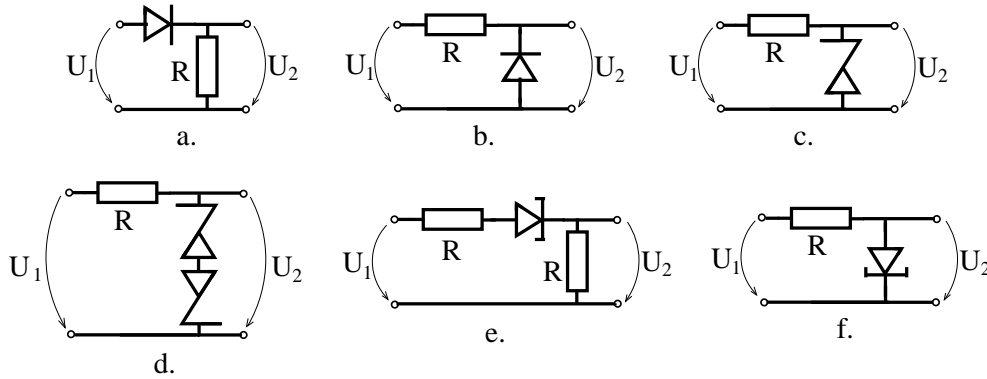


Fig. 3.5.3.

**3.5.4.** Să se determine caracteristica de transfer  $V_o(E)$  pentru circuitele reprezentate în figura 3.5.1.

**3.5.5.** Să se determine caracteristicile de transfer  $u_o(u_i)$  ale circuitelor reprezentate în figura 3.5.4. Pentru amplificatorul operațional va fi utilizată schema echivalentă din figura 3.26. Să se particularizeze elementele neliniare prin diode și diode Zener.

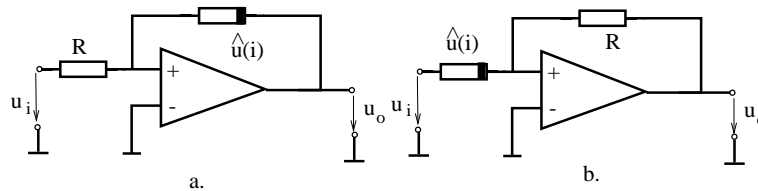


Fig. 3.5.4.

**3.5.6.** Să se determine caracteristicile de transfer  $u_o(e)$  ale circuitelor reprezentate în figura 3.5.5.

**3.5.7.** Să se determine caracteristica de transfer a puterii  $P = UI = f(E)$  pentru circuitul neliniar reprezentat în figura 3.5.6.

**3.5.8.** Să se prezinte algoritmul iterativ Newton-Raphson de analiză a circuitelor neliniare utilizând tehnicile de scriere a ecuațiilor (3.43)-(3.46). Să se determine circuitele liniarizate echivalente, la fiecare, iterație unui element dipolar neliniar.



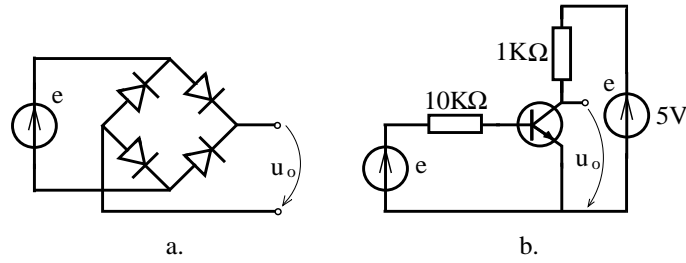


Fig. 3.5.5.

**3.5.9.** Să se verifice bilanțul puterilor pentru circuitele analizate în problema 3.1.12.

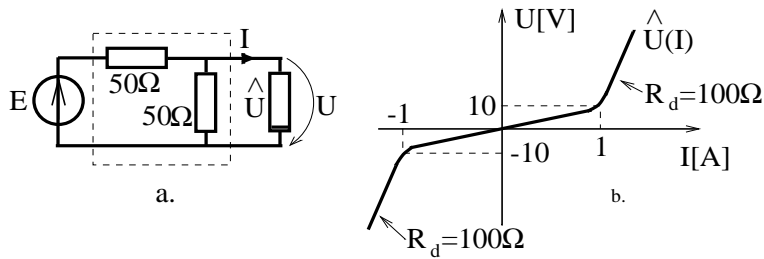


Fig. 3.5.6.

**3.5.10.** Să se identifice circuitele analizate în problemele 3.5.3 și 3.5.5 pentru care poate fi aplicată teorema de unicitate prezentată în breviar și să se verifice concluziile teoremei.

**3.5.11.** Să se determine și să se reprezinte grafic modul în care variază în timp tensiunea  $u_o(t)$  pentru circuitele reprezentate în figura 3.5.7, dacă tensiunea electromotoare aplicată este  $e(t) = E_m \sin(\omega t)$ . Modelul de amplificator adoptat va fi cel din figura 3.36. Aplicație numerică pentru valorile  $E_m = 40V$ ,  $E = 10V$ .

**3.5.12.** Să se prezinte grafic modul de variație în funcție de timp a tensiunii  $U_2(t)$  atunci când  $U_1(t) = U_m \sin(\omega t)$  pentru circuitele reprezentate în figura 3.5.3.

**3.5.13.** Să se determine valoarea curentului  $I_B$  pentru care dipolul AB din figura 3.5.8 absoarbe putere maximă. Se va adopta pentru tranzistor modelul din figura 3.11, considerându-se coeficientul de amplificare în curent  $\beta = 50$ .

**3.5.14.** Să se identifice care sunt parametrii generatoarelor de care depind

curenții prin rezistoarele liniare ale circuitelor din figura 3.5.9.

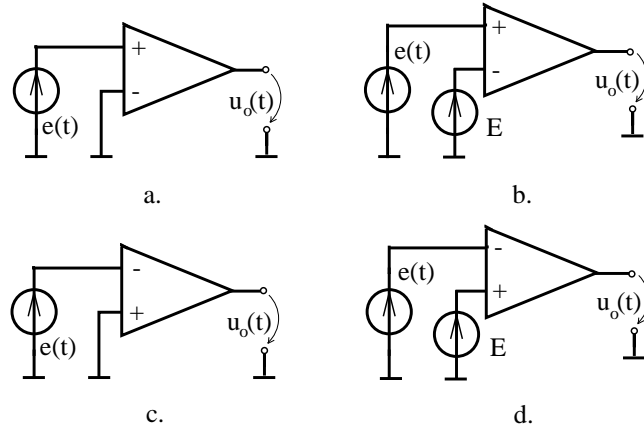


Fig. 3.5.7.

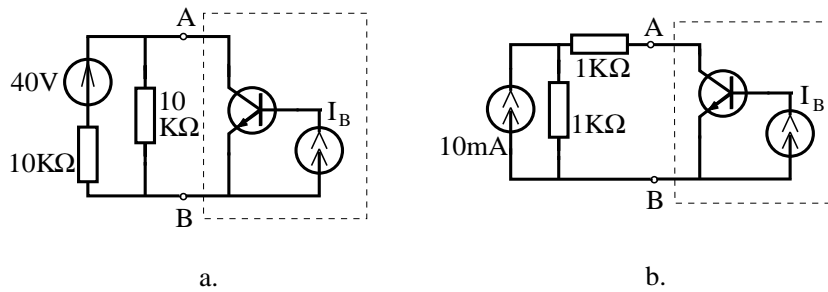


Fig. 3.5.8.

**3.5.15.** Să se determine care sunt mărimile (curenți, tensiuni, potențiale) ce se modifică în urma introducerii într-un circuit electric a unor generatoare ce satisfac teoremele lui Vachy.

**3.5.16.** Să se substituie elementul dipolar neliniar AB al cărui punct de operare a fost determinat în problema 3.5.13, printr-un rezistor, generator de tensiune sau generator de curent.

**3.5.17.** Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 3.5.10 utilizând teorema simetriei.

3. CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE NELINIARE

---

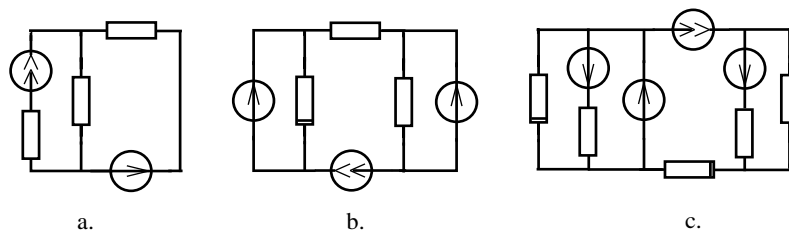


Fig. 3.5.9.

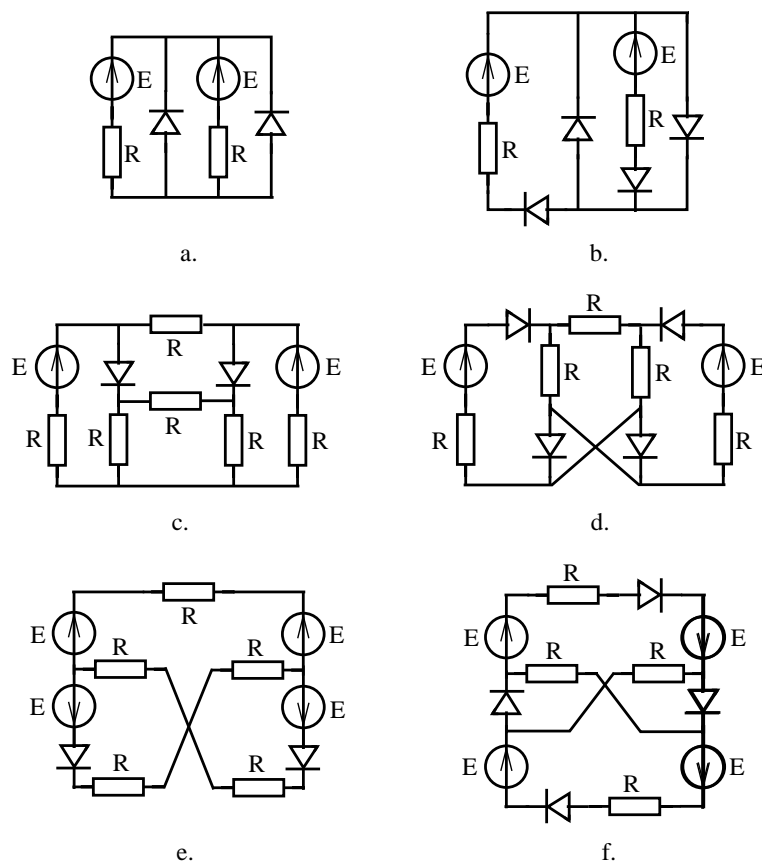


Fig. 3.5.10.