

MODELAREA DISPOZITIVELOR ELECTROMAGNETICE

Daniel Ioan

Cuprins

0	Introducere	7
0.1	Obiectul disciplinei	7
0.2	Importanța disciplinei	8
0.3	Formularea problemelor	8
0.4	Etapele rezolvării problemei directe	10
1	Mărimile fizice caracteristice	13
1.1	Mărimile câmpului electromagnetic	13
1.2	Mărimile caracteristice ale corpurilor	14
1.3	Mărimile caracteristice efectelor câmpului	16
2	Fenomenele electromagnetice fundamentale	19
2.1	Legea fluxului electric	19
2.2	Legea fluxului magnetic	20
2.3	Legea inducției electromagnetice	21
2.4	Legea circuitului magnetic	22
2.5	Legea conservării sarcinii electrice	23
3	Proprietăți de material	27
3.1	Legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$	27
3.2	Legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$	28
3.3	Legea conducției	30
3.4	Clasificarea caracteristicilor de material	31
3.5	Modelarea materialelor neliniare și cu histerezis	33
3.6	Modelarea mediilor neomogene	36
3.7	Modelarea cu materiale perfecte	38

4	Efecte ale câmpului electromagnetic	41
4.1	Legea transformării energiei în conductoare	41
4.2	Legea transferului de masă	41
4.3	Teorema energiei electromagnetice.	42
4.4	Teorema impulsului electromagnetic	44
4.5	Teorema forței generalizate în câmp electric	44
4.6	Teorema forței generalizate în câmp magnetic	45
5	Regimurile câmpului electromagnetic	47
5.1	Regimul general variabil	47
5.2	Regimul electrostatic	48
5.3	Regimul magnetostatic	50
5.4	Regimul electrocinetic staționar	51
5.5	Regimul magnetic staționar	52
5.6	Regimurile cvasistaționare	54
5.7	Regimul general variabil în mediile imobile. Ecuațiile lui Maxwell	56
6	Modelarea spațio-temporală a câmpului electromagnetic	59
6.1	Modelarea temporală a câmpului electromagnetic	59
6.2	Modelarea geometrică. Idealizări și simetrii	60
6.2.1	Modelarea geometrică	60
6.2.2	Idealizări geometrice și simetrii	61
6.3	Modelarea electromagnetică a foliilor și firelor	66
6.4	Serii ierarhice de modele	72
7	Aplicații	77
7.1	Cablu coaxial	77
7.2	Cuva electrolitică	79
7.3	Electromagnetul plonjor	81
7.4	Mașina cu magneti permanenți	83
7.5	Transformatorul monofazat	85
7.6	Cuptor cu microunde	87
8	Concluzii referitoare la modelarea fizică	91

9	Reprezentarea matematică a mărimilor fizice	93
9.1	Sisteme de coordonate	93
9.2	Reprezentarea domeniului spațio – temporal	94
9.3	Reprezentarea proprietăților de material	95
9.4	Reprezentarea obiectelor idealizate	99
10	Formularea corectă a problemelor câmpului electromagnetic în diferite regimuri	101
10.1	Regimul electrostatic	102
10.2	Regimul magnetostatic	104
10.3	Regimul electrocinetic staționar	105
10.4	Regimul magnetic staționar	105
10.5	Regimul cvasistaționar inductiv tranzitoriu	107
10.6	Regimul cvasistaționar capacitiv tranzitoriu	109
10.7	Regimul cvasistaționar tranzitoriu	110
10.8	Regimul general variabil tranzitoriu	110
10.9	Elementul electromagnetic de circuit	112
11	Analiza câmpului electromagnetic în domeniul frecvenței	115
11.1	Reprezentarea în complex a ecuațiilor câmpurilor sinusoidale	115
11.2	Analiza regimurilor periodice cu transformata Fourier discretă	120
11.3	Analiza regimurilor tranzitorii cu transformatele Laplace și Fourier	123
12	Formulări în potențiale pentru ecuațiile câmpului electromagnetic	127
12.1	Potențialul scalar al câmpurilor statice și staționare irotaționale	127
12.2	Potențialul scalar pe suprafețe de discontinuitate	132
12.3	Potențialul vector al câmpurilor statice și staționare solenoidale	136
12.4	Potențialul vector pe suprafața de discontinuitate	138

Capitolul 0

Introducere

0.1 Obiectul disciplinei

Modelarea și proiectarea asistată de calculator a dispozitivelor electromagnetice reprezintă o disciplină modernă cu un puternic caracter interdisciplinar, bazată pe cele mai noi cunoștințe din tehnologia informaticii, electromagnetism și matematică.

Scopul principal al acestei discipline îl constituie analiza cu ajutorul calculatorului a unor dispozitive electrice și magnetice cu cele mai diverse utilizări, în a căror funcționare câmpul electromagnetic joacă un rol esențial. Scopul acestei analize este de a permite stabilirea comportării lor (inclusiv a solicitărilor la care ele sunt supuse), atât în regimuri normale cât și în regimuri anormale de funcționare. În acest fel calculatorul se folosește în mod profesional, ca unealtă de lucru în activitatea de inginerie electrică. Se urmărește atât analiza acestor dispozitive în vederea caracterizării lor cât și (re)proiectarea lor în vederea optimizării diferitelor caracteristici tehnice sau economice.

Gama dispozitivelor care pot fi modelate este extrem de diversă și acoperă atât cazuri din domeniul curenților tari (electromagnetică, acționări de putere, electrochimie, electrotermie) cât și aplicații în domeniul curenților slabi (electronică, telecomunicații, transmisia și prelucrarea semnalelor). În continuare sunt prezentate doar câteva din categoriile de dispozitive electromagnetice, care sunt sau pot fi modelate cu calculatorul:

- mașini electrice clasice și speciale, de la micromașini până la generatoarele de mare putere;
- aparate electrice și de acționare: microrelee, electromagneți, contactoare, relee;
- linii de transmisie atât a semnalelor electrice cât și a energiei electrice;
- elemente de circuit: condensatoare, rezistoare, bobine și transformatoare cu aplicații în electronică, energetică, instalații electrice sau metrologice;
- senzori și aparate de măsură: magnetoelectrice, electrodinamice, cu inducție, instalații de defectoscopie nedistructivă cu curenți turbionari ;
- instalații electrochimice, pentru acoperiri galvanice și de producție sau rafinare a metalelor Al, Cu, Ag, etc.;

- dispozitive de deflexie sau accelerare a fluxurilor de particule cu aplicații casnice (de exemplu TV) sau industriale și științifice (acceleratoare de particule);
- instalații de încălzire electrică directă sau prin curenți turbionari;
- instalații de radio frecvență: antene, ghiduri de undă, cavități rezonante, cuptoare cu microunde;
- instalații de inginerie biomedicală și studiul fenomenelor bioelectrice.

Lista prezentată nu este exhaustivă ci doar exemplificatoare. Este de remarcat că practic toate domeniile ingineriei electrice și în special cele avansate sunt puternic influențate de progresele în domeniul modelării și proiectării asistată de calculator.

0.2 Importanța disciplinei

Utilizarea calculatorului în activitatea de inginerie electrică prezintă importanță din mai multe puncte de vedere.

Un prim aspect îl reprezintă faptul că ea obligă la înțelegerea exactă a fenomenelor esențiale în funcționarea unui dispozitiv și permite analiza influenței acestor fenomene asupra caracteristicilor dispozitivelor.

Un alt aspect cu importante implicații financiar-economice îl reprezintă faptul că proiectarea și verificarea cu ajutorul calculatorului a proiectului unui dispozitiv nou permite eliminarea execuției prototipurilor, care în multe cazuri este o operație costisitoare și consumatoare de timp.

Un alt mod uzual de folosire a calculatorului în ingineria electrică se referă la re-proiectarea și optimizarea unor dispozitive aflate deja în producția de serie, în vederea îmbunătățirii performanțelor sau extinderii domeniului de aplicație. Se constată că societățile care dețin controlul piețelor de bunuri și servicii tehnice folosesc intensiv calculatorul în activitatea de proiectare/dezvoltare, acesta fiind unul din secretele faptului că reușesc să fie competitive și flexibile. Un alt aspect care relevă importanța acestei discipline îl constituie faptul că fabricația controlată de calculator (**CIM - Computer Integrated Manufacturing**) capătă o pondere tot mai mare. Acesta obligă ca etapa premergătoare de proiectare asistată (**CAD - Computer Aided Design**) să fie și ea automatizată tot mai mult. În acest context activitatea de cercetare/dezvoltare (**CAE - Computer Aided Engineering**) este normal să evolueze tot mai mult în sensul utilizării intensive a sistemelor de calcul. În acest fel se obține un lanț CAE/CAD/CIM în care intervenția manuală între etape este eliminată (prin transmiterea informațiilor în format electronic), rezultatele obținute fiind de maximă încredere iar performanțele optimizate.

0.3 Formularea problemelor

Modelarea asistată de calculator a dispozitivelor electromagnetice presupune în esență rezolvarea unei probleme de analiză a câmpului electromagnetic, numită **problemă directă**. Datele acestei probleme fac parte din trei mari categorii:

- **date geometrice**, care conțin toate informațiile referitoare la formele și dimensiunile părților componente ale dispozitivului și felul în care acestea sunt asamblate;
- **caracteristicile de material**, care conțin proprietățile și comportarea materialelor din care sunt realizate părțile componente ale dispozitivului;
- **sursele de câmp**, care conțin datele referitoare la excitațiile (cauzele) câmpului electromagnetic din dispozitiv, atât cele aflate în interiorul dispozitivului cât și cele plasate în exteriorul acestuia.

Necunoscutele problemei directe se pot clasifica în trei mari categorii:

- **mărimile caracteristice câmpului electromagnetic**, ce caracterizează starea dispozitivului și care pot avea un caracter local (cum sunt intensitățile și inducțiile electrice și respectiv magnetice $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, densitatea de curent $\mathbf{J}$ sau de sarcină ρ , densitatea de putere transferată p sau de energie w) sau un caracter global (cum sunt fluxurile și tensiunile electrice și respectiv magnetice ψ , u , φ , u_m , curentul i , sarcina electrică q sau puterea transferată P sau energia acumulată W);
- **mărimile caracteristice dispozitivului**, precum rezistența R , inductivitatea L , capacitatea C sau funcția de transfer $Y(s)$, respectiv caracteristici de tipul $\varphi(i)$ la dispozitivele neliniare;
- **mărimile caracteristice efectelor câmpului**, precum forța electromagnetică $\mathbf{F}$, viteza de mișcare $\mathbf{v}$ sub acțiunea forței electromagnetice, temperatura θ sau masa transferată prin electroliză.

În proiectare interesează în schimb **problema inversă** asociată sintezei dispozitivului sau a câmpului. O astfel de problemă are ca date caracteristicile dorite, ca de exemplu: rezistența R , capacitatea C , inductivitatea L , puterea P , tensiunea de scurtcircuit sau o anumită dependență de frecvență sau de tip $\varphi(i)$, etc.

De această dată necunoscutele sunt:

- **de natură geometrică**, forma și dimensiunile (inclusiv toleranțele) părților componente (eventual cu preluarea unor subansamble din standardele în vigoare);
- **tipurile de materiale** ce trebuie folosite în realizarea dispozitivului (de preferință preluate din standardele existente);
- **excitațiile** (sursele de câmp) la care este supus dispozitivul, dacă este cazul (eventual valorile limită ale acestor excitații, în regimul normal de funcționare).

Se constată că problema proiectării presupune o modelare îngrijită în vederea validării proiectului. În mod uzual problema inversă se rezolvă prin modelări succesive ale unor dispozitive, pornind de la un model inițial de referință al unui dispozitiv existent sau imaginar. Acesta este motivul pentru care în continuare este acordată o atenție deosebită, mai ales problemei directe. În faza actuală a cunoștințelor tehnico-științifice rezolvarea automată a problemei inverse generate este încă un deziderat.

0.4 Etapele rezolvării problemei directe

Analiza asistată de calculator a unui dispozitiv electromagnetic nu este un proces integral automatizabil. Cu toate că pachetele de programe pentru analiza numerică a câmpului electromagnetic oferă o mare bogăție de funcții, ele reprezintă totuși doar o unealtă în activitatea de inginerie, urmând ca analistul să joace un rol central în activitatea de modelare.

Pentru a putea fi rezolvată cu ajutorul calculatorului, o problemă trebuie descrisă în limbajul pe care sistemul de calcul îl înțelege. Trecerea de la dispozitivul electromagnetic real sau imaginar la descrierea sa pentru calculator presupune parcurgerea a trei etape preliminare (fig. 1) extrem de importante în analiză, și anume:

- **Modelarea fizică**, în care sunt identificate fenomenele fizice esențiale în funcționarea dispozitivului; sunt neglijate în mod explicit cele neimportante și sunt identificate mărimile fizice caracteristice fenomenelor esențiale; cu această ocazie se stabilește regimul câmpului electromagnetic care va fi considerat în analiza dispozitivului și se fac aproximările și idealizările de natură geometrică, temporală, de material sau ale surselor de câmp;
- **Modelarea matematică**, în care sunt scrise ecuațiile ce descriu fenomenele esențiale și sunt identificate: structurile matematice prin care se reprezintă mărimile fizice, și care sunt în fond spații algebrice și/sau topologice (de exemplu: scalarii - elemente ale corpului numerelor reale sau complexe; spațiile vectoriale ale vectorilor sau tensorilor), dar și domeniile de definiție și codomeniile aplicațiilor (funcții sau operatori ce intervin în ecuații). Ideal, modelarea matematică ar trebui încheiată cu demonstrarea unei teoreme care să garanteze buna formulare a problemei directe și care să asigure unicitatea, existența și stabilitatea soluției (respectiv caracterul injectiv, surjectiv și continuu față de date al operatorului asociat problemei). Din acest motiv, uneori trebuie corectat modelul fizic astfel încât el să genereze o problemă matematică bine formulată. După ce a fost formulată în mod corect, problema matematică poate fi rezolvată, iar dacă aceasta admite soluție analitică, se recomandă cu tărie determinarea și evaluarea numerică a acestei soluții. Dacă nu, se recomandă realizarea unor idealizări suplimentare, până când problema se simplifică, astfel încât să admită soluție analitică. Chiar dacă modelul fizic devine grosier, existența unei soluții analitice de referință este de mare folos în validarea soluției obținute prin modelare numerică;
- **Modelarea numerică**, în care se urmărește discretizarea problemei în vederea rezolvării ei cu resurse finite de calcul (timp finit și memorie necesară finită), ceea ce presupune aproximarea spațiilor continue de funcții care descriu variațiile spațio-temporale ale mărimilor fizice prin spații discrete, finit dimensionale precum și discretizarea operatorilor care intervin în ecuațiile câmpului (această ultimă discretizare este efectuată de obicei în mod automat, fiind incorporată în programul de calcul).

După etapa de modelare numerică, problema directă ajunge într-o formă ce poate fi descrisă **programului de calcul**. Folosind algoritmi și structurile de date asociate (care în majoritatea cazurilor sunt invizibile pentru analist) acestea generează o soluție numerică a problemei directe.

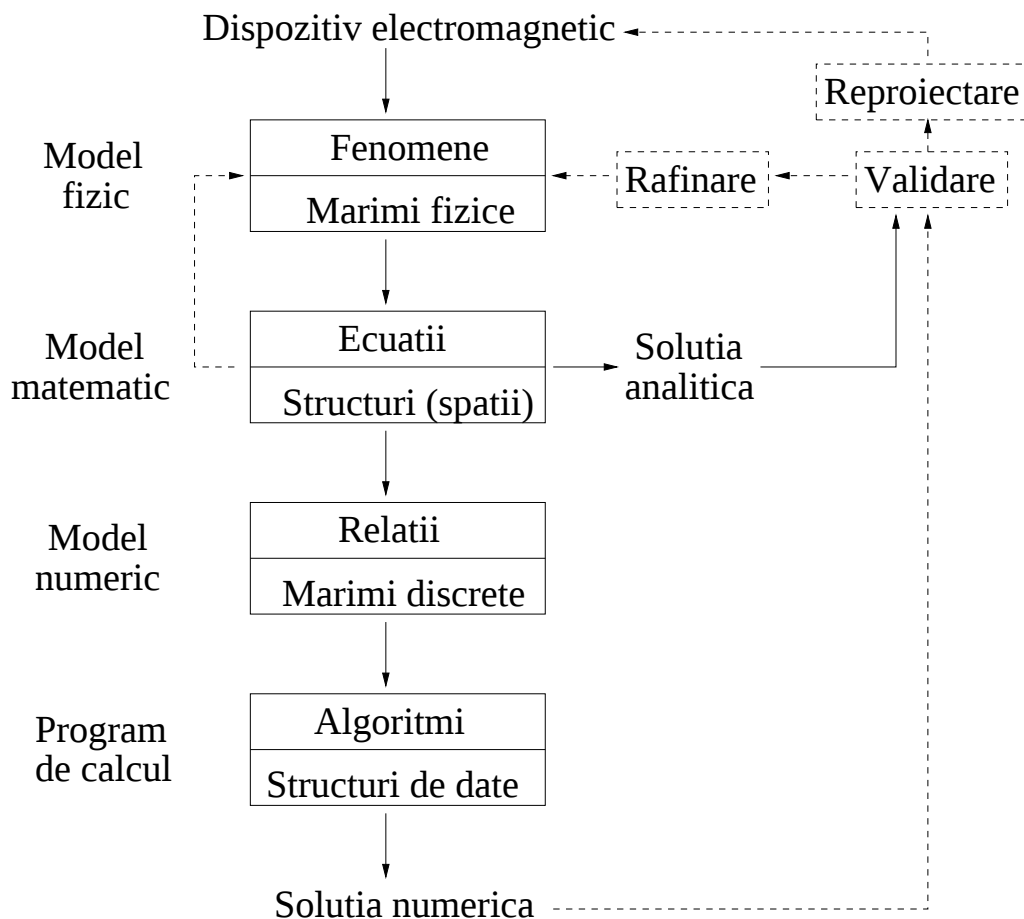


Figura 1: Etapele analizei unui dispozitiv

Prin obținerea unei prime soluții numerice procesul de analiză nu este încheiat, deoarece aceasta trebuie validată. Cea mai puternică metodă de **validare** constă în comparația cu datele măsurate experimental, dar în majoritatea cazurilor acestea din urmă nu sunt disponibile. În aceste condiții, o metodă standard de validare constă în comparația cu soluția analitică, cel puțin pentru un model rudimentar fizic al dispozitivului analizat. Alte tehnici de validare au la bază rafinarea modelului fizic (prin luarea în considerare a unor efecte considerate inițial secundare, dar care pot avea efect asupra funcționării dispozitivului), utilizarea unui model matematic alternativ (de exemplu bazat pe ecuații integrale în locul ecuațiilor diferențiale), rafinarea modelului numeric prin mărirea dimensiunii spațiului discret și respectiv folosirea unui alt program de calcul în vederea rezolvării aceluiași model numeric. Folosind aceste tehnici, nu numai că soluția numerică are un grad sporit de credibilitate, dar se poate asigura și un control asupra erorilor de aproximare și idealizare generate de fiecare etapă de modelare.

Re luarea succesivă a etapelor de analiză descrise anterior reprezintă metoda cea mai eficientă de rafinare a soluției numerice, până aceasta este satisfăcătoare din punct de vedere ingineresc. Acest proces iterativ, dar controlat după alte criterii este aplicat și în cazul (re)proiectării sau optimizării unui dispozitiv.

Capitolul 1

Mărimile fizice caracteristice

După cum s-a menționat anterior un model fizic al unui dispozitiv este bazat pe identificarea fenomenelor fizice esențiale în funcționarea dispozitivului și pe mărimile fizice care caracterizează cantitativ starea dispozitivului și procesele care au loc în acesta.

Mărimile ce caracterizează starea dispozitivului se pot clasifica în următoarele trei categorii:

- mărimile caracteristice câmpului electromagnetic;
- mărimile caracteristice corpurilor;
- mărimile ce caracterizează efectele câmpului electromagnetic.

1.1 Mărimile câmpului electromagnetic

Câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele **mărimi fizice locale**:

- **E** – intensitatea câmpului electric [V/m];
- **D** – inducția electrică [C/m²];
- **B** – inducția magnetică [T];
- **H** – intensitatea câmpului magnetic [A/m],

și de următoarele **mărimi globale** corespondente, obținute prin integrarea mărimilor locale:

- $u = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}$ – tensiunea electrică de-a lungul curbei C [V];
- $\psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{A}$ – fluxul electric pe suprafața S [C];
- $\phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A}$ – fluxul magnetic pe suprafața S [Wb];
- $u_m = \int_C \mathbf{H} d\mathbf{r}$ – tensiunea magnetică de-a lungul curbei C [A].

Se constată că intensitățile câmpului se integrează pe curbe (C) și dau naștere tensiunilor, iar inducțiile se integrează pe suprafețe și dau naștere fluxurilor. Atât curbele cât și suprafețele trebuie orientate (de obicei în mod convențional), pentru a permite determinarea univocă a mărimilor globale. Se adoptă următoarele convenții pentru semnele de referință: suprafețele închise sunt orientate de la interior spre exterior, iar cele deschise sunt orientate conform regulii burghiului drept față de curbele închise pe care se sprijină. Mărimile locale au un caracter vectorial tridimensional, iar cele globale un caracter scalar.

Mărimile locale au avantajul că permit caracterizarea completă a câmpului, dar dezavantajul că necesită o cantitate foarte mare de informație (în fiecare punct din spațiu și în fiecare moment de timp este necesară cunoașterea celor patru vectori tridimensionali $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, deci a 12 valori scalare).

Mărimile globale dau o informație sintetică asupra comportării câmpului pe o mulțime de puncte, fiind mult mai potrivite pentru caracterizarea inginerescă (sunt mai simplu de măsurat și comunicat, necesitând o cantitate mult mai mică de informație decât cele locale).

Din păcate, cunoașterea valorii unei mărimi globale nu permite determinarea mărimii locale asociate (distribuția câmpului pe curba sau suprafața respectivă), ci numai a valorii medii a unei anumite componente, și anume:

- $E_{tmed} = u/l_C$ – componenta tangențială medie a intensității câmpului electric;
- $D_{nmed} = \psi/A_s$ – componenta normală medie a inducției electrice;
- $B_{nmed} = \phi/A_s$ – componenta normală medie a inducției magnetice;
- $H_{tmed} = u_m/l_C$ – componenta tangențială medie a intensității câmpului magnetic,

. în care l_C este lungimea curbei C iar A_s este aria suprafeței S .

O metodă intuitivă de reprezentare a câmpului electromagnetic o constituie spectrul acestuia. Fiecare componentă a câmpului electromagnetic: $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ are câte un spectru asociat, care este alcătuit dintr-o mulțime de curbe orientate (linii de câmp), la care vectorii $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ și respectiv $\mathbf{H}$ sunt tangențiali în fiecare punct (figura 1.1).

1.2 Mărimile caracteristice ale corpurilor

Corpurile în interacțiunea lor cu câmpul electromagnetic își pot modifica starea. Pentru a caracteriza cantitativ aceste modificări se utilizează următoarele **mărimi locale asociate corpurilor**:

- ρ – densitatea de sarcină [C/m^3];
- $\mathbf{J}$ – densitatea de curent [A/m^2];
- $\mathbf{P}$ – polarizația [C/m^2];
- $\mathbf{M}$ – magnetizația [A/m],

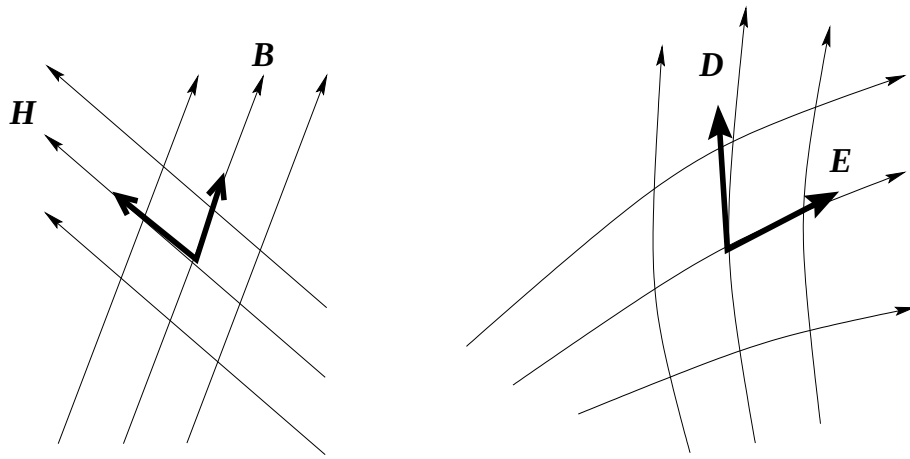


Figura 1.1: Spectrele câmpului electromagnetic

și următoarele **mărimi globale asociate corpurilor** și obținute prin integrarea mărimilor locale:

- $q = \int_D \rho dv$ – sarcina electrică a domeniului D [C];
- $i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A}$ – curentul electric ce străbate suprafața S [A];
- $\mathbf{p} = \int_D \mathbf{P} dv$ – momentul electric al domeniului D [Cm];
- $\mathbf{m} = \int_D \mathbf{M} dv$ – momentul magnetic al domeniului D [Am²].

Cu excepția curentului electric, celelalte mărimi globale caracteristice corpurilor se calculează prin integrare pe domeniul corpului. Curentul electric este de fapt fluxul densității de curent, deci este o mărime asociată unei suprafețe S , care secționează corpul. Cunoașterea mărimilor globale permite determinarea următoarelor valori medii ale mărimilor locale:

- $\rho_{med} = q/V$ – densitatea medie de sarcină pe volumul V ;
- $J_{nmed} = i/A_s$ – valoarea medie a componentei normale a densității de curent de pe suprafața S ;
- $\mathbf{P}_{med} = \mathbf{p}/V$ – polarizația medie;
- $\mathbf{M}_{med} = \mathbf{m}/V$ – magnetizația medie,

în care V este volumul corpului (domeniului D).

Mărimile locale permit caracterizarea completă, iar cele globale doar caracterizarea sintetică (în medie) a următoarelor stări:

- **starea de electrizare** a corpurilor (ρ , q) – respectiv excesul local respectiv global al numărului de protoni față de numărul de electroni dintr-un corp;

- **starea de electrizare** a corpurilor (caracterizate local de ρ și global de q) – respectiv excesul local, global al numărului de protoni față de numărul de electroni dintr-un corp;
- **starea electrocinetică** ($\mathbf{J}$, i) – deplasarea după o direcție privilegiată (suprapusă peste agitația termică) a purtătorilor liberi de sarcină (electroni și/sau ioni) din interiorul corpului;
- **starea de polarizare** ($\mathbf{P}$, $\mathbf{p}$) – orientarea după o direcție privilegiată a moleculelor polare (la care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative) ale corpului;
- **starea de magnetizare** ($\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$) – orientarea după o direcție privilegiată a spinilor (momentelor magnetice) microparticulelor care alcătuiesc corpul.

1.3 Mărimile caracteristice efectelor câmpului

Pentru a caracteriza **efectele locale ale câmpului electromagnetic** se utilizează următoarele mărimi principale:

- p – densitatea de putere [W/m^3];
- $\bar{\delta}$ – densitatea fluxului de masă [kg/m^2s];
- $\mathbf{f}$ – densitatea de forță [N/m^3];
- $\bar{\bar{T}}$ – tensorul tensiunilor mecanice [N/m^2],

și respectiv următoarele **mărimi globale ale efectelor câmpului**, obținute prin integrarea celor locale:

- $P = \int_D p dv$ – puterea transferată de câmp corpurilor din domeniul D [W];
- $Q_m = \int_S \bar{\delta} d\mathbf{A}$ – debitul masic transferat prin suprafața S [kg/s];
- $\mathbf{F} = \int_D \mathbf{f} dv = \int_\Sigma \bar{\bar{T}} d\mathbf{A}$ – forța exercitată asupra domeniului D cu $\Sigma = \partial D$ [N];
- $\mathbf{C} = \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{f} dv$ – cuplul forțelor ce acționează asupra domeniului D [Nm].

Prin integrarea în timp a mărimilor globale se obțin următoarele **mărimi de proces**:

- $W = \int_{t_1}^{t_2} P dt$ – energia transferată corpurilor din domeniul D în intervalul (t_1, t_2) [J];
- $m = \int_{t_1}^{t_2} Q_m dt$ – masa transferată prin suprafața S pe intervalul de timp (t_1, t_2) [kg];
- $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$ – impulsul forței în intervalul (t_1, t_2) [Ns].

Mărimile prezentate caracterizează următoarele efecte ale câmpului electromagnetic:

- **transferul de energie** de la câmp la corp – caracterizat de mărimile (p, P, W) ce permit evaluarea efectelor termice, a încălzirii corpurilor în procesele ireversibile, cu caracter disipativ, dar și evaluarea energiei acumulate în procesele reversibile;
- **transferul de masă**, care însoțește de obicei procesul de conducție electrocinetic – $(m, Q_m, \bar{\delta})$ permit evaluarea masei depuse prin electroliză, a vitezei de depunere, a găsirii locale a stratului depus și în general a intensității, direcției și sensului transferului de masă;
- **efectele mecanice** ale câmpului electromagnetic – $(\mathbf{f}, \bar{T}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, \mathbf{I})$ permit evaluarea acțiunilor ponderomotoare ale câmpului electromagnetic asupra corpurilor: forțe, cupluri, presiuni, tensiuni și în final a vitezei și deplasării corpurilor sub acțiunea acestor forțe.

Inventarul efectuat în acest paragraf nu este exhaustiv, el conține doar mărimile fizice caracteristice cele mai importante, care intervin cel mai frecvent în modelarea dispozitivelor electromagnetice.

În practica modelării electromagnetice se întâlnesc și alte mărimi fizice, cum sunt cele caracteristice materialelor: permitivitatea ε , permeabilitatea μ , conductivitatea σ , ș.a. sau cele caracteristice dispozitivelor: rezistența R , capacitatea C , inductivitatea L , ș.a., dar acestea vor fi prezentate pe parcursul lucrării.

Capitolul 2

Fenomenele electromagnetice fundamentale

Fenomenele fundamentale care stau la baza funcționării dispozitivelor electromagnetice sunt cele de natură electrică și magnetică. Aceste fenomene sunt descrise de legile câmpului electromagnetic, care se pot clasifica în trei mari categorii:

- legi generale;
- legi de material;
- legi ale efectelor câmpului.

Prima categorie este alcătuită de următoarele patru legi:

2.1 Legea fluxului electric

Fluxul electric de pe orice suprafață închisă Σ este egal cu sarcina electrică din domeniul mărginit de suprafața Σ :

$$\psi_{\Sigma} = q_{D_{\Sigma}} \Leftrightarrow \int_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \rho dv \quad (2.1)$$

Forma locală a acestei legi (obținută cu relația Gauss-Ostrogradski) este:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.2)$$

și ea are următoarea semnificație fizică: orice corp electrizat ($\rho \neq 0$) produce în vecinătatea sa un câmp electric ($\mathbf{D} \neq 0$). Acesta este primul fenomen fundamental descris de legi și el este ilustrat în figura 2.1.

Se constată că spectrul inducției electrice $\mathbf{D}$ produs de corpurile electrizate are liniile de câmp deschise, acestea părăsind (izvorând din) sarcinile pozitive și îndreptându-se spre (dispărând în) sarcinile negative. În zonele neelectrizate, liniile de câmp ale inducției

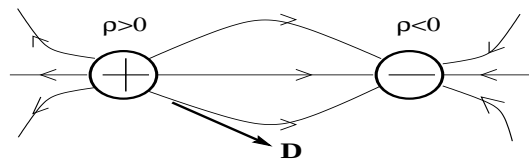


Figura 2.1: Câmpul electric produs de corpuri electrizate

electrice sunt curbe continui. La trecerea prin suprafețe de discontinuitate neelectrificate (de la un corp la altul) componenta normală a inducției electrice se conservă.

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \iff D_{n_1} = D_{n_2}.$$

2.2 Legea fluxului magnetic

Fluxul magnetic pe orice suprafață închisă Σ este nul:

$$\phi_{\Sigma} = 0 \iff \int_{\Sigma} \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad (2.3)$$

Forma locală a legii este:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

și evidențiază faptul că nu există “sarcini magnetice”.

În consecință, legea nu evidențiază un fenomen ci o restricție impusă câmpului magnetic, care având inducție solenoidală va avea liniile de câmp fără început și sfârșit (deci curbe închise). Un spectru tipic al inducției $\mathbf{B}$ este reprezentat în figura 2.2.

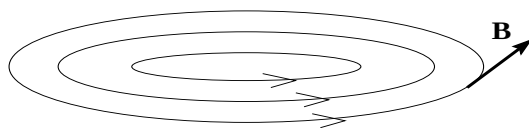


Figura 2.2: Spectrul inducției magnetice

La trecerea prin suprafețele de discontinuitate componenta normală a inducției magnetice se conservă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \iff B_{n_1} = B_{n_2},$$

în caz contrar, fluxul magnetic pe un cilindru scurt cu capacele de o parte și de alta a suprafeței n-ar mai fi nul.

2.3 Legea inducției electromagnetice

Tensiunea electrică pe orice curbă închisă Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic de pe o suprafață S_Γ care se sprijină pe curba Γ :

$$u_\Gamma = -\frac{d\phi_{S_\Gamma}}{dt} \Leftrightarrow \int_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad (2.5)$$

sau în *forma locală* (obținută prin aplicarea relației Stokes):

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2.6)$$

În cazul suprafeței de discontinuitate imobile și nepurtătoare de flux magnetic componenta tangențială a intensității câmpului electric se conservă:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \Leftrightarrow E_{t_1} = E_{t_2},$$

în caz contrar legea nu ar mai fi satisfăcută pe un dreptunghi cu laturile de-o parte și de alta a funcției.

Legea are următoarea semnificație fizică: variația în timp a câmpului magnetic determină (induce) apariția unui câmp electric. Liniiile câmpului electric indus sunt curbe închise, care tind să înconjoare câmpul magnetic inductor (figura 2.3).

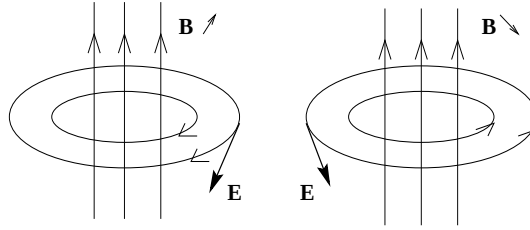


Figura 2.3: Spectrul câmpului electric indus

Acest fenomen fundamental este cunoscut sub numele de inducție electromagnetică și el reprezintă o a doua cauză posibilă a câmpului electric.

În teoria macroscopică Maxwell-Hertz curba Γ și suprafața S_Γ sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor.

Din acest motiv s-a folosit în forma locală *derivata substanțială* (de flux) a inducției magnetice:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (2.7)$$

În consecință, *forma locală dezvoltată a legii inducției în medii mobile* este:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \quad (2.8)$$

iar forma integrală dezvoltată este:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} - \int_{\Gamma} (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) d\mathbf{r} \quad (2.9)$$

Inducția electromagnetică poate avea două cauze principial diferite:

- *inducția de transformare*, care apare în corpurile imobile dar în care $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$;
- *inducția de mișcare*, care apare în corpuri mobile (cu viteza $\mathbf{v} \neq 0$), chiar dacă $\mathbf{B}$ este constant în timp.

În cazul particular al *mediilor imobile* legea inducției are următoarele forme, integrală respectiv locală:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A} \quad (2.10)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.11)$$

În regim staționar câmpul electric este irotational, deci spectrul intensității câmpului electric $\mathbf{E}$ nu poate avea curbe închise.

2.4 Legea circuitului magnetic

Tensiunea magnetică pe orice curbă închisă Γ este egală cu curentul ce străbate suprafața S_{Γ} care se sprijină pe Γ plus viteza de variație a fluxului electric de pe S_{Γ} :

$$u_{m\Gamma} = i_{S_{\Gamma}} + \frac{d\psi_{S_{\Gamma}}}{dt} \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{D} d\mathbf{A} \quad (2.12)$$

Forma locală a legii este:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (2.13)$$

în care

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \quad (2.14)$$

este derivata substanțială de flux a inducției electrice.

În consecință, legea are următoarea *formă locală dezvoltată în medii mobile*:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \quad (2.15)$$

iar în medii imobile:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.16)$$

Deoarece derivata față de timp a inducției electrice are aceeași unitate de măsură ca densitatea de curent (de conducție) $\mathbf{J}$ și determină același efect magnetic ca și curentul de conducție, ea a fost numită *densitatea curentului de deplasare*.

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

La trecerea prin suprafețele de discontinuitate imobile, care nu sunt pânze de curent (de conducție sau de deplasare) componenta tangențială a câmpului magnetic se conservă:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$$

Semnificația fizică a legii este dată de fenomenele pe care aceasta le descrie:

- orice corp în stare electrocinetică (parcurs de curent) determină în vecinătatea sa un câmp magnetic;
- variația în timp a câmpului electric determină apariția unui câmp magnetic.

Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise care tind să înconjoare curentul (de conducție sau deplasare) care le-a produs. În absența acestor surse de câmp magnetic liniile lui $\mathbf{H}$ nu pot fi curbe închise deoarece $\mathbf{H}$ este irotational.

Legea pune în evidență două fenomene fizice principal distincte, respectiv două cauze noi ale apariției câmpului magnetic:

- starea electrocinetică (figura 2.4);
- variația în timp a câmpului electric (figura 2.5).

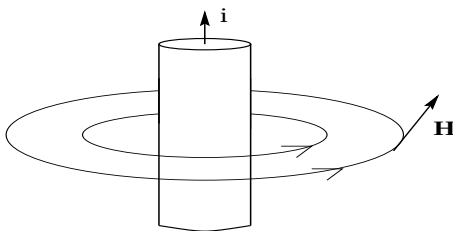


Figura 2.4: Liniile câmpului magnetic $\mathbf{H}$ produse de curenții de conducție

2.5 Legea conservării sarcinii electrice

Curentul electric ce părăsește orice suprafață închisă Σ este egal cu viteza de scădere a sarcinii electrice din domeniul mărginit de acea suprafață D_Σ :

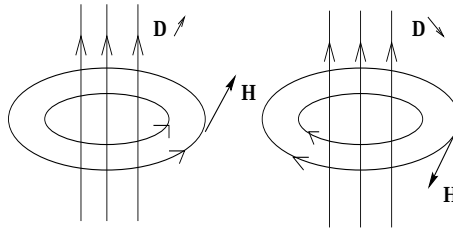


Figura 2.5: Liniile câmpului magnetic $\mathbf{H}$ produse de curentul de deplasare

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{D\Sigma}}{dt} \iff \int_{\Sigma} \mathbf{J} \mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{D\Sigma} \rho dv \quad (2.17)$$

Relația (2.17) este de fapt o teoremă și nu o lege, deoarece ea se poate demonstra pornind de la legea circuitului magnetic (aplicată pe o suprafață deschisă S_{Γ} , care la limită tinde către suprafața închisă Σ atunci când Γ se reduce la un punct) și de la legea fluxului electric ($\psi_{\Sigma} = q_{D\Sigma}$):

$$u_{m\Gamma} = i_{S_{\Gamma}} + \frac{d\psi_{S_{\Gamma}}}{dt} \rightarrow 0 = i_{\Sigma} + \frac{d\psi_{\Sigma}}{dt} = i_{\Sigma} + \frac{dq_{D\Sigma}}{dt} \quad (2.18)$$

Cu toate acestea ecuația (2.18) este cunoscută sub numele de legea conservării sarcinii și nu teorema de conservare a sarcinii, datorită importanței ei remarcabile din punct de vedere teoretic și practic.

Forma locală a legii conservării sarcinii este:

$$\text{div}(\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (2.19)$$

în care $\mathbf{v}$ este viteza mediului, iar $\rho \mathbf{v}$ reprezintă *densitatea curentului electric de convecție*.
În medii imobile:

$$\text{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Legea conservării sarcinii pune în evidență legătura strânsă între starea de electrizare (sarcina electrică) și cea electrocinetică (curentul electric). Dacă sarcina unui corp scade (respectiv crește) în timp, atunci corpul va fi părăsit de (respectiv în corp se va injecta) un curent de convecție (datorat deplasării macroscopice a sarcinilor) și/sau de conducție (stare electrocinetică ce reprezintă în ultimă instanță deplasarea purtătorilor microscopici de sarcină).

În consecință, liniile de curent sunt curbe deschise care pornesc din corpurile a căror electrizare scade și se opresc în corpurile a căror electrizare crește.

În regim staționar, corpurile sunt imobile și sarcina este constantă în timp, deci curentul total pe o suprafață închisă este nul și în consecință liniile de curent nu au început sau sfârșit (sunt curbe închise).

O consecință importantă a legii, care explică și numele ei se referă la cazul sistemelor izolate de corpuri (înconjurate de un perete izolant), caz în care $i_{\Sigma} = 0$, deci sarcina

totală a sistemului este invariantă în timp (se conservă), indiferent de ce transformări suferă sistemul de corpuri.

Legile generale sunt valabile în orice moment, în orice domeniu din spațiu și indiferent de tipul corpurilor în care ele se aplică.

Capitolul 3

Proprietăți de material

Legile de material sunt reprezentate de următoarele trei relații, a căror formă particulară depinde de tipul substanței din care este alcătuit corpul.

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (3.3)$$

3.1 Legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$

Inducția electrică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct (nu și de intensitatea câmpului electric din alte puncte):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \quad (3.4)$$

Relația de dependență dintre $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$ impusă de această lege poate fi extrem de complicată și ea este funcție de tipul substanței în care se consideră perechea $\mathbf{D} - \mathbf{E}$.

O formă echivalentă a acestei relații este următoarea:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.5)$$

în care s-au pus în evidență $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} F/m$ constanta universală numită permitivitatea vidului și $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ polarizația corpului. Aceasta poate fi descompusă într-o componentă *permanentă* $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}(0)$ și una *temporară* $\mathbf{P}_t$, existentă doar în prezența câmpului electric ($\mathbf{E} \neq 0$), astfel încât $\mathbf{P} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p$. Din acest motiv această lege mai poartă și numele de legea polarizației (temporare).

În absența corpurilor polarizația este nulă ($P = 0$), deci în vid $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, ceea ce evidențiază faptul că în vid este suficient un singur câmp vectorial pentru a caracteriza câmpul electric. Deosebirea dintre inducție și intensitate are relevanță doar în corpuri, urmând ca diferența $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$ să poată fi considerată definiția polarizației acestora.

O semnificație posibilă a acestei legi constă în faptul că intensitatea câmpului electric este evidențiată ca o cauză a polarizării corpurilor și că un corp polarizat produce câmp electric sau perturbă câmpul electric preexistent.

De multe ori relația $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ se aproximează cu o dependență afină (obținută de exemplu prin reținerea doar a primilor doi termeni din seria Taylor) de tipul:

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p \quad (3.6)$$

în care $\mathbf{P}_p$ este chiar polarizația permanentă iar $\bar{\epsilon}$ este tensorul permitivităților absolute care de multe ori are valorile principale egale, deci degenerază într-un scalar. Se constată că legea pune în evidență o nouă cauză a câmpului electric și anume polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$, care dacă este nenulă (cum se întâmplă în cazul electreților) este capabilă să producă un câmp electric $E \neq 0$, chiar dacă $D = 0$ și invers.

Figura 3.1 prezintă spectrele intensității și inducției electrice și se constată că $\mathbf{D}$ are liniile de câmp închise (în acord cu legea fluxului electric), în schimb $\mathbf{E}$ are liniile de câmp deschise (în acord cu legea inducției). În aer cele două spectre se suprapun ($\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$) pe când în electret $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$ au sensuri opuse.

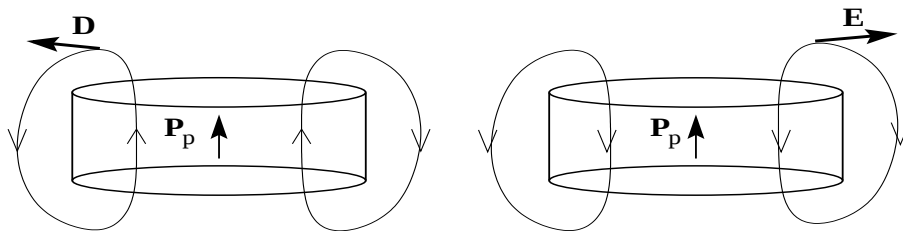


Figura 3.1: Spectrele $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ produse de un electret

Capacitatea corpurilor polarizate permanent de a produce câmp electric poate fi considerată un alt fenomen fizic fundamental, care evidențiază a treia cauză posibilă a câmpului electric.

Mai mult, introducerea oricărui corp într-un câmp electric aflat inițial în vid modifică acest câmp atât în interiorul corpului cât și în vecinătatea sa, datorită polarizării temporare a corpului.

3.2 Legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$

Inducția magnetică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea câmpului magnetic din acel punct:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad (3.7)$$

Și în acest caz forma concretă a relației $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este funcție de tipul materialului și ea poate lua în unele cazuri forme foarte complicate.

O formă echivalentă a legii, care pune în evidență magnetizația corpurilor $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ este:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (3.8)$$

în care $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ este *permeabilitatea vidului*.

Descompunând magnetizația $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p$ în componenta *temporară* $\mathbf{M}_t$ și cea *permanentă* $\mathbf{M}_p = \mathbf{M}(0)$, rezultă:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p), \quad (3.9)$$

motiv pentru care legea legăturii $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ se mai numește și legea magnetizației (temporare).

În absența corpurilor, $M = 0$, deci în vid $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, fiind suficient un singur câmp vectorial pentru a caracteriza câmpul magnetic. În corpurile magnetizabile $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H} \neq 0$ și este necesară o pereche de vectori $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$ pentru a caracteriza câmpul. Prezența magnetizației modifică câmpul magnetic și reciproc, câmpul magnetic determină magnetizarea corpurilor.

Aproximând dependența $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ cu una liniară se obține următoarea formă particulară de tip afin a relației $\mathbf{B} - \mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p \quad (3.10)$$

în care $\bar{\mu}$ este *tensorul permeabilităților absolute* ale mediului.

Semnificația fizică a legii este relevată de fenomenul de producere a câmpului magnetic datorat corpurilor magnetizate permanent (dacă $M \neq 0$, atunci $B \neq 0$, chiar dacă $H = 0$). În acest fel se evidențiază o a treia cauză principal diferită a câmpului magnetic și anume corpurile magnetizate permanent (cazul magneților permanenți).

Figura 3.2 prezintă spectrele câmpului magnetic în acest caz. Se constată că $\mathbf{B}$ are liniile de câmp închise (conform legii fluxului magnetic), în timp ce $\mathbf{H}$ are liniile de câmp deschise (în acord cu legea circuitului magnetic).

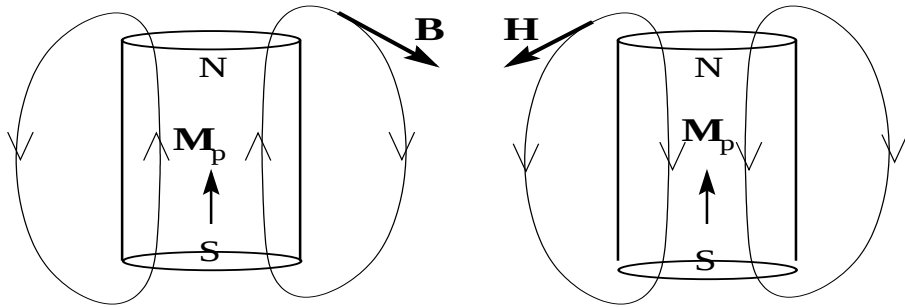


Figura 3.2: Spectrele $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ ale câmpului magnetic produs de un magnet permanent

3.3 Legea conducției

Densitatea de curent dintr-un punct depinde de intensitatea curentului electric din acel punct:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (3.11)$$

Forma concretă a legii depinde de tipul mediului în care se consideră punctul.

Chiar dacă legătura $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ poate lua în unele cazuri forme foarte complicate, pentru majoritatea corpurilor este satisfăcătoare următoare aproximație afină:

$$\mathbf{J} = \bar{\bar{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (3.12)$$

în care $\bar{\bar{\sigma}}$ este tensorul conductivităților mediului iar $\mathbf{E}_i$ este intensitatea câmpului electric imprimat, sau echivalent:

$$\mathbf{J} = \bar{\bar{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (3.13)$$

în care s-a notat $\mathbf{J}_i = \bar{\bar{\sigma}}\mathbf{E}_i$ densitatea curentului electric imprimat.

Dacă $\bar{\bar{\sigma}}$ este inversabil, atunci legea capătă forma echivalentă:

$$\mathbf{E} = \bar{\bar{\rho}}\mathbf{J} - \mathbf{E}_i \quad (3.14)$$

în care $\bar{\bar{\rho}}^{-1}$ este tensorul rezistivităților.

Legea conducției are o dublă semnificație fizică, pe de o parte ea pune în evidență cauza stării electrocinetice și anume câmpul electric iar pe de altă parte ea pune în evidență o a patra cauză posibilă a câmpului electric și anume câmpul electric imprimat ($E \neq 0$ dacă $E_i \neq 0$, chiar atunci când $J = 0$). Acest nou fenomen fundamental are loc în cazul elementelor și bateriilor electrochimice, în care $E_i \neq 0$. Figura 3.3 prezintă spectrul lui $\mathbf{E}$ în acest caz, evidențiind caracterul deschis al liniilor de câmp (în acord cu legea inducției).

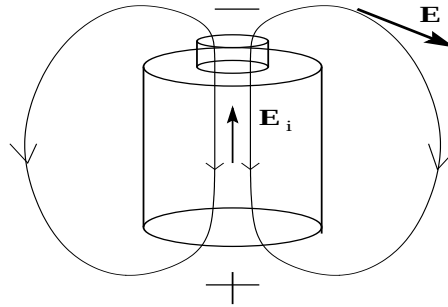


Figura 3.3: Spectrul câmpului electric $\mathbf{E}$ în cazul unui acumulator

Ultimile două legi ale câmpului electromagnetic permit evidențierea efectelor acestui câmp, realizând legătura între teoria electromagnetismului și alte domenii ale științei: cum sunt termodinamica, mecanica, electrochimia, etc.

3.4 Clasificarea caracteristicilor de material

În construcția dispozitivelor electromagnetice intervin materiale din cele mai diverse categorii. În modelarea electromagnetică interesează în primul rând caracterizarea proprietăților de material ale câmpului electromagnetic.

În consecință, orice material se poate caracteriza prin următoarele **tipuri ale proprietăților** sale:

- dielectrice (legătura $\mathbf{D} - \mathbf{E}$);
- magnetice (legătura $\mathbf{B} - \mathbf{H}$);
- conductoare (legătura $\mathbf{J} - \mathbf{E}$).

O caracterizare completă presupune cunoașterea celor trei tipuri de relații pentru fiecare material care alcătuiește dispozitivul. Câteva exemple sunt ilustrative:

- *aerul*:
 - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$;
 - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$;
 - din punctul de vedere al conducției: $J = 0$ ($\sigma = 0$ – izolanț);
- *sticla*:
 - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ cu $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\varepsilon_r > 1$;
 - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$;
 - din punctul de vedere al conducției: $J = 0$ ($\sigma = 0$ – izolanț);
- *oțelul*:
 - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$;
 - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$;
 - din punctul de vedere al conducției: $J = \sigma \mathbf{E}$;
- *cuprul*:
 - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$;
 - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$;
 - din punctul de vedere al conducției: $J = \sigma \mathbf{E}$.

Indiferent care este tipul de proprietate luat în considerare, se pot face următoarele **clasificări ale caracteristicilor de material**:

- *Liniare – neliniare*:

Dependența dintre cele două mărimi este caracterizată printr-o relație liniară (de proporționalitate) în cazul mediilor liniare sau nu în cazul mediilor neliniare.

- *Izotrope – anizotrope:*

Relația dintre cele două mărimi este independentă de direcția lor în cazul mediilor izotrope și dependentă de direcție în cazul mediilor anizotrope.

- *Omogene – neomogene:*

Relația dintre cele două mărimi este aceeași în orice punct în cazul mediilor omogene și depinde de punct în cazul mediilor neomogene.

- *Invariante – parametrice:*

Relația dintre cele două mărimi este aceeași în orice moment de timp la mediile invariante, iar la cele parametrice depinde de un parametru care poate fi explicit timpul sau o altă mărime fizică cum este temperatura, care la rândul ei este funcție de timp.

- *Cu sau fără surse permanente:*

În cazul unor medii cu surse permanente, relația dintre cele două mărimi este astfel încât ele nu se pot anula simultan. În cazul mediilor fără surse permanente anularea uneia implică anularea și a celeilalte mărimi.

- *Cu sau fără histerezis:*

În cadrul mediilor cu histerezis valoarea unei mărimi la un moment dat depinde nu numai de valoarea celeilalte în acel moment ci și de evoluția ei anterioară (materialele au memorie).

Cel mai simplu caz este cel al materialelor liniare (implicit fără surse permanente), izotrope, omogene și fără histerezis, la care:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.15)$$

Proprietățile acestor materiale sunt complet caracterizate de trei parametri scalari: permitivitatea ε , permeabilitatea μ și conductivitatea σ .

Dacă materialul satisface condițiile anterioare, dar este anizotrop atunci:

$$\mathbf{D} = \bar{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E}, \quad (3.16)$$

caracterizarea proprietăților făcându-se prin tensorii $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\mu}$ și $\bar{\sigma}$.

Dacă materialul este liniar, izotrop dar neomogen, atunci parametrii săi de material sunt funcții de punct (respectiv de vectorul de poziție $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{E}, \quad (3.17)$$

și nu constanți ca în cazul mediilor omogene.

În cazul materialelor parametrice, parametrii de material depind de timp:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(t) \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(t) \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(t) \mathbf{E}, \quad (3.18)$$

sau eventual de alte mărimi, de exemplu temperatura θ : $\mu = \mu(\theta)$, sau în cazul materialelor cu efect Hall: $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Generalizând această ultimă relație se pot considera legi de material (care nu au în mod necesar semnificație fizică) de forma:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{H}). \quad (3.19)$$

După cum s-a menționat anterior, o clasă largă de materiale poate fi caracterizată printr-o relație de tip afin:

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p, \quad \mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p, \quad \mathbf{J} = \bar{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i). \quad (3.20)$$

În general aceste materiale sunt neliniare, anizotrope, iar dacă parametri $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$ sau $\bar{\sigma}$ se modifică de la punct la punct ele sunt și neomogene, sau parametrice dacă aceștia se modifică în funcție de timp.

Legătura afină generalizează relațiile de material anterior definite, deoarece prin particularizări se obțin cazurile mediilor:

- liniare ($P_p = 0$, $M_p = 0$, $E_i = 0$, iar ϵ , μ și σ nu depind de E sau H);
- liniare și izotrope ($\bar{\epsilon} = \epsilon\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\mu} = \mu\bar{\mathbf{1}}$, $\bar{\sigma} = \sigma\bar{\mathbf{1}}$).

Folosind aceste clasificări se poate afirma că:

- aerul este liniar din toate punctele de vedere: dielectric, magnetic și al conducției (el fiind în fond un izolant ($\sigma = 0$) nemagnetic ($\mu_r = 1$) și fără proprietăți dielectrice $\epsilon_r = 1$);
- sticla este liniară din toate punctele de vedere, deosebindu-se de aer prin faptul că are permitivitatea relativă $\epsilon_r > 1$ (este un dielectric propriu-zis);
- oțelul electrotehnic este liniar din punct de vedere dielectric, neliniar și izotrop din punct de vedere magnetic (dacă este turnat și nu laminat la rece) și liniar din punctul de vedere al conducției;
- cuprul este liniar din toate punctele de vedere în schimb spre deosebire de aer este un conductor ($\sigma > 0$).

3.5 Modelarea materialelor neliniare și cu histerezis

Caracterizarea mediilor neliniare este mai complicată decât a celor liniare. De exemplu, proprietățile unui mediu magnetic neliniar, anizotrop fără histerezis se realizează nu prin constante de material ci prin funcții “de magnetizare” de tipul:

$$\begin{aligned} B_x &= f_1(H_x, H_y, H_z) \\ B_y &= f_2(H_x, H_y, H_z) \\ B_z &= f_3(H_x, H_y, H_z) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dacă mediul este izotrop atunci este suficientă o singură funcție reală f de o variabilă reală pentru a descrie caracteristica de magnetizare:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{H} f(H), \quad (3.22)$$

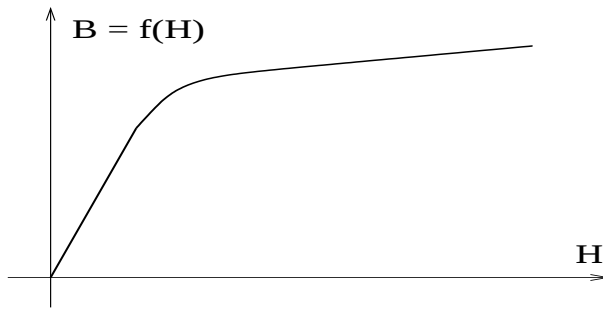


Figura 3.4: Caracteristica de magnetizare

$\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ fiind coliniare. Se poate arăta că permeabilitatea statică definită ca $\mu_s = B/H = f(H)/H$ depinde de intensitatea câmpului magnetic și nu este o constantă ca în cazul materialelor liniare.

În figura 3.4 se reprezintă caracteristica de magnetizare tipică pentru un material feromagnetic fără histerezis (“moale”).

Fenomenul de histerezis întâlnit mai ales la materialele magnetice este un fenomen deosebit de complex, care nu admite o descriere exactă și simplă. Este de remarcat faptul că dependența $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ nu este în acest caz o funcție în sens matematic, deoarece la un H dat pot corespunde mai multe valori posibile ale lui B .

De obicei materialele cu histerezis pronunțat sunt folosite la realizarea magnetilor permanenți (materiale feromagnetice dure). Cel mai adesea fabricanții specifică în catalogul lor de produse doar ciclul fundamental (maximal) de histerezis, nu și ciclurile minore. Un exemplu tipic de ciclu de histerezis este prezentat în figura 3.5.

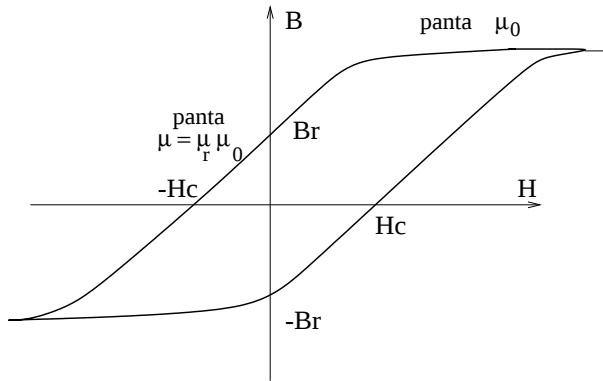


Figura 3.5: Exemplu de ciclu de histerezis

Procesul de modelare a proprietăților de material nu se bazează numai pe cunoașterea cât mai exactă a comportării materialelor ci și pe aproximări și idealizări care fac ca rezolvarea problemei să fie simplificată. Aceste simplificări trebuie totuși efectuate cu grijă pentru a nu afecta în mod semnificativ soluția numerică. În continuare vor fi prezentate câteva tehnici de modelare folosite pentru simplificarea caracteristicilor de material.

În dispozitivele cu magneți permanenți aceștia se află de obicei în starea caracterizată de faptul că perechea (B, H) se află poziționată în cadranul doi al caracteristicii. Se constată că în acest cadran caracteristica de magnetizare se poate aproxima prin relația afină:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$$

(în care $\mu_0 \mathbf{M}_p = \mathbf{B}_r$ este inducția remanentă), deci printr-o dreaptă în planul $B - H$.

Evident, aceasta este o modelare simplificată a fenomenului de histerezis, dar care dă rezultate satisfăcătoare în multe cazuri de dispozitive în care singurele surse de câmp sunt magneții permanenți.

Un alt mod de modelare simplistă a fenomenului de histerezis aplicabil în cazul variației periodice în timp a mărimilor caracteristice este cel de aproximare a ciclului de histerezis printr-o elipsă. Această tehnică are avantajul linearității, numai că în reprezentarea în complex simplificat constantele de material μ (respectiv ε) nu au un caracter real ci unul complex (cu parte imaginară nenulă).

Liniaizarea caracteristicilor de material reprezintă o metodă des aplicată în modelarea fizică. În fond, ea constă în aproximarea caracteristicii neliniare printr-o aplicație afină, obținută prin reținerea din dezvoltarea în serie Taylor doar a primilor doi termeni. De exemplu, considerând punctul de funcționare $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{H}_0)$ de pe caracteristica unui material neliniar fără histerezis, inducția $\mathbf{B}$ corespunzătoare unui câmp de intensitate arbitrară este:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) + \dots \quad (3.23)$$

în care $\frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}}$ este derivata Frechet a funcției $\mathbf{B}$ (dacă admitem abuzul de a nota și funcția și variabila sa dependentă cu același simbol) reprezentată prin matricea Jacobian:

$$\frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} & \frac{\partial B_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} & \frac{\partial B_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial H_x} & \frac{\partial B_z}{\partial H_y} & \frac{\partial B_z}{\partial H_z} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Se constată că această matrice reprezintă tensorul permeabilităților dinamice $\overline{\mu}_d$ în punctul de funcțiune considerat.

Prin această aproximare caracteristica de magnetizare ia forma:

$$\mathbf{B} = \overline{\mu}_d \mathbf{H} + \mathbf{I}, \quad (3.25)$$

în care $\mathbf{I} = \mathbf{B}_0 - \overline{\mu}_d \mathbf{H}_0$ este polarizația magnetică permanentă. Această modelare este potrivită mai ales în studiul problemelor cu mici variații ale punctului de funcționare $\mathbf{B} - \mathbf{H}$, în vecinătatea punctului static de funcționare $\mathbf{B}_0 - \mathbf{H}_0$. Dacă se alege $B_0 = 0$, $H_0 = 0$, atunci modelul obținut este unul liniar:

$$\mathbf{B} = \overline{\mu}_d \mathbf{H} \text{ cu } \overline{\mu}_d = \left. \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}} \right|_{\mathbf{H}=0}. \quad (3.26)$$

Această tehnică este des utilizată în practică pentru modelarea materialelor feromagnetice moi, atunci când saturația lor nu este importantă.

Dacă materialul este izotrop, atunci $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ sunt coliniare, iar prin aproximarea caracteristicii de magnetizare $B = f(H)$ în vecinătatea originii se obține relația:

$$\mathbf{B} = \mu_d \mathbf{H}$$

în care $\mu_d = \frac{df}{dH}$. În acest caz tensorul permeabilității dinamice se reduce la un scalar:

$$\bar{\bar{\mu}}_d = \begin{bmatrix} \mu_d & 0 & 0 \\ 0 & \mu_d & 0 \\ 0 & 0 & \mu_d \end{bmatrix} = \mu_d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mu_d \bar{\bar{1}}. \quad (3.27)$$

Trebuie remarcat că și în cazul anizotrop tensorul $\bar{\bar{\mu}}_d$ este simetric și pozitiv definit, iar printr-o schimbare convenabilă de coordonate el poate fi diagonalizat:

$$\bar{\bar{\mu}}_d = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Dacă valorile sale principale μ_1 , μ_2 și μ_3 sunt relativ apropiate, atunci el poate fi modelat printr-un scalar cu valoarea medie $\mu = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)/3$. În consecință, modelarea mediilor anizotrope prin medii izotrope se realizează considerând constanta de material $\mu = \frac{1}{3}Tr[\bar{\bar{\mu}}]$, în care Tr este urma matricei care reprezintă tensorul $\bar{\bar{\mu}}_d$, egală cu suma elementelor sale diagonale.

3.6 Modelarea mediilor neomogene

Cel mai adesea dispozitivele electromagnetice se modelează prin medii omogene pe subdomenii. Există totuși situații în care corpurile sunt neomogene dar au o structură internă regulată (periodică sau cvasiperiodică), fiind alcătuite din granule, fire sau folii suprapuse cum se întâmplă în cazul materialelor compozite.

În dispozitivele electromagnetice apar des astfel de situații, cum sunt bobinele cu multe spire sau miezurile magnetice realizate din tole. De obicei aceste structuri neomogene se modelează prin medii omogene echivalente.

Se consideră spre exemplu o înfășurare cu n spire alcătuită dintr-un fir conductor având conductivitatea σ și aria secțiunii transversale A_c (figura 3.6).

Dacă A este aria secțiunii transversale S a întregii înfășurări, inclusiv izolația conductoarelor, atunci factorul de umplere al bobinei este $k = n \cdot A_c/A$.

În condițiile în care componenta de-a lungul firului a intensității câmpului electric E_t este uniformă în secțiunea S , densitatea de curent din conductor este $J = \sigma E$ iar curentul total prin suprafața S este $i = n J A_c = n \sigma E A_c$. Dacă se modelează bobina ca un conductor omogen de secțiune S , impunând același curent total $i = J_e A = \sigma_e E A$, rezultă *valoarea conductivității electrice echivalente* din modelul omogen:

$$\sigma_e = k \sigma \quad (3.29)$$

egală cu conductivitatea firului inițial multiplicată cu factorul de umplere al bobinei.

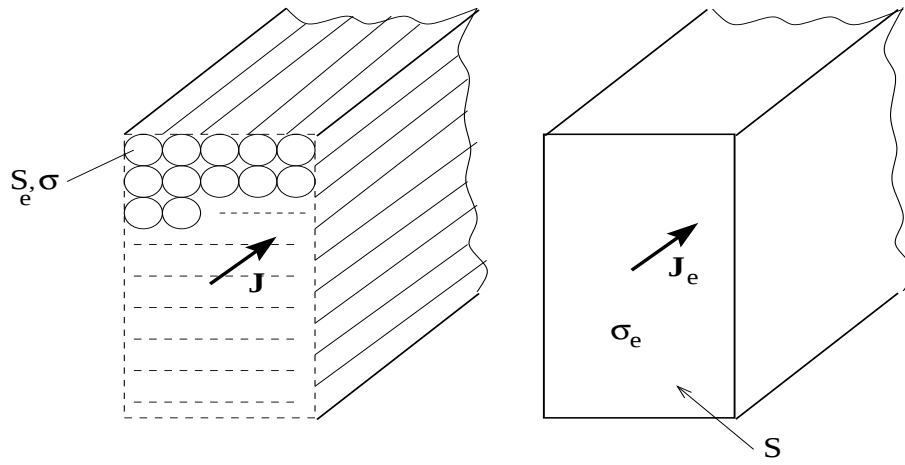


Figura 3.6: Modelarea spirelor unei bobine

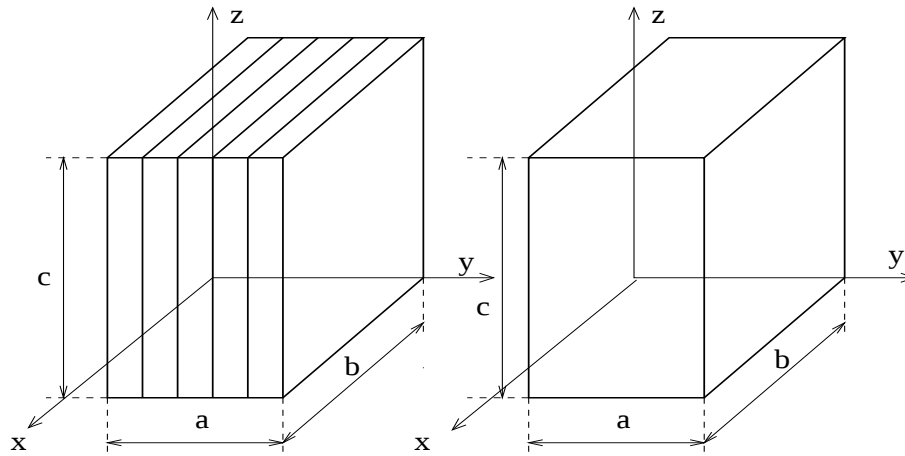


Figura 3.7: Modelarea omogenă a unui pachet de tole magnetice

Un alt exemplu de modelare cu medii omogene a unor materiale neomogene se referă la un pachet de tole magnetice laminate la rece și izolate între ele cu un material nemagnetic (figura 3.7).

Se va presupune că tola este laminată la rece în direcția z , deci anizotrop. Adoptând un model anizotrop liniar $\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H}$, rezultă pe componente relațiile:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

în care se va presupune că tola este izotropă în planul perpendicular pe direcția de laminare, deci $\mu_1 = \mu_2$

Aplicând un câmp magnetic orientat după axa Ox cu H_x uniform, rezultă în pachetul de tole fluxul:

$$\phi_1 = \mu_1 H_x k a c + \mu_0 H_x (1 - k) a c \quad (3.31)$$

în care s-a notat cu k factorul de umplere (grosimea tolei neizolate raportată la grosimea tolei izolate), iar în pachetul omogen echivalent

$$\phi'_1 = \mu'_1 H_x a c \quad (3.32)$$

Egalând fluxurile ϕ_1 și ϕ'_1 , rezultă:

$$\mu'_1 = \mu_1 k + \mu_0(1 - k). \quad (3.33)$$

Același raționament aplicat după direcția axei Oz conduce la:

$$\mu'_3 = \mu_3 k + \mu_0(1 - k). \quad (3.34)$$

În schimb, după direcția Oy se va presupune un câmp magnetic cu inducția B_y uniformă (care se conservă la trecerea din tolă în izolație, fiind orientată normal pe această suprafață de discontinuitate). Tensiunea magnetică pe grosimea pachetului de tole va fi:

$$u_{m2} = \frac{B_y}{\mu_2} k a + \frac{B_y}{\mu_0} (1 - k) a,$$

iar în modelul omogen echivalent:

$$u'_{m2} = \frac{B_y}{\mu'} a.$$

În consecință tensorul permeabilităților mediului omogen va avea valorile principale:

$$\overline{\mu'} = \begin{bmatrix} \mu_1 k + \mu_0(1 - k) & 0 & 0 \\ 0 & 1 / \left[\frac{k}{\mu_2} + \frac{(1-k)}{\mu_0} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 k + \mu_0(1 - k) \end{bmatrix}$$

cu observația că μ'_1 este de această dată diferit de μ'_2 .

3.7 Modelarea cu materiale perfecte

O metodă importantă în modelările fizice ale mediilor o constituie idealizarea comportării acestora.

Considerând spre exemplu, cazul **mediilor conductoare**, se deosebesc două situații limită (degenerate):

- cazul *izolatoarelor perfecte* ($\sigma = 0$ sau echivalent $\rho \rightarrow \infty$);
- cazul *supraconductoarelor* ($\sigma \rightarrow \infty$ sau echivalent $\rho \rightarrow 0$).

Chiar dacă în realitate nu există izolanți perfecți, (și chiar cele mai bune corpuri izolatoare au curenți de pierderi), aceștia se pot neglija considerându-se conductivitatea nulă, $\sigma = 0$, ceea ce corespunde la $J = 0$.

Modelul conductorului perfect, la care rezistivitatea ρ este nulă și implicit $\sigma \rightarrow \infty$ și $E = 0$ (sau în cazul mediilor cu câmp imprimat $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = 0$) se poate adopta nu numai în cazul supraconductoarelor ci și în cazul corpurilor bune conductoare, dacă acestea sunt

înconjurate de corpuri slab conductoare sau dacă nu interesează distribuția câmpului electric în interiorul lor.

Proprietățile magnetice pot fi și ele idealizate. De exemplu, de multe ori mediile feromagnetice care au permeabilitatea foarte mare sunt modelate ca medii cu permeabilitate infinită, $\mu \rightarrow \infty$ numite *feromagnetice ideale*. În consecință $H = B/\mu$ va tinde în acest caz către zero (dacă inducția B este finită). Cea mai mică valoare reală pe care o poate lua permeabilitatea este aproape de permeabilitatea vidului μ_0 . Materialele care au această permeabilitate se numesc nemagnetice. Există totuși situații când în modelare se adoptă formal $\mu = 0$, ceea ce corespunde la $B = 0$. Mediile de acest tip, numite *amagnetice* nu există în realitate, totuși artificul este util în rezolvarea unor probleme de modelare.

În mod similar, **dielectricii** de permitivitate foarte mare (cum sunt corpurile feroelectrice) pot fi modelate ca medii cu $\varepsilon \rightarrow \infty$, ceea ce conduce la anularea intensității câmpului electric $E = D/\varepsilon = 0$. Acest model numit *feroelectric ideal* poate fi aplicat, de exemplu, conductoarelor în regim electrostatic. Cu toate că în realitate $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, totuși ca artificiu de modelare se pot considera medii la care formal $\varepsilon = 0$. Aceste medii, la care inductivitatea electrică estimată $D = \varepsilon E = 0$, sunt numite *medii anelectrice*. Idealizările obținute în această manieră sunt prezentate sintetic în tabelul 3.1.

Tabela 3.1: Medii ideale (perfecte)

Mediul	Constanta de material	Câmpul
Anelectric	$\varepsilon = 0$	$D = 0$
Feroelectric ideal	$\varepsilon \rightarrow \infty$	$E = 0$
Amagnetic	$\mu = 0$	$B = 0$
Feromagnetic ideal	$\mu \rightarrow \infty$	$H = 0$
Izolant	$\sigma = 0$	$J = 0$
Supraconductor	$\sigma \rightarrow \infty$	$E = 0$

Capitolul 4

Efecte ale câmpului electromagnetic

4.1 Legea transformării energiei în conductoare

În procesul de conducție, câmpul electromagnetic transferă corpului o putere cu densitatea de volum:

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E}. \quad (4.1)$$

Puterea transferată întregului corp care ocupă domeniul D se calculează prin integrarea pe acest domeniu:

$$P = \int_D \mathbf{J}\mathbf{E} dv. \quad (4.2)$$

Această putere este disipată ireversibil în cazul conductoarelor la care câmpul imprimat $\mathbf{E}_i$ este nul iar tensorul $\bar{\sigma}$ este pozitiv definit:

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E} = \mathbf{E}\bar{\sigma}\mathbf{E} \geq 0. \quad (4.3)$$

În acest caz are loc creștere a entropiei și o încălzire a corpului (efectul Joule-Lentz).

În majoritatea dispozitivelor electromagnetice fenomenele de încălzire joacă un rol important, solicitările termice fiind cele care impun limite ale regimurilor normale de funcționare. Analiza acestor solicitări (realizată prin rezolvarea problemelor cuplate electro – termic) reprezintă un punct important în activitatea de proiectare, influențând puternic soluția tipodimensională aleasă. De obicei analiza câmpului termic se face ulterior determinării câmpului electromagnetic, dar există totuși situații (de exemplu, dacă parametri de material ε , μ sau σ depind puternic de temperatură), în care cele două probleme trebuie rezolvate simultan.

4.2 Legea transferului de masă

În procesul de conducție are loc un transfer de masă cu densitatea fluxului de masă:

$$\bar{\delta} = k\mathbf{J}, \quad (4.4)$$

în care k este neglijabil în metale și este egal cu coeficientul electrochimic în electroliți.

Debitul masic depus prin fenomenul de electroliză este în consecință:

$$Q_m = \int_{\Sigma} k \mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad (4.5)$$

în care Σ este suprafața anodului, iar masa totală depusă în intervalul (t_1, t_2) este:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} k \mathbf{J} d\mathbf{A} dt. \quad (4.6)$$

În particular, dacă $k = ct$ și $\mathbf{J}$ nu depinde de timp: $m = kIt$, în care $t = t_2 - t_1$, iar

$$I = \int_{\Sigma} \mathbf{J} d\mathbf{A}$$

este curentul ce străbate cuva electrolitică (figura 4.1).

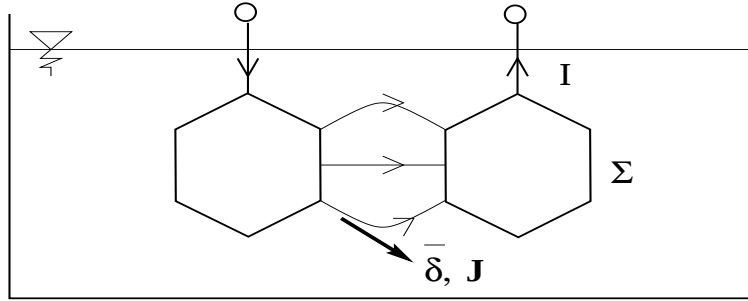


Figura 4.1: Transferul de masă în electroliză

După cum se constată, legile câmpului electromagnetic nu pun în evidență în mod direct efectele mecanice ale acestui câmp. Ele pot fi totuși determinate folosind, de exemplu, teoremele forțelor generalizate, ale căror demonstrație se bazează pe legile prezentate.

4.3 Teorema energiei electromagnetice.

Puterea transferată de câmpul electromagnetic unui domeniu imobil prin frontiera acestuia Σ este egală cu puterea transferată corpurilor din domeniul D_{Σ} plus viteza de creștere a energiei câmpului electromagnetic W_{em} din domeniu:

$$P_{\Sigma} = P_{D_{\Sigma}} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Pentru demonstrarea acestei afirmații se consideră un domeniu D_{Σ} , mărginit de suprafața închisă Σ , în care se află un sistem de corpuri imobile și liniare din punct de vedere dielectric ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$) și magnetic ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$). Formele locale ale legilor inducției electromagnetice și circuitului magnetic:

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

permit stabilirea consecinței:

$$\mathbf{E} \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{J}E + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \nabla(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \nabla \left(\overset{\downarrow}{\mathbf{E}} \times \mathbf{H} \right) + \nabla \left(\mathbf{E} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{H}} \right) = \mathbf{H}(\nabla \times \mathbf{E}) - \\ &\quad - \mathbf{E}(\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \text{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot} \mathbf{H} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{E} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D} \mathbf{E}}{2} \right), \\ \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2} \right), \end{aligned}$$

rezultă că:

$$-\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{D} \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2} \right), \quad (4.8)$$

în care: $p = \mathbf{E} \mathbf{J}$ reprezintă conform legii transformării energiei în conductoare densitatea de volum a puterii transferată de câmpurilor, iar

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ reprezintă vectorul Poynting, măsurat în W/m^2 ;

$w_e = \mathbf{D} \mathbf{E} / 2$ reprezintă densitatea de volum a energiei electrice, măsurată în J/m^3 ;

$w_m = \mathbf{B} \mathbf{H} / 2$ reprezintă densitatea de volum a energiei magnetice, măsurată în J/m^3 .

Notând cu $w_{em} = w_e + w_m$ densitatea de volum a energiei câmpului electromagnetic, rezultă că:

$$-\text{div} \mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}, \quad (4.9)$$

relație cunoscută sub numele de forma locală a teoremei energiei electromagnetice.

Prin integrarea acestei relații diferențiale locale pe domeniul D_Σ se obține:

$$-\int_{D_\Sigma} \text{div} \mathbf{S} dv = -\int_\Sigma \mathbf{S} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} p dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_\Sigma} w_{em} dv$$

Notând cu $P_\Sigma = -\int_\Sigma \mathbf{S} d\mathbf{A} = \int_\Sigma \mathbf{S} d\mathbf{A}_{int}$, puterea transferată prin suprafața Σ de la exterior spre interior;

$P_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} p dv$, puterea transferată corpurilor din domeniul D_Σ și

$W_{em} = W_e + W_m$, energia electromagnetică din domeniul D_Σ cu componentele:

$W_e = \int_{D_\Sigma} w_e dv$, energia câmpului electric și

$W_m = \int_{D_\Sigma} w_m dv$, energia câmpului magnetic,

rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

4.4 Teorema impulsului electromagnetic

4.5 Teorema forței generalizate în câmp electric

Forța feneralizată X_k cu care câmpul electric acționează asupra sistemelor de corpuri, este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_{\psi=ct}, \quad (4.10)$$

în care

$$W_e = \int_D w_e dv$$

cu

$$w_e = \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} \quad (4.11)$$

este energia câmpului electric din sistem, iar x_k este coordonata generalizată asociată forței X_k .

Se constată că la flux (sarcină) constant(ă) sistemul evoluează în sensul minimizării energiei sale (figura 4.2).

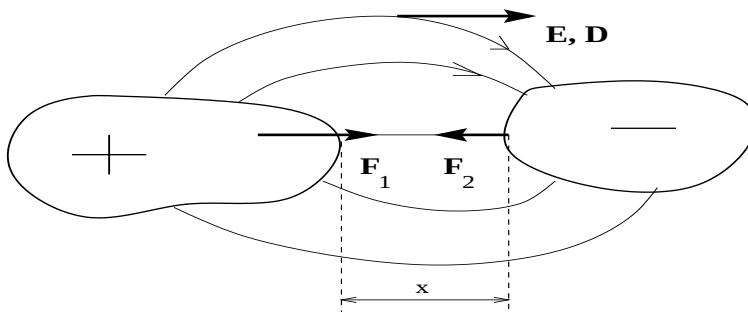


Figura 4.2: Efectul mecanic al câmpului electric

Tabelul 4.1 prezintă câteva exemple de perechi de forțe și de coordonate generalizate.

Tabela 4.1: Exemple de perechi de forțe și coordonate generalizate

X_k	x_k
Forța $[N]$	deplasarea $[m]$
Cuplul $[N \cdot m]$	unghiul $[rad]$
Presiunea $[N/m^2]$	volumul $[m^3]$

În cazul mediilor liniare la care $\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E}$ și $\mathbf{P}_p = 0$, energia electrică are expresia:

$$W_e = \int_D \frac{\mathbf{D} \mathbf{E}}{2} dv. \quad (4.12)$$

4.6 Teorema forței generalizate în câmp magnetic

Forța generalizată X_k cu care câmpul magnetic acționează asupra unui sistem de corpuri este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x_k} \right|_{\phi=ct} \quad (4.13)$$

în care

$$W_m = \int_D w_m dv \text{ cu } w_m = \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} \quad (4.14)$$

este energia câmpului magnetic din sistem, iar x_k este coordonata generalizată asociată forței X_k .

În cazul mediilor la care $\mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H}$ și $\mathbf{M}_p = 0$, energia magnetică are expresia.

$$W_m = \int_D \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dv \quad (4.15)$$

Se constată că și în acest caz sistemul de corpuri tinde să evolueze astfel încât să se minimizeze energia câmpului magnetic (figura 4.3).

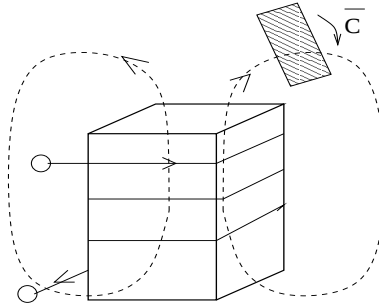


Figura 4.3: Efectul mecanic al câmpului magnetic

În multe dispozitive electromagnetice fenomenele mecanice joacă un rol important, mai ales atunci când acestea au piese în mișcare. Chiar și în cazul dispozitivelor statice (cu părți imobile) *solicitările mecanice* pot determina limitele regimurilor normale de funcționare. De obicei analiza efectelor mecanice se face ulterior rezolvării problemei de câmp electromagnetic. Există totuși situații în care cele două probleme nu pot fi separate ci trebuie rezolvate simultan, ca o problemă cuplată electromagnetică – mecanică. Acesta este mai ales cazul dispozitivelor cu părți mobile (mașini electrice, dispozitive de acționare, pompe magneto – hidrodinamice etc.) indiferent dacă acestea sunt rigide, deformabile, plastice sau fluide.

Fenomenele fundamentale descrise de legile câmpului electromagnetic stabilesc relații de tip cauză - efect cu referire la stările câmpului și corpurilor. Ele sunt reprezentate schematic în figura 4.4. S-au folosit linii duble pentru relațiile valabile atât în regim staționar cât și variabil și linii simple pentru relațiile valabile doar în regim variabil. Cu linii punctate s-au marcat fenomenele legate de efectele câmpului electromagnetic. S-a notat fiecare săgeată cu numărul corespunzător legii care descrie fenomenul (relația cauză – efect).

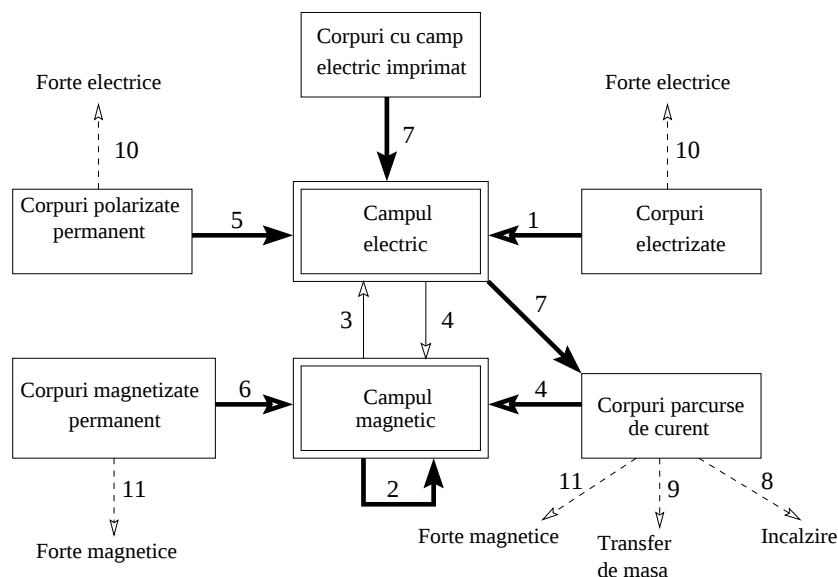


Figura 4.4: Fenomene fundamentale ale electromagnetismului

Într-un dispozitiv electromagnetic concret nu intervin toate aceste fenomene fundamentale, sau dacă intervin, nu toate au aceeași importanță. În modelarea fizică trebuie identificate acele fenomene care sunt esențiale pentru funcționarea dispozitivului, diagrama din figura 4.4 simplificându-se corespunzător de la caz la caz. Este evident că acest lucru nu este posibil fără înțelegerea principiului de funcționare al dispozitivului analizat.

Capitolul 5

Regimurile câmpului electromagnetic

5.1 Regimul general variabil

Legile câmpului electromagnetic, în forma lor locală alcătuiesc un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, combinate cu ecuații cu caracter algebric:

1. LFE: $\text{div}\mathbf{D} = \rho$;
2. LFM: $\text{div}\mathbf{B} = 0$;
3. LIE: $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v})$;
4. LCM: $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \text{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$;
5. LDE: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ sau $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_p$;
6. LBH: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ sau $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$;
7. LJE: $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$;
8. LTE: $p = \mathbf{J}\mathbf{E}$;
9. LTM: $\delta = k\mathbf{J}$.

La aceste relații se pot adăuga următoarele teoreme fundamentale:

10. TFGE: $X_k = -\frac{\partial W_e}{\partial x_k}|_{\psi=ct.}$;
11. TFGM: $X_k = -\frac{\partial W_m}{\partial x_k}|_{\phi=ct.}$;
12. TCS: $\text{div}\mathbf{J} = \frac{\partial\rho}{\partial t} - \text{div}(\rho\mathbf{v})$.

???

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în regim general variabil pentru medii în mișcare este o problemă foarte complicată, cu caracter cuplat electromagnetic-mecanic. În general mișcarea corpurilor (de exemplu ?? unei mașini electrice) este determinată de forțele electrice și/sau magnetice, precum și de forțe de altă natură, dar în același timp câmpul electromagnetic este influențat de mișcarea corpurilor. Sursele de

câmp în acest regim (și implicit datele problemei) sunt câmpurile vectoriale: $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{M}_p$ și $\mathbf{E}_i$, care reprezintă în fond cauze de natură electromagnetică. Necunoscutele problemei de analiză le reprezintă câmpurile $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, dar și câmpul de viteze $\mathbf{v}$, pentru determinarea căruia trebuie adăugate ecuațiile de mișcare precum și modele mecanice de $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, dar și câmpul de viteze $\mathbf{v}$, pentru determinarea căruia trebuie adăugate ecuațiile de mișcare, precum și modele mecanice de material (solide rigide, elastice sau plastice, fluide ideale incompresibile, fluide vâscoase, etc.), cum se întâmplă în magnetohidrodinamică. Se constată că distribuția de sarcină ρ și curent $\mathbf{J}$ sunt în acest caz necunoscute și nu date, de altfel ele rezultă în mod univoc din legea fluxului electric și din legea circuitului magnetic, dacă câmpul electromagnetic și cel de viteze sunt complet determinate. După determinarea câmpurilor se pot evalua și efectele acestora, cum sunt "sursele de caldură" sau transferul de masă.

Un caz simplificat al acestei probleme cuplate, îl reprezintă cazul în care vitezele corpurilor sunt cunoscute apriori. Exemple de astfel de probleme, sunt cele de analiză a fenomenului de inducție prin mișcare în corpuri aflate în rotație sau translație, cu viteze cunoscute sau calculul câmpului magnetic produs de corpuri electrizate sau polarizate aflate în mișcare cu viteze cunoscute. Menționăm doar câteva din dispozitivele în care apar astfel de fenomene: mașini electrice liniare sau rotative (motoare, generatoare, frâne), dispozitive de acționare electromagnetică, lansatoare electromagnetice, debitmetre electromagnetice, generatoare magnetohidrodinamice, pompe electromagnetice, etc.

5.2 Regimul electrostatic

Ipotezele regimului sunt:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie;
- prezintă interes câmpul electric.

În aceste ipoteze spunem că ne aflăm în regim staționar. Diagrama din figura ??? capătă o formă mult mai simplă, arborescentă.

Dacă în plus, nu au loc transformări energetice, atunci regimul se numește static. Considerând că nu apare stare electrocinetică, puterea transferată este nulă, deci nu pot avea loc transformări de energie. În consecință, în regim static diagrama din figura 1.13??? "se sparge" în două diagrame disjuncte. Cea superioară se referă la câmpul electric, mai exact electrostatic, iar cea inferioară se referă la câmpul magnetic, mai exact magnetostatic. Cele două câmpuri pot coexista fără să se influențeze reciproc în vreun fel.

Ecuațiile fundamentale ale electrostaticii în forma locală:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0;$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}),$$

sau, în particular:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p,$$

la care se adaugă și condiția de echilibru electrostatic în conductoare:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = 0,$$

provin din legea fluxului electric, legea inducției, legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ și legea conducției.

Problema fundamentală a analizei câmpului electrostatic constă în determinarea câmpurilor vectoriale $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$ pornind de la sursele lor ρ , $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_i$, presupuse cunoscute. După cum se va vedea în continuare pentru ca această problemă să fie corect formulată mai trebuie cunoscute: forma și dimensiunile domeniului spațial de calcul, proprietățile de material (în acest caz cele dielectrice date prin ε sau relația $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ în fiecare punct din domeniu), dar și condițiile de frontieră, care reprezintă prezența eventuală a unor surse externe de câmp.

Soluția problemei fundamentale poate fi folosită la calculul altor mărimi, cum sunt densitatea de energie, energia acumulată în câmpul electrostatic, efectele mecanice caracterizate de forțe, cupluri, presiuni sau tensiuni, dar și alți parametri specifici dispozitivelor electrostatice. Dintre acestea din urmă cea mai importantă este capacitatea, care este un parametru caracteristic al dispozitivului numit *condensator*. Un condensator este alcătuit din două armături conductoare separate printr-un dielectric (izolant). Capacitatea unui condensator este definită prin raportul:

$$C = \frac{q}{u}, \quad (5.1)$$

în care q este sarcina unei armături, iar u este tensiunea dintre prima și a doua armătură, în condițiile în care a doua armătură are sarcina $-q$. Capacitatea se măsoară în $[F]$. Dacă dielectricul este liniar ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$), atunci capacitatea condensatorului nu depinde de starea acestuia (nici de q și nici de u). Pentru calculul capacității unui condensator este necesară rezolvarea problemei fundamentale a analizei câmpului electrostatic. Aceasta poate fi formulată în două moduri complementare:

- se presupune tensiunea u între armături cunoscută (sursă de câmp), se determină distribuția de câmp și apoi cea de sarcină, obținându-se q prin integrare;
- se presupune o armătură încărcată cu sarcina q , iar cealaltă cu $-q$ (sursa de câmp), și apoi se determină distribuția de câmp, prin integrarea căreia se obține tensiunea u .

Trebuie observat că în ambele formulări, modul de distribuție a sarcinii la suprafața conductoarelor este necunoscut și rezultă luând în considerare condiția de echilibru electrostatic ($\mathbf{E} = 0$) în armăturile conductoare (la care $\mathbf{E}_i = 0$).

Cu toate că ipotezele electrostaticii par foarte restrictive, acest regim își găsește multe aplicații practice. Aceasta deoarece rezultatele obținute sunt valabile și în regim variabil cu condiția ca variațiile să fie suficient de lente în timp.

Dintre aplicațiile uzuale menționăm: calculul capacităților diferitelor condensatoare sau al capacităților parazite, capacități care sunt ulterior folosite și în regim dinamic (până la frecvențe destul de mari), analiza solicitărilor dielectrice și coordonarea izolației (calculul câmpului maxim în izolanti de diferite forme, plasați între diferiți electrozi), analiza unor aparate de măsură electrostatice (cum este voltmetrul electrostatic) sau a micromotoarelor electrostatice (din microsistemele integrate), analiza dispozitivelor cu electreți (cum sunt microfoanele compacte).

5.3 Regimul magnetostatic

Ipotezele regimului sunt:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie;
- prezintă interes câmpul magnetic.

Ecuatiile fundamentale ale magnetostaticii în forma locală:

$$\begin{aligned}div\mathbf{B} &= 0; \\rot\mathbf{H} &= 0; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H}),\end{aligned}$$

sau, în particular:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p,$$

provin din legea fluxului magnetic, legea circuitului magnetic și legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

Problema fundamentală a analizei câmpului magnetostatic, constă în determinarea câmpurilor vectoriale $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, pornind de la sursa lor (magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p$, presupusă cunoscută) și evident de la domeniul spațial de calcul, caracteristica magnetică de material și condițiile de frontieră.

După calculul câmpului se pot determina și alte mărimi cum sunt energia magnetică sau forțele și cuplurile de natură magnetică, dar și tensiuni induse prin mișcare cu viteză cunoscută a magneților permanenți.

Un dispozitiv magnetic simplu, dar frecvent întâlnit în practică pentru concentrarea și dirijarea câmpului magnetic este tronsonul de circuit magnetic. Acesta este de obicei o parte componentă a unor dispozitive mai complicate și are proprietatea că reprezintă un tub de flux magnetic, respectiv că, suprafața sa laterală este suprafața de câmp (liniile de câmp sunt orientate tangențial), iar cele două suprafețe transversale, numite borne magnetice au liniile de câmp ortogonale pe ele. Parametrul caracteristic al unui astfel de dispozitiv este *reluctanța magnetică*:

$$R_m = \frac{u_m}{\phi}, \quad (5.2)$$

au inversa sa *permeanța magnetică*:

$$\Lambda_m = \frac{\phi}{u_m}, \quad (5.3)$$

în care ϕ este fluxul ce străbate o bornă magnetică, iar u_m este tensiunea magnetică de la cealaltă bornă la cea pe care s-a calculat fluxul. Permeanța se măsoară în $[H]$, iar reluctanța în $[H^{-1}]$. Dacă materialul din care este alcătuit tronsonul este liniar din punct de vedere magnetic, atunci reluctanța sa magnetică nu depinde de câmpul magnetic (nici de flux, nici de tensiune).

Pentru calculul permeanței magnetice este necesară rezolvarea problemei fundamentale a magnetostaticii. Ea poate fi formulată în două moduri complementare:

- se cunoaște fluxul ϕ și trebuie determinat câmpul și apoi calculată tensiunea magnetică prin integrarea lui $\mathbf{H}$ de-a lungul tronsonului;
- sau se impune tensiunea magnetică între borne u_m și se determină câmpul și apoi se calculează fluxul prin integrarea inducției $\mathbf{B}$ pe suprafața unei borne.

Dintre aplicațiile uzuale ale regimului magnetostatic, cea mai importantă se referă la determinarea câmpului magnetic produs de diferite sisteme cu magneți permanenți (mașini cu magneți permanenți, difuzoare, instrumente de măsură magnetostatice, etc.). Multe rezultate obținute în regim magnetostatic (cum este reluctanța unor tronsoane de circuit magnetic sau întrefieruri) sunt folosite cu succes și în regim variabil sau, în studiul unor dispozitive complexe ce au părți ce funcționează și în alte regimuri decât cel magnetostatic.

5.4 Regimul electrocinetic staționar

În multe situații practice interesează felul în care se distribuie curentul electric în conductoare masive. Cel mai simplu studiu de acest tip se face în regim electrocinetic staționar, caracterizat de următoarele ipoteze simplificatoare:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile fizice nu variază în timp;
- nu interesează distribuția câmpului magnetic.

Ecuatiile fundamentale ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0;$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}),$$

sau, în particular:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i),$$

care sunt formele particulare în ipotezele menționate ale legii conservării sarcinii, legii inducției electromagnetice și legii inducției.

Din ecuațiile regimului se constată că electrizarea sau polarizarea corpurilor nu influențează distribuția de curent.

Problema fundamentală a electrocineticii are ca necunoscute câmpurile vectoriale $\mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$, iar ca date câmpul imprimat $\mathbf{E}_i$, care este sursa internă a câmpului și evident: domeniul spațial de calcul, caracteristicile conductoarelor din domeniu și condițiile de frontieră.

După determinarea distribuției de curent se poate calcula puterea locală disipată (folosind legea transferului de energie în conductoare) și masa transferată prin electroliză (folosind legea transferului de masă). Puterea disipată permite determinarea distribuției de temperatură în domeniul studiat (solicitările termice) prin rezolvarea ecuației căldurii.

Principal, singura sursă de curent în regim electrocinetic este câmpul electric imprimat, în realitate multe probleme au și alte surse de câmp, dar acestea fiind externe, se reprezintă prin condiții de frontieră.

Un parametru caracteristic important, care se poate determina prin rezolvarea problemei electrocineticii este *rezistența* $[\Omega]$, respectiv *conductanța* $[S]$ unui rezistor, definite de relațiile:

$$R = \frac{u}{i}, G = \frac{i}{u} \quad (5.4)$$

în care u este tensiunea la bornele rezistorului, iar i este curentul ce străbate rezistorul. Prin rezistor se înțelege o componentă conductoare scufundată într-un izolanț și străbătută de curent care intră normal printr-o bornă și iese prin cealaltă, astfel încât rezistorul reprezintă un tub de curent. Ca și în cazurile anterioare, parametrul caracteristic se determină rezolvând una din următoarele două probleme complementare:

- se presupune tensiunea u între borne cunoscută și se determină distribuția de curent urmând ca valoarea curentului i să se calculeze prin integrarea lui $\mathbf{J}$ pe suprafața unei borne;
- se presupune curentul i cunoscut și se determină câmpul electric în domeniul rezistorului, urmând ca tensiunea u să fie calculată prin integrare pe o curbă ce unește cele două borne.

Calculul rezistenței electrice pentru diferite forme ale conductoarelor și respectiv bornelor reprezintă o problemă frecvent întâlnită în practică. Rezultatele obținute, chiar dacă au fost determinate în regim staționar pot fi folosite și în regim dinamic, cu condiția ca viteza de variație a câmpului să nu fie prea mare.

Următoarele sisteme reprezintă aplicații tipice ale regimului electrocinetic: prize de pământ, băi electrolitice, cuve pentru electroliza aluminiului, cuptoare cu încălzire rezistivă sau directă, instalații de sudură prin puncte, dimensionarea siguranțelor fuzibile, etc.

5.5 Regimul magnetic staționar

Acest regim are următoarele ipoteze simplificatoare:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile sunt constante în timp;
- interesează distribuția câmpului magnetic produs de o distribuție cunoscută a curentului de conducție.

Forma locală a ecuațiilor fundamentale ale acestui regim:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J};$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}),$$

sau, în particular:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p,$$

se obțin în ipotezele menționate anterior din: legea fluxului magnetic, legea circuitului magnetic și legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

Problema fundamentală a analizei câmpului în acest regim are ca necunoscute determinarea câmpurilor vectoriale $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, și ca date distribuția densității de curent $\mathbf{J}$ și a magnetizației permanente $\mathbf{M}_p$ în condițiile în care se cunosc: domeniul spațial, proprietățile magnetice de material și condițiile de frontieră. În acest regim sursele de câmp sunt: curentul de conducție, magnetizația permanentă și condițiile de frontieră, care reprezintă sursele câmpului magnetic aflate în afara domeniului supus analizei. În consecință, problema analizei câmpului magnetic staționar trebuie precedată de rezolvarea unei probleme electrocinetice pentru determinarea densității de curent $\mathbf{J}$. Cele două probleme pot fi rezolvate secvențial, deoarece câmpul magnetic staționar nu influențează distribuția de curent.

Dacă mediul este liniar din punct de vedere magnetic, atunci câmpul magnetic produs de curentul de conducție și de magnetii permanenți poate fi calculat prin superpoziție, rezolvând separat o problemă de regim magnetic staționar la care $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ și apoi o problemă de magnetostatică la care $\mathbf{M}_p \neq 0$. Dacă mediul este neliniar, atunci cele două surse $\mathbf{J}$ și $\mathbf{M}_p$ trebuie să fie considerate simultan.

După rezolvarea problemei fundamentale, se pot determina efectele câmpului magnetic: energii, forțe, cupluri de natură magnetică, dar și tensiunile induse datorită mișcării sau variației în timp a curentului inductor, cu condiția ca viteza de variație să nu fie prea mare.

Dispozitivul cel mai întâlnit, care funcționează în acest regim este bobina, alcătuită dintr-un conductor înfășurat în aer sau pe un miez feromagnetic. Parametrul specific acestui dispozitiv este *inductivitatea* (măsurată în $[H]$):

$$L = \frac{\phi}{i}, \quad (5.5)$$

în care ϕ este fluxul magnetic total al bobinei și i este curentul ce produce acest flux. Dacă mediul este magnetic liniar, atunci inductivitatea bobinei nu depinde de curentul i .

Pentru determinarea inductivității unei bobine este necesară rezolvarea problemei fundamentale a regimului magnetic staționar, respectiv, determinarea câmpului magnetic produs de un curent i impus și apoi calculul fluxului prin integrarea inducției pe o suprafață, care se sprijină pe curba mediană a firului conductor al bobinei. O altă metodă de calcul a inductivității este cea energetică, bazată pe relația:

$$W_m = \frac{Li^2}{2}, \quad (5.6)$$

conform căreia inductivitatea este debitul energiei magnetice (calculată prin densității de energie a câmpului magnetic) raportată la pătratul curentului.

Inductivitatea unei bobine determinată în regim staționar poate fi ulterior folosită în regim dinamic, pentru o plajă destul de largă de frecvențe, de exemplu, pentru calculul

tensiunii autoinduse sau a energiei acumulate, sau a forței de natură magnetică ce se exercită asupra unor piese în mișcare.

Dintre dispozitivele a căror analiză se face în regim magnetic staționar menționăm: bobine, mașini electrice, electromagneți de acționare sau de producere a câmpului magnetic pentru acceleratoarele de particule, rezonanță magnetică de spin, deflexie magnetică, etc.

5.6 Regimurile cvasistaționare

În regim cvasistaționar câmpul electromagnetic este variabil în timp, dar suficient de lent pentru ca unele fenomene să poată fi neglijate.

În conductoare, chiar și la frecvențe destul de mari curentul de deplasare are densități mult mai mici decât curentul de conducție, în consecință el poate fi neglijat. Procedând în acest mod se adoptă de fapt ipotezele regimului **cvasistaționar de tip inductiv (sau anelectric)**:

- corpurile sunt imobile;
- curentul de deplasare este considerat nul.

Formal cea de-a doua ipoteză se obține considerând corpurile din domeniul de studiu de tip anelectric (cu $\varepsilon = 0$); ceea ce implică anularea inducției electrice $\mathbf{D}$ și implicit a curentului de deplasare.

Relațiile cauzale se pot reprezenta schematic ca în figura ???, obținută din figura ??? prin eliminarea săgeții 4, astfel încât din cele două bucle rămâne una singură.

Ecuatiile fundamentale ale regimului cvasistaționar inductiv au forma locală:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H}); \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}(\mathbf{E}), \end{aligned}$$

obținută din legea fluxului magnetic, legea conservării sarcinii, legea circuitului magnetic, legea inducției și legile de material $\mathbf{B} - \mathbf{H}$, $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ în ipoteza în care $D = 0$.

Problema fundamentală a acestui regim este determinarea modului în care difuzează câmpul electric $\mathbf{E}$, cele magnetice $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ și densitatea de curent $\mathbf{J}$ în interiorul domeniilor conductoare de formă cunoscută, caracteristici de magnetizare și de conducție cunoscute și condiții inițiale și de frontieră cunoscute. Aparent sursele de câmp în acest regim pot fi magnetizația permanentă și câmpul imprimat, dar în realitate cel mai adesea sursele se află în afara domeniului spațio-temporal analizat și sunt reprezentate de condițiile inițiale și de frontieră.

Regimul cvasistaționar are mai multe efecte specifice decât regimurile statice și staționare. Dintre acestea menționăm două, cele mai frecvent întâlnite:

- *curenții turbionari* reprezintă curenții induși în corpurile conductoare aflate în câmp magnetic variabil (conform diagramei acesta induce un câmp electric, care conform legii conducției este însoțit de un curent electric, curent care produce un câmp magnetic ce se suprapune peste câmpul inductor, perturbându-l);
- *efectul pelicular* constă în redistribuirea curentului de aducție de preferință la suprafața conductoarelor și el este cu atât mai pronunțat cu cât curentul este mai rapid variabil în timp (explicația constă în faptul că orice curent variabil produce un câmp magnetic variabil care induce un câmp electric care se suprapune peste cel inițial, perturbând distribuția de curent).

Trebuie remarcat că în medii izolante curentul de conducție este neglijabil sau nul, deci curentul de deplasare nu poate fi neglijat. Neglijând în schimb fenomenul de inducție electromagnetică se obține diagrama din figura ????, corespunzătoare regimului **cvasistaționar capacitiv (sau amagnetic)**, care are următoarele ipoteze definitorii:

- corpurile sunt imobile;
- corpurile sunt amagnetice.

Ecuatiile fundamentale ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho;$$

;

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E});$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}),$$

obținute din legea fluxului electric, legea conservării sarcinii, legea inducției, legea circuitului magnetic, legile de material $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ și $\mathbf{J} - \mathbf{E}$, particularizate în ipoteza $B = 0$.

Problema fundamentală a acestui regim constă în determinarea modului în care difuzează câmpul magnetic $\mathbf{H}$, cele electrice $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$, dar și densitatea de sarcină și cea de curent în domeniile slab conductoare de formă cunoscută cu proprietăți dielectrice și de conducție cunoscute, în condiții inițiale și de frontieră date. Aceste condiții reprezintă în mod uzual sursa câmpului electromagnetic în acest regim. Dintre efectele specifice acestui regim menționăm:

- *difuzia sarcinilor*, spre deosebire de cazul regimului cvasistaționar inductiv în care sarcinile se redistribuie practic instantaneu, în regimul capacitiv este necesar un timp pentru a se relaxa.

Exemple de aplicații în care este necesară analiza câmpului electromagnetic în regim cvasistaționar inductiv: încălzire prin curenți turbionari, aparate de măsură bazate pe curenți turbionari cum sunt contoarele de inducție, mașini electrice bazate pe inducție cum sunt transformatoarele, motoarele asincrone și frânele electromagnetice, instalații de defectoscopie nedistructivă cu curenți turbionari, evaluarea pierderilor prin curenți turbionari etc.

Regimul cvasistaționar capacitiv este utilizat în studiul comportării izolanților în câmp variabil, ca de exemplu, dielectricii condensatoarelor.

În cazul modelării unor dispozitive complexe se pot utiliza ambele tipuri de regimuri cvasistaționare, cel inductiv pentru părțile bune conductoare și cel capacitiv pentru corpuri slab conductoare, urmând ca în izolanți să fie utilizate ecuațiile regimului cvasistaționar capacitiv sau chiar cele ale regimurilor magnetice staționare (pentru determinarea câmpului magnetic) și electrostatic (pentru determinarea câmpului electric și a distribuției de sarcină).

5.7 Regimul general variabil în mediile imobile. Ecuațiile lui Maxwell

Dacă se consideră mediile imobile și se iau în considerare atât curenții de deplasare cât și fenomenul de inducție electromagnetică se spune că regimul este general variabil, indiferent dacă există curent de conducție sau nu, cum se întâmplă în izolanți și în vid. Specific acestui caz este apariția buclei de săgeți 3 – 4 în diagrama de cauzalitate a regimului (fig.???) . Această buclă pune în evidență legătura foarte strânsă între cele două componente ale câmpului electromagnetic, variația în timp a câmpului electric determină apariția unui câmp magnetic și invers. Generarea reciprocă și succesivă a acestor două câmpuri explică fenomenul de *propagare* a undelor electromagnetice, specific acestui regim. Unda electromagnetică se desprinde de corpul care a produs-o și se propagă cu viteză finită în întreg spațiul, inclusiv prin vid. Din acest motiv în regimul general variabil, câmpul electric și cel magnetic nu se pot analiza separat, ci ele trebuie studiate simultan.

Ecuațiile acestui regim au următoarea formă locală:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E}); \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H}); \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}(\mathbf{E}), \end{aligned}$$

cunoscută și sub numele de *sistemul ecuațiilor lui Maxwell*. Ele provin din legile generale și de material ale câmpului electromagnetic în ipoteza vitezei nule a corpurilor.

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în acest regim are ca necunoscute câmpurile vectoriale $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, dar și cele specifice corpurilor ρ și $\mathbf{J}$, pornind de la domeniul spațio-temporal de calcul, de la proprietățile de material dielectrice, magnetice și de conducție (eventual împreună cu sursele permanente de câmp $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{M}_p$ și $\mathbf{E}_i$), dar și condițiile inițiale și de frontieră. Soluția problemei de câmp permite determinarea efectelor câmpului: energie acumulată, energie transferată, putere disipată (inclusiv încălzirea), cupluri și presiuni exercitate asupra corpurilor.

Dintre aplicațiile tipice ale ecuațiilor acestui regim menținem: studiul ghidurilor de undă, studiul propagării undelor în spații deschise, analiza antenelor, împrăștierea undelor pe diferite obiecte, analiza dispozitivelor pentru prelucrarea microundelor (filtre, amplificatoare, convertoare, etc.).

Capitolul 6

Modelarea spațio-temporală a câmpului electromagnetic

6.1 Modelarea temporală a câmpului electromagnetic

În regimurile statice și staționare ale câmpului electromagnetic toate mărimile caracteristice sunt constante în timp, deci timpul nu apare ca variabilă independentă. Trebuie menționat totuși că în realitate nu există nici o mărime fizică absolut constantă în timp. În consecință, regimurile fizice statice și staționare sunt folosite pentru modelarea situațiilor în care mărimile fizice au o variație lentă. În acest caz, frecvențele sunt scăzute sau sunt constante pe o lungă perioadă de timp.

În regimurile în care timpul apare în mod explicit, cum sunt regimurile cvasistaționare sau general variabile, se deosebesc următoarele forme de variație în timp atât pentru mărimile sursă (datele problemei de analiză), cât și pentru cele caracteristice câmpului (necunoscutele problemei de analiză):

- armonic (sinusoidal);
- periodic (permanent nesinusoidal);
- tranzitoriu.

În cazurile regimurilor sinusoidale variabilele scalare, cum sunt densitatea de sarcină ρ sau oricare din cele trei componente ale câmpurilor vectoriale $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{M}_p$, $\mathbf{E}_i$ sunt fie nule fie au o variație sinusoidală în timp de forma:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.1)$$

în care A este amplitudinea, ω este pulsația, iar φ este faza inițială. Toate mărimile unei probleme în acest regim au o valoare comună a pulsației:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (6.2)$$

în care $f[Hz]$ este frecvența, iar $T[s]$ este perioada. Deoarece datele au variație sinusoidală în timp, rezultă că pulsația ω este cunoscută, iar pentru ca o problemă să fie de regim armonic este necesar ca ea să fie liniară, iar excitațiile să fie sinusoidale cu pulsație comună. Deoarece unei mărimi scalare îi corespund 2 necunoscute (amplitudinea și faza inițială), iar uneia vectoriale $3D$ îi corespund 6 necunoscute, rezultă că în regim armonic sinusoidal modelarea temporală dublează numărul necunoscutelor față de aceeași problemă formulată în regim staționar.

Un alt regim de variație temporală a câmpului electromagnetic este cel periodic permanent nesinusoidal. În acest caz valoarea instantanee a unei mărimi se repetă cu perioada T :

$$x(t + T) = x(t) \quad (6.3)$$

deci este suficientă determinarea variației pe intervalul $t \in [0, T]$, astfel încât $x(T) = x(0)$ pentru ca apoi prin extensie și prin periodicitate să fie acoperită întreaga axă reală. Este evident faptul că regimul sinusoidal este un caz particular al regimului periodic. Ca și în cazul regimului sinusoidal toate sursele de câmp trebuie să fie funcții periodice cu perioada T comună. Utilizând dezvoltarea în serie Fourier se constată că fiecare mărime scalară periodică este caracterizată de un șir de armonici sinusoidale (deci o mulțime numărabilă), urmând ca armonicile superioare să aibă o importanță tot mai mică.

Ultimul mod de variație în timp este cel tranzitoriu, în care soluția $x(t)$ este o funcție definită pe intervalul $t \in [0, \infty)$. Pentru ca o astfel de problemă, să poată fi rezolvată este necesară cunoașterea modului în care variază în timp sursele de câmp pe același interval semimărginit de timp, care începe la momentul inițial ales convențional $t = 0$. Spre deosebire de cazul regimului sinusoidal, în care nu sunt necesare condiții la limită în domeniul timp, în cazul regimului periodic se impun condiții la limită bilocale (la $t = 0$ și $t = T$), pe când în regim tranzitoriu este necesară precizarea condițiilor inițiale, la momentul $t = 0$. Condițiile inițiale reprezintă modul de variație a surselor de câmp înainte de momentul inițial, pe intervalul $t \in (-\infty, 0]$. Condițiile inițiale permit determinarea stării câmpului (implicit a energiei acumulate) la momentul $t = 0$. Spre deosebire de celelalte tipuri de variație, în cazul regimului tranzitoriu cu variație arbitrară a surselor nu este suficientă o mulțime numărabilă de valori pentru caracterizarea evoluției în timp a soluției. Totuși, din punct de vedere ingineresc, cunoașterea soluției într-un număr finit destul de mare de momente de timp din intervalul $[0, t_{max}]$ este suficientă.

6.2 Modelarea geometrică. Idealizări și simetrii

6.2.1 Modelarea geometrică

Părțile componente ale dispozitivelor electromagnetice actuale au o enormă varietate de forme și dimensiuni. O problemă importantă a modelării acestor dispozitive o constituie modelarea geometrică (spațială). Ea constă în aproximarea și idealizarea formei acestor părți componente, astfel încât problema analizei câmpului electromagnetic să fie cât mai simplă, dar totuși soluția sa să nu fie influențată sensibil de aproximațiile făcute.

Cel mai adesea părțile componente sunt asimilate cu corpuri geometrice relativ simple, corpuri ale căror suprafețe sunt plane, cilindrice, sferice sau, în cazuri mai rare, descrise de ecuații polinomiale pe porțiuni. Aceste porțiuni sunt racordate în mod “neted” prin

funcții “ β – spline” sau “conice”. În acest fel, sunt neglijate toleranțele acestor piese precum și rugozitatea suprafețelor. De exemplu, un bloc rectangular (o “cărămidă”) se poate modela printr-un paralelipiped geometric ideal.

Această aproximare geometrică, aparent naturală poate ridica probleme referitoare la tratarea muchiilor și colțurilor, modelul geometric ideal fiind nepotrivit pentru determinarea, spre exemplu, a solicitărilor dielectrice. Datorită efectelor de muchie, câmpul electrostatic este nemărginit pe muchiile unui paralelipiped conductor. Iată de ce, în acest caz trebuie luate în considerare razele de curbura reale ale racordurilor între fețe. În schimb, apar dificultăți dacă blocul este dielectric sau dacă interesează spre exemplu, curentul turbionar indus în blocul paralelipipedic, cazuri în care se poate adopta modelul geometric ideal.

6.2.2 Idealizări geometrice și simetrii

Pentru a evidenția multitudinea de cazuri care intervin în modelarea geometrică, se va efectua un studiu de caz considerând exemplul simplu al unui corp paralelipipedic cu laturile de lungime a , b și c , plasat la înălțimea h față de suprafața plană a unei piese de bază, de mari dimensiuni (figura 6.1). Dacă în particular $a = b = c$, blocul este modelat printr-un *cub*.

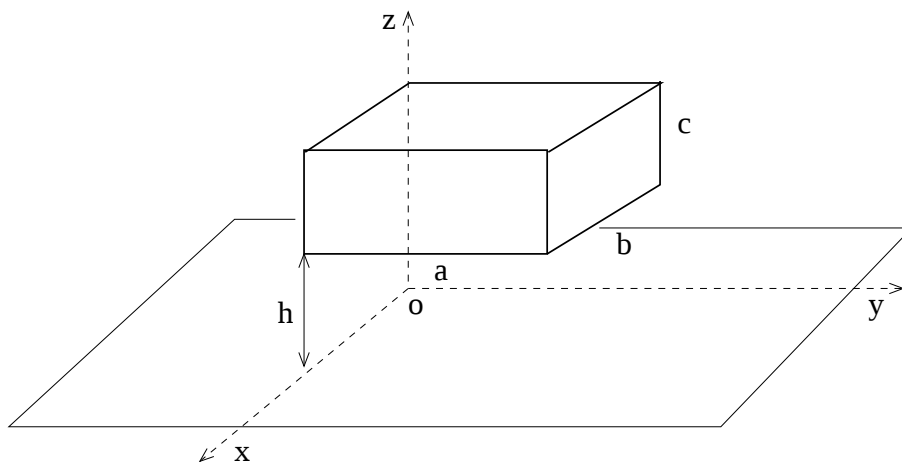


Figura 6.1: Model spațial 3D

Această configurație reprezintă un caz tipic de *problemă tridimensională (3D)*, la care atât datele cât și soluția sunt funcție de trei variabile spațiale. Dacă se adoptă un sistem de coordonate cartezian (x, y, z) , atunci atât datele cât și soluția sunt de forma:

$$y = f(x, y, z).$$

Dacă una din dimensiuni, de exemplu a este mult mai mică decât b și c , blocul devine o *placă*. Dacă grosimea plăcii este neglijabilă, se poate considera $a \rightarrow 0$, care corespunde modelului din figura 6.2, în care blocul este modelat printr-o *folie* dreptunghiulară (geometric printr-o suprafață).

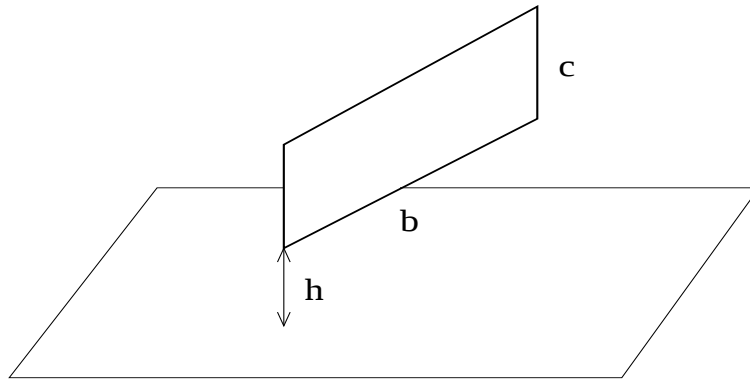


Figura 6.2: Model spațial 3D cu folie

Dacă în schimb a este mult mai mare decât b , c sau h blocul devine o *bară*. Dacă bara este foarte lungă, atunci adoptând $a \rightarrow \infty$ ea este modelată printr-un *cilindru* infinit cu secțiune dreptunghiulară (figura 6.3).

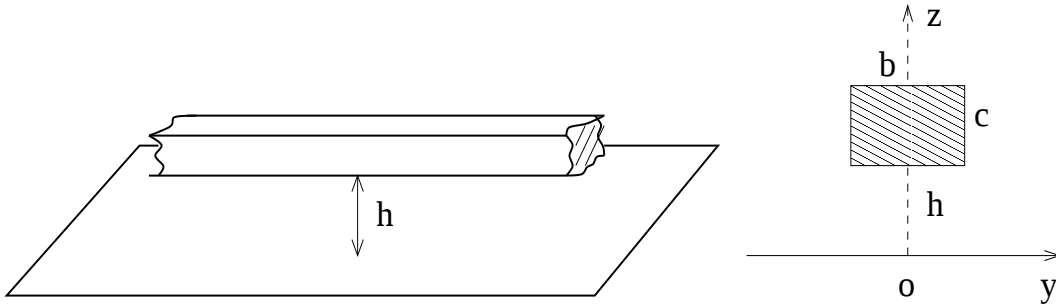


Figura 6.3: Model spațial 2D

În acest caz, datele problemei și soluția ei poate admite o reprezentare de forma:

$$y = f(y, z),$$

care nu depinde de variabila spațială x . Se spune că s-a adoptat un *model bidimensional plan-paralel (2D)*, deoarece soluția are aceeași formă în toate planele paralele $x = ct$. Trebuie remarcat că în modelul 2D s-au neglijat efectele de capăt, care apar la începutul și sfârșitul barei.

O discuție similară poate fi făcută în funcție de parametrul b , în schimb dacă $c \rightarrow \infty$, atunci modelul obținut nu este unul plan-paralel. Dacă doi dintre cei trei parametri a , b , c au valori mult mai mici decât al treilea și decât h , atunci bara de lungime finită se poate modela printr-un *fir*. De exemplu, alegând $b = c \rightarrow 0$ se obține un fir paralel cu planul de bază (figura 6.4).

Dacă lungimea firului tine către infinit ($a \rightarrow \infty$) atunci modelul geometric obținut este plan – paralel (2D).

În schimb, dacă ($a = b \rightarrow 0$), atunci firul este perpendicular pe planul de bază (figura 6.5). În acest ultim caz, datele problemei și soluția ei admit față de sistemul de

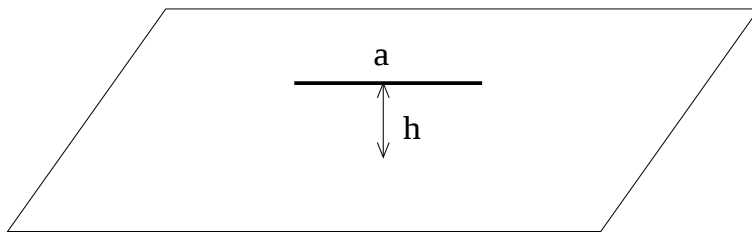


Figura 6.4: Model spațial 3D cu fir

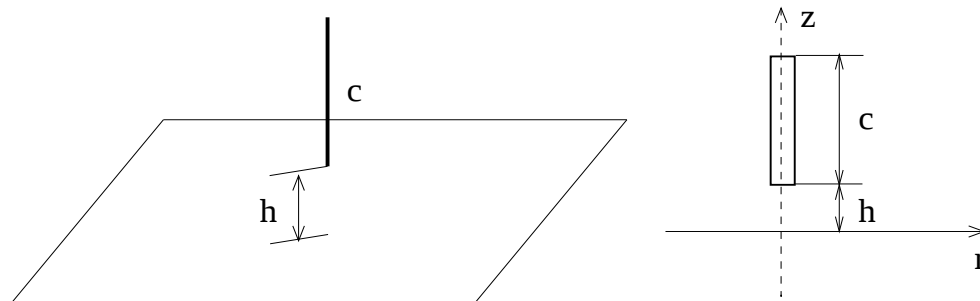


Figura 6.5: Model 2,5D

coordonate cilindrice o reprezentare de forma:

$$y = f(r, z)$$

, dacă firul este plasat pe axa sistemului de coordonate. Se spune că s-a adoptat un model spațial *bidimensional axi-simetric* (2,5D).

Dacă, în schimb, toți parametrii a , b și c sunt neglijabili față de h se poate adopta pentru corpul paralelipipedic modelul *punctiform* ($a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$, $c \rightarrow 0$).

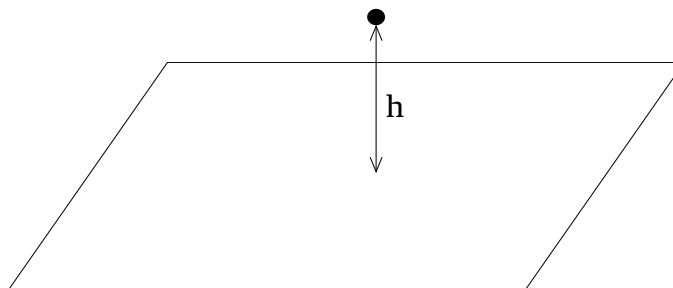


Figura 6.6: Model 2,5D cu corp punctiform

În acest caz (figura 6.6), forma corpului punctiform nu este relevantă, el putând fi modelat, de exemplu, printr-o sferă de mici dimensiuni. Iată cum cubul inițial a devenit prin modelare o sferă!

Ultimul caz degenerat luat în considerare va fi cel în care dimensiunile a și b sunt mult mai mari decât c sau h . În acest caz, considerând $a \rightarrow 0$ și $b \rightarrow \infty$ se obține o problemă

(figura 6.7) la care soluția poate fi de forma:

$$y = f(z),$$

deci dependentă de o singură variabilă spațială. Aceasta este un model *plan-paralel* după două direcții, deci *unidimensional (1D)*.

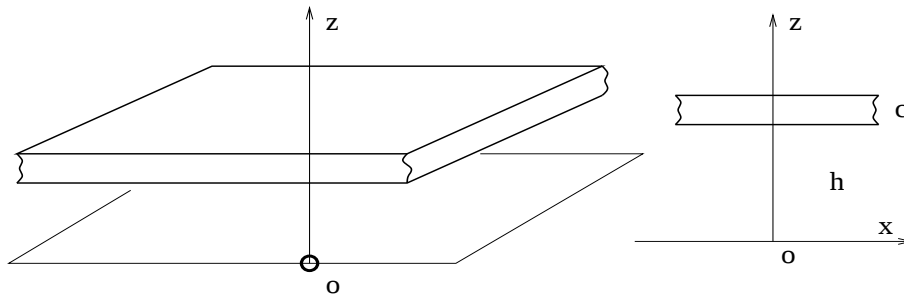


Figura 6.7: Model 1D

Dacă o problemă admite și simetrie axială dar și simetrie plan – paralelă, atunci există un sistem de coordonate cilindrice, astfel încât soluția problemei

$$y = f(r),$$

depinde doar de variabila radială. În acest caz, se spune că problema are *dimensiunea 1.5D*, cum se întâmplă în figura 6.4, dacă lungimea firului $a \rightarrow \infty$, dar și distanța $h \rightarrow \infty$, obținându-se în final doar un fir infinit lung. Tot în categoria *1.5D* se pot considera probleme cu simetrie sferică (axială după două axe diferite).

În concluzie, problemele de câmp pot fi clasificate în funcție de tipul de simetrie în clase caracterizate prin numărul convențional de dimensiuni spațiale ca în tabelul 6.1.

Tabela 6.1: Clasificarea problemelor de câmp electromagnetic

Dimensiunea problemei	Date și soluție
1D	$f(x)$
1.5D	$f(r)$
2D	$f(x, y)$
2.5D	$f(r, z)$
3D	$f(x, y, z)$

În urma modelării geometrice, prin idealizarea dimensiunilor corpurilor apar următoarele tipuri de obiecte degenerate:

- folii;
- fire;

- corpuri punctiforme.

Din punct de vedere geometric o folie se reprezintă printr-o suprafață, nu neapărat plană (de exemplu un cilindru sau o calotă sferică), dar nu se reduce la aceasta. O folie reprezintă un fel aparte de suprafață de discontinuitate, deoarece poate fi purtătoare de flux și admite constante de material de tip electromagnetic și mărimi specifice pentru caracterizarea câmpului din interiorul foliei. De exemplu, o folie conductoare de grosime g realizată dintr-un material liniar cu conductivitatea σ , scufundată într-un izolanț va avea o relație de material de forma:

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s \mathbf{E}_t \quad (6.4)$$

în care $\mathbf{E}_t$ este componenta tangențială a intensității câmpului electric. Această relație este obținută prin integrarea pe grosimea g a legii conducției ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) proiectată pe planul tangent la folie. Considerând grosimea g foarte mică, variația câmpului în direcția transversală este neglijabilă, rezultă următoarele caracteristici ale foliei conductoare:

$\mathbf{J}_s = g \mathbf{J}$ – densitatea superficială de curent [A/m];

$\sigma_s = g \sigma$ – conductivitatea superficială [S].

Densitatea superficială de curent caracterizează starea electrocinetică a foliei. Ea este un câmp bidimensional de vectori orientați tangențial față de folie. Câmpul depinde de cele două coordonate parametrice u, v ale suprafeței S : $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(u, v)$, deoarece datorită grosimii g foarte mici, densitatea de curent $\mathbf{J}$ are o variație nesemnificativă în direcția normală a foliei.

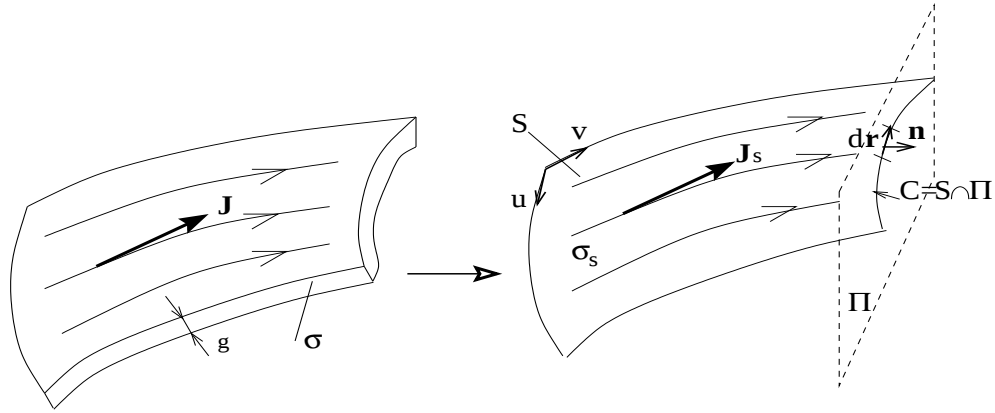


Figura 6.8: Modelarea unei folii conductoare

Pentru calcul curentului ce străbate folia se va folosi relația:

$$i = \int_C \mathbf{J}_s \mathbf{n} dr \quad (6.5)$$

obținută prin trecerea la limită a relației clasice $i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A}$, și în care C este intersecția dintre S și planul de secțiune Π , iar $\mathbf{n}$ este normala la Π .

În mod asemănător se obțin relațiile de material specifice foliilor dielectrice și respectiv magnetice:

$$\mathbf{D}_s = \varepsilon_s \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{B}_s = \mu_s \mathbf{H}_t \quad (6.6)$$

în care $\mathbf{E}_t$ și $\mathbf{H}_t$ sunt componentele tangențiale ale intensității câmpului electric, respectiv magnetic și:

$\mathbf{D}_s = g \mathbf{D}$ – inducția echivalentă superficială (densitatea pânzei de flux electric) $[C/m]$;

$\mathbf{B}_s = g \mathbf{B}$ – inducția magnetică superficială (densitatea pânzei de flux magnetic) $[Tm]$;

$\varepsilon_s = g \varepsilon$ – permitivitatea superficială $[F]$;

$\mu_s = g \mu$ – permeabilitatea superficială $[H]$,

iar fluxul electric și cel magnetic au expresiile:

$$\psi = \int_C \mathbf{D}_s \mathbf{n} dr, \quad (6.7)$$

$$\varphi = \int_C \mathbf{B}_s \mathbf{n} dr. \quad (6.8)$$

Chiar dacă grosimea reală g a foliei nu apare în modelul final (aceasta fiind reprezentată de o suprafață cu “grosime” nulă), ea joacă un rol important în modelarea fizică, atât pentru calculul parametrilor superficiali de material cât și pentru interpretarea densităților pânzelor de flux.

6.3 Modelarea electromagnetică a foliilor și firelor

Suprafețele intervin în modelarea geometrică pentru a reprezenta mulțimea punctelor de pe frontiera domeniului analizat sau a domeniilor de omogenitate pentru proprietățile de material (frontierele pieselor componente ale dispozitivului). Discontinuitatea proprietăților de material determină de obicei și discontinuitatea mărimilor caracteristice câmpului.

Curbele și punctele reprezintă muchiile și vârfurile părților componente, deci puncte în care suprafețele de discontinuitate nu sunt netede. Din acest motiv, în astfel de curbe și puncte câmpul poate avea discontinuități de ordin superior, de exemplu să ia valori nemărginite.

Să considerăm pentru început, o suprafață de discontinuitate simplă S_d , ce separă două medii liniare cu constante de material diferite (6.9).

La trecerea prin suprafața S_d , de la mediul 1 la mediul 2 liniile câmpului electric suferă o discontinuitate a direcției (o refracție). Notând cu α_1 și α_2 unghiul dintre vectorul câmp electric și normala la suprafață rezultă:

$$tg\alpha_1 = \frac{D_{t1}}{D_{n1}} = \frac{\varepsilon_1 E_t}{D_n}, \quad tg\alpha_2 = \frac{D_{t2}}{D_{n2}} = \frac{\varepsilon_2 E_t}{D_n}$$

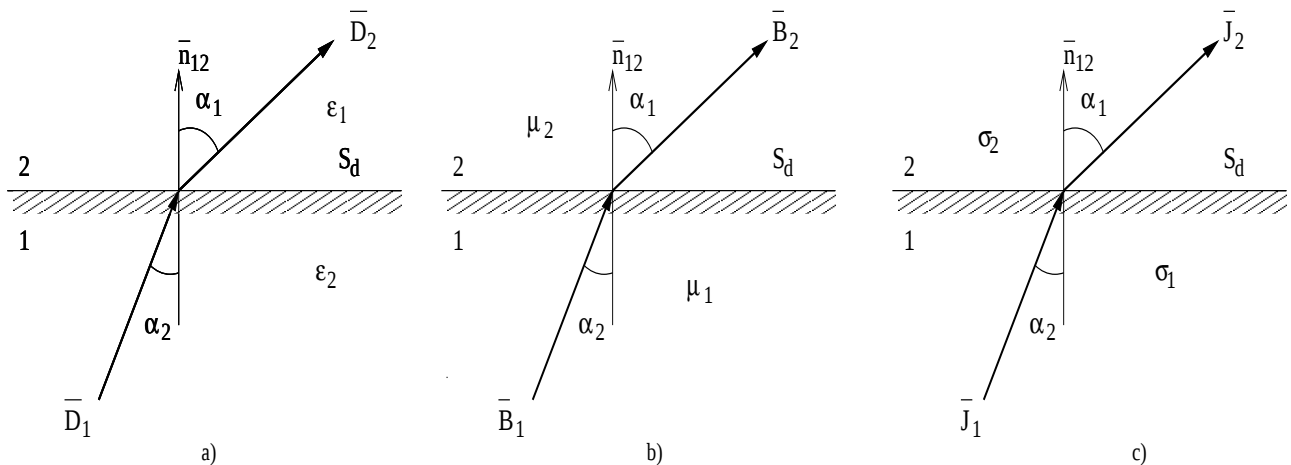


Figura 6.9: Refracția liniilor de câmp

deci

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad (6.9)$$

deoarece conform cu legea inducției $E_{t1} = E_{t2} = E_t$ și conform cu legea fluxului electric $D_{n1} = D_{n2} = D_n$.

Dacă unul dintre medii, de exemplu 1 este anelectric ($\varepsilon_1 \rightarrow 0, D_1 = 0$), rezultă $D_{n2} = 0$, deci faptul că liniile de câmp trec tangențial pe la suprafața mediului respectiv ($\alpha_2 \rightarrow \pi/2$), ca în figura 6.10 a. Dacă în schimb, mediul 1 este feroelectric ideal ($\varepsilon_1 \rightarrow \infty, E_1 = 0$), rezultă că $E_{t2} = 0$, deci faptul că liniile de câmp sunt orientate în exterior perpendicular pe suprafața corpului respectiv ($\alpha_2 \rightarrow 0$), ca în figura 6.10 b.

Folosind raționamente asemănătoare se demonstrează relația referitoare la liniile câmpului magnetic:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (6.10)$$

și faptul că liniile de câmp magnetic sunt orientate perpendicular ($\alpha = 0$) pe suprafața corpurilor feromagnetice ideale (cu $\mu \rightarrow \infty$) și se preling ($\alpha = \pi/2$) pe la suprafața corpurilor amagnetice (cu $\mu \rightarrow 0$).

Liniile de curent în regim electrocinetic staționar satisfac relația:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (6.11)$$

urmând ca în vecinătatea corpurilor izolante ($\sigma = 0$) liniile de curent să fie orientate tangențial ($\alpha = \pi/2$) la suprafața corpurilor, iar în cazul corpurilor supraconductoare ($\sigma \rightarrow \infty$) liniile de curent să fie orientate ortogonal.

Relațiile 6.9, 6.10 și 6.11 sunt cunoscute sub numele de teoremele refracției liniilor de câmp.

Trebuie remarcat că în regim electrostatic corpurile conductoare fără câmp imprimat au intensitatea câmpului electric nulă ($E = 0$), conform condiției de echilibru electrostatic ($J = 0$). În consecință conductoarele se comportă ca domenii feroelectrice

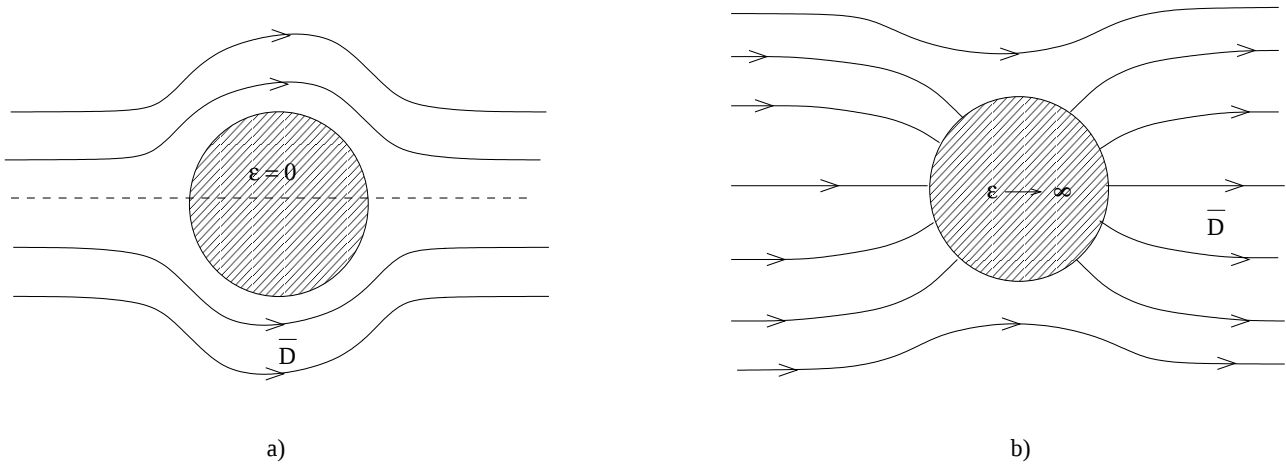


Figura 6.10: Spectrul câmpului în vecinătatea corpurilor cu proprietăți ideale: a) Câmpul $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ pentru ϵ , μ , respectiv $\sigma = 0$; b) Câmpul $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{J}$ pentru ϵ , μ , respectiv $\sigma \leftarrow \infty$.

ideale și putem presupune formal $\epsilon \rightarrow \infty$. Liniile câmpului electric din domeniul izolant exterior sunt perpendiculare pe suprafața conductorului (figura 6.10, b). În realitate în conductor $\epsilon = \epsilon_0$, ceea ce face ca în interiorul conductorului să se anuleze nu numai E , ci și D . Dispariția, respectiv apariția liniilor de câmp electric la suprafața conductorului evidențiază faptul că această suprafață este electrizată negativ, respectiv pozitiv. Chiar dacă inițial conductorul avea sarcină nulă, prin introducerea sa în câmp electric sub acțiunea acestuia sarcina totală nulă se redistribuie. La suprafața conductorului se separă *sarcini* numite de *influență*, care au o valoare totală nulă și care fac ca în interior câmpul E să se anuleze. Pentru a caracteriza starea de electrizare superficială se definește mărimea scalară ρ_s măsurată în $[C/m^2]$ și numită *densitate superficială de sarcină*. Sarcina totală a corpului se obține prin integrare pe suprafață:

$$q = \int_S \rho_s dA. \quad (6.12)$$

În aceste condiții, legea fluxului electric are următoarea formă pe suprafețe de discontinuitate:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (6.13)$$

sau echivalent $\text{div}_s \mathbf{D} = \rho_s$. Componenta normală a inducției are salt nul (“se conservă”) doar dacă suprafața nu este electrizată.

Problema determinării distribuției de sarcină pe suprafața electrozilor conductori este strâns legată de problema fundamentală a electrostaticii. O dată determinat câmpul în izolant, prin aplicarea relației (6.13) rezultă $\rho_s = \mathbf{nD} = D_n$.

În figura 6.11 a se reprezintă modul în care este distribuită densitatea de sarcină la suprafața unui electrod plan-parallel care are o muchie cu raza de curbură r . Se constată că cea mai mare densitate de sarcină $\rho_{smax} = D_{nmax}$ are loc pe muchie, acolo unde câmpul este maxim. Această valoare maximă crește puternic o dată cu scăderea razei de curbură, urmând ca valoarea sa să fie nemărginită atunci când $r = 0$. Această comportare este cunoscută sub numele de *efect de muchie*.

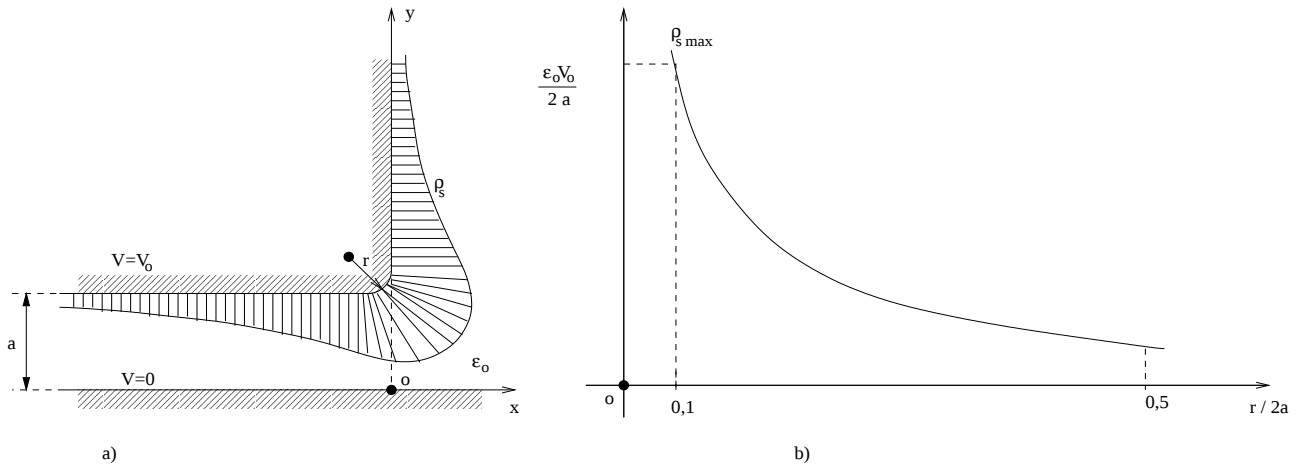


Figura 6.11: Distribuția sarcinii la suprafața unui electrod

În figura 6.11 *b* este prezentată variația densității ρ_{smax} în funcție de r , calculată cu un model simplificat (metoda imaginilor cu sarcini echivalente distribuite filiform cu densitatea ρ_l), în care:

$$V_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{2a}; \quad (6.14)$$

$$D_{max} = \frac{\rho_l}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a} \right); \quad (6.15)$$

deci

$$\rho_{smax} = D_{nmax} = \frac{\epsilon_0 V_0}{2a} \left(\frac{2a}{r} + 1 \right) \frac{1}{\ln \frac{r}{2a}}.$$

Folosind același tip de raționament se constată că în cazul vârfurilor și al intersecțiilor de muchii, densitatea superficială de sarcină și câmpul maxim tind și mai rapid către infinit, pe măsură ce raza de curbura r a vârfului tinde către zero:

$$\rho_{smax} = D_{nmax} = \frac{\epsilon_0 V_0}{2a} \left(\frac{2a}{r} + 1 \right). \quad (6.16)$$

Această comportare este cunoscută sub numele de *efect de vârf*.

Datorită efectelor de muichie și de vârf este imposibil să se analizeze solicitările dielectrice adoptând forme geometrice simplificate pentru electrozi. Valoarea maximă a câmpului electric nu poate fi calculată dacă se neglijează razele de curbura ale muchiilor și vârfurilor 'cum se întâmplă când acestea se reprezintă prin curbe și puncte (modele filiforme și punctiforme).

Foliile pot fi și surse de câmp, dacă sunt polarizate, magnetizate sau sunt sediul unor câmpuri imprimate. În acest caz relațiile au forma:

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_{it}), \quad \mathbf{D}_s = \epsilon_s \mathbf{E}_t + \mathbf{P}_{pt}, \quad \mathbf{B}_s = \mu_s \mathbf{H}_t + \mu_0 \mathbf{M}_{pt}$$

în care:

- $\mathbf{E}_{it}[V/m]$ este câmpul electric imprimat, orientat longitudinal la S ;
- $\mathbf{P}_{pt} = g\mathbf{P}_p[C/m]$ este componenta tangențială a polarizației permanente superficiale
- $\mathbf{M}_{pt} = g\mathbf{M}_p[C/m]$ este componenta tangențială a magnetizației permanente superficiale.

Foliile pot fi polarizate sau magnetizate nu numai tangențial, ci și normal. În acest ultim caz se utilizează vectorii orientați normal la suprafața foliei $\mathbf{P}_{pn}[C/m]$ și $\mathbf{M}_{pn}[A]$, care sunt obținuți prin integrare de-a lungul grosimii g a vectorilor $\mathbf{P}_p$ și respectiv $\mathbf{M}_p$. Acești vectori sunt numiți polarizație, respectiv magnetizație superficială normală. Procedând asemănător cu $\mathbf{E}_i$ se obține $\mathbf{E}_{in}$ măsurat în $[V]$, și care reprezintă saltul de potențial între fețele foliei. În acest caz se spune pe suprafața foliei apare un dublu strat de sarcină.

Adunând cele două componente se obține:

- $\mathbf{P}_{ps} = \mathbf{P}_{pt} + \mathbf{P}_{pn}$ - densitatea pânzei de polarizație permanentă $[C/m]$;
- $\mathbf{M}_{ps} = \mathbf{M}_{pt} + \mathbf{M}_{pn}$ - densitatea pânzei de magnetizație permanentă $[A]$;
- $\mathbf{E}_{is} = g\mathbf{E}_{it} + \mathbf{E}_{in}$ - intensitatea superficială a câmpului electric imprimat $[V]$.

Densitatea superficială de sarcină ρ_s reprezintă o altă sursă de câmp specifică foliilor electrizate, mai ales în cazul foliilor dielectrice (izolante), la care electrizarea este de obicei de natură neelectrică, obținându-se de exemplu prin frecare. În cazul foliilor conductoare sarcina totală q este sursă de câmp, în schimb se poate considera că distribuția sarcinilor induse ρ_s perturbă doar câmpul asigurând echipotențialitatea foliei.

La traversarea foliilor câmpul electromagnetic suferă salturi (discontinuități) ale unor componente. Acestea sunt date de forma legilor câmpului pe suprafețe de discontinuitate imobile:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \iff \text{div}_s \mathbf{D} = \rho_s; \quad (6.17)$$

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \iff \text{div}_s \mathbf{B} = 0; \quad (6.18)$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial t} \iff \text{rot}_s \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial t}; \quad (6.19)$$

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial t} \iff \text{rot}_s \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial t}; \quad (6.20)$$

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \iff \text{div}_s \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \quad (6.21)$$

Firele se reprezintă geometric prin curbe, nu neapărat drepte (de exemplu, un arc de cerc sau o linie poligonală), dar au în plus proprietăți dielectrice, magnetice sau de conducție. Definitiv pentru un fir este faptul că diametrul transversal este mult mai mic decât lungimea sa. În acest caz, în secțiunea transversală de arie A , câmpul și parametrii de material au variație neglijabilă, iar firul se reprezintă prin curba sa mediană și este caracterizat local în cazul în care este liniar prin relații de forma:

$$i = G_l E_t, \quad \psi = R_{dl} E_t, \quad \varphi = R_{ml} H_t \quad (6.22)$$

sau echivalent

$$E_t = R_l i, \quad E_t = \Lambda_{dl} \psi, \quad H_t = \Lambda_{ml} \varphi \quad (6.23)$$

în care $E_t[V/m]$ și $H_t[A/m]$ sunt componentele tangențiale ale intensității câmpului electric, respectiv magnetic, iar

- $G_l = 1/R_l = \sigma A$ este conductanța lineică $[Sm]$ egală cu inversa rezistenței lineice $[\Omega/m]$;
- $R_{dl} = 1/\Lambda dl = \varepsilon A$ este reluctanța dielectrică lineică $[Fm]$ egală cu inversa permeanței dielectrice lineice $[1/Fm]$;
- $R_{ml} = 1/\Lambda ml = \mu A$ este reluctanța magnetică lineică $[Hm]$ egală cu inversa permeanței magnetice lineice $[1/Hm]$.

Relațiile (6.22) și (6.23) se obțin prin integrarea relațiilor de material pe secțiunea transversală de arie A , deci i , ψ și φ reprezintă curentul, fluxul electric și fluxul magnetic în secțiunea curentă a firului.

Firele pot fi surse de câmp, dacă ele sunt electrizate, polarizate, magnetizate sau sediul unor câmpuri electrice imprimare. Pentru caracterizarea acestor surse se utilizează mărimile fizice obținute prin integrarea mărimilor caracteristice surselor pe secțiunea transversală a firului de arie vectorială $\hat{A} = \mathbf{n}A$:

- $\rho_l = \rho A[C/m]$ - densitatea lineică de sarcină;
- $P_{pl} = \mathbf{P}_p \hat{A}[C]$ - densitatea lineică a polarizației permanente;
- $M_{pl} = \mathbf{M}_p \hat{A}[Am]$ - densitatea lineică a magnetizației permanente,

cu excepția tensiunii lineice imprimate $e_{il} = \mathbf{E}_i \mathbf{n}$, care se obține doar prin proiectarea câmpului imprimat pe direcția tangențială.

Integrând relațiile caracteristice de material pe suprafața de arie A se obțin formulele lor locale pe fire:

$$\begin{aligned}\psi &= R_{dl} E_t + P_{pl}; \\ \varphi &= R_{ml} H_t + \mu_0 M_{pl}; \\ i &= G_{lt}(E_t + e_{il}).\end{aligned}\tag{6.24}$$

Notând cu $E_t = u_l$ tensiunea lineică, în cazul firelor conductoare relația de material are forma $u_l + e_{il} = R_l i$, care integrată de-a lungul firului conduce la relația clasică a lui Joubert din teoria circuitelor electrice filiforme.

Corpurile de dimensiuni neglijabile sunt reprezentate în modelarea electromagnetică prin “puncte materiale”. Spre deosebire de folii și fire, corpurile punctiforme cu proprietăți de material diferite nu modifică spectrul câmpului electromagnetic; de exemplu, o impuritate conductoare scufundată într-un izolant perturbă câmpul cu atât mai puțin cu cât diametrul ei este mai mic. În schimb, corpurile punctiforme pot influența puternic câmpul electromagnetic atunci când sunt surse ale câmpului. Pentru a caracteriza calitativ aceste surse de câmp se utilizează:

- $q = \rho V[C]$ - sarcina corpului punctiform;
- $\mathbf{p}_p = \mathbf{P}_p V[Cm]$ - momentul dipolar electric permanent;
- $\mathbf{m}_p = \mathbf{M}_p V[Am^2]$ - momentul dipolar magnetic permanent;

- $\mathbf{j}_i = \sigma \mathbf{E}_i V[Am]$ - curentul electric imprimat de un corp punctiform.

Se constată că toate aceste mărimi se obțin prin integrarea mărimilor locale corespunzătoare pe volumul V al corpului, și deoarece acesta este neglijabil prin înmulțirea cu acest volum.

Forma globală a legilor câmpului electromagnetic trebuie să țină cont de prezența foliilor, firelor și punctelor materiale:

- sarcina totală care intervine în legea fluxului electric sau în cea a conservării sarcinii are expresia:

$$q = \int_D \rho dv + \int_{S_d} \rho_s dA + \int_{C_d} \rho_l dr + \sum_{k=1}^n q_k \quad (6.25)$$

obținută prin suma contribuțiilor corpurilor de volum nenul D , foliilor S_d , firelor C_d și corpurilor punctiforme $k = 1, n$.

- curentul de conducție care intervine în legea circuitului magnetic sau în cea a conservării sarcinii este:

$$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \int_{C=S_\Gamma \cap S_d} \mathbf{J}_s \mathbf{n} dr + \sum_{k=1}^n i_k \quad (6.26)$$

- fluxul electric care intervine în legea fluxului electric sau în legea circuitului magnetic este:

$$\psi_S = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{A} + \int_{C=S \cap S_d} \mathbf{D}_s \mathbf{n} dr + \sum_{k=1}^n \psi_k \quad (6.27)$$

- fluxul magnetic care intervine în legea fluxului magnetic sau în legea inducției este:

$$\varphi_S = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} + \int_{C=S \cap S_d} \mathbf{B}_s \mathbf{n} dr + \sum_{k=1}^n \varphi_k \quad (6.28)$$

- puterea transferată de câmp corpurilor este:

$$P = \int_D \mathbf{J} \mathbf{E} dv + \int_{S_d} \mathbf{J}_s \mathbf{E} dA + \int_{C_d} i E_t dr \quad (6.29)$$

obținută prin suma integralelor din densitatea de volum a puterii, densitatea superficială a puterii disipate în folii și densitatea lineică a puterii disipate în fire conductoare.

6.4 Serii ierarhice de modele

Pentru a evidenția faptul că același dispozitiv admite mai multe modele cu grade diferite de rafinare va fi efectuat un studiu de caz pentru un dispozitiv foarte simplu și anume cablul coaxial.

Cablul coaxial (figura 6.12) este alcătuit dintr-un fir conductor cu secțiune circulară (de obicei din Cu) înconjurat de un izolant (de obicei polietilenă), care în exterior este înconjurat de o manta cilindrică conductoare (Cu). Acest dispozitiv este utilizat pentru transmiterea semnalelor electrice, astfel încât:

- semnalul să nu se modifice, chiar la frecvențe înalte sau când acestea sunt foarte rapid variabile în timp;
- dispozitivul să nu producă perturbații electromagnetice în jurul său;
- semnalul transmis să nu fie perturbat de câmpuri electromagnetice exterioare.

În regim staționar (c.c.) sau la frecvențe joase, curentul electric produs de sursa de la intrare străbate longitudinal conductorul central, sarcina, și se întoarce prin mantaua exterioară, astfel încât în condițiile în care izolantul este perfect (fără curenți de pierderi), curentul din sursă este egal cu cel din sarcină.



Figura 6.12: Cablul coaxial

Tensiunea electrică între terminalele de ieșire nu este egală cu tensiunea la intrare, decât la mersul în gol, deoarece de-a lungul conductorului are loc o cădere longitudinală de tensiune. În consecință în regim staționar singurul parametru caracteristic este rezistența lineică a cablului coaxial. Regimul câmpului electromagnetic care prezintă interes în acest caz este regimul electrodinamic staționar. Problema este foarte simplă, deoarece este plan-paralelă, iar curentul se distribuie uniform în secțiunea transversală atât în firul central (A_i), cât și în manta (A_m) urmând ca valoarea rezistenței lineice R_l să fie egală cu raportul dintre rezistivitate și aria secțiunii transversale: $R_l = R_c/l + R_m/l = \rho(1/A_c + 1/A_m)$. Circuitul echivalent este prezentat în figura 6.13 a.

Pe măsură ce frecvența tensiunii de alimentare crește intervin alte două efecte în funcționarea cablului: efectul capacitiv (curentul de deplasare orientat transversal prin izolantul dintre conductorul central și manta) și cel inductiv (tensiunea autoindusă, datorată câmpului magnetic ce înconjoară conductorul central). Pentru caracterizarea acestor efecte se pot folosi capacitatea lineică C_l și respectiv inductivitatea lineică L_l .

Pentru calculul acestor parametrii lineici trebuie rezolvată o problemă de electrostatică, și respectiv, una de regim magnetic permanent. Parametrii R_l , C_l și L_l calculați în regim permanent pot fi utilizați la analiza comportării dinamice. Cel mai simplu model de circuit cu parametri concentrați pentru cablul coaxial în regim dinamic este cel prezentat în figura 6.13 b.

Schema în T este o aproximare utilă doar pentru cabluri relativ scurte. Un cablu lung poate rezulta prin înlanțuirea a n astfel de scheme, valabile pentru tronsoane de lungime l/n . În realitate, parametrii unui cablu nu sunt concentrați, ci distribuiți. Considerând $n \rightarrow \infty$ rezultă o schemă în T pentru fiecare tronson de lungime infinit mică, urmând ca întreg cablul să fie caracterizat de un model de linie lungă (de transmisie), ca în figura 6.13 c, caracterizat de ecuațiile telegrafistilor (Thomson). Un astfel de model permite simularea fenomenului de propagare și determinarea vitezei de propagare a frontului de undă

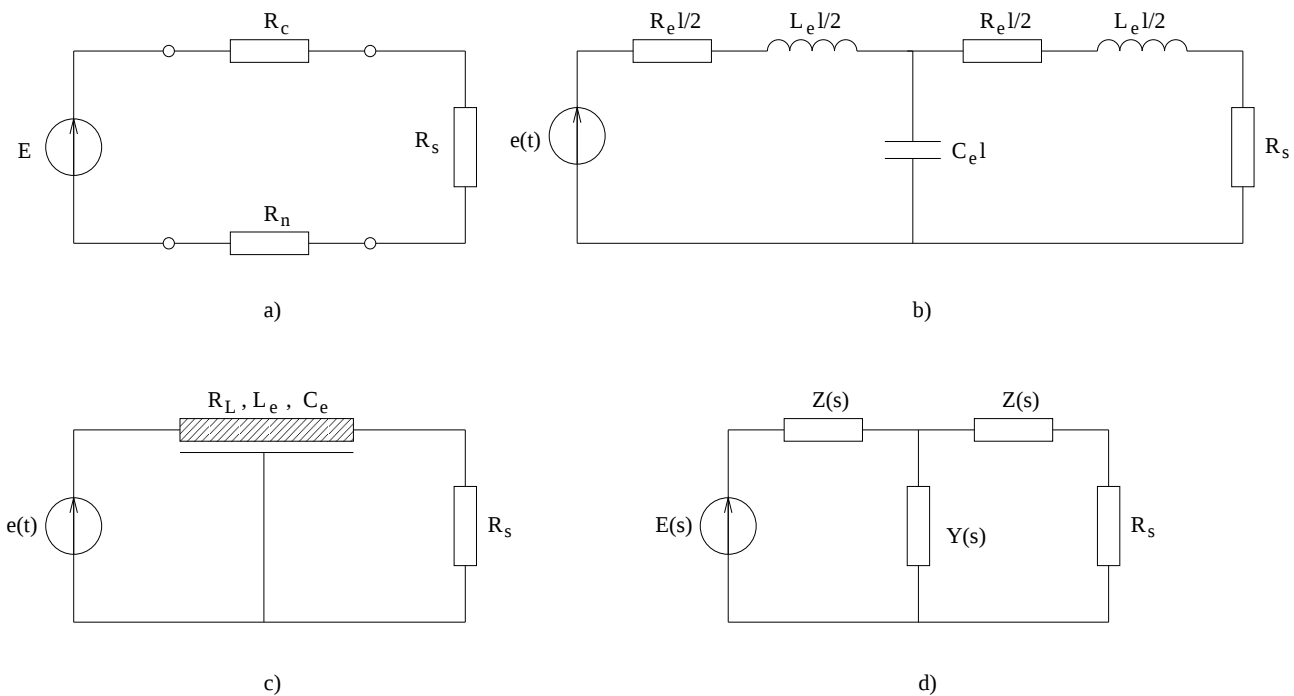


Figura 6.13: Modele ale cablului coaxial. a) Model staționar; b) Model cu parametri concentrați; c) Model cu parametri distribuiți; d) Model operațional.

(semnalul electric), a timpilor de întârziere, precum și a dispersiei datorate pierderilor sau a reflexiilor la capetele liniei.

Utilizând domeniul frecvenței, modelele prezentate anterior au reprezentarea operațională din figura 6.13 d, caracterizată de impedanța longitudinală $Z(s)$ și de admitanța transversală $Y(s)$. În cazul modelelor cu parametri concentrați, funcțiile de circuit $Z(s)$ și $Y(s)$ sunt funcții raționale cu un număr finit de poli și zerouri, de exemplu în cazul modelului 6.13 b avem $Z(s) = (R_l + sL_s)l/2$, $Y(s) = sC_l l$. În schimb, în cazul modelelor cu parametri distribuiți funcțiile de circuit $Z(s)$ și $Y(s)$ au o infinitate de poli și zerouri.

Un efect important, specific regimului cvasistaționar, care apare și în cablul coaxial este efectul pelicular. Curentul electric de conducție ce parcurge conductoarele cablului, produce un câmp magnetic variabil în timp, dacă și curentul variază în timp. Câmpul electric indus de acest câmp magnetic perturbă distribuția inițială de curent, urmând ca firul central să fie străbatut de curentul variabil care se distribuie de preferință superficial, la periferia acestuia. În consecință rezistența lineică întâmpinată la trecerea unui curent alternativ crește odată cu frecvența, aria aparentă prin care trece curent fiind tot mai mică. Pentru a caracteriza cantitativ acest efect este necesară analiza cablului coaxial în regim cvasistaționar, de tip anelectric în interiorul conductoarelor și tip amagnetic în izolanț. În final, se obține o schemă echivalentă ca cea din figura 6.13 d, dar cu expresii mai complicate pentru $Z(s)$ și $Y(s)$.

Seria modelelor posibile pentru cablul coaxial nu este încheiată, modelele mai complicate putând lua în considerare unul sau mai multe dintre următoarele efecte: curenți de pierdere prin izolanțul imperfect, efectele de capăt (unde câmpul electric nu mai este în mod necesar plan-paralel), imperfecțiunile geometrice atât cele longitudinale (modificarea diametrului firului), cât și cele transversale (abateri de la forma circulară perfectă), etc.

Pentru a analiza efectul acestor perturbații este necesară rezolvarea unor probleme de câmp, care de obicei nu admit soluție analitică și care pentru a obține rezultate utile la frecvențe foarte înalte sunt formulate în regim general variabil.

Iată deci, că din păcate analiza unui singur model pentru un dispozitiv nu permite stabilirea acurateții sale. Deci, pentru a delimita domeniul de aplicabilitate al unui model, acesta trebuie studiat comparativ cu un model mai complicat al aceluiași dispozitiv.

Trebuie remarcat că în activitatea inginerască de modelare, ținta nu este de a obține modelul de maximă acuratețe, ci esențial este compromisul optim între acuratețe și simplitate. Studiul, analiza și proiectarea unui dispozitiv trebuie făcute cu modelul cel mai simplu, dar care are o eroare de modelare satisfăcătoare (de obicei nu mai mică de 1) pentru scopul propus. Utilizarea unui model mult mai sofisticat decât cel adecvat conduce la o risipă inacceptabilă de resurse (efort de cercetare, măsurare, timp de calcul și în ultimă instanță bani). Iată de ce, ar trebui determinate pentru fiecare model și domeniul său de valabilitate, mai exact de aplicabilitate, prin aflarea felului în care variază eroarea de modelare (de neglijare a unui efect) față de una sau mai multe mărimi caracteristice, de exemplu, în cazul cablului coaxial caracterizat în principal prin factorul de transmisie (raportul dintre tensiunea de ieșire și cea de intrare), acuratețea unui model îl reprezintă variația cu frecvența a abaterii factorului de transmisie al respectivului model față de modelul superior din punct de vedere ierarhic (sau modelul la care un anumit efect nu a fost neglijat).

Capitolul 7

Aplicații

7.1 Cablu coaxial

Se va analiza cablu coaxial descris anterior în următoarele ipoteze simplificatoare:

- Se neglijează toleranțele și rugozitatea suprafețelor;
- Se neglijează efectele de capăt care apar la începutul și sfârșitul cablului;
- Se consideră dielectricul neelectrizat liniar, izotrop, omogen și fără pierderi ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\sigma = 0$);
- Se consideră că toate materialele sunt nemagnetice ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$);
- Se consideră cablu imobil și că mărimile nu variază în timp.

Scopul analizei este de a determina capacitatea lineică C_l și inductivitatea lineică L_l .

Pentru primul parametru se va considera cablu alimentat la o sursă de tensiune constantă cu ieșirea în gol. Firul central și mantaua conductoare reprezintă cei doi electrozi ai unui condensator. Ei sunt electrizați cu sarcini egale, dar de semn opus și produc în dielectric un câmp electric radial. Regimul câmpului în care va fi determinat parametrul C_l este cel electrostatic, cu ecuațiile: $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ și $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$.

Pentru calculul inductivității se va considera cablu cu ieșirea în scurtcircuit și alimentat cu o sursă de curent dat, constant în timp. Curentul ce străbate firul central și se întoarce prin manta produce un câmp magnetic constant în timp, ce va înconjura firul central.

Pentru determinarea parametrului L_l se va considera regimul magnetic staționar, cu ecuațiile: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ și $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Firul central se consideră un cilindru din Cu ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma \neq 0$), cu raza a și lungimea L , iar mantaua un tub cilindric circular tot din Cu cu raza internă b și cea exterioară c . Dielectricul izolant ocupă spațiul dintre razele a și b și are constantele de material ε , μ_0 , $\sigma = 0$. Configurația geometrică evidențiază două tipuri de simetrii: axisimetrică și plan-paralelă. În consecință, problema este de tip $1.5D$, dar poate fi rezolvată și ca o problemă $2D$, cu reținerea în domeniul de calcul doar a unui sfert din secțiune, deoarece atât Ox , cât și Oy sunt axe de simetrie. Domeniul de calcul este un

sfert dintr-o coroană circulară (figura 7.1). Deoarece dielectricul este neelectrizat, sursele interne de câmp sunt nule, iar câmpul electrostatic fiind produs exclusiv de sarcinile distribuite la suprafața celor doi electrozi ($\rho = 0$, $\rho_s \neq 0$). El se datorează unor surse externe domeniului de calcul (reprezentate prin condiții de frontieră nenule).

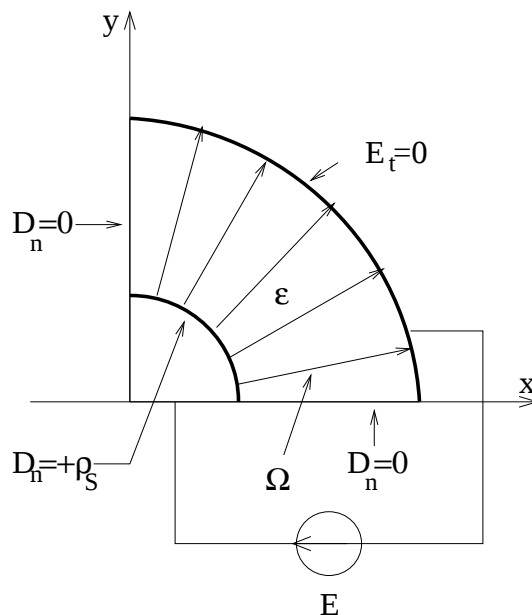


Figura 7.1: Cablu coaxial – secțiune

În regim magnetic staționar sursele interne de câmp sunt nenule în conductoare și nule în dielectric, în schimb sursele externe sunt nule ($H_{ext} = 0$).

Mărimile globale ce caracterizează cablul în regim electrostatic sunt:

$$u = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad \psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{A},$$

u fiind tensiunea între electrozi, calculată pe o curbă radială de la $r = a$ la $r = b$, iar $\psi = \rho_s \pi l a / 2$ este fluxul electric ce străbate dielectricul, calculat pe suprafața unui sfert de cilindru de rază $r \in (a, b)$ și lungime l . Conform legii fluxului electric sarcina firului este $q = 4\psi$. Capacitatea lineică este:

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{q}{lu} = \frac{4\psi}{lu} = \frac{2\rho_s \pi}{u}$$

Problema calculului capacității s-a redus astfel la problema fundamentală a electrostaticii. Dintre cele două alternative de excitație a electrozilor s-a ales varianta în care este cunoscută sarcina și trebuie calculată tensiunea prin integrarea câmpului. Datorită simetriei axiale sarcina se distribuie uniform pe cei doi electrozi $\rho_{s1} = q/(2\pi al)$, $\rho_{s2} = -q/(2\pi bl)$. Pentru $r = b$ se poate impune condiția $E_t = 0$, care este preferabilă condiției $D_n = \rho_{s2}$.

Mărimile globale ce caracterizează cablul în regim magnetic staționar sunt:

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad W_m = \int_D w dv,$$

i fiind curentul ce trece prin firul central de secțiune S al cablului, iar W_m este energia magnetică obținută prin integrarea densității de energie $w_m = \mathbf{BH}/2 = \mu_0 H^2/2$ pe un sfert din domeniul cablului. Deoarece conductoarele sunt masive, este indicată evitarea calculului inductivității cu formula liniară și preferarea metodei energetice. Energia totală este $4W_m = Li^2/2$, iar inductivitatea lineică are expresia:

$$L_l = \frac{L}{l} = \frac{8W_m}{i^2 l} = \frac{4\pi}{i^2} \int_0^c w_m r dr = \frac{2\pi\mu_0}{i^2} \int_0^c H^2(r) r dr.$$

Problema calculului inductivității se reduce la problema determinării câmpului magnetic produs de o distribuție dată de curent.

7.2 Cuva electrolitică

Se consideră o cuvă electrolitică de formă paralelipipedică, având pereții izolați cu excepția unuia din cei laterali care este catodul metalic, foarte bun conductor. În mijlocul cuvei se introduce vertical anodul, care este un electrod metalic, cilindric circular cu lungimea egală cu adâncimea cuvei.

Să se analizeze fenomenele din cuvă și să se calculeze grosimea stratului de metal depus dacă între cei doi electrozi se aplică un interval de timp o tensiune constantă cunoscută.

Datorită câmpului electric din cuvă (aparent datorită tensiunii aplicate între electrozi) electrolitul va trece în stare electrocinetică. El va fi parcurs de curent, care se închide prin electrozi și sursa exterioară. Cu cât tensiunea aplicată va fi mai mare, cu atât densitatea de curent va fi mai mare (curentul fiind proporțional cu tensiunea și conductanța electrolitului). Datorită conducției are loc un transfer de masă atât în electrolit cât și în electrozi. Datorită purtătorilor de sarcină, transferul de masă în electrolit are o pondere mai mare, realizându-se astfel depunerea de cationi extrași din catod pe anod.

Pentru analiza cantitativă a acestor fenomene vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- Se neglijează toleranțele și rugozitatea materialelor;
- Electrozii se consideră supraconductori ($\sigma \rightarrow \infty$);
- Electrolitul este un conductor liniar, izotrop și omogen;
- Se neglijează potențialul de electrod (mult mai mic decât tensiunea aplicată) deci și dublul strat de sarcină de la suprafața electrozilor;
- Mediile sunt macroscopice imobile, iar mărimile sunt constante în timp.

Fenomenul fundamental este distribuția curentului de conducție în cuvă, curent care generează transferul de masă (electroliză).

Deoarece nu interesează distribuția câmpului magnetic, analiza va fi făcută în regim electrocinetic staționar, folosind ecuațiile:

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \quad (7.1)$$

Se va nota cu a, b și c lungimea celor trei laturi ale cuvei. Diametrul electrodului central este d , iar distanța dintre axa sa și catod este $h = b/2$.

Problema are caracter plan - paralel (2D) (figura 7.2), configurația câmpului fiind aceeași în diferite secțiuni orizontale. Datorită simetriei față de planul yOz se poate studia doar jumătate din dreptunghiul de laturi $a \times b$. Domeniul de calcul este dreptunghiul $(0, a/2) \times (0, b)$ din care s-a eliminat semicercul cu diametrul d și centrul în $x = 0, y = b/2$, corespunzător secțiunii prin anod. Domeniul supus analizei este alcătuit exclusiv din electrolit omogen și are conductivitatea σ .

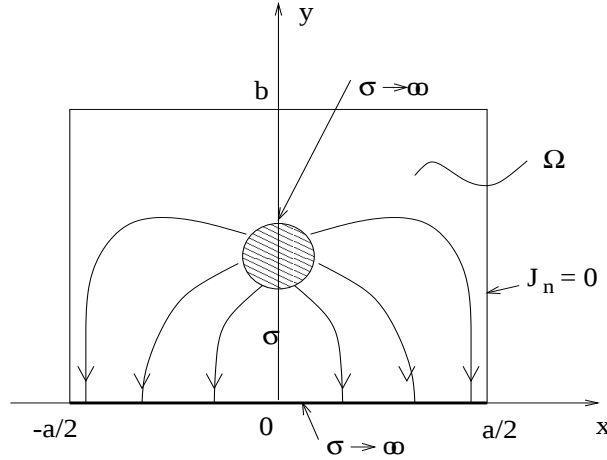


Figura 7.2: Cuvă electrolitică

Câmpul electrocinetic nu are surse interne, mai mult datorită caracterului izolant și tipului de simetrie, pe frontiera domeniului nu se injectează curenți, exceptând electrozii.

Pentru a caracteriza global starea electrică a cuvei se utilizează:

$$u = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} \quad (7.2)$$

tensiunea electrică u calculată pe o curbă C_{AB} ce unește electrozii și curentul i calculat pe o suprafață S , transversală față de curent (de exemplu, pe suprafața unui electrod).

Parametrul cel mai important al cuvei este rezistența sa electrică $R = u/i$, pentru a cărui determinare trebuie rezolvată problema fundamentală a electrocineticii. Vom prefera formularea în care electrozii au fiecare caracter echipotențial ($E_t = 0$) cu densitatea de curent J_n necunoscută, în schimb este cunoscută tensiunea u între electrozi. După determinarea distribuției de curent $\mathbf{J}$ se determină curentul total prin integrare.

Densitatea fluxului de masă transferată prin electroliză se determină cu ajutorul formulei locale a legii transferului de masă:

$$\delta = k\mathbf{J}, \quad (7.3)$$

urmând ca masa specifică depusă pe unitatea de suprafață [kg/m^2] să fie:

$$\rho_S = \frac{dm}{dA} = \delta_n t = kJ_n t, \quad (7.4)$$

în care J_n este componenta normală a densității de curent la suprafața electrodului, iar t este timpul cât durează procesul de electroliză. Grosimea g a stratului depus se calculează prin împărțirea lui ρ_S la densitatea ρ [kg/m^3] a materialului depus:

$$g = kJ_n t / \rho. \quad (7.5)$$

Iată deci că problema se reduce la determinarea densității de curent la suprafața electrozilor. Folosind forma integrală a legii electrolizei $m = kit$ se poate determina masa totală depusă, dar grosimea stratului și neuniformitatea acestuia se poate determina doar folosind forma locală a legii și soluția problemei de câmp electrocinetic.

7.3 Electromagnetul plonjor

Se consideră o bobină circulară înconjurată de un circuit feromagnetic format dintr-o armătură fixă (solidară cu bobina) și una mobilă, ce poate avea o mișcare axială de translație (figura 7.3). Se urmărește analiza câmpului electromagnetic și determinarea forței ce se exercită asupra armăturii mobile pentru diferite poziții ale acesteia, în condițiile în care bobina este alimentată în curent continuu sau la o tensiune alternativă dată.

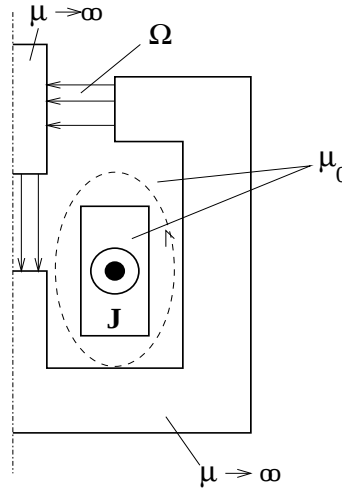


Figura 7.3: Electromagnet cu plonjor

Funcționarea electromagnetului se bazează pe câmpul magnetic produs de curentul din bobină (conform legii circuitului magnetic). Liniile câmpului magnetic tind să înconjoare curentul ce le-a produs, dar sunt dirijate de materialele feromagnetice. Reluctanța circuitului magnetic este tot mai mică pe măsură ce întrefierul scade, ceea ce face ca fluxul magnetic și implicit inductivitatea bobinei să crească. Conform teoremei forțelor generalizate, la flux constant va acționa asupra armăturii mobile o forță care tinde să micșoreze energia câmpului magnetic ($\omega_m = \varphi^2/2L$), deci va mări inductivitatea. Forța electromagnetului tinde deci să micșoreze întrefierul, indiferent cum este sensul curentului prin bobină.

Analiza cantitativă a acestor fenomene va fi făcută în următoarele ipoteze simplificatoare:

- Se neglijează imperfecțiunile tehnologice (cotele sunt exacte, fără toleranțe, iar suprafețele perfecte, fără rugozitate);
- Armăturile sunt considerate liniare, izotrope și omogene din punct de vedere magnetic și, pentru a simplifica modelul, vor fi considerate feromagnetice ideale ($\mu \rightarrow \infty$);
- Se neglijează neuniformitatea distribuției de curent în bobină datorită factorului de umplere subunitar (explicat prin prezența izolației între spire);
- Se consideră că în afara electromagnetului nu există surse de câmp magnetic;
- Corpurile se consideră imobile, iar mărimile electromagnetice caracteristice constante în timp.

În consecință pentru analiza celui mai simplu model al electromagnetului se va adopta regimul magnetic staționar, în care câmpul este caracterizat de ecuațiile:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (7.6)$$

Datorită simetriei axiale a problemei, aceasta are dimensiunea $2.5D$ și este suficient studiul câmpului într-un semiplan ce trece prin axa de simetrie. Domeniul de calcul va fi redus doar la bobina și aerul din jurul ei (inclusiv din întrefier), excluzându-se piesele feromagnetice ideale. Întrefierul radial va trebui mărginit superior de o frontieră fictivă (care poate fi plasată la nivelul superior al armăturii fixe dacă se neglijează efectul de umflare a liniilor de câmp). În consecință, în întreg domeniul de calcul materialul este nemagnetic cu $\mu = \mu_0$.

Câmpul magnetic este produs exclusiv de surse interne, respectiv de curentul din bobină. Pe frontiera feromagnetică a domeniului $H_t = 0$ (deoarece $\mu = 0$), iar pe frontiera superioară a întrefierului radial $B_n = 0$ (deoarece nu există surse externe de câmp).

Mărimile globale ce caracterizează acest sistem sunt:

$$\Theta = ni = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad \varphi_f = \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad \varphi = n\varphi_{fmed} = \frac{n}{A} \int_S \varphi_f d\mathbf{A} \quad (7.7)$$

în care n este numărul de spire, i este curentul prin bobină, Θ solenația bobinei de secțiune S , φ_f fluxul fascicular pe o spiră S_Γ a bobinei (dependent de coordonatele r și z), φ fluxul total obținut prin produsul dintre numărul de spire și fluxul fascicular mediu pe suprafața S .

Inductivitatea bobinei

$$L = \frac{\varphi}{i} \quad (7.8)$$

se calculează presupunând-o parcursă de un curent i și determinând distribuția de câmp magnetic $\mathbf{B}$ și prin integrarea fluxului total φ .

Forța care acționează asupra armăturii mobile se calculează cu teorema forțelor generalizate:

$$F = - \left. \frac{\partial \omega_m}{\partial \delta} \right|_{\varphi} = + \left. \frac{\partial \omega_m}{\partial \delta} \right|_i = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial \delta}, \quad (7.9)$$

în care s-a notat cu δ întrefierul principal (axial). Iată deci că pentru a calcula forța este necesară determinarea variației $L(\delta)$.

Pentru a studia comportarea electromagnetului atunci când bobina acestuia are la borne o tensiune alternativă dată $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$, vom utiliza cel mai simplu model bazat pe rezultatele din regim staționar. Datorită liniarității, curentul absorbit de bobină este tot sinusoidal:

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i), \quad \text{cu } I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

în care R este rezistența bobinei și L este inductivitatea sa. Înlocuind curentul instantaneu în expresia forței se obține o variație în timp de frecvență dublă suprapusă peste o componentă medie a forței:

$$F_{med} = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial \delta}. \quad (7.10)$$

În acest fel variația inductanței $L(\delta)$ calculată în regim staționar poate fi folosită și în regim armonic.

Următorul model al electromagnetului ar putea include în domeniul de calcul și armăturile cu o permeabilitate finită, cu o caracteristică de magnetism neliniară și/sau cu o conductivitate σ nenulă pentru a modela curenții turbionari din miez.

7.4 Mașina cu magneți permanenți

Se consideră un motor electric cu rotorul realizat dintr-un magnet permanent și cu statorul alcătuit din două perechi de poli, alimentați cu impulsuri de curent, care fac ca rotorul să funcționeze în regim de “pas cu pas”. Magnetul permanent din rotor produce un câmp magnetic care se închide prin stator (figura 7.4). Conform teoremei forțelor generalizate, sistemul va evolua către un minim al energiei magnetice, care corespunde unui minim al întrefierului (datorită “anizotropiei” constructive axa rotorului se va alinia cu o axă polară). Dacă bobinele din axa perpendiculară sunt alimentate, atunci câmpul magnetic produs de ele se va suprapune peste câmpul produs de rotor și va determina un cuplu nenul care acționează asupra rotorului și îl învârtă cu 90° , până într-o nouă poziție de echilibru. Problema pe care o formulăm este să se determine modul în care variază cuplul asupra rotorului în funcție de poziția sa, atunci când o pereche de poli este alimentată în curent continuu.

Pentru a efectua această analiză vom adopta următoarele ipoteze simplificatoare:

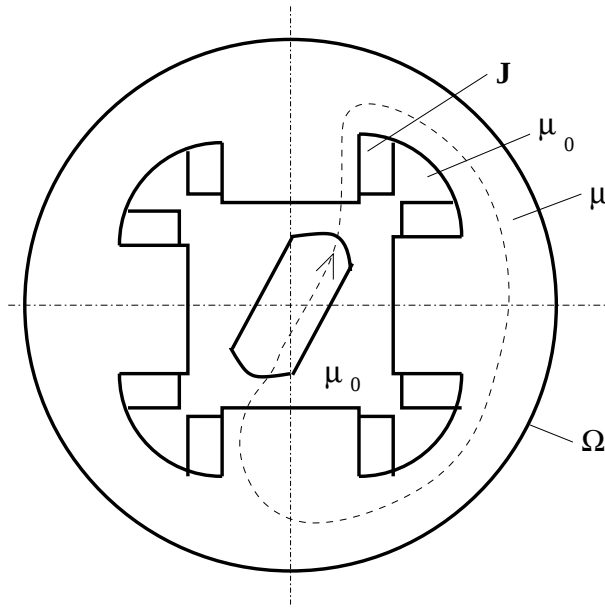


Figura 7.4: Motor cu magneți permanenți

- se neglijează toleranțele și rugozitățile suprafețelor;
- statorul este alcătuit din material feromagnetic ideal ($\mu \rightarrow \infty$);
- rotorul este alcătuit dintr-un material magnetic dur (magnet cu pământuri rare) cu o caracteristică de magnetizare ce se poate aproxima prin $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$, în care $\mathbf{M}_p$ este magnetizația permanentă, iar $B_r = \mu_0 M_p$ este inducția remanentă;
- bobinele sunt realizate din cupru și se neglijează neuniformitatea distribuției curentului în structura transversală;
- se neglijează efectele de capete (fluxul de dispersie frontală) și se presupune câmpul distribuit similar în toate planurile transversale;
- se neglijează efectul magnetic al oricărei perturbații exterioare;
- rotorul se presupune imobilizat și curentul constant în timp.

Conform acestor ipoteze regimul câmpului este cel magnetic staționar, problema fiind plan – paralelă (2D), dar spre deosebire de electromagnetul studiat anterior caracteristica neliniară (afină) a materialelor magnetice este esențială în funcționarea dispozitivului.

Ecuatiile câmpului au forma locală:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p. \quad (7.11)$$

În modul cel mai simplu, modelul de calcul este redus la rotor ($\mu = \mu_0, \mathbf{M}_p \neq 0, \mathbf{J} = 0$), aerul din jurul său ($\mu = \mu_0, \mathbf{M} = 0, \mathbf{J} = 0$) și bobinele ($\mu = \mu_0, \mathbf{M} = 0, \mathbf{J} \neq 0$), oprindu-se la frontiera cu statorul presupus feromagnetic ideal, deci cu câmp nul ($H = 0$). Dacă se dorește analiza influenței statorului (importantă în cazul unor curenți mari care îl

saturează), atunci domeniul de calcul se extinde până la aerul care mărginește exterior statorul și se include un al patrulea tip de material, cel statoric (în acest caz pe frontieră $B_n = 0$).

Câmpul magnetic nu are surse externe, dar are ca surse interne curentul din bobină și magnetizația permanentă a rotorului.

Pentru calculul cuplului ce se exercită asupra rotorului rotit cu unghiul α se poate folosi fie teorema forțelor generalizate:

$$C = \left. \frac{\partial W_m}{\partial \alpha} \right|_i \quad \text{cu} \quad W_m = \int_D \omega_m dv, \quad (7.12)$$

în care $\omega_m = \mathbf{B}\mathbf{H} - B^2/2\mu$ (expresia densității de energie valabilă în interiorul materialelor afine) sau cuplul tensiunilor maxwelliene:

$$\mathbf{C} = \int_{\Sigma} \mathbf{R} \times (\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (7.13)$$

calculat prin integrarea pe o suprafață închisă Σ (sau pe o curbă închisă, în cazul problemelor 2D) ce trece prin aer și înconjoară rotorul. Este de preferat cea de-a doua metodă deoarece ea se poate aplica fără modificări în cazul în care se ia în considerare neliniaritatea magnetică a statorului.

7.5 Transformatorul monofazat

Se consideră un transformator realizat din două bobine înfășurate una peste alta și montate pe o carcasă montată pe un miez magnetic de tip manta ($E + I$). Să presupunem că la bornele înfășurării primare (bobinată în exterior) se aplică o tensiune sinusoidală și că interesează tensiunea la bornele înfășurării secundare, între bornele căreia este conectată o sarcină, de exemplu rezistența R .

Deoarece în spirele înfășurării primare există un câmp electric caracterizat prin tensiunea aplicată, aceasta va fi parcursă conform legii inducției de curent primar. Acest curent variază periodic în timp și produce un câmp magnetic periodic ce înconjoară bobina primară, dar este dirijat de-a lungul miezului feromagnetic (figura 7.5). Aceasta face ca cea de-a doua bobină să fie înălțuită de flux magnetic variabil în timp, deci în ea să se inducă un câmp electric, caracterizat global de tensiunea secundară. Dacă circuitul secundar este închis prin rezistența de sarcină, atunci el va fi parcurs de curent secundar nenul. Trebuie remarcat că acest curent secundar modifică distribuția câmpului în interiorul transformatorului. Dacă cele două bobine au număr diferit de spire, atunci transformatorul este coborâtor ($n_2 < n_1$) sau ridicător ($n_2 > n_1$) de tensiune. Randamentul energetic al transformării este subunitar, datorită pierderilor de putere în rezistențele înfășurărilor, pierderilor prin curenți turbionari sau prin histerezis în miezul magnetic.

Pentru a caracteriza cantitativ aceste fenomene complexe vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- se neglijează toleranțele și rugozitatea suprafețelor;

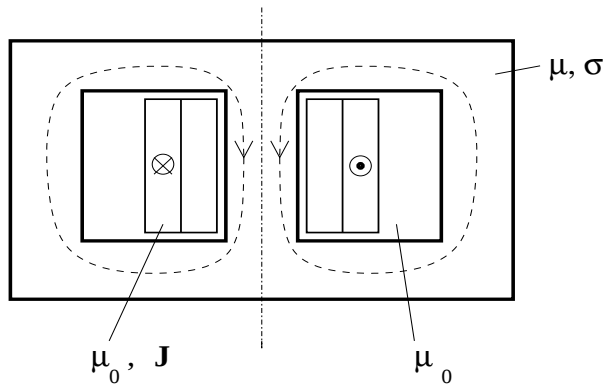


Figura 7.5: Transformator

- se neglijează dispersia frontală, presupunând că distribuția câmpului este aceeași în orice plan transversal;
- se neglijează întrefierul tehnologic din miezul magnetic;
- miezul este alcătuit dintr-un material magnetic liniar, izotrop omogen și fără pierderi prin histerezis, dar cu conductivitatea σ ;
- curentul se presupune uniform în secțiunea transversală a bobinei primare, iar frecvența acestuia este suficient de mică (de exemplu cea industrială);
- se va presupune că bobina secundară funcționează în gol ($R \rightarrow \infty$), deci curentul secundar este nul;
- nu există surse externe de câmp electromagnetic care să perturbe funcționarea transformatorului.

În aceste condiții câmpul electromagnetic din transformator se află în regim cvasistaționar inductiv (anelectric), ecuațiile fiind:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \quad (7.14)$$

urmând ca toate mărimile locale să varieze sinusoidal în timp, cu aceeași frecvență.

Cele trei subdomenii din care este alcătuit domeniul transformatorului sunt:

- miezul magnetic ($\mu = \mu_{Fe}$, $\sigma = \sigma_{Fe}$, $J_i = 0$);
- bobina primară parcursă de un curent impus ($\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$, $J_i \neq 0$);
- aerul în care se include și bobina secundară, deoarece aceasta este parcursă de curent nul ($\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$, $J_i = 0$).

Datorită existenței unui plan vertical de simetrie se poate studia doar jumătatea din dreapta a transformatorului. Antisimetria față de planul orizontal central permite studiul doar al unui sfert.

Singura sursă de câmp este curentul imprimat J_i în bobina primară, urmând ca pe frontiera dreptunghiulară a domeniului să nu se “injecteze” câmp magnetic exterior ($B_n = 0$).

După rezolvarea problemei fundamentale a analizei câmpului, se determină distribuția mărimilor locale $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$, care permit apoi determinarea mărimilor globale:

$$\begin{aligned}\varphi_f &= \int_{S_r} \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad \varphi_1 = n_1 \varphi_{1_{med}} = \frac{n_1}{A_1} \int_{S_1} \varphi_f dA, \\ \varphi_2 &= n_2 \varphi_{2_{med}} = \frac{n_2}{A_2} \int_{S_2} \varphi_f dA, \\ u_1 &= \frac{d\varphi_1}{dt}, \quad u_2 = \frac{d\varphi_2}{dt},\end{aligned}$$

în care φ_f este fluxul fascicular al unei spire Γ (dependent de poziția spirei), φ_1 este fluxul total al bobinei primare, egal cu numărul de spire n_1 înmulțit cu fluxul fascicular mediat pe suprafața transversală S_1 a bobinei primare de arie A_1 , φ_2 este fluxul bobinei secundare, iar u_1 și u_2 sunt tensiunile induse în cele două bobine.

Puterea instantanee pierdută în miezul magnetic este

$$P = \int_D p dv = \int_D \mathbf{J} \mathbf{E} dv, \quad (7.15)$$

în care D este domeniul miezului magnetic.

Dacă se consideră și cazul în care secundarul este scurtcircuitat, se pot determina prin rezolvarea problemei de câmp parametrii ce intervin în schema echivalentă în T a transformatorului, ceea ce permite analiza funcționării la orice sarcină cuplată în secundar.

Pentru ca rezultatele referitoare la randament să fie mai apropiate de realitate este necesară îmbunătățirea modului de calcul al pierderilor din fier, adăugând pierderile prin histerezis (de exemplu cu un model liniar cu ciclu eliptic) și ținând cont de grosimea tolelor.

Un alt model util în practică este cel care permite determinarea răspunsului transformatorului pe o bandă de frecvențe sau în regim tranzitoriu. În primul caz, la frecvențe mai înalte efectele capacitive între înfășurări și față de miez devin importante. În al doilea caz se poate studia efectul neliniarității miezului magnetic în regim tranzitoriu datorat de exemplu unei excitații sinusoidale care începe la $t = 0$ sau unui impuls de tensiune.

7.6 Cuptor cu microunde

Se consideră o incintă cubică Ω cu pereți foarte buni conductori, în centrul căreia se află o sferă dielectrică Ω_d (figura 7.6). În centrul unuia din pereți se află o fantă circulară S care se prelungește în exterior cu un ghid de undă de forma unui tub foarte bun conductor.

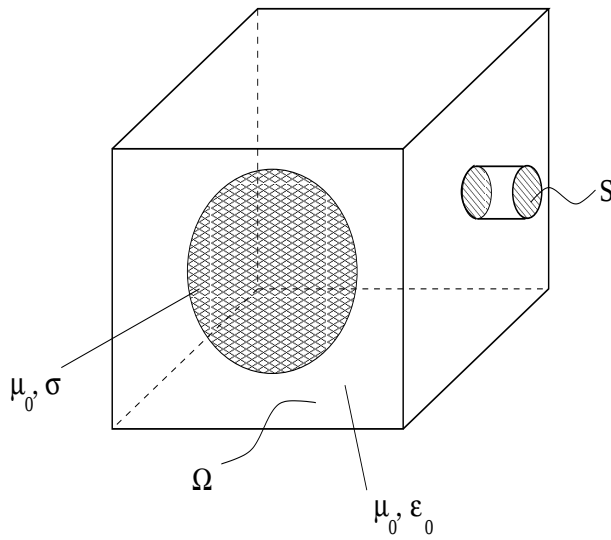


Figura 7.6: Cuptor cu microunde

În condițiile în care prin ghidul de undă se propagă spre incintă o undă electromagnetică, aceasta trece prin fantă și se propagă spre încărcătura dielectrică sau spre pereți și apoi după reflexie tot spre încărcătură. Considerând dielectricul imperfect (cu un factor de pierderi – tangenta unghiului de pierderi cunoscut) câmpul electromagnetic din dielectric determină o încălzire a acestuia (fie prin conducție, fie prin histerezis dielectric).

Pentru a analiza fenomenele din acest dispozitiv vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- se neglijează toleranțele și rugozitatea suprafețelor și se presupune că corpurile sunt imobile;
- atât pereții cavității cât și cei ai ghidului de undă sunt supraconductori;
- aerul din cuptor se consideră un izolant perfect;
- corpul din incinta cuptorului este alcătuit dintr-un mediu liniar, izotrop și omogen din punct de vedere dielectric și cel al conducției;
- întregul domeniu este nemagnetic ($\mu = \mu_0$);
- la începutul ghidului de undă se află un dispozitiv care produce un câmp electric cu componenta tangențială sinusoidală în timp cunoscută.

Regimul câmpului electromagnetic este în acest caz cel general variabil în medii omogene. Câmpul electromagnetic satisface în acest regim ecuațiile lui Maxwell:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.16)$$

Domeniul supus analizei are două feluri de materiale:

- aerul, la care $\varepsilon = \varepsilon_0$ și $\sigma = 0$;
- dielectricul, la care $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ și $\sigma \neq 0$.

Problema este tridimensională (3D), dar datorită existenței a două planuri de simetrie ortogonale (ce se intercalează pe axul ghidului de undă) se poate analiza doar un sfert din cubul de latură a prelungit cu cilindrul de rază r .

În afară de sursa de câmp de pe S pe care este cunoscut E_t (unda transversal electrică) sursele interne și externe sunt nule, iar pe restul frontierei cubului și cilindrului $E_t = 0$, datorită pereților supraconductori. Deoarece problema este liniară și sursa de câmp sinusoidală soluția căutată are tot variație sinusoidală în timp.

Puterea instantanee și cea activă disipate în dielectric au expresiile:

$$P(t) = \int_{\Omega} p dv = \int_{\Omega_d} \mathbf{J} \mathbf{E} dv = \sigma \int_{\Omega_d} E^2 dv, \quad (7.17)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt, \quad (7.18)$$

în care σ poate încorpora prin echivalență și pierderile prin histerezis.

Capitolul 8

Concluzii referitoare la modelarea fizică

Modelarea fizică este o procedură de identificare a mărimilor și fenomenelor esențiale într-un dispozitiv și neglijarea celor care nu influențează substanțial funcționarea acestuia. În consecință, modelarea fizică presupune înțelegerea perfectă a felului în care funcționează un dispozitiv precum și identificarea scopului analizei dispozitivului: prevederea comportării și calculul caracteristicilor de performanță, determinarea solicitărilor, aflarea limitelor de funcționare normală, efectul perturbațiilor externe sau al imperfecțiunilor constructive asupra funcționării, optimizarea construcției sau reproiectarea în vederea îmbunătățirii respectiv modificării caracteristicilor tehnice sau a prețului de cost.

Ca urmare a procedurii de modelare fizică trebuie să rezulte:

- o listă de ipoteze simplificatoare (corespunzătoare unor fenomene sau efecte neglijate) și o listă de efecte (fenomene) considerate în modelare;
- regimul câmpului electromagnetic, în care va fi analizat dispozitivul și ecuațiile câmpului electromagnetic în acel regim, specificându-se modul de variație în timp a mărimilor;
- forma și dimensiunile fiecărei părți componente a dispozitivului;
- tipul de material din care este alcătuită fiecare parte componentă a dispozitivului și constantele caracteristice de material;
- dimensiunea (1D – 3D) și simetria problemei de câmp;
- sursele de câmp electromagnetic, atât cele interne cât și cele externe dispozitivului;
- lista mărimilor fizice ce caracterizează local și respectiv global starea câmpului, corpurile, dispozitivul, dar și efectele de câmp sau parametrii caracteristici care prezintă importanță în aplicația respectivă.

Trebuie remarcat că în funcție de ipotezele simplificatoare, același dispozitiv are mai multe modele fizice cu grade diferite de realizare. De obicei modelele de mare acuratețe corespund unor liste cu mai puține ipoteze simplificatoare, dar ele au o complexitate

sporită față de modelele de acuratețe scăzută. Fiecare model fizic are domeniul său de aplicabilitate. În știință și inginerie trebuie adoptat modelul potrivit fiecărei aplicații, care corespunde unui compromis optim între simplitate și acuratețe. Din acest motiv se poate afirma că modelarea fizică este nu numai o știință ci și o artă al cărui rezultat depinde de experiența și ingeniozitatea personală.

Capitolul 9

Reprezentarea matematică a mărimilor fizice

Pentru o reprezentare matematică riguroasă a unei probleme de câmp, trebuie stabilit cadrul funcțional, respectiv trebuie indicat domeniul și codomeniul fiecărei funcții care intervine în problema respectivă, fie ca dată, fie ca soluție, precum și clasa de funcții (spațiul) din care acea funcție face parte. În fond, pentru reprezentarea problemei trebuie descrise matematic: domeniul problemei, proprietățile de material, sursele de câmp și soluția.

9.1 Sisteme de coordonate

Pentru descrierea exactă a domeniului problemei, prima operație în modelarea matematică este alegerea unui sistem de coordonate și a unui timp (alegerea originii axei timpului). Dintre tipurile de sisteme de coordonate cele mai des întâlnite în aplicații sunt:

- Sistemul cartezian (x, y, z) ;
- Sistemul cilindric (r, θ, z) ;
- Sistemul sferic (r, θ, φ) ;
- Alte sisteme mai puțin folosite, cum sunt: sistemele curbilinii ortogonale de translație (cilindric, eliptic, parabolic, hiperbolic), de rotație sau generale (bisferic, elipsoidal, etc.).

Dacă problema este plan paralelă, atunci prin restrângere rezultă: sistemul cartezian (x, y) , polar (r, θ) și alte sisteme bidimensionale (fig. 9.1).

Trecerea de la un sistem la altul se realizează prin relații de tipul:

$$x = r \cos \theta;$$

$$y = r \sin \theta,$$

în care cele două coordonate polare au următoarele domenii de variație:

$$r \in [0, \infty)$$

și

$$\theta \in [0, 2\pi),$$

pentru a acoperi întreg planul.

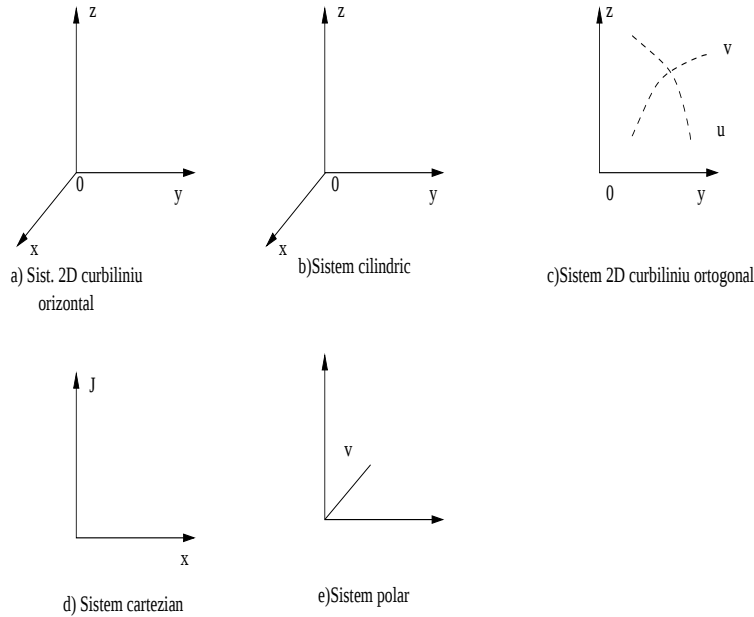


Figura 9.1: Sisteme de coordonate

Alegerea unui sistem de coordonate potrivit poate simplifica foarte mult rezolvarea problemei, modificând chiar și dimensiunea sa. Dacă, de exemplu, în cazul unei probleme plan-paralele cu simetrie axială (1.5D), când se folosește sistemul cilindric problema este unidimensională; când se folosește sistemul cartezian este bidimensională iar când se folosește sistemul sferic cu centrul plasat în afara axei problema este tridimensională.

9.2 Reprezentarea domeniului spațio – temporal

Domeniul de calcul Ω_t al unei probleme are în general un caracter spațio-temporal, urmând ca în funcție de regimul temporal să fie:

- $\Omega_t = \Omega$, în cazul regimurilor statice sau staționare;
- $\Omega_t = \Omega \times [0, T)$, în cazul regimurilor periodice, cu perioadă T ;
- $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, în cazul regimurilor tranzitorii.

În continuare se va considera $\Omega_t = \Omega \times [0, t_{max})$, în care t_{max} este 0, T sau ∞ , în funcție de regim. Domeniul spațial Ω al problemei este parte din $\mathbb{R}^n$, urmând ca n să depindă de dimensiunea problemei:

- $\Omega \subset \mathbb{R}$, în cazul problemelor unidimensionale (1D și 1,5D);
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, în cazul problemelor bidimensionale (2D și 2,5D);
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, în cazul problemelor tridimensionale (3D),

iar incluziunea nu este în mod necesar strictă. În funcție de caracterul mărginit sau nu al domeniului, deosebim:

- Ω mărginit, în cazul problemelor cu "frontieră închisă", numite și probleme interne;
- Ω nemărginit, în cazul problemelor cu "frontieră deschisă", numite și probleme externe.

Un caz limită de problemă cu frontieră deschisă este cel în care domeniul se extinde la întreg spațiul $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

În stabilirea modelului matematic al domeniului fizic exprimat în coordonatele alese, intervin nu numai ecuațiile frontierei domeniului dar și suprafețele (sau curbele) de separație între subdomenii cu proprietăți de material diferite (părțile componente ale dispozitivului industrial în modelul fizic). Cel mai adesea, domeniul spațial este alcătuit din mai multe porți disjuncte $\Omega = \cup_{k=1}^m \Omega_k$, fiecare având proprietăți de material diferite.

După cum se va constata ulterior, domeniile multiplu conexe trebuie tratate cu deosebită atenție, motiv pentru care ordinul de conexiune (numărul de tăieturi care face ca domeniul să devină simplu conex) trebuie determinat încă de la începutul modelării matematice.

9.3 Reprezentarea proprietăților de material

Reprezentarea matematică a proprietăților de material se face în funcție de tipul acestora.

- În medii liniare, omogene și izotrope sunt suficiente trei constante reale și nenegative (ε, μ și σ), dacă Ω este omogen pe porțiuni, atunci $\Omega = \cup_{k=1}^m \Omega_k$ este alcătuit din m subdomenii, caracterizarea fiind făcută prin vectorii m – dimensionali cu componente nenegative:

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]^T \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m]^T \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m]^T \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

- În medii liniare, omogene și anizotrope, caracterizarea este făcută de trei tensori reprezentați prin matrice simetrice și pozitiv definite cu dimensiuni $n \times n$, dependente de dimensiunea problemei:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \bar{\varepsilon}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{\mu} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \\ \bar{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = \bar{\varepsilon}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{\mu} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

- În medii omogene, anizotrope cu surse permanente, sunt necesare pentru fiecare tip de caracterizare: dielectrică, magnetică și de conducție , un tensor și un vector:

$$\bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}; P_p, M_p, E_i \in \mathbb{R}^n. \bar{\epsilon}, \bar{\mu}, \bar{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}; P_p, M_p, E_i \in \mathbb{R}^n.$$

- În medii omogene, neliniare și izotrope se utilizează, pentru fiecare tip de caracterizare, o funcție reală de variabilă reală nenegativă (ce indică dependența între modulele mărimilor de câmp):

$$D = \hat{D}(E), \text{ cu } \hat{D} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ caracteristica dielectrică};$$

$$B = \hat{B}(H), \text{ cu } \hat{B} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ caracteristica de magnetizare};$$

$$J = \hat{J}(E), \text{ cu } \hat{J} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ caracteristica de conducție},$$

$$\text{urmând ca } \mathbf{D} = \hat{D}(E)\mathbf{E}/E, \mathbf{B} = \hat{B}(H)\mathbf{H}/H, \mathbf{J} = \hat{J}(E)\mathbf{E}/E.$$

- În medii omogene, neliniare și anizotrope fiecare caracteristică de material este o funcție vectorială de variabilă vectorială:

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{E}), \text{ cu } \hat{\mathbf{D}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{H}), \text{ cu } \hat{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{E}), \text{ cu } \hat{\mathbf{J}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

- În medii liniare, izotrope și neomogene cei trei tensori caracteristici sunt funcții definite pe Ω :

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}, \text{ deci } \varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+;$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}, \text{ deci } \varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+;$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}, \text{ deci } \mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+;$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}, \text{ deci } \sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

- În medii liniare, anizotrope și neomogene cei trei tensori caracteristici sunt funcții definite pe Ω :

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}, \text{ cu } \bar{\epsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n};$$

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}, \text{ cu } \bar{\epsilon} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n};$$

$$\mathbf{B} = \bar{\mu}(\mathbf{r})\mathbf{H}, \text{ cu } \bar{\mu} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n};$$

$$\mathbf{J} = \bar{\sigma}(\mathbf{r})\mathbf{E}, \text{ cu } \bar{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}.$$

- În medii anizotrope și neomogene, cu surse permanente, la celelalte trei funcții tensoriale se adaugă următoarele funcții vectoriale caracteristice definite tot pe Ω :

$$\mathbf{P}_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{M}_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n; \mathbf{E}_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

- În mediile neliniare, izotrope și neomogene funcțiile caracteristice sunt definite pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$:

$$D = \hat{D}(\mathbf{r}, E) \text{ cu } \hat{D} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+;$$

$$B = \hat{B}(\mathbf{r}, H) \text{ cu } \hat{B} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+;$$

$$J = \hat{J}(\mathbf{r}, E) \text{ cu } \hat{J} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

- În mediile neomogene, neliniare și anizotrope funcțiile caracteristice sunt definite pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{D}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \text{ cu } \hat{\mathbf{B}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{J}} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

- Cazul general este cel al *mediilor parametrice, neomogene, neliniare și anizotrope*, care sunt caracterizate prin funcții definite pe Ω_t :

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{D}} : \Omega \times [0, t_{max}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{H}) \text{ cu } \hat{\mathbf{B}} : \Omega \times [0, t_{max}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{J}} : \Omega \times [0, t_{max}] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Trebuie remarcat că unele medii pot avea cele trei proprietăți de material în categorii diferite. De exemplu, un domeniu poate fi: dielectric liniar, izotrop și omogen; magnetic neliniar, anizotrop și omogen iar din punct de vedere al conducției neomogen și cu surse permanente.

În cazul problemelor cu folii sau fire se folosesc, pentru caracterizarea materialelor, funcții definite pe suprafețele și curbele respective.

Sursele interne de câmp sunt în general reprezentate prin funcții vectoriale definite pe domeniul spațio-temporal de calcul:

- polarizația permanentă $\mathbf{P}_p : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- magnetizarea permanentă $\mathbf{M}_p : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- câmpul electric imprimat $\mathbf{E}_i : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$,

dar în funcție de regim ele pot fi și:

- densitatea de sarcină $\rho : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$,
- densitatea de curent $\mathbf{J} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$

cum este, spre exemplu, în electrostatică și respectiv regimul magnetic staționar. În regimul cvasistaționar amagnetic ρ este soluție iar în regimul electrocinetic $\mathbf{J}$ este soluție și nu sursă de câmp.

Sursele externe de câmp sunt reprezentate de condițiile de frontieră. Acestea sunt funcții definite pe frontiera $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ a domeniului spațial, ca de exemplu:

- componenta tangențială a intensității câmpului $\mathbf{E}_t : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ sau componenta tangențială a câmpului magnetic $\mathbf{H}_t : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$;
- componenta normală a inducției electrice $D_n : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$ sau componenta normală a inducției magnetice $B_n : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$;
- componenta normală a densității de curent $J_n : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$.

În mod uzual, condițiile de frontieră se referă la acele componente ale câmpului care se conservă la trecerea prin frontieră, cum sunt: componentele normale ale inducțiilor și densităților de curent sau componenta tangențială a intensității câmpului.

În cazul condițiilor hibride, frontiera poate fi partajată în părți disjuncte $\partial\Omega = \cup_{k=1}^m S_k$, urmând ca pe fiecare în parte S_k să fie impusă alt tip de condiție de frontieră.

Trebuie menționat că în cazul domeniilor multiplu conexe pot interveni și un număr de surse scalare egal cu ordinul de conexiune al domeniului.

Soluția problemei de câmp este alcătuită din unul sau mai multe câmpuri vectoriale

- inducția electrică $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$;
- intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$;
- inducția magnetică $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$;
- intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$;
- densitatea de curent $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$;
- densitatea de sarcină $\rho(\mathbf{r}, t)$

definite ca în exemplele:

$$\mathbf{D} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{E} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{B} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{H} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Deoarece soluția problemei trebuie să satisfacă ecuațiile câmpului electromagnetic, spunem că, ea este o *soluție tare* (în sens clasic) dacă este continuă, derivabilă și satisface formele locale ale legii în orice punct din domeniul de calcul precum și condițiile de frontieră în orice punct de pe frontieră. În consecință, soluțiile clasice se caută în spațiile funcțiilor de clasă $C^1(\Omega_t, \mathbb{R}^n)$. După cum se va vedea ulterior, problemele pot fi reformulate astfel încât soluțiile (numite slabe) să fie căutate în clase mai largi de funcții.

Deoarece sursele de câmp nu intervin sub derivate spațiale sau temporale, chiar în formularea clasică, ele pot fi elemente ale unor spații de funcții mult mai largi. În mod uzual ele se consideră de pătrat integrabil, deci din clasă $L^2(\Omega_t, \mathbb{R}^n)$. Densitatea de sarcină ρ aparține deci, fie clasei $C^1(\Omega_t, \mathbb{R})$ fie clasei mai largi $L^2(\Omega_t, \mathbb{R})$, după cum, ea reprezintă o soluție sau o sursă, în acord cu regimul câmpului.

9.4 Reprezentarea obiectelor idealizate

Trebuie menționat că, în multe cazuri clasa surselor este extinsă și mai mult, la clasa $\mathcal{D}(\Omega_t, \mathbb{R})$ a funcțiilor (distribuțiilor) generalizate. Procedând în acest fel, sursele distribuite superficial, lineic sau punctiform nu mai trebuie tratate separat, ci ele devin cazuri particulare ale surselor distribuite volumetric.

De exemplu, un corp punctiform plasat în punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0) , electrizat cu sarcina q , are densitatea de volum a sarcinii:

$$\rho(x, y, z,) = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

în care δ este funcția generalizată a lui Dirac (derivata funcției treaptă unitate, a lui Heaviside $h(x) = 0$ pentru $x < 0$ și $h(x) = 1$ în rest).

Funcția Dirac $\delta(x)$ are suportul în origine iar, integrala sa pe orice interval care cuprinde originea este unitară:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Un fir electrizat lineic, cu densitatea ρ_l , suprapus pe axa Ox are densitatea de volum a sarcinii:

$$\rho(x, y, z) = \rho_l(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z),$$

iar planul de ecuație $z = z_0$ electrizat superficial are densitatea de sarcină:

$$\rho(x, y, z) = \rho_s(x, y) \cdot \delta(z - z_0).$$

Dacă se consideră $z_0(x, y)$ ecuația parametrică a unei suprafețe, atunci sarcina va fi distribuită superficial pe acea suprafață și nu pe plan.

Într-un sistem curbiliniu de coordonate ortogonale (u, v, w) , un corp punctiform electrizat cu sarcina q și plasat în punctul de coordonate (u_0, v_0, w_0) are densitatea de sarcină:

$$\rho(u, v, w) = \frac{q}{h_1 h_2 h_3} \cdot \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) ,$$

în care, h_1, h_2, h_3 sunt parametrii Lamé ai sistemului de coordonate în punctul $\mathbf{r}_0$. Sarcina unui domeniu Ω care include punctul $\mathbf{r}_0$ este:

$$q = \int_{\Omega} \rho dV = \int \int \int \rho \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 du dv dw = q \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) du dv dw$$

în care s-a notat cu dV elementul de volum.

De exemplu, densitatea de sarcină $\rho = \rho_l h(z) \delta(z_0 - z) \delta(0) \delta(r - a) / a$ reprezintă, în coordonate cilindrice, un fir de lungime z_0 , electrizat uniform, cu densitatea ρ_e , plasat la distanța 0,5 de Oz , paralel cu aceasta.

Capitolul 10

Formularea corectă a problemelor câmpului electromagnetic în diferite regimuri

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic, în diferite regimuri, se reduce, din punct de vedere matematic, la rezolvarea unor ecuații diferențiale cu derivate parțiale. Pentru ca astfel de probleme să fie corect formulate este necesar ca:

- soluția să existe;
- soluția să fie unică;
- soluția să depindă continuu de datele problemei.

Aceste proprietăți ale soluției sunt asigurate de demonstrarea unor teoreme de existență, unicitate și respectiv continuitate.

Importanța existenței și unicității este evidentă, deoarece se lucrează cu modele idealizate, valabile în anumite ipoteze simplificatoare, ipoteze care nu sunt riguros respectate în realitate. Importanța continuității a fost evidențiată relativ târziu, prin exemplul lui Hadamard. Acesta se referă la o ecuație Laplace într-un semiplan, cu condiții Cauchy, pentru care se obține o soluție ce nu depinde continuu de condiția de frontieră (sursa de câmp). Deoarece, în majoritatea aplicațiilor practice, datele unei probleme nu sunt cunoscute cu acuratețe maximă, ci sunt acceptabile mici variații ale datelor, datorită erorilor de măsură sau chiar de reprezentare în calculator (de rotunjire a numerelor). Dacă soluția este discontinuă, atunci se pot obține variații mari, necontrolate ale ei chiar și în cazul unor mici variații ale datelor.

Toate cele trei condiții ce trebuie impuse soluției prezintă importanță teoretică și practică, totuși teorema de unicitate este pe departe cea mai importantă în practică. Aceasta deoarece, dacă a fost obținută o soluție numerică aproximativă a problemei de câmp (cu calculatorul) poate fi verificată măsura în care aceasta satisface ecuațiile și condițiile de frontieră. Prin experimente numerice poate fi evaluată chiar și stabilitatea numerică. În schimb, dacă soluția nu este unică, acest lucru nu poate fi verificat când avem la dispoziție doar una din soluțiile posibile. Acea soluție s-ar putea să nu fie soluția cu semnificația fizică pe care o căutăm.

Din punct de vedere ingineresc, formularea corectă a unei probleme de câmp presupune demonstrarea cel puțin a unei teoreme de unicitate pentru soluția problemei. Din fericire teoremele de unicitate se demonstrează relativ ușor față de celelalte teoreme. În continuare, vor fi prezentate câteva teoreme de unicitate pentru câmpul electromagnetic în diferite domenii. Ele se bazează pe raționamente de tip ”reducere la absurd”, presupunând că există două soluții distincte. Teoremele prezentate acoperă o largă clasă de probleme întâlnite în practică.

Dacă totuși, o problemă de câmp nu este un caz particular al acestor teoreme este necesară demonstrarea unicității (de obicei folosind ca model demonstrația teoremei clasice). Demonstrarea sau identificarea teoremei de unicitate este un pas esențial în modelarea matematică a problemelor de câmp electromagnetic.

10.1 Regimul electrostatic

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile conductoare și cele anelectrice), funcția caracteristică de material $\hat{D}$ (în particular, în cazul dielectricilor cu surse permanente este dată permeabilitatea $\bar{\epsilon}$ și polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$ în $\bar{\epsilon}$), polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$ în orice punct din domeniu și distribuția de sarcină ρ în interiorul domeniului Ω .

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$, care satisfac ecuațiile: $\text{div}\mathbf{D} = \rho$; $\text{rot}\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$. $\text{div}\mathbf{D} = \rho$; $\text{rot}\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$.

Teoremă 10.1.1 Teorema de unicitate a câmpului electrostatic

Problema formulată anterior are soluție unică, dacă funcția de material este strict monotonă, respectiv satisface relația:

$$(\hat{D}(\mathbf{E}_2) - \hat{D}(\mathbf{E}_1))(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) > 0,$$

în particular $\bar{\epsilon}$ este pozitiv definit și este îndeplinită una din următoarele condiții de frontieră:

- *în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componeneta normală a inducției electrice $D_n = \mathbf{nD}$, astfel încât*

$$\int_{\partial\Omega} D_n dA = \int_{\Omega} \rho dv;$$

- *în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componenta tangențială a câmpului electric $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$;*
- *în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie D_n fie E_t , iar în plus dacă mulțimea punctelor S_E pe care este dat $\mathbf{E}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe $S_E = \bigcup_{k=1}^m S_k$ trebuie cunoscute și valorile a $m - 1$ fluxuri electrice ξ_k pe suprafețele S_k sau valorile tensiunii electrice u_k , pe curbe din $\partial\Omega$ ce formează un arbore cu nodurile în S_k (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).*

Pentru demonstrația acestei teoreme va fi formulată o problemă care generalizează cazurile tuturor regimurilor statice și staționare în domenii simplu conexe. Soluția acestei probleme este reprezentată de perechi de câmpuri $\mathbf{F}$ și $\mathbf{G}$, care satisfac ecuațiile: $\text{div}\mathbf{G} = \rho$; $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{J}$ $\mathbf{G} = \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F})$ sau în particular $\mathbf{G} = \bar{\bar{\lambda}}(\mathbf{r})\mathbf{F} + \mathbf{G}_p(\mathbf{r})$, în care $\mathbf{G}_p$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$; $\rho : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, iar $\hat{G} : \Omega \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ sau în particular $\bar{\bar{\lambda}} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{n \times n}$; satisfac condițiile:

$$(\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_2))(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) > 0,$$

pentru orice $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^n$, cu $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_2$, sau $\mathbf{F}(\bar{\bar{\lambda}}, \mathbf{r}) > 0$, pentru orice $\mathbf{E} \neq 0$.

Presupunem, prin absurd, că această problemă admite două soluții $(\mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1)$ și $(\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_2)$ distincte. Diferența $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ va satisface sistemul de ecuații: $\text{div}\mathbf{G} = 0$, $\text{rot}\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G}_1 = \hat{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1)$, $\mathbf{G}_2 = \hat{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2)$ sau în particular $\mathbf{G} = \bar{\bar{\lambda}}\mathbf{r}\mathbf{F}$, câmpul diferență $\mathbf{F}$ este irotational pe domeniu simplu conex și deci are potențial vector V univoc definit, astfel încât: $V_A - V_B = \int_{C_{AB}} \mathbf{F}d\mathbf{r}$ sau echivalent $\mathbf{F} = -\text{grad}V$.

Ținând cont că:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{G}V) &= V\text{div}\mathbf{G} + \mathbf{G}\text{grad}V = \mathbf{G}\text{grad}V \\ \int_{\Omega} \mathbf{G}\mathbf{F}dv &= - \int_{\Omega} \mathbf{G}\text{grad}Vdv = - \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{G}V)dv = - \int_{\partial\Omega} G_n V dA = 0 \end{aligned}$$

deoarece în condițiile de frontieră:

- $G_n = 0$ pe $\partial\Omega$;
- $E_t = 0$ pe $\partial\Omega$, deci $V = 0$ pe $\partial\Omega$;
- $G_n = 0$ pe $\partial\Omega \cdot S_E$ și $E_t = 0$ pe $S_E = \bigcup S_k$, deci $V = V_k$ pentru fiecare parte S_k și $\int_{\Omega} \mathbf{G}\mathbf{F}dv = - \int_{S_E} G_n V dA = - \sum_{k=1}^n V_k \int_{S_k} G_n dA$, alegând $V_k = 0$ rezultă, din condițiile impuse, fie $\phi_k = \int_{S_k} G_n dA = 0$, fie $V_k = \int_{C_{k1}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0$ ceea ce contravine ipotezei (nu poate fi realizat decât dacă $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ și $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$).

În consecință:

$$\int_{\Omega} \mathbf{G}\mathbf{F}dv = \int_{\Omega} (\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_1) - \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_2))(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)dv = \int_{\Omega} \mathbf{F}\bar{\bar{\lambda}}\mathbf{F}dv = 0$$

ceea ce contravine ipotezei, (nu poate fi realizat atunci decât dacă $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ și $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$).

Condiția de frontieră hibridă este destul de des utilizată. De exemplu, pentru calculul capacității între doi electrozi conductori, $E_t = 0$ pe aceștia, deci $m = 2$ (S_E fiind reuniunea celor doi conductori). În consecință, mai trebuie cunoscut, pentru unicitatea câmpului, fie tensiunea u dintre cei doi electrozi, fie fluxul electric pe unul dintre ei (sarcina q în care este încărcat). În mod similar se tratează problema cu m conductoare scufundate într-un dielectric, pentru fiecare conductor, cu excepția unuia de referință, trebuie cunoscută fie valoarea sarcinii totale (nu și distribuția acesteia) fie valoarea potențialului. Trebuie remarcat că în domeniile nemărginite $\Omega = \mathbf{R}^n$, la care domeniul este extins la întreg spațiul, condiția de frontieră este înlocuită de o comportare la infinit a soluției, care pe o sferă Σ de rază $R \rightarrow \infty$ să asigure $\int_{\Sigma} D_n V dA \rightarrow 0$.

Se verifică ușor că în cazul mediilor dielectrice active (cu polarizație permanentă) soluția $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ depinde liniar de sursele de câmp interne și externe $(\rho, \mathbf{P}_p, D_n, \mathbf{E}_t, \psi, u)$, putând fi calculată prin superpoziție, deci fiecare tip de sursă poate fi studiată independent de celelalte, cu condiția ca domeniul și constantele de material $\bar{\bar{\epsilon}}$ să nu se modifice.

10.2 Regimul magnetostatic

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile feromagnetice ideale cat și cele amagnetice) și funcția caracteristică de material $\hat{B}$ (în particular, în cazul nediilor cu magnetizare permanentă se cunosc tensorul permeabilității $\bar{\mu}$ și magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p$ în orice punct din Ω). Necunoscutele problemei sunt funcțiile vectoriale $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, care satisfac ecuațiile:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0;$$

$$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H})$$

sau în particular $\mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$.

Teoremă 10.2.1 *Teorema de unicitate a câmpului magnetostatic*

Problema formulată anterior are soluție unică dacă domeniul Ω este simplu conex, funcția de material este monotonă:

$$(\hat{B}(\mathbf{H}_2) - \hat{B}(\mathbf{H}_1))(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) > 0,$$

în particular în cazul mediilor liniare sau afine tensorul $\bar{\mu}$ este pozitiv definit (are valori proprii strict pozitive) și dacă este îndeplinită una din condițiile de frontieră:

- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta normală a inducției $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$ (cu valoare medie nulă pe $\partial\Omega$, pentru ca soluția să existe);*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta tangențială a intensității $H_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$;*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dat fie $\mathbf{H}_t$ (pe $S_H \subset \partial\Omega$), fie B_n (pe restul $\partial\Omega - S_H$), cu condiția că dacă S_H este neconexă și alcătuită din m părți $S_1, S_2, \dots, S_m$ conexe, atunci pe primele $m - 1$ părți trebuie cunoscut fie fluxul magnetic φ_k fie tensiunea magnetică U_{mk} a unui punct față de un punct situat în partea de referință S_m .*

Dacă domeniul este multiplu conex, atunci sunt necesare condiții de unicitate suplimentare, și anume pentru fiecare "gaură" în domeniu trebuie precizată fie tensiunea magnetică în jurul ei, fie fluxul magnetic pe o suprafață de tăieturi ce elimină gaura respectivă.

Teorema de unicitate a regimului magnetostatic este un caz particular al teoremei de unicitate din regimul magnetic staționar.

În cazul mediilor liniare și active (cu magnetizație permanentă), soluția $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$ depinde liniar de sursele interne și cele externe de câmp $(\mathbf{M}_p, B_n, \mathbf{H}_t, \varphi, U_m)$, putând fi calculată prin superpoziție, cu condiția ca domeniul Ω și constanta de material $\bar{\mu}$ să nu se modifice.

10.3 Regimul electrocinetic staționar

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile supraconductoare și cele izolante) și funcția caracteristică de material $\hat{J}$ (în particular, în cazul mediilor liniare se cunoaște tensorul conductivităților $\overline{\sigma}$ iar în cazul conductoarelor active se cunoaște în plus și $\mathbf{E}_i$ sau $\mathbf{J}_i$ în fiecare punct din domeniul Ω). Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$, care satisfac ecuațiile:

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{J}} = 0; \operatorname{rot} \overline{\mathbf{E}} = 0; \mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{J} = \overline{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \overline{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i.$$

Teoremă 10.3.1 *Teorema de unicitate a câmpului electrocinetic*

Problema formulată anterior are soluție unică dacă funcția de material este monotonă:

$$(\hat{J}(\mathbf{E}_2) - \hat{J}(\mathbf{E}_1))(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) > 0,$$

în particular în cazul mediilor liniare și al celor active tenorul $\overline{\sigma}$ este pozitiv definit și este îndeplinită una din condițiile de frontieră:

- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta $J_n = \mathbf{nJ}$ (cu valoare medie nulă pe $\partial\Omega$, pentru ca soluția să existe);*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta tangențială a intensității $E_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$;*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dat fie $\mathbf{E}_t$ (pe $S_E \subset \partial\Omega$), fie J_n (în rest), cu condiția că dacă S_E este neconexă și alcătuită din m părți conexe pe fiecare din aceste părți cu excepția ultimei este dat fie curentul total I_k fie tensiunea U_k față de ultima parte.*

Teorema de unicitate este un caz particular al teoremei generale demonstrate în cazul regimului electrostatic. De altfel ecuațiile electrocinetice sunt similare cu forme particulare ale ecuațiilor electrostatice (pentru $\rho = 0$).

Ultima condiție de frontieră, cea hibridă este utilizată în calculul rezistenței rezistoarelor. Acestea au cele două borne disjuncte echipotențiale ($E_t = 0$) iar suprafața laterală este suprafața de câmp ($J_n = 0$). În cazul rezistoarelor multipolare cu m borne, suprafața S_E este alcătuită din m părți conexe, în particular $m = 2$ în cazul rezistoarelor bifilare. Pentru ca problema de câmp ce trebuie rezolvată pentru determinarea rezistențelor să fie corect formulată va trebui ca pentru fiecare bornă (cu excepția celei de referință aleasă în mod convențional) să se cunoască fie curentul injectat fie tensiunea față de borna de referință.

10.4 Regimul magnetic staționar

Problema fundamentală a acestui regim are ca date domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile feromagnetice ideale și cele amagnetice), funcția caracteristică de magnetizare $\hat{B}$ (în particular, în cazul mediilor liniare tensorul $\overline{\mu}$ iar în cazul corpurilor cu caracteristică de magnetizare afină se cunoaște și magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p$) și distribuția curentului de conducție $\mathbf{J}$ în domeniul Ω .

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$, care satisfac ecuațiile:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J};$$

$$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H})$$

sau în particular $\mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$.

Se constată că ecuațiile regimului magnetostatic sunt o particularizare a ecuațiilor regimului magnetic staționar, obținută pentru $\mathbf{J} = 0$.

Teoremă 10.4.1 *Teorema de unicitate a câmpului magnetic*

Are exact același enunț cu teorema de unicitate a câmpului magnetostatic, cu observația că în formularea problemei intervine în plus printre date și distribuția densității de curent $\mathbf{J}$.

În cazul domeniilor Ω simplu conexe aceste două teoreme sunt cazuri particulare ale teoremei de unicitate demonstrată în cazul electrostaticii. În cazul domeniilor multiplu conexe potențialul scalar V nu se poate defini, în mod unic, mai exact el depinde de numărul de ori de care curba respectivă înconjoară golurile domeniului (fig. 10.1).

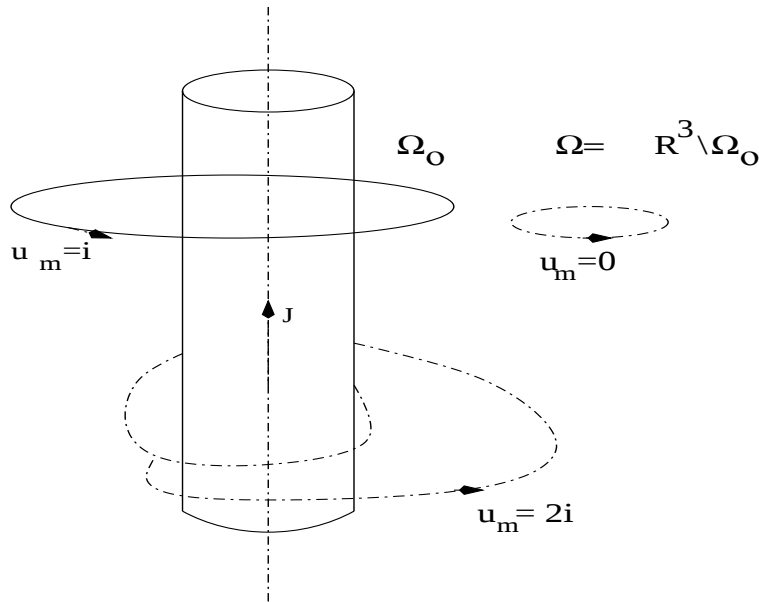


Figura 10.1: Domeniu multiplu conex

Din acest motiv este necesară transformarea domeniului multiplu conex într-unul simplu conex prin efectuarea unor tăieturi cu suprafețele $T_1, T_2, \dots, T_q$. În aceste condiții:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{G} \mathbf{F} dv &= - \int_{\partial \Omega} G_n V dA \\ - \int_{\partial \Omega} G_n V dA &= - \int_{S_G} G_n V dA - \int_{S_F} G_n V dA - \int_{T' \cup T''} G_n V dA = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{k=1}^m V_k \int_{S_k} G_n dA - \sum_{j=1}^q V_k \int_{T_j} G_n \Delta V_j dA = - \sum_{k=1}^{n-1} V_k \Psi_k - \sum_{j=1}^q U_j \Psi_j,$$

deoarece $G_n = 0$ pe $S_G = \partial\Omega - S_F$, $S_F = \bigcup_{k=1}^m S_k$, iar pe fiecare suprafață S_k , $E_t = 0$ deci $V = V_k = \text{const.}$, cu $V_k = 0$, $T = \bigcup_{j=1}^m T_j$, $T' = \bigcup_{j=1}^m T'_j$, $T'\prime = \bigcup_{j=1}^m T'\prime_j$, în care T'_j și $T'\prime_j$, sunt cele două fețe ale suprafeței T_j .

S-a notat cu

$$\Delta V = V_j = \int_{\Gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r}$$

saltul potențialului pe tăieturi T_j egal cu tensiunea pe curba Γ_j ce înconjoară "golul" j și cu:

$$\Psi_k = \int_{S_k} G_n dA, \quad \Psi_j = \int_{Y_j} G_n dA,$$

fluxurile prin suprafețele S_k și respectiv T_j .

Dacă pentru fiecare suprafață S_k (cu excepția uneia, de exemplu $k = n$) se impune fie fluxul Ψ_k fie tensiunea V_k față de S_n și pentru fiecare tăietură T_j se impun fie fluxul Ψ_k , fie tensiunea pe o curbă închisă ce înconjoară "golul" eliminat de T_j , atunci toți termenii sumei sunt nuli și $F = 0$, deci câmpul este determinat univoc deoarece $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$.

10.5 Regimul cvasistaționar inductiv tranzitoriu

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul de calcul $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, funcția caracteristică de magnetizare $\hat{\mathbf{B}}$ (în cazul particular al mediilor liniare este dat tensorul $\bar{\mu}$, iar în cazul mediilor cu caracteristică afină și magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p$) și funcția caracteristică de conducție $\hat{J}$ (în cazul conductoarelor tensorul $\bar{\sigma}$, iar în cazul mediilor cu caracteristică afină și densitatea de curent imprimat $\mathbf{J}_i = \bar{\sigma}\mathbf{E}_i$).

Necunoscutele problemei sunt câmpurile $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$ care satisfac ecuațiile:

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \\ \text{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H}) \text{ sau în particular } \mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p;$$

$$\mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i,$$

și condiția inițială:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \text{ pentru } t = 0, \mathbf{r} \in \Omega,$$

care satisface restricția: $\text{div}\bar{B}_0 = 0$.

Se verifică ușor, aplicând operatorul de divergență teoremei lui Ampère, că densitatea de curent are o distribuție solenoidală, în acord cu legea conservării sarcinii particularizată la acest regim. Dacă inducția magnetică este solenoidală în momentul inițial, atunci ea se menține tot așa și în timpul regimului tranzitoriu, deoarece conform legii inducției electromagnetice $\text{div}\mathbf{B}$ este constant în timp.

Teorema de unicitate va fi demonstrată în condițiile în care $\hat{J}$ are caracter afin ($\mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$), iar $\mathbf{B}$ este neliniar anizotrop ($\mathbf{B} = \hat{B}(H)\mathbf{H}/H$) cu $\hat{B}$ strict monotonă și mărginită.

Să presupunem că există două soluții distincte $(\mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{E}_1)$ și $(\mathbf{B}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}_2)$, care satisfac ecuațiile problemei și condițiile inițiale, soluția diferență: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2$ și $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, va satisface sistemul de ecuații:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \hat{B}(\mathbf{H}_1) - \hat{B}(\mathbf{H}_2), \quad \mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E}$$

și condiția inițială nulă $\bar{B}(\bar{\tau}, 0) = 0$.

Înmulțind prima ecuație în produs scalar cu $\mathbf{H}$ și a doua cu $\mathbf{E}$ și apoi scăzându-le, rezultă relația:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) dA = \int_{\Omega} H \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E}(\bar{\sigma}\mathbf{E}) dv.$$

Notând: $w = \int_0^t \mathbf{H} \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} dv = \int_0^B \hat{H}(B) dB > 0$, rezultă

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E}(\bar{\sigma}\mathbf{E}) dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}_t) dA,$$

deoarece $\mathbf{n}(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n}(\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}) = \mathbf{n}(\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}_t)$.

Dacă $\mathbf{E}_t$ sau $\mathbf{H}_t$ sunt nule, și ținând cont că $\mathbf{E}(\bar{\sigma}\mathbf{E}) > 0$, pentru $\bar{\sigma} > 0$ și $E \neq 0$, rezultă:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dv < 0$$

și prin integrare în timp pornind de la $t = 0$ la care $w = 0$, rezultă inegalitatea

$$\int_{\Omega} w(t) dv < 0,$$

care împreună cu condiția $w \geq 0$ conduce la consecința $w = 0$, deci $B = 0$ și implicit $H = 0$, $J =$. Dacă $\bar{\sigma} > 0$, atunci și $E = 0$.

În consecință teorema de unicitate a câmpului cvasistaționar inductiv are următorul enunț:

Teoremă 10.5.1 *Problema regimului cvasistaționar inductiv tranzitoriu formulată anterior are soluție unică, dacă:*

- *caracteristica de magnetizare $\mathbf{B} = \hat{B}(H)\mathbf{H}/H$ are funcția $\hat{B} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, continuă, inversabilă și cu $\hat{B}(0) = 0$;*
- *caracteristica de conducție de forma $\mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$, în care $\bar{\sigma}$ este un tensor cu valorile proprii pozitive;*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată fie componenta tangențială a intensității câmpului electric $\mathbf{E}_t$, fie componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t$.*

Se constată că pentru a asigura unicitatea soluției, trebuie ca anularea condițiilor de frontieră să implice anularea fluxului vectorului Poynting.

10.6 Regimul cvasistaționar capacitiv tranzitoriu

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul de calcul $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, funcția caracteristică dielectrică a domeniului $\hat{D}$ (în cazul particular al dielectricilor liniari tensorul $\bar{\epsilon}$, iar în cazul mediilor cu caracteristică dielectrică afină în plus polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$) și funcția caracteristică de conducție $\hat{J}$ (în cazul conductoarelor liniare tensorul $\bar{\sigma}$, iar în cazul mediilor cu caracteristică de conducție afină, în plus câmpul electric imprimat $\mathbf{E}_i$).

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ și câmpul scalar ρ care satisfac ecuațiile:

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0;$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho;$$

$$\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p;$$

$$\mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{J} = \bar{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

și condiția inițială $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ pentru $t = 0$, $\mathbf{r} \in \Omega$, cu restricția $\text{rot}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$.

Trebuie remarcat că folosind relația $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ și legea fluxului electric din condiția inițială se determină distribuțiile inițiale atât ale inducției electrice $\mathbf{D}_0 = \hat{D}(\mathbf{E}_0)$ cât și a sarcinii $\rho_0 = \text{div}\mathbf{D}_0$.

Teoremă 10.6.1 *Teorema de unicitate a câmpului cvasistaționar capacitiv.*

Problema fundamentală a regimului cvasistaționar capacitiv formulată anterior are soluție unică, dacă:

- caracteristica dielectrică este afină și tensorul $\bar{\epsilon}$ are valorile proprii pozitive;
- caracteristica de conducție a mediului din Ω este afină și tensorul $\bar{\sigma}$ are valori proprii nenegative;
- în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată fie componenta tangențială a intensității câmpului electric, $\mathbf{E}_t$ fie componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t$.

Pentru demonstrație se consideră că există două soluții diferite iar $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, b f J, \rho)$ este diferența lor, care satisface ecuațiile:

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0;$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho$$

$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E}$ și $\mathbf{J} = \bar{\sigma}(\mathbf{E})$, și condiția inițială $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ și condiții de frontieră tot nule, $\mathbf{E}_t = 0$ și $\mathbf{H}_t = 0$.

Teorema energiei electromagnetice pentru acest câmp diferență are următoarea formă locală:

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \mathbf{E},$$

și următoarea formă globală:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{E} \overline{\sigma} \mathbf{E} dv + \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dv,$$

cu $w = \mathbf{D} \mathbf{E} / 2 = (\mathbf{E} \overline{\epsilon} \mathbf{E}) / 2 > 0$. Deoarece câmpul diferență are condiții de frontieră nule, vectorul Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ are componentă normală nulă: $S_n = \mathbf{n} \mathbf{S} = \mathbf{n}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) = 0$.

În consecință, între puterea P disipată în conductoarele domeniului și energia acumulată în câmpul electric există relația:

$$P + \frac{dW}{dt} = 0, \text{ cu } P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \overline{\sigma} \mathbf{E} dv > 0 \text{ și } W = \int_{\Omega} w dv > 0.$$

Prin integrare în timp rezultă:

$$W(t) - W(0) = - \int_0^t P(t) dt \leq 0,$$

în care $W(0) = 0$, deoarece $E(0) = 0$, deci energia câmpului electric care este pozitiv definită este în mod necesar nulă $W(t) = 0$. Acest lucru este posibil doar dacă $E = 0$, $D = 0$, ceea ce implică $J = 0$, $\rho = 0$. În consecință, deoarece diferența celor două soluții este nulă, ele sunt egale între ele, deci soluția problemei de câmp este unică.

Dacă se dorește determinarea unui câmp magnetic unic $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$ se poate aplica teorema de unicitate de la regimul magnetic staționar, deci adăugarea ecuațiilor:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

și condiții la frontieră referitoare la B , în punctele în care este dat $\mathbf{E}_t$, presupunând că punctele în care este dat $\mathbf{H}_t$, alcătuiesc o suprafață conexă.

10.7 Regimul cvasistaționar tranzitoriu

Teoremele prezentate pentru regimurile cvasistaționare nu sunt singurele teoreme de unicitate ale acestor regimuri. Orice condiție de frontieră care anulează vectorul Poynting în toate punctele frontierei sunt condiții care asigură unicitatea soluției. Un exemplu ilustrativ în acest sens este elementul electromagnetic de circuit, care este prezentat la sfârșitul acestui capitol.

10.8 Regimul general variabil tranzitoriu

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul de calcul $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, funcția caracteristică dielectrică $\hat{D}$ (în particular pentru dielectrice liniari tensorul $\overline{\epsilon}$ și

eventual $\mathbf{P}_p$ în medii polarizate permanent), funcția caracteristică de magnetizare $\hat{B}$ (în particular în mediu liniar magnetic tensorul $\bar{\mu}$ și eventual $\mathbf{I}_p = \mu_0 \mathbf{M}_p$ în medii magnetizate permanent) și funcția caracteristică a conductiei (în particular, în medii conductoare liniare este dat tensorul $\bar{\sigma}$ și eventual $\mathbf{J}_i = \bar{\sigma} \mathbf{E}_i$, în medii cu câmp dielectric imprimat).

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ și câmpul scalar ρ care satisfac ecuațiile:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p;$$

$$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H}) \text{ sau în particular } \mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H} + \mathbf{I}_p;$$

$$\mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_i;$$

și condițiile inițiale:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_0(\mathbf{r}) \text{ pentru } t = 0, \mathbf{r} \in \Omega;$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \text{ pentru } t = 0, \mathbf{r} \in \Omega,$$

$$\text{cu } \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0.$$

Este ușor de observat că dacă inducția magnetică este solenoidală (are divergența nulă) în momentul inițial, atunci va păstra conform legii inducției electromagnetice această proprietate pentru orice moment de timp. Cunoașterea distribuției inducției electrice permite determinarea distribuției de sarcină, conform legii fluxului electric, lege care poate fi eliminată din sistemul de ecuații, dacă nu interesează electrizarea corpurilor (ρ este eliminat dintre necunoscute). În orice caz, distribuția inițială de sarcină rezultă din condiția inițială referitoare la inducția electrică. Relația dintre densitatea de curent $\mathbf{J}$ și densitatea de sarcină ρ , impusă de legea conservării sarcinii este automat satisfăcută deoarece această relație este o consecință a ecuațiilor 2 și 3 din sistemul de ecuații.

Teoremă 10.8.1 *Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic tranzitoriu.*

Problema fundamentală a regimului general variabil formulată anterior are soluție unică dacă:

- tensorii $\bar{\epsilon}$ și $\bar{\mu}$ au valori proprii strict pozitive;
- tensorul $\bar{\sigma}$ are valori proprii nenegative;
- în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie $\mathbf{E}_t$ fie $\mathbf{H}_t$.

Pentru demonstrarea acestei teoreme vom considera ca mediile au caracteristici de material afine. Presupunând prin absurd că există două soluții distincte pentru problema fundamentală, diferența lor va satisface ecuațiile:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t};$$

$$div\mathbf{D} = \rho;$$

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mu}\mathbf{H} \text{ și } \mathbf{J} = \bar{\sigma}\mathbf{E}.$$

Condițiile inițiale: $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0) = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = 0$ și condițiile de frontieră: $\mathbf{E}_t = 0$ fie $\mathbf{H}_t = 0$.

Teorema energiei electromagnetice aplicată câmpului diferență are forma locală:

$$div(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{E}}) = p + \frac{\partial w}{\partial t},$$

cu $p = \mathbf{J}\mathbf{E}$, $w = w_e + w_m = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2}$ și forma integrală:

$$P_\Sigma = P + \frac{\partial w}{\partial t}$$

în care:

$$P_\Sigma = \int_\Omega div(\mathbf{H} \times \mathbf{E})dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E})d\mathbf{A} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}_t)d\mathbf{A} = 0,$$

$$P = \int_\Omega p dv = \int_\Omega \mathbf{J}\mathbf{E}dv = \int_\Omega \mathbf{E}(\bar{\sigma}\mathbf{E})dv > 0,$$

$$W = \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2}\right)dv = \frac{1}{2} \int_\Omega [\mathbf{E}(\bar{\epsilon}\mathbf{E})dv + \mathbf{H}(\bar{\mu}\mathbf{H})]dv > 0.$$

Integrând în timp pe intervalul $(0, t_m)$ și ținând cont că energia inițială este nulă $W(0) = 0$, rezultă:

$$W(t) = - \int_0^{t_m} P(t)dt \leq 0,$$

ceea ce contrazice condiția $W(t_m) > 0$ demonstrată anterior.

În consecință $w = 0$, deci $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = 0$ ceea ce implică și $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, iar în final $\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$. Soluția diferență fiind nulă, rezultă că cele două soluții nu pot fi distincte, iar problema fundamentală are soluție unică.

Trebuie remarcat faptul că ecuațiile regimurilor cvasistaționar inductiv și capacitiv și implicit problemele fundamentale ale acestor regimuri se obțin din cele ale regimului general variabil considerând mediile în întregul domeniu de tip anelectric respectiv amagnetic.

10.9 Elementul electromagnetic de circuit

Elementele de circuit electrice cu parametri concentrați condensatorul, rezistorul și bobina sunt caracterizate de parametri C , R și respectiv L (scalari pozitivi în cazul elementelor dipolare și matrice patrute simetrice, pozitiv definite, în cazul elementelor multipolare).

Calculul acestor parametri, presupune determinarea câmpului electric, distribuția de curent sau a câmpului magnetic prin rezolvarea problemei fundamentale a regimurilor

electrostatic, electrocinetic respectiv magnetic staționar în condițiile de frontieră specifice, care au fost prezentate anterior.

În cazul elementelor cu parametri distribuiți, analiza trebuie efectuată în regimul cvasi-staționar sau general variabil, deoarece elementul de circuit cu efecte de câmp este conectat în exterior cu un circuit electric cu parametri concentrați, descris de ecuațiile lui Kirchhoff și nu de ecuațiile lui Maxwell, condițiile de frontieră descrise anterior referitoare la $\mathbf{E}_t$ și $\mathbf{H}_t$ nu sunt potrivite în acest caz.

Ar trebui introduse condiții de frontieră care să se refere la un număr finit de mărimi scalare definite astfel încât conceptele de bornă (terminal), curent prin bornă și potențial al bornei să aibă sens. Acest lucru este realizat prin *conceptul de element electromagnetic de circuit electric*, care este un domeniu spațial Ω , a cărei frontieră $\partial\Omega$ este alcătuită din n părți disjuncte $S_1, S_2, \dots, S_n$ numite borne și suprafața externă bornelor $S_l = \partial\Omega - \bigcup_{k=1}^n S_k$ numită și suprafața tensiunilor la borne, și pe care sunt îndeplinite următoarele condiții de frontieră:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in S_l, \quad (10.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in S_l, \quad (10.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in \bigcup_{k=1}^n S_k. \quad (10.3)$$

Condiția de frontieră 10.1 se referă la componenta tangențială a intensității câmpului electric și conform legii inducției electromagnetice impune valoare constantă în timp a componentei normale a inducției magnetice B_n . Această condiție elimină orice cuplaj magnetic între interiorul și exteriorul domeniului Ω , iar câmpul magnetic exterior nu induce câmp electric în interior. Mai mult, faptul că $\mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ este irotațional pe $\partial\Omega$ permite definirea unui potențial scalar V pe $\partial\Omega$, astfel încât $\mathbf{E}_t = -\text{grad}V$. Dacă se dorește ca acest lucru să se poată face și în cazul elementelor cu domeniul Ω multiplu conex, condiția (A) trebuie înlocuită cu una mai tare:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru orice } \Gamma \subset S_l. \quad (10.4)$$

Condiția de frontieră 10.2 se referă la componenta tangențială a intensității câmpului magnetic, dar conform legii circuitului magnetic ea impune anularea componentei normale a curentului total (cel de conducție $\mathbf{J}_n$ plus cel de deplasare $\mathbf{J}_{dn}$). În acest fel se anulează atât cuplajele galvanice, cât și cele capacitive prin suprafața externă bornelor, obligând curentul total să treacă exclusiv prin borne. Putem spune că 10.1 și 10.2 se referă deci la componentele normale ale inducțiilor ($\mathbf{B}_n$, $\mathbf{J}_n$, și $\mathbf{D}_n$).

Condiția de frontieră 10.3 se aplică doar bornelor și impune ca pe acestea componenta tangențială a câmpului electric $\mathbf{E}_t$ să fie nulă. Acest lucru este realizat dacă fiecare bornă este echipotențială (de exemplu realizată dintr-o folie supraconductoare). Dacă nu s-ar impune această condiție o bornă ar putea avea o infinitate de valori ale potențialului electric în diferite puncte ale sale, făcând ca elementul să nu mai fie compatibil cu circuitul electric exterior.

Excitația unui element electromagnetic de circuit este realizată exclusiv prin bornele sale, de curenții și potențialele acestora definite de:

$$i_k = \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{r}, \quad V_k = \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \text{ pentru } k = 1, 2, \dots, n,$$

în care $\Gamma_k = \partial S_k$ este bordura bornei S_k iar $C_k \subset \partial\Omega$ este o curbă ce unește borna S_k de borna de referință S_n .

Teoremă 10.9.1 *Teorema de unicitate pentru elementul electromagnetic de circuit electric.*

Problemele determinării câmpului electromagnetic variabil în regim cvasistaționar sau general variabil, formulate anterior au soluție unică, dacă:

- tensorul $\bar{\epsilon}$ are valori proprii strict pozitive (sau este nul în regimul cvasistaționar anelectric);
- tensorul $\bar{\mu}$ are valori proprii strict pozitive (sau este nul în regimul cvasistaționar amagnetic);
- tensorul $\bar{\sigma}$ are valori proprii nenegative;
- sunt îndeplinite condițiile de frontieră 10.1, 10.2 10.3 sau 10.4 în cazul domeniului Ω multiplu conex, condiții definitorii pentru elementul electromagnetic de circuit;
- cu excepți ultimei borne, pentru toate celelalte $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ este dată fie variația în timp a curentului $i_k(t)$ fie valoarea potențialului $V_k(t)$, pentru $t \in [0, \infty)$.

Pentru demonstrația acestei teoreme se va folosi din nou câmpul diferență a două soluții diferite, în manieră asemănătoare celei utilizate în demonstrația teoremei anterioare în condiții nule de frontieră. Puterea transferată prin $\partial\Omega$ este:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) d\mathbf{A} = - \int_{\partial\Omega} (\text{grad} V \times \mathbf{H}_t) d\mathbf{A} = \int_{\partial\Omega} V \text{rot} \mathbf{H} d\mathbf{A} - \int_{\partial\Omega} \text{rot}(V \mathbf{H} d\mathbf{A}) = \int_{S_l} V \mathbf{n} \text{rot} \mathbf{H}$$

și se anulează pentru $V_k = 0$ sau $i_k = 0$, cu $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. În consecință, soluția problemei de câmp este unică.

Să presupunem că primele ($m < n$) terminale sunt excitate cu potențialele $v_a = [V_1, V_2, \dots, V_m]^T$, iar diferența lor ($n - m$) terminale cu curenții $i_b = [i_{m+1}, \dots, i_n]^T$. După ce a fost determinat câmpul se poate calcula prin integrare pe curba de pe frontieră curenții $i_a = [i_1, i_2, \dots, i_m]^T$ prin terminalele excitate în tensiune și potențialele $v_b = [V_m, V_{m+1}, \dots, V_n]^T$ ale terminalelor excitate în curent. Utilizând operatorii hibridi de admitanță y , de impedanță z , de transfer în tensiune α și de transfer în circuit β , care leagă semnalele de excitație de cele de răspuns, rezultă:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{aa} & \beta_{ab} \\ \alpha_{ba} & z_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \\ i_b \end{bmatrix}. \quad (10.5)$$

Dacă $n = 0$, atunci elementul este caracterizat numai de operatori de impedanță și $v = zi$ iar dacă $n = n - 1$, atunci elementul este caracterizat numai de operatori de admitanță și $i = yv$.

În cazul elementului electromagnetic liniar cu condiții inițiale nule, operatorii de circuit astfel definiți sunt liniari. Din acest motiv comportarea elementului în aceste condiții este caracterizată de $(n - 1)^2$ funcții indiciale, care reprezintă răspunsul unui terminal la excitație treaptă a altui terminal, în condițiile în care celelalte terminale au excitație nulă.

Capitolul 11

Analiza câmpului electromagnetic în domeniul frecvenței

11.1 Reprezentarea în complex a ecuațiilor câmpurilor sinusoidale

Cel mai des întâlnit și în același timp cel mai simplu regim periodic permanent al câmpului electromagnetic este regimul sinusoidal, în care variația în timp a mărimilor fizice, caracteristică câmpului, este de forma:

$$x(t) = X\sqrt{2} \sin(\omega t + \phi_x),$$

în care x este valoarea instantanee, $t \in (-\infty, \infty)$ este variabila timp, X este valoarea efectivă, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ este pulsația, f frecvența și T perioada, iar Φ_x este faza inițială. În regimul de variație sinusoidală (numită și armonică), toate mărimile unei probleme au frecvență comună de variație, fiecare mărime scalară având specific doar doi parametri reali: valoarea efectivă X și faza inițială Φ_x . Din acest motiv putem asocia fiecărei funcție $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ cu variație sinusoidală ($x \in \mathcal{S}$ - clasa funcțiilor sinusoidale de pulsație ω) în mod biunivoc un număr complex $\underline{X} \in \mathbb{C}$ și definit de relația $\underline{X} = X_e j \varphi_x$, în care j este unitatea imaginară $j^2 = -1$.

Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale este o transformată $\mathcal{C} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ cu următoarele proprietăți remarcabile:

- $\mathcal{C}$ este bijectivă, iar $\mathcal{C}^{-1} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ este definită de $\mathcal{C}^{-1}[\underline{X}] = \sqrt{2} \operatorname{Im} [\underline{X} e^{j\omega t}]$;
- $\mathcal{C}$ este un operator liniar, fiind valabilă relația:

$$\mathcal{C} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] = \lambda_1 \mathcal{C} [x_1] + \lambda_2 \mathcal{C} [x_2],$$

în care $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, iar $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$;

- $\mathcal{C}$ transformă operațiile diferențiale în operații algebrice, conform relației:

$$\mathcal{C} \left[\frac{dx}{dt} \right] = j\omega \mathcal{C} [x],$$

în care $x \in \mathcal{S}$ este o funcție sinusoidală de pulsație ω .

Principalul avantaj al reprezentării complexe constă în faptul că ecuațiile diferențiale în variabilă timp se transformă în ecuații algebrice (complexe), dar în care variabila timp nu intervine (ecuațiile au un caracter staționar). Din acest motiv, analiza câmpurilor cu variație temporală sinusoidală tehnică este făcută aproape exclusiv prin reprezentare complexă.

Primul lucru care trebuie remarcat este faptul că un sistem se poate afla în regim armonic doar dacă ecuațiile sale au un caracter liniar. În cazul câmpului electromagnetic, acesta presupune că toate cele trei relații de material sunt liniare:

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E}.$$

În caz contrar, dacă un câmp dintr-o relație de material este sinusoidal (de exemplu intensitatea câmpului), atunci celălalt (de exemplu inducția) nu va mai avea variație armonică în timp.

Să considerăm o problemă 2D în care componentele intensității câmpului magnetic au următoarea variație sinusoidală:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}H_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}H_y(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}H_x\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + \mathbf{j}H_y\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Prin reprezentarea în complex a acestor componente se obține:

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}H_x e^{j\varphi_1} + \mathbf{j}H_y e^{j\varphi_2} \in \mathbf{C}^2,$$

adică un vector bidimensional cu componente complexe.

Raționamente asemănătoare pot fi făcute fie în 2D, fie în 3D, pentru toate câmpurile vectoriale sau scalare. În consecință, în regim armonic câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele funcții vectoriale cu componenete complexe:

- inducția electrică în complex $\mathbf{D} : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$;
- intensitatea câmpului electric în complex $\mathbf{E} : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$;
- densitatea de curent în complex $\mathbf{J} : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$;
- inducția magnetică în complex $\mathbf{B} : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$;
- intensitatea câmpului magnetic în complex $\mathbf{H} : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$;
- densitatea de sarcină în complex $\rho : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$,

în care $n = 1, 2$ sau 3 în funcție de dimensiunea problemei.

Problema fundamentală a regimului general variabil armonic are ca date: domeniul spațial Ω , tensorul permitivității $\bar{\epsilon}$, tensorul permeabilității $\bar{\mu}$ și cel al conductivității $\bar{\sigma}$, tensori cunoscuți în orice punct din Ω și eventual curentul electric imprimat $\mathbf{J}_i$.

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectorial-complexe $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{H}}$, $\underline{\mathbf{J}}$, care satisfac următoarele ecuații obținute din ecuațiile lui Maxwell prin aplicarea transformatei în complex $\mathcal{C}$ și ținând cont de proprietățile acestora:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{E}};$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}};$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \bar{\bar{\epsilon}} \underline{\mathbf{E}};$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \bar{\bar{\mu}} \underline{\mathbf{H}};$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \bar{\bar{\sigma}} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_i.$$

Dacă interesează și distribuția de sarcină, atunci se calculează câmpul scalar complex, folosind relația:

$$\rho = \text{div } \overline{\mathbf{D}}.$$

În acest regim, legea fluxului magnetic ($\text{div } \underline{\mathbf{B}} = 0$) este satisfăcută automat, ca o consecință a legii inducției electromagnetice. Spre deosebire de regimul tranzitoriu, în regimul sinusoidal se constată că nu sunt necesare condiții inițiale.

Prin particularizări ale constantelor de material se obțin diferite regimuri ale câmpului armonic:

- $\bar{\bar{\epsilon}} = 0$ - regimul cvasistaționar inductiv (anelectric);
- $\bar{\bar{\mu}} = 0$ - regimul cvasistaționar capacitiv (amagnetic);
- $\bar{\bar{\sigma}} = 0$ - regimul general variabil în medii izolante.

Cei trei tensori de material sunt simetrici și au componente reale, iar valorile proprii sunt și ele reale. Un artificiu interesant de modelare constă în considerarea unor constante de material cu caracter complex, de exemplu $\underline{\epsilon} = \epsilon' + j\epsilon''$, $\underline{\mu} = \mu' + j\mu''$, cu părți imaginare ϵ'' și/sau μ'' nenule. Efectul acestor parametri constă în apariția unor cicluri eliptice de histerezis pentru comportarea electrică, respectiv magnetică. Din punct de vedere al comportării în domeniul timpului, acest model corespunde unor relații de material cu caracter dinamic. De exemplu, $\underline{\mathbf{D}} = (\epsilon' + j\epsilon'') \underline{\mathbf{E}}$ este reprezentarea în complex a ecuației:

$$\overline{\mathbf{D}}(t) = \epsilon' E(t) + \frac{\epsilon''}{\omega} \cdot \frac{dE}{dt}.$$

Teoremă 11.1.1 *Teorema de unicitate a câmpului armonic.*

Problema fundamentală a regimului general variabil armonic formulată anterior are soluție unică, dacă:

- *tensorul $\bar{\bar{\epsilon}}$ are valori proprii pozitive (sau este nul în regim anelectric);*
- *tensorul $\bar{\bar{\mu}}$ are valori proprii pozitive (sau este nul în regim amagnetic);*
- *tensorul $\bar{\bar{\sigma}}$ are valori proprii pozitive;*

- în fiecare punct de pe frontieră este cunoscută componenta tangențială a intensității câmpului electric $\underline{\mathbf{E}}_t$ sau a celui magnetic $\underline{\mathbf{H}}_t$.

Ultima condiție poate fi înlocuită cu condițiile de frontieră specifice **elementului electromagnetic de circuit**:

- pe suprafețele bornelor $E_t = 0$;
- pe suprafața externă a bornelor, componentele normale ale rotorului intensității câmpului electric și magnetic sunt nule: $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = 0$;
- pentru fiecare bornă, cu excepția celei de referință, este cunoscută fie valoarea potențialului complex $\underline{V}_k$, fie valoarea curentului complex $\underline{I}_k$ ce străbate borna.

Pentru demonstrația acestor două teoreme, vom arăta pentru început forma complexă a teoremei energiei electromagnetice în regim armonic (a nu se confunda cu reprezentarea în complex a teoremei energiei electromagnetice). În cazul unui element electromagnetic de circuit electric, membrul stâng al egalității este:

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_k \underline{I}_k^*,$$

dacă I_k are sensul de referință spre exterior.

Dacă se notează cu $\underline{\mathbf{H}}^*$, $\underline{\mathbf{J}}^*$, $\underline{\mathbf{D}}^*$ câmpurile $\underline{\mathbf{H}}$, $\underline{\mathbf{J}}$ și $\underline{\mathbf{D}}$ complex conjugate, din legea inducției și din cea a circuitului magnetic, rezultă:

$$\underline{\mathbf{H}}^* \text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*; \quad \underline{\mathbf{E}} \text{rot } \underline{\mathbf{H}}^* = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* - j\omega \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*.$$

Scăzând aceste două relații, rezultă forma locală:

$$-div (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* + j\omega (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*)$$

și forma integrală:

$$-\int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv + j\omega \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) dv.$$

Trebuie remarcat faptul că în cazul mediilor fără histerezis, $\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* = \underline{\mathbf{E}} \bar{\sigma} \underline{\mathbf{E}}^*$ este un număr real nenegativ care reprezintă densitatea de volum a puterii active disipată de corpuri, a cărei integrală este puterea activă, măsurată în W:

$$P = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt,$$

iar

$$\omega (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) = \omega (\underline{\mathbf{H}} \bar{\mu} \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \bar{\epsilon} \underline{\mathbf{E}}^*)$$

este tot un număr real care reprezintă densitatea de volum a puterii reactive disipată de corpuri, a cărei integrală este puterea reactivă, măsurată în VAR. În consecință:

$$\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*$$

reprezintă vectorul Poynting complex, vector ce caracterizează puterea transferată superficial; partea sa reală se referă la puterea activă (măsurată în W/m^2), iar partea imaginară se referă la puterea reactivă (măsurată în VAR/m^2).

Să considerăm acum că problema fundamentală are două soluții distincte. Diferența lor va satisface aceleași ecuații, dar cu condiții de frontieră nule. Din acest motiv, componenta normală a vectorului Poynting complex pentru câmpul diferență este nul: $\underline{\mathbf{E}}_t \times \underline{\mathbf{H}}_t^* = 0$, atât pentru prima teoremă de unicitate cât și pentru cea corespunzătoare elementului electromagnetic de circuit. Din forma complexă a teoremei energiei rezultă că atât puterea activă (partea reală) cât și puterea reactivă (partea imaginară) sunt nule:

$$P = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv = 0; \quad Q = \omega \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) dv = 0.$$

Din prima relație rezultă că $J = 0$ în tot domeniul Ω , iar $E = 0$ cel puțin în conductoare. Pentru ca soluția problemei fundamentale să fie unică, este necesar ca E și H să se anuleze peste tot în Ω . Dacă de exemplu, domeniul Ω este în întregime izolat ($J = 0$), în schimb, atât E cât și H pot fi nenule chiar și în condițiile $P = 0$, $Q = 0$. Cele două câmpuri electric și magnetic se pot afla în acest caz în rezonanță, având valori nenule chiar și în condiții de frontieră nule. Din acest motiv, pentru a asigura unicitatea câmpului în regim general variabil, tot domeniul Ω trebuie să fie conductiv sau cel puțin slab conductiv.

Totuși, **problema determinării frecvențelor de rezonanță** ale domeniului cu medii ideale (fără pierderi) joacă un rol important în practică deoarece la aceste frecvențe câmpul electromagnetic se poate întreține un timp nemărginit, fără aport de energie din exterior.

În regim cvasistaționar anelectric, forma în complex a energiei este:

$$- \int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv + j\omega \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*) dv.$$

Anularea părții reale implică $E = 0$, dacă domeniul Ω este integral conductor, iar anularea părții imaginare implică $H = 0$, dacă $Re[\mu] > 0$, ceea ce determină unicitatea soluției.

În regim cvasistaționar amagnetic, este valabilă relația:

$$- \int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv - j\omega \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) dv.$$

Anularea părții imaginare implică $E = 0$, dacă $Re[\varepsilon] > 0$, ceea ce determină unicitatea soluției, chiar și în cazul domeniilor integral izolante.

Deasemenea, trebuie remarcat faptul că în cazul elementului electromagnetic de circuit, relațiile între curenți și potențiale au forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa} & \underline{B}_{ab} \\ \underline{A}_{ba} & \underline{Z}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{I}_b \end{bmatrix}, \quad (11.1)$$

în care $\underline{I} = \mathcal{C}[i]$, $\underline{V} = \mathcal{C}[v]$, formă obișnuită prin reprezentarea în complex a relației instantanee specifice elementului cu excitație hibridă. În formă complexă, $\underline{Y}$ reprezintă admitanța complexă, $\underline{Z}$ impedanța complexă, $\underline{A}$ factorul complex de transfer în tensiune, iar $\underline{B}$ reprezintă factorul complex de transfer în curent. Partea reală și cea imaginară a

impedanței complexe: $\underline{Z} = R + jX$ reprezintă rezistența și respectiv reactanța de curent alternativ.

În multe situații practice, un interes deosebit îl reprezintă determinarea rezistenței și reactanței (sau eventual părțile reale și imaginare ale altor funcții complexe de circuit) la o frecvență dată, sau determinarea modului în care acești parametri depind de frecvență. După cum s-a arătat, puterea complexă transferată pe la borne de un element multipolar de circuit este:

$$\underline{S} = P + jQ = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_k \underline{I}_k^* = \underline{Z} I_b^2 + \underline{Y}^* V_a^2 + (\underline{A} + \underline{B}^*) \underline{V}_a \underline{I}_b^*.$$

În cazul $m = 0$, frecvențele de rezonanță corespund la $X = \text{Im}(\underline{Z}) = 0$ și la $\text{Im}(\underline{Y}) = 0$, în cazul $m = n - 1$.

11.2 Analiza regimurilor periodice cu transformata Fourier discretă

În regimul periodic permanent al câmpului electromagnetic, mărimile caracteristice ale câmpului au variație periodică în timp:

$$x(t) = x(t + T),$$

în care T este perioada comună pentru toate mărimile problemei. Din acest motiv, funcția $x : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se poate restrânge doar la o singură perioadă $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ și se poate prelungi ulterior prin periodicitate, pe toată axa timpului.

Funcțiile periodice admit dezvoltări în serie Fourier, de forma:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

în care $\omega = 2\pi/T$, iar coeficienții Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t dt.$$

Valoarea medie a pătratului funcției x pe o perioadă are expresia:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

deci, dacă x are pătrat integrabil $x \in L^2(0, T)$, atunci șirurile a_k și b_k sunt convergente către zero.

Dacă definim numerele complexe $\underline{C}_k = a_k + j_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$, rezultă:

$$\underline{C}_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) e^{jk\omega t} dt,$$

proporțional cu numărul complex asociat funcției sinusoidale $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$, numită și armonica k . În plus, componenta continuă este reprezentată de $\underline{C}_0 = a_0$. În consecință, orice funcție x aparținând spațiului funcției periodice $\mathcal{P}$ de perioadă dată este reprezentată biunivoc de șirul convergent de numere complexe $\underline{C}_0, \underline{C}_1, \dots, \underline{C}_k, \dots \in l^2(\mathbb{C})$. Transformata $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ astfel definită se numește transformata Fourier complexă și are următoarele proprietăți remarcabile:

- $\mathcal{F}$ este bijectivă și $\mathcal{F}^{-1} : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{P}$ are expresia:

$$x(t) = \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{C}_k e^{-jk\omega t} \right];$$

- $\mathcal{F}$ este liniară:

$$\mathcal{F} [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] = \lambda_1 \mathcal{F} [x_1] + \lambda_2 \mathcal{F} [x_2],$$

pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$;

- $\mathcal{F}$ transformă operațiile diferențiale în operații algebrice conform relației:

$$\mathcal{F} \left[\frac{dx}{dt} \right] = j\omega \text{diag} (0, 1, \dots, k, \dots) \mathcal{F} [x],$$

în care $x \in \mathcal{P}$. Reprezentarea complexă a armonicii k a derivatei este obținută prin înmulțirea cu $jk\omega$.

Utilizând transformata Fourier discretă, variabila timp este eliminată din ecuațiile diferențiale, dar acestea se transformă în sisteme cu un număr infinit de ecuații cu soluții complexe (câte una pentru fiecare armonică).

În fiecare punct din domeniul spațial Ω , în funcție de dimensiunea problemei, câmpul este caracterizat de vectori cu $n = 1, 2$ sau 3 componente. Prin reprezentare în complex, în domeniul frecvenței rezultă următoarele funcții:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}} : \Omega \rightarrow \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\mathbf{E}} : \Omega \rightarrow \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\mathbf{J}} : \Omega \rightarrow l^2(\mathbb{C}^n), \\ \underline{\mathbf{B}} : \Omega \rightarrow \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\mathbf{H}} : \Omega \rightarrow \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\rho} : \Omega \rightarrow l^2(\mathbb{C}^n), \end{aligned}$$

ce ??? complex al câmpului.

Problema fundamentală a regimului general variabil periodic permanent are ca date: domeniul spațial Ω , tensorul permitivității $\bar{\epsilon}$, tensorul permeabilității $\bar{\mu}$ și al conductivității $\bar{\sigma}$ în orice punct din Ω și eventual transformata Fourier a curentului electric imprimat $\underline{\mathbf{J}}_i : \Omega \rightarrow l^2(\mathbb{C}^n)$. *Necunoscutele problemei* sunt câmpurile vectorial-complexe (cu o infinitate de armonice) $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ și $\underline{\mathbf{J}}$, care satisfac următoarele ecuații (obținute prin transformata Fourier discretă a ecuațiilor lui Maxwell):

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}}_k = jk\omega \underline{\mathbf{B}}_k, \quad \text{rot } \underline{\mathbf{H}}_k = \underline{\mathbf{J}}_k + jk\omega \underline{\mathbf{D}}_k,$$

$$\underline{\mathbf{D}}_k = \bar{\bar{\epsilon}} \underline{\mathbf{E}}_k, \quad \underline{\mathbf{B}}_k = \bar{\bar{\mu}} \underline{\mathbf{H}}_k, \quad \underline{\mathbf{J}}_k = \bar{\bar{\sigma}} \underline{\mathbf{E}}_k + \underline{\mathbf{J}}_{ik},$$

pentru armonicele $k = 1, 2, \dots$

Prin particularizarea constantelor de material se obțin diferite regimuri ale câmpului electromagnetic :

- $\bar{\bar{\epsilon}} = 0$ - regimul cvasistaționar inductiv;
- $\bar{\bar{\mu}} = 0$ - regimul cvasistaționar capacitiv;
- $\bar{\bar{\sigma}} = 0$ - regimul general variabil în izolanți.

În cazul elementului electromagnetic liniar de circuit electric este suficient să se determine felul în care variază cu frecvența funcțiile de circuit de regim armonic $\underline{Z}_{bb}(k\omega)$, $\underline{Y}_{aa}(k\omega)$, $\underline{A}_{ba}(k\omega)$, $\underline{B}_{ab}(k\omega)$, urmând ca răspunsul să se calculeze în funcție de excitație, cu formule de tipul:

$$\underline{V}_b = \text{diag} \left(\underline{Z}_{bb}(0), \underline{Z}_{bb}(\omega), \underline{Z}_{bb}(2\omega), \dots \right) \underline{I}_b,$$

valabilă pentru excitație în curent și în care $\underline{V}_b, \underline{I}_b \in l^2(\mathbb{C})$. Trebuie remarcat faptul că analiza în domeniul frecvență se aplică de regulă în problemele liniare, dar se poate aplica și în cazul problemelor cu caracteristici de material neliniare folosind *metoda balanței armonice*.

Dacă, de exemplu, caracteristica de magnetizare este neliniară cu $\underline{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{H}})$, atunci în locul relației $\underline{\mathbf{B}}_k = \bar{\bar{\mu}} \underline{\mathbf{H}}_k$ trebuie satisfăcută relația neliniară între armonici:

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{B}}), \quad \mathcal{F}(\hat{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{H}})) = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{B}}(\mathcal{F}^{-1}(\underline{\mathbf{H}}))).$$

Teoremă 11.2.1 *Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic periodic.*

Problema fundamentală a regimului periodic permanent formulată anterior are soluție unică, dacă:

- tensorul $\bar{\bar{\epsilon}}$ este pozitiv definit sau este nul în regim anelectric;
- tensorul $\bar{\bar{\mu}}$ este pozitiv definit sau este nul în regim amagnetic;
- tensorul $\bar{\bar{\sigma}}$ este pozitiv definit sau nenegativ în regim amagnetic;
- în fiecare punct de pe frontieră este dată transformata Fourier discretă a compoentei tangențiale a câmpului electric $\underline{\mathbf{E}}_t \in l^2(\mathbb{C}^{n-1})$ sau a câmpului magnetic $\underline{\mathbf{H}}_t \in l^2(\mathbb{C}^{n-1})$.

Ultima condiție poate fi înlocuită cu condițiile de frontieră specifice elementului electromagnetic de circuit:

- pe suprafața bornelor $E_t = 0$;

- pe suprafața externă bornelor componentele normale ale rotorului câmpului magnetic și electric sunt nule:

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = 0, \quad \mathbf{n} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = 0;$$

- pentru fiecare bornă, cu excepția celei de referință, este cunoscută transformata Fourier a potențialului $\underline{V} \in l^2(\mathbb{C})$ sau a curentului injectat $I \in l^2(\mathbb{C})$.

Pentru demonstrația acestei teoreme este suficient să observăm că, în cazul liniar, soluția problemei se obține prin superpoziția câmpurilor produse de diferite armonici ale excitațiilor (surselor interne și externe de câmp). Fiecare armonică fiind sinusoidală, problema se reduce la una de regim armonic.

11.3 Analiza regimurilor tranzitorii cu transformatele Laplace și Fourier

Regimul tranzitoriu poate fi considerat ca un caz limită (degenerat) al regimului periodic permanent, caz în care perioada T tinde către infinit. Pentru această limită, transformata Fourier discretă tinde către transformata Fourier continuă, care transformă funcția reală $x : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ în funcția complexă de variabilă reală $X : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ definită astfel:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt.$$

Transformata Fourier are următoarele proprietăți:

- $\mathcal{F}$ este inversabilă și $\mathcal{F}^{-1}$ are expresia:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} dt;$$

- $\mathcal{F}$ este liniară:

$$\mathcal{F}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 \mathcal{F}[x_1(t)] + \lambda_2 \mathcal{F}[x_2(t)];$$

- $\mathcal{F}$ transformă operația de derivare într-una algebrică de înmulțire cu $j\omega$:

$$\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] = j\omega \mathcal{F}[x(t)].$$

Transformata Fourier este folosită la analiza câmpului electromagnetic în medii liniare, în regim tranzitoriu, cu condiții inițiale nule. Prin aplicarea acestei transformări, din ecuațiile câmpului se elimină variabila timp și toate derivatele față de aceasta. Ecuațiile devin “staționare” iar coeficienții din aceste ecuații, ca și soluțiile ecuațiilor, au caracter complex. În locul variabilei “timp” apare o nouă variabilă numită “pulsatie”, dar nu apar derivate față de aceasta. Din acest motiv se spune că analiza se efectuează în domeniul frecvenței și nu în domeniul timpului.

Transformata Fourier a câmpului electromagnetic este identică formal cu ecuațiile complexe ale câmpului în regim armonic. În regim armonic ω este un număr fixat (dat), pe când în regim tranzitoriu ω este o variabilă reală simbolică (independentă, neprecizată).

Dacă sursele de câmp sunt transformatele Fourier ale surselor interne ($\mathbf{J}_i = \mathcal{F}[\mathbf{J}_i(t)]$) sau externe reprezentate prin condițiile de frontieră de tipul $\mathbf{E}_t = \mathcal{F}[\mathbf{E}_t(t)]$ sau $\mathbf{H}_t = \mathcal{F}[\mathbf{H}_t(t)]$, atunci soluția sistemului, care este unică în baza teoremei de unicitate din regimul armonic, este chiar transformata Fourier a soluției tranzitorii din domeniul timpului, obținută în condiții inițiale nule. Spre deosebire de analiza în domeniul timpului, în care atât excitațiile cât și răspunsurile sunt funcții reale de timp, în analiza în domeniul frecvenței ambele semnale sunt funcții complexe ale frecvenței.

Dacă în domeniul timpului operatorii de circuit au un caracter integral-diferențial, în analiza în frecvență ei sunt funcții complexe de variabilă reală: $\underline{Z}_{bb}(\omega)$, $\underline{Y}_{aa}(\omega)$, $\underline{A}_{ba}(\omega)$, $\underline{B}_{ab}(\omega)$. Părțile reale și imaginare sunt nenule și reprezintă caracteristicile de frecvență ale elementului electromagnetic de circuit.

Cunoașterea caracteristicilor de frecvență permite determinarea răspunsului (I_a, V_b) generat în condiții inițiale nenule de o excitație arbitrară (V_a, I_b):

$$\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix} = \mathcal{F}^{-1} \left[\begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa}(\omega) & \underline{B}_{ab}(\omega) \\ \underline{A}_{ba}(\omega) & \underline{Z}_{bb}(\omega) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix} \right]. \quad (11.2)$$

Pentru analiza regimului tranzitoriu în sisteme liniare se utilizează o altă transformată integrală, înrudită cu transformata Fourier. Aceasta este transformata Laplace și este definită de relația:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty x(t) e^{st} dt,$$

în care $s \in \mathbb{C}$ este o variabilă complexă simbolică, numită “frecvență complexă”.

Transformata Laplace are următoarele proprietăți:

- $\mathcal{L}$ este inversabilă și $\mathcal{L}^{-1}$ are expresia:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds;$$

- $\mathcal{L}$ este un operator liniar:

$$\mathcal{L}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 \mathcal{L}[x_1(t)] + \lambda_2 \mathcal{L}[x_2(t)];$$

- $\mathcal{L}$ transformă operația de derivare în una algebrică:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = s\mathcal{L}[x(t)] - x(0),$$

în care s-a notat cu:

$$x(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t)$$

condiția inițială, anterioară regimului tranzitoriu.

După aplicarea transformatei Laplace mărimilor caracteristice câmpului, se obțin următoarele funcții complexe de variabilă complexă:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, s) = \mathcal{L}[\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] : \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n;$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, s) &: \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n; \\
\mathbf{J}(\mathbf{r}, s) &: \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n; \\
\mathbf{B}(\mathbf{r}, s) &: \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n; \\
\mathbf{H}(\mathbf{r}, s) &: \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n; \\
\rho(\mathbf{r}, s) &: \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Prin transformări Laplace, ecuațiile lui Maxwell capătă forma:

$$\begin{aligned}
rot \mathbf{E} &= -s\mathbf{B} + \mathbf{B}_0, \\
rot \mathbf{H} &= \mathbf{J} + s\mathbf{D} - \mathbf{D}_0, \\
\mathbf{D} &= \bar{\epsilon} \mathbf{B}; \quad \mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \bar{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_i.
\end{aligned}$$

În condiții inițiale nule, elementul linear de circuit electric este caracterizat de funcțiile operaționale de circuit $Z(s)$, $Y(s)$, $A(s)$ și $B(s)$, obținute înlocuind variabila $j\omega$ din funcțiile Fourier cu variabila s . Relația constitutivă a elementului electromagnetic de circuit multipolar devine:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & B_{ab} \\ A_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix}, \quad (11.3)$$

în care $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ și $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$. Se constată că, spre deosebire de analiza în domeniul timpului, în acest caz condițiile inițiale fac parte din ecuații și nu sunt impuse separat. Pentru a satisface legile fluxurilor va trebui totuși îndeplinită condiția:

$$div \mathbf{B}_0 = 0,$$

iar $\rho = \text{div} \mathbf{D}_0$ reprezintă distribuția inițială de sarcină. Teorema de unicitate este similară cu cea din domeniul timpului, cu deosebirea că $\mathbf{E}_t$ și $\mathbf{H}_t$ sunt înlocuite cu transformatele Laplace ale componentelor tangențiale ale intensității câmpului $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, s)$ și respectiv $\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, s)$.

Capitolul 12

Formulări în potențiale pentru ecuațiile câmpului electromagnetic

12.1 Potențialul scalar al câmpurilor statice și staționare irotaționale

Ecuațiile regimurilor electrostatic, magnetostatic și electrocinetic staționar sunt similare:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; & \mathbf{D} &= \hat{D}(\mathbf{E}); \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0; & \mathbf{B} &= \hat{B}(\mathbf{H}); \\ \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; & \mathbf{J} &= \hat{J}(\mathbf{E}), \end{aligned}$$

având toate câmpul cu o intensitate irotațională. Se constată că $\mathbf{E}$ este similar lui $\mathbf{H}$, iar $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ și $\mathbf{J}$ sunt similare. Deoarece divergența inducției este nenulă ($\rho \neq 0$) doar în regim electrostatic, se va analiza acest regim, iar rezultatele obținute vor fi apoi particularizate pentru celelalte două regimuri.

Orice câmp irotațional admite într-un domeniu simplu conex Ω un potențial scalar $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V.$$

Integrând această relație pe o curbă C care începe din punctul $\mathbf{r}$ și se termină în punctul $\mathbf{r}_0$, se obține:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) + \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}_0.$$

Potențialul scalar este definit până la o constantă aditivă C , urmând ca $V'(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) + C$ să determine același câmp $\mathbf{E}$ ca și potențialul scalar $V(\mathbf{r})$. O metodă de a fixa această constantă este de a alege un punct $\mathbf{r}_0$, numit originea potențialului, pentru care potențialul se consideră convențional nul. Potențialul unui punct este deci tensiunea electrică între acel punct și punctul de referință. Tensiunea electrică este diferența de potențial:

$$U_{12} = V_1 - V_2,$$

urmând ca pe o curbă închisă această diferență să fie nulă.

Cele două câmpuri vectoriale pot fi eliminate din ecuații prin exprimare în funcție de potențialul V , obținându-se în final ecuația diferențială neliniară de ordinul doi satisfăcută de potențialul scalar:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} (-\operatorname{grad} V) = \rho.$$

Dacă mediul are caracteristică de material afină: $\mathbf{D}(\mathbf{E}) = \bar{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$, potențialul satisface ecuația Poisson generalizată:

$$\operatorname{div} (\bar{\epsilon} \operatorname{grad} V) = -\rho + \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Dacă mediul este omogen, ecuația satisfăcută de potențial este cea Poisson clasică:

$$-\Delta V = \bar{\epsilon}^{-1}(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}_p).$$

Se constată că $\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}_p$ are aceeași unitate de măsură cu ρ , motiv pentru care este numită densitate de volum a sarcinii de polarizație, urmând ca sarcina totală să fie $\rho_t = \rho + \rho_p$, iar în medii izotrope să satisfacă ecuația Poisson:

$$-\Delta V = \frac{\rho_t}{\epsilon}.$$

Sarcina de polarizație este o sarcină fictivă, dar care are același efect asupra potențialului ca și sarcina reală. Un corp polarizat permanent generează într-un mediu liniar cu permeabilitate $\bar{\epsilon}$ același potențial V , deci implicit același câmp $\mathbf{E}$ ca și un corp electrizat cu ρ_p ; în schimb inducțiile sunt diferite: $\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E}$ în primul caz și $\mathbf{D} = \bar{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$ în al doilea caz.

Dacă mediul este neelectrizat și dacă polarizația permanentă este nulă, atunci potențialul V satisface ecuația Laplace generalizată:

$$\operatorname{div} (\bar{\epsilon} \operatorname{grad} V) = 0.$$

În cazul mediilor omogene, la care $\bar{\epsilon}$ nu depinde de punct, potențialul V satisface ecuația Laplace:

$$\Delta V = 0.$$

În cazul regimului magnetic staționar se utilizează potențialul magnetic scalar V_m definit astfel încât:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} V_m,$$

$$V_m(\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{H} d\mathbf{r}.$$

Prin utilizarea potențialului scalar, **problema fundamentală** a electrostaticii are distribuția de sarcină totală $\rho_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cunoscută, iar ca necunoscută câmpul scalar $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. După determinarea potențialului scalar, intensitatea câmpului electric și inducția câmpului electric se determină prin relațiile:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V,$$

$$\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E}).$$

În medii liniare și izotrope, densitatea de energie a câmpului electrostatic are expresia:

$$w_e = \int_0^{\mathbf{s}} \mathbf{E} d\mathbf{D} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} (\text{grad } V)^2 > 0,$$

iar dublul energiei electrostatice din domeniul Ω este:

$$2W = \int_{\Omega} \varepsilon (\text{grad } V)^2 dv = - \int_{\Omega} \mathbf{D} \text{grad } V dv = \int_{\Omega} \rho \text{grad } V dv - \int_{\partial\Omega} V D_n dA,$$

calculată prin utilizarea relației:

$$\text{div}(\mathbf{D}V) = V \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{grad } V = \rho V - \mathbf{D}\mathbf{E}.$$

În cazul particular în care m corpuri conductoare sunt scufundate într-un dielectric neelectrizat infinit extins, rezultă:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \rho V dv = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m V_k \int_{\partial\Omega_k} \rho_S dA = \sum_{k=1}^m \frac{q_k V_k}{2},$$

în care q_k și V_k sunt sarcina și respectiv potențialul conductorului k .

Utilizând superpoziția, rezultă că sarcina unui conductor este o combinație liniară a potențialelor tuturor conductoarelor:

$$q_k = \sum_{j=1}^m C_{kj} U_{kj},$$

unde $U_{kj} = V_k - V_j$, iar capacitățile parțiale $C_{kj} = -\alpha_{kj}$ pentru $k \neq j$, expresii cunoscute sub numele de relațiile lui Maxwell pentru capacități.

De obicei, conductorul referință de potențial, pentru care $V = 0$, este eliminat dintre corpurile considerate, astfel încât din cele $m+1$ corpuri doar m pot avea potențial flotant.

Folosind relația vectorial-matriceală $q = AV$, în care:

$$q = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T \in \mathbb{R}^n, \quad A = [\alpha_{kj}] \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$V = [V_1, V_2, \dots, V_m]^T \in \mathbb{R}^n, \quad C = [C_{kj}] \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

rezultă:

$$W = \frac{1}{2} q^T V = \frac{1}{2} V^T A^T V = \frac{1}{2} V^T q = \frac{1}{2} V^T AV.$$

Matricele A și C sunt simetrice și pozitiv definite deoarece $W > 0$, oricare ar fi potențialele nenule ale conductoarelor.

Teoremă 12.1.1 Teorema de unicitate pentru potențialul electrostatic.

Se consideră domeniul $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ în care dielectricul are o caracteristică $\mathbf{D}-\mathbf{E}$ monotonă dată (în particular, în cazul mediilor cu caracteristică dielectrică afină, tensorul $\bar{\varepsilon}$ este strict pozitiv și cunoscut în orice punct din Ω , iar $\mathbf{P}_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție dată). Frontiera $\partial\Omega$ este partiționată disjunct în $\partial\Omega = S_D \cup S_N$, în care:

$$S_D = \bigcup_{k=1}^n S_k, \text{ cu } S_1 \neq \emptyset.$$

Dacă sunt date următoarele condiții de frontieră:

- $V(\mathbf{r}) = C_k + f_k(\mathbf{r})$, pentru $\mathbf{r} \in S_k$, cu $f_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}$ funcții date, $C_1 = 0$ și $C_2, C_3, \dots, C_m$ constante reale necunoscute;
 - $\int_{S_k} \hat{D}(-\text{grad } V) d\mathbf{A} = \Psi_k$, pentru $k = 2, 3, \dots, m$, în care Ψ_k sunt constante reale date;
 - $\mathbf{n} \hat{D}(-\text{grad } V) = g(\mathbf{r})$, pentru $\mathbf{r} \in S_N$, cu $g : S_N \rightarrow \mathbb{R}$ funcție dată (în particular se
- $$\text{dă } \frac{\partial V}{\partial n} = \bar{\bar{\epsilon}}^{-1} g(\bar{\mathbf{r}}),$$

atunci soluția ecuațiilor pentru potențialul electrostatic este unică.

Teorema este o consecință directă a teoremei de unicitate pentru câmpul electrostatic, cunoașterea potențialului (chiar și până la o constantă aditivă) pe S_D permite calculul componentei tangențiale a intensității câmpului electric, iar cunoașterea derivatei potențialului după normala la suprafață permite, în medii liniare și izotrope, calculul componentei normale a inducției.

Dacă $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$ sunt nule, atunci V este determinat până la o constantă arbitrară a cărei valoare rezultă din faptul că pe $S_D \neq \emptyset$ există cel puțin un punct în care potențialul este cunoscut. Condiția de frontieră satisfăcută de potențial pe $S_1 \subset S_D$ se numește condiție Dirichlet, iar cea referitoare la derivata după normală a potențialului se numește condiție Neumann. Problema determinării potențialului în condiții Neumann ($S_D = \emptyset$, $\partial\Omega = S_N$) nu are soluție unică. În cazul a m conductoare scufundate într-un dielectric, cunoașterea potențialelor pentru unele conductoare și a sarcinilor celorlalte conductoare, permite determinarea univocă a câmpului electrostatic. Potențialul electrostatic este determinat univoc doar dacă valoarea sa este dată (prin condiție de frontieră de tip Dirichlet) cel puțin într-un punct.

Ecuațiile satisfăcute de potențialul magnetic scalar V_m și de cel electrocinetic scalar V au pentru diferite categorii de medii formele:

- general: $\text{div } \hat{B}(-\text{grad } V_m) = 0$, $\text{div } \hat{J}(-\text{grad } V) = 0$;
- afin: $\text{div } \hat{B}(\bar{\mu} \text{grad } V_m) = \text{div } \mathbf{I}_p$, $\text{div } \hat{J}(\bar{\sigma} \text{grad } V) = \text{div } \mathbf{J}_i$;
- liniar și omogen: $-\Delta V_m = \bar{\mu}^{-1} \rho_m$, $-\Delta V = \bar{\sigma}^{-1} \rho_j$;
- fără surse: $\text{div } (\bar{\mu} \text{grad } V_m) = 0$, $\text{div } (\bar{\sigma} \text{grad } V) = 0$;
- liniare omogene și fără surse: $\Delta V_m = 0$, $\Delta V = 0$.

Se constată că efectul magnetizației permanente $\mathbf{M}_p$, caracterizată prin vectorul polarizației magnetice permanente $\mathbf{I}_p = \bar{\mu}_0 \mathbf{M}_p$, poate fi simulat din punctul de vedere al potențialului scalar $V_m = 0$ și al câmpului $\mathbf{H}$ (dar nu și din cel al inducției $\mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H} + \mathbf{I}_p$) cu prezența unor sarcini de polarizație magnetică ce au densitatea:

$$\rho_m = -\text{div } \mathbf{I}_p = -\bar{\mu}_0 \text{div } \mathbf{M}_p.$$

Efectul câmpului electric imprimat $\mathbf{E}_i$, caracterizat de densitatea de curent electric imprimat $\mathbf{J}_i = \bar{\sigma} \mathbf{E}_i$, poate fi simulat din punct de vedere al potențialului electrocinetic V , într-un mediu liniar, (dar nu și din cel al densității de curent $\mathbf{J} = \bar{\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \bar{\sigma} \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$, care este un câmp solenoidal) cu prezența unor sarcini electrice fictive, ce au densitatea $\rho_j = -\text{div} \mathbf{J}_i = -\text{div}(\bar{\sigma} \mathbf{E}_i)$. În consecință, toate proprietățile observate în regim electrostatic (inclusiv teorema de unicitate) se transpun ușor în regimurile magnetostatic și electrocinetic. Dacă mediul este liniar și izotrop, în regim magnetostatic energia magnetică este W_m și satisface relația:

$$2W_m = \int_{\omega} \mathbf{B} \mathbf{H} dv = \int_{\omega} \mu (\text{grad } V_m)^2 dv = - \int_{\omega} \mathbf{B} \text{grad } V_m dv = - \int_{\partial\omega} V_m B_n dA > 0,$$

iar puterea transferată de câmp corpurilor, în regim electrocinetic, este:

$$P = \int_{\omega} \mathbf{J} \mathbf{E} dv = \int_{\omega} \sigma (\text{grad } V)^2 dv = - \int_{\omega} \mathbf{J} \text{grad } V dv = - \int_{\partial\omega} V J_n dA > 0.$$

Dacă vom considera Ω un element de circuit magnetic, respectiv electric, cu $m+1$ borne în regim staționar, atunci energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\omega} \mathbf{B} \mathbf{H} dv = -\frac{1}{2} \int_{\partial\omega} V_m B_n dA = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_{mk} \int_{S_k} B_n dA = -\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k V_{mk}}{2},$$

respectiv puterea transferată pe la borne este:

$$P = \int_{\omega} \mathbf{J} \mathbf{E} dv = - \int_{\partial\omega} V J_n dA = - \sum_{k=1}^n V_k \int_{S_k} J_n dA = - \sum_{k=1}^n V_k i_k.$$

Dacă sensurile de referință pentru φ_k și i_k vor fi schimbate spre interior pentru a fi în acord cu sensul convențional pentru putere, atunci :

$$W_m = \sum \frac{\varphi_k V_{mk}}{2},$$

iar:

$$P = \sum V_k i_k.$$

Câmpul magnetic (respectiv cel electric) se obține în mod univoc, dacă pentru fiecare bornă este cunoscut potențialul magnetic (respectiv electric) sau fluxul magnetic (respectiv curentul). Oricare dintre aceste două mărimi poate fi considerată excitație (sursă a câmpului), iar celelalte rezultă prin rezolvarea problemei fundamentale, ca răspuns.

Aplicând teorema superpoziției rezultă:

- în magnetostatică: $\varphi_k = \sum_{j=1}^m \Lambda_{kj} V_j \longleftrightarrow V_{mj} = \sum_{k=1}^m R_{mjk} \cdot \varphi_k$;
- în electrocinetică: $i_k = \sum_{j=1}^m C_{kj} V_j \longleftrightarrow V_j = \sum_{k=1}^m R_{jk} \cdot i_k$,

sau cu notațiile matriceal-vectoriale:

$$\varphi = \Lambda V_m, \quad V_m = R_m \cdot \varphi \longrightarrow W_m = \frac{1}{2} V_m^T \Lambda V_m = \frac{1}{2} \varphi^T R_m \cdot \varphi;$$

$$i = GV, \quad V = Ri \longrightarrow P = V^T GV = i^T Ri,$$

în care φ , i , V și V_m sunt vectorii flux, curent, potențial și potențial magnetic, iar Λ este matricea permeanțelor magnetice, R_m este matricea reluctanțelor, G este matricea conductanțelor și R este matricea rezistențelor. Cele patru matrice sunt simetrice și pozitiv definite, iar pentru determinarea valorilor elementelor lor este necesară rezolvarea problemei de câmp și apoi aplicarea relațiilor liniare sau a celor energetice pătratic.

12.2 Potențialul scalar pe suprafețe de discontinuitate

Prezența suprafețelor de discontinuitate în domeniul de calcul necesită o tratare specială a ecuațiilor câmpului prin intermediul condițiilor de trecere pe suprafețele de discontinuitate.

Pentru început, să presupunem că S_d reprezintă suprafața de separație dintre două medii cu permitivitățile ε_1 și respectiv ε_2 (fig.a). Dacă se notează cu $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{E}_1$ și $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{E}_2$ inducțiile și câmpurile din cele două medii (limitele inducției câmpului în puncte ce aparțin celor două medii, dar care tind către un punct comun de pe suprafața frontierei “de separație” S_d) și cu $\mathbf{n}_{12}$ normala la S_d orientată către mediul 2, atunci formele locale ale legilor inducției și fluxului electric sunt:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \longleftrightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \longleftrightarrow \mathbf{E}_{t2} = \mathbf{E}_{t1};$$

$$\text{div}_s \mathbf{D} = \rho_s \longleftrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \longleftrightarrow \mathbf{D}_{n2} - \mathbf{D}_{n1} = \rho_s.$$

Deoarece $D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$, rezultă următoarele condiții de trecere pentru potențial:

$$V_1 = V_2; \quad \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = \rho_s,$$

continuitatea potențialului fiind dată de continuitatea componentei tangențiale a câmpului, cu condiția ca cel puțin într-un punct V_2 să fie egal cu V_1 . Acest lucru se întâmplă la frontiera suprafeței S_d sau chiar și într-un punct intern, deoarece:

$$V_1 - V_2 = \lim_{a \rightarrow 0} \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = \lim_{0 \rightarrow 0} \frac{D_n}{\varepsilon} dr = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{D_n}{\varepsilon} \right)_{med} \cdot g = \left(D_{n1} + \frac{\rho_s}{2} \right) \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

(???Vezi manuscrisul pentru relatia de mai sus!)

Dacă unul dintre medii, de exemplu 2, este conductor omogen (fig.b) cu $E_2 = 0$, atunci $E_t = 0$, iar condițiile pe frontiera domeniului izolant sunt:

$$-\varepsilon \frac{\partial V}{\partial r} = \rho_s; \quad V = \text{const},$$

cu valoare nulă a potențialului constant, atunci când conductorul este referința potențialului. Dacă punctul de referință al potențialului nu se află pe acel conductor, atunci el are un potențial flotant necunoscut. Spre deosebire de corpurile izolante la care ρ_s este dat, în cazul corpurilor conductoare ρ_s și $\overline{D}_2$ sunt necunoscute, sarcina ρ_s redistribuindu-se astfel încât corpul conductor să fie echipotențial.

Dacă vom considera o folie conductoare omogenă de grosime g foarte mică (fig.b), atunci pe cele două fețe ale foliei conductoare se vor separa sarcini cu densitățile:

$$\rho_{s1} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n}, \quad \rho_{s2} = -\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n},$$

deci cu valoarea totală $\rho_s = \rho_{s1} + \rho_{s2}$, iar potențialul va fi constant pe toată suprafața foliei conductoare:

$$V_1 = V_2 = \text{const.}$$

Dacă folia conductoare urmărește forma unei suprafețe inițial echipotențială, atunci $\rho_{s1} = -\rho_{s2}$ și $\rho_s = 0$, iar liniile de câmp nu sunt perturbate în urma metalizării suprafeței respective.

Mai mult, câmpul exterior nu se modifică dacă se metalizează tot domeniul cuprins între două suprafețe echipotențiale sau tot domeniul din interiorul unei suprafețe echipotențiale.

Trebuie remarcat că dublul strat de sarcină are efect nul atunci când grosimea $g \rightarrow 0$ și $g\rho_{s1} \rightarrow 0$, prezența lui având rolul de a anula câmpul în spațiul de grosime g și de a asigura echipotențialitatea între cele două fețe.

Există totuși situații în care potențialele celor două fețe ale foliei conductoare nu sunt egale. De exemplu, în cazul în care folia este sediul unor câmpuri imprimare orientate normal E_{in} , atunci saltul de potențial este:

$$V_2 - V_1 = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = E_{in} \cdot g \neq 0.$$

Prezența câmpului orientat tangențial face ca diferite puncte ale foliei conductoare să aibă potențiale diferite (dar egale de-o parte și de alta a foliei):

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E}_i d\mathbf{r}.$$

De exemplu, două folii sudate de-a lungul unei muchii comune și realizate din conductoare diferite au de-a lungul “liniei” de sudură C un câmp imprimat orientat tangențial la suprafața foliei, dar normal pe curba C , care face ca cele două conductoare să aibă potențiale diferite, mulțimea punctelor de discontinuitate alcătuind curba $C \in S_d$. Cele două extremități ale curbei C , dacă aceasta este deschisă, sunt puncte de discontinuitate majoră (câmpul este nemărginit).

O altă situație extremă are loc atunci când într-un dielectric este scufundată o folie sau este practică o fisură anelectrică. În acest caz, în interiorul fisurii $D = 0$, deci dacă ea nu este electrizată rezultă că pe ambele fețe $D_n = 0$ și implicit:

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial n} = 0.$$

Dacă fisura este orientată de-a lungul unei suprafețe de câmp, atunci apariția ei nu perturbă câmpul anterior și $V_1 = V_2$. În caz contrar, dacă fisura apare de-a lungul unei suprafețe echipotențiale, modificarea spectrului este majoră pentru că noile linii de câmp vor ocoli fisura, iar $V_1 \neq V_2$. Câmpul din fisură crește invers proporțional cu grosimea acesteia. Pentru a modela o folie dielectrică purtătoare a unei pânze de flux vom aplica legea fluxului electric pe o suprafață cilindrică Σ de înălțime $g \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\Psi_\Sigma &= \int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \text{div } \mathbf{D} dv = \int_{D_\Sigma} \text{div}_2 \mathbf{D} dv + \int_{D_\Sigma} \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial n} dv = \\ &= \int_S g \text{div}_2 \mathbf{D} dA + \int_S \mathbf{n} \int_0^g \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial n} dA = \int_S [\text{div}_2 \mathbf{D}_S + \mathbf{n}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)] dA = \int_S \rho_S dA.\end{aligned}$$

Relația este valabilă pentru orice bază S a cilindrului, deci:

$$\text{div}_2 \mathbf{D}_S + \text{div}_S \mathbf{D} = \rho_S$$

și ținând cont de relațiile de material: $\mathbf{D}_S = \varepsilon_S \mathbf{E}_t + \mathbf{P}_{ps}$, $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_{p1}$, $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_{p2}$, în care $\mathbf{E} = -\text{grad } V$, rezultă următoarea expresie a condiției de trecere:

$$\text{div}_2 (\varepsilon_S \text{grad}_2 V) + \mathbf{n}_{12} \cdot \left(\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} \right) = -\rho_S + \text{div}_2 \mathbf{P}_{ps} + \text{div}_S \mathbf{P}_{ps},$$

în care indicele 2 de la operatorii diferențiali div și grad indică derivarea spațială doar în planul tangențial al suprafeței S_d .

Potențialul este continuu ($V_1 = V_2$) dacă polarizația permanentă a foliei este orientată exclusiv tangențial.

Dacă folia este polarizată permanent, cu orientare normală, astfel încât:

$$\mathbf{P}_{psn} = \mathbf{n}g\mathbf{P}_p \neq 0,$$

atunci sarcinile de polarizație vor crea un strat dublu cu densitățile de sarcină:

$$\rho_{S1} = -\text{div}_S \mathbf{P}_p = -P_{np}, \quad \rho_{S2} = -\rho_{S1} = P_{np},$$

care vor genera între ele un câmp cu:

$$D_n = \rho_S = \varepsilon E_n,$$

$$V_2 - V_1 = E_n \cdot g = \frac{\rho_{S2} \cdot g}{\varepsilon} = \frac{P_{ps}}{\varepsilon}.$$

În consecință, saltul potențialului prin folie are valoarea:

$$V_2 - V_1 = \frac{P_{psn}}{\varepsilon}.$$

Dacă în relațiile (...) și (...) se consideră Σ_S și $\varepsilon \rightarrow \infty$, atunci se obțin relațiile de trecere specifice foliei conductoare:

$$V_1 = V_2 \text{ și } V = \text{const. deoarece } \text{grad } V = 0.$$

Dacă, în schimb, se presupune $\varepsilon \rightarrow 0$ din (...) se obțin relațiile de trecere pe suprafețele de discontinuitate ce nu sunt pânze de flux (ca și cum $\varepsilon_S = g\varepsilon \rightarrow 0$, se datorează limitei $g \rightarrow 0$ și nu $\varepsilon \rightarrow 0$).

Dacă se dorește modelarea unui fir dielectric ce urmărește curba C și care este purtător de flux, atunci legea fluxului electric pe un cilindru ce înconjoară un segment de fir de lungime $l \rightarrow 0$ și rază $r \rightarrow 0$, rezultă:

$$\begin{aligned}\Psi_\Sigma &= \int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \text{div } \mathbf{D} dv = \int_{D_\Sigma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial l} \mathbf{t} dv + \int_{D_\Sigma} \text{div}_2 \mathbf{D} dv = \\ &= \int_0^l A \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial l} d\mathbf{r} + \int_{S_l} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_0^l \rho_l dr,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} + \text{div}_l \mathbf{D} = \rho_l,$$

în care divergența lineică are expresia:

$$\text{div}_l \mathbf{D} = \int_{S_l} \mathbf{D} dA.$$

Ținând cont de relațiile de material din fir:

$$\Psi = \varepsilon_l E_t + P_{pl} = -\varepsilon_l \frac{\partial V}{\partial l} + P_{pl}$$

și din mediul dielectric înconjurător:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \text{grad } V,$$

rezultă relația satisfăcută de potențialul pe fir și în vecinătatea sa:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\varepsilon_l \frac{\partial V}{\partial l} \right) + \int_{S_l} \varepsilon \text{grad}_2 V d\mathbf{A} = \rho_l + \frac{\partial P_{pl}}{\partial l},$$

în care s-a notat cu $\varepsilon_l = A\varepsilon$, $P_{pl} = \mathbf{P}_p \mathbf{t} A$, iar grad_2 reprezintă derivata spațială în plan normal la fir.

Dacă $\varepsilon_l = 0$ și $\rho_l \neq 0$ sau $P_{pl} \neq ct$, atunci pe curba C atât câmpul cât și potențialul sunt nemărginite. În schimb, dacă firul este neelectrizat și nepolarizat dar poate transporta flux nenul, el are potențialul mărginit, astfel încât:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\varepsilon_l \frac{\partial V}{\partial l} \right) + \text{div}_l (\varepsilon \text{grad } V) = 0.$$

Pentru modelarea firelor polarizate transversal cu momentul dipolar lineic:

$$\mathbf{P}_l = \int_S \mathbf{P}_n dA,$$

unde S este suprafața transversală a firului, se poate aplica modelul coulombian al sarcinilor de polarizație distribuite lineic, sarcini având densitatea lineică ρ_l și $-\rho_l$, plasate la distanța $d \rightarrow 0$, astfel încât $\lim_{d \rightarrow 0} \rho_l \mathbf{d} = \mathbf{p}_l$.

Curba C este o curbă de discontinuitate esențială pe care atât potențialul cât și câmpul sunt nemărginite. Energia câmpului electrostatic W , într-un domeniu liniar Ω cu suprafețe de discontinuitate S_d , este:

$$\begin{aligned}
2W_{\Omega} &= \int_{\Omega \cup S_d \cup C_d} \mathbf{D} \mathbf{E} \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{D} \mathbf{E} \, dv + \int_{S_d} \mathbf{D}_S \mathbf{E} \, dA = \int_{\Omega} \rho V \, dv - \int_{\partial\Omega} V D_n \, dA + \\
&\quad + \int_{S_d} \rho_S V \, dA - \int_{\partial S_d} V D_{S_n} \, dl,
\end{aligned}$$

deoarece:

$$\begin{aligned}
\int_{S_d} \mathbf{D}_S \mathbf{E} \, dA &= - \int_{S_d} \mathbf{D}_S \operatorname{grad}_2 V \, dA = \int_{S_d} V \operatorname{div}_2 \mathbf{D}_S \, dA = \int_{\partial S_d} V D_{S_n} \, dl = \int_{S_d} \rho_S V \, dA - \\
&\quad - \int_{S_d} V (D_{n2} - D_{n1}) \, dA - \int_{\partial S_d} V D_{S_n} \, dl,
\end{aligned}$$

urmând ca integrala pe S_d din $V D_{n2}$ și $V D_{n1}$ să se reducă cu termenii corespunzători din integrala produsului $V D_n$ pe $\partial\Omega$.

Această expresie a integralei de energie pune în evidență sursele interne ale câmpului și anume:

- densitatea de volum a sarcinii ρ ;
- densitatea superficială de sarcină ρ_S ;
- densitatea lineică de sarcină ρ_l ;
- sarcinile corpurilor punctiforme q_k , dar și condițiile de frontieră care asigură unicitatea potențialului;
- valoarea potențialului V sau a inducției normale D_n pe ∂S_d ;
- valoarea potențialului sau a fluxului injectat în ∂C_d ;
- potențialul corpurilor punctiforme V_k , cu condiția ca potențialul să fie cunoscut cel puțin într-un punct.

Pentru ca potențialul corpurilor punctiforme și al firelor electrizate să fie mărginit (să aibă sens clasic), acestea sunt considerate suprafețe sferice, respectiv cilindrice, de raze foarte mici (neglijabile dar nenule).

Folosind similitudinea între câmpurile electrostatice și cele magnetice, respectiv electrocinetic, rezultatele obținute se transpun ușor în celelalte două regimuri.

12.3 Potențialul vector al câmpurilor statice și staționare solenoidale

Ecuatiile regimurilor magnetostatic, electrocinetic și magnetic staționar sunt similare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \\ \mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H}); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{J} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \\ \mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}; \\ \mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H}), \end{array} \right.$$

având inducția $\mathbf{B}$ și respectiv densitatea de curent $\mathbf{J}$ solenoidale.

Se constată că $\mathbf{B}$ este similar lui $\mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$ este similar lui $\mathbf{H}$, cu observația că rotorul intensității câmpului este nenul doar în regim magnetic ($J \neq 0$).

Din acest motiv, vom analiza doar acest ultim regim, ecuațiile celorlalte două regimuri obținându-se prin particularizări.

Inducția magnetică $\mathbf{B} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ fiind solenoidală, admite ca potențial vector: $\mathbf{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, în care:

$n = 3, m = 3$ pentru probleme bidimensionale;

$n = 2, m = 1$ pentru probleme bidimensionale (2D), cu curent longitudinal (1D);

$n = 1, m = 2$ pentru probleme bidimensionale (2D), cu câmp magnetic longitudinal (1D);

$n = 1, m = 1$ pentru probleme unidimensionale (1D).

Trebuie remarcat că $\mathbf{A}$ are aceeași dimensiune vectorială cu $\mathbf{J}$.

Folosind potențialul vector, fluxul magnetic ce străbate o suprafață se exprimă acum prin integrare pe curba frontieră a suprafeței și nu prin integrală dublă:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_S \text{rot} \mathbf{A} ds = \int_{\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{r}.$$

Potențialul magnetic vector este definit până la gradientul unei funcții scalare arbitrare:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}(r) + \text{grad } \lambda,$$

determinând aceeași inducție ca și $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ deoarece $\text{rot}(\text{grad } \lambda) = 0$ pentru orice λ . O metodă de a fixa funcția λ este de a impune divergenței potențialului vector o valoare convențională (printr-o relație de etalonare), de exemplu :

$$\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

cunoscută sub numele de condiție de etalonare Coulomb.

În acest caz, potențialul magnetic vector este determinat până la gradientul unei funcții armonice. Această funcție este univoc determinată în Ω dacă se impun condiții de frontieră, de exemplu de tip Neumann, ceea ce este echivalent cu a impune componenta normală $A_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ a potențialului magnetic vector pe $\partial\Omega$. Condiția de tip Dirichlet este echivalentă cu a impune componenta tangențială $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ pe $\partial\Omega$.

Exprimând în ecuațiile regimului pe $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ în funcție de $\mathbf{A}$ se obține ecuația diferențială de ordinul doi satisfăcută de potențialul magnetic vector:

$$\text{rot } \hat{H}(\text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{J},$$

în care $\hat{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este inversa funcției: $\hat{B} = \hat{H}^{-1}$.

În cazul caracteristicii de magnetizare de forma: $\mathbf{B} = \bar{\mu} \mathbf{H} + \mathbf{I}_p$ cu $I_p = \mu_0 \mathbf{M}_p$, rezultă că atât $\hat{B}$ cât și $\hat{H}$ sunt afine:

$$\hat{H} = \bar{\nu}(\mathbf{B} - \mathbf{I}_p) = \bar{\nu} \mathbf{B} + \mathbf{M}_p,$$

în care $\bar{\nu} = \bar{\mu}^{-1}$, $\mathbf{H}_p = -\bar{\nu} \mathbf{I}_p = -\mu_0 \bar{\mu}^{-1} \mathbf{H}_p$. În acest caz, ecuația potențialului magnetic vector este:

$$\text{rot} (\bar{\nu} \text{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \text{rot} \mathbf{H}_p,$$

în care $\mathbf{J}_m = -\text{rot} \mathbf{H}_p = \mu_0 \text{rot} (\bar{\mu}^{-1} \mathbf{M}_p)$ este densitatea curentului echivalent de magnetizare. Acesta este un curent virtual care produce același efect magnetic ca și cel de conducție, astfel încât curentul total $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m$ se poate considera ca sursă a potențialului vector.

Dacă mediul este omogen, atunci:

$$\text{rot} (\bar{\nu} \text{rot} \mathbf{A}) = \bar{\nu} \text{rot} (\text{rot} \mathbf{A}) = \bar{\nu} (\text{grad} (\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}) = -\bar{\nu} \Delta \mathbf{A},$$

deci:

$$-\Delta \mathbf{A} = \bar{\mu} \mathbf{J}_t$$

este potențialul vector care satisface ecuația Poisson vectorială.

În regim magnetostatic, dacă mediile nu sunt polarizate permanent și nu există surse interne de câmp, atunci potențialul satisface ecuația Laplace vectorială generalizată:

$$\text{rot} (\bar{\nu} \text{rot} \mathbf{A}) = 0,$$

sau, în cazul mediilor omogene, ecuația Laplace:

$$\Delta \bar{A} = 0.$$

În cazul regimului electrocinetic staționar, potențialul vector al densității de curent se notează de obicei cu $\mathbf{T}$ și

$$\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{T},$$

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{T} d\mathbf{r},$$

urmând ca ecuațiile să aibă, în funcție de tipul conductorului, una din următoarele forme:

- medii neliniare: $\text{rot} \hat{E}(\text{rot} \bar{T}) = 0$;
- mediu MANUSCRIS.

12.4 Potențialul vector pe suprafața de discontinuitate

Să considerăm o suprafață de discontinuitate S_d , care reprezintă frontiera comună a două medii notate cu 1 și 2 și având permeabilitățile magnetice μ_1 și respectiv μ_2 .

Se va presupune că S_d nu este nici pânză de flux magnetic și nici de curent, în sensul că pentru nici o suprafață S de arie A și diametru d care tinde către o curbă $C \subset S_d$, limita:

$$J_S = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{i}{d} = 0,$$

în care i este curentul ce străbate suprafața S .

Dacă se notează cu $\mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1$ și $\mathbf{A}_1$, respectiv $\mathbf{B}_2, \mathbf{H}_2$ și $\mathbf{A}_2$ inducția, intensitatea câmpului și potențialul vector în regim staționar, atunci pentru cele două medii putem scrie formele locale ale legilor fluxului magnetic și circuitului magnetic (mai exact limitele acestor mărimi în puncte care aparțin celor două medii, limite care tind către un punct comun de pe suprafața S_d):

- $\text{div}_S \mathbf{B} = 0 \longrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \longrightarrow B_{n1} = B_{n2}$;
- $\text{rot}_S \mathbf{H} = 0 \longrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \longrightarrow \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$.

Deoarece:

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}B_n + \mathbf{B}_t = \mathbf{n}(\text{rot } \mathbf{A}_t) + (\text{rot } \mathbf{A}_t) = \mathbf{n} \text{rot } \mathbf{A}_t + (\text{rot } \mathbf{A}_t, \dots) \text{MANUSCRIS!}$$

și

$$\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} = \nu \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{n}\nu \text{rot } \mathbf{A}_t + \nu (\text{rot } \mathbf{A})_t,$$

cu $\nu = 1/\mu$, rezultă:

$$\mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}; \quad \nu_1 (\text{rot } \mathbf{A}_1)_t = \nu_2 (\text{rot } \mathbf{A}_2)_t,$$

cu observația că dacă $\mathbf{A}_{t1}$ nu este egal cu $\mathbf{A}_{t2}$, atunci suprafața S_d este purtătoare de flux magnetic și că a doua condiție de trecere este îndeplinită dacă $\nu_1 A_{n1} = \nu_2 A_{n2}$.

Dacă unul dintre medii, de exemplu 2, este feromagnetic ideal, atunci $\mu_2 \rightarrow \infty$ și $V_2 = 0$, deci:

$$\mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{n}) = (\text{rot } \mathbf{A})_t = 0.$$

Alegând pentru etalonare $A_n = 0$ pe frontiera feromagnetică, rezultă că și derivata după normală a componentei tangențiale a potențialului vector este nulă. În consecință, pe suprafața unui mediu feromagnetic se anulează atât $\mathbf{H}_t$ cât și A_n :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial n} = 0.$$

Dacă în schimb unul dintre medii, de exemplu 2, este amagnetic, atunci $\mu_2 \rightarrow 0$ și $\nu_2 \rightarrow \infty$, deci $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 = 0$ și $\text{rot } \mathbf{A}_2 = 0$.

Componenta normală a inducției $B_n = \mathbf{n} \text{rot } \mathbf{A}_t = 0$ și fluxul pe orice suprafață $S \subset S_d$:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \times d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{A}_t d\mathbf{r} = 0.$$

Această condiție este îndeplinită dacă $\mathbf{A}_t$ este irotațional, de exemplu constant sau nul.