

Daniel IOAN

Metoda Elementului Finit pentru Modelarea
Electromagnetică

București
2012

Cuprins

1	Aspectele fizice ale modelării electromagnetice	15
1.1	Mărimile caracteristice ale electromagnetismului	15
1.1.1	Mărimile locale ale câmpului electromagnetic	15
1.1.2	Mărimile locale ale corpurilor	17
1.1.3	Mărimi globale ale câmpului electromagnetic	18
1.1.4	Mărimi globale ale corpurilor	21
1.1.5	Recapitularea mărimilor electromagnetice	22
1.2	Legile generale ale electromagnetismului	25
1.2.1	Legea fluxului electric	26
1.2.2	Legea fluxului magnetic	27
1.2.3	Legea inducției electromagnetice	28
1.2.4	Legea circuitului magnetic	30
1.3	Legile de material	32
1.3.1	Legea legăturii între $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$	33
1.3.2	Legea legăturii între $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$	36
1.3.3	Legea conducției	39
1.4	Legile de transfer	41
1.4.1	Legea transferului de energie în conductoare	41
1.4.2	Legea transferului de masă (a electrolizei)	42
1.5	Teoremele de conservare	43
1.5.1	Teorema conservării sarcinii	43
1.5.2	Teorema energiei electromagnetice	44
1.5.3	Teorema impulsului electromagnetic. Tensorul lui Maxwell	46
1.6	Sinteză: relații cauzale - fenomene electromagnetice fundamentale	48
1.7	Regimurile câmpului electromagnetic	50
1.7.1	Regimul electrostatic (ES)	51
1.7.2	Regimul magnetostatic (MS)	55
1.7.3	Regimul electrocinetic staționar (EC)	56
1.7.4	Regimul magnetic staționar (MG)	58
1.7.5	Regimul cvasistaționar capacitiv (sau amagnetic - EQS)	61

1.7.6	Regimul cvasistaționar de tip inductiv (sau anelectric - MQS)	64
1.7.7	Regimul electrodinamic general variabil (ED)	68
1.7.8	Reprezentarea în complex a ecuațiilor câmpurilor sinusoidale	70
2	Modelarea matematică	73
2.1	Formularea matematică	73
2.1.1	Formularea corectă	73
2.1.2	Forme clasice și slabe ale problemelor scalare	79
2.2	Teoreme de unicitate	85
2.2.1	Teorema de unicitate a regimului electrostatic ES	85
2.2.2	Teorema de unicitate a regimului magnetostaționar MG	88
2.2.3	Teorema de unicitate a regimului magneto-cvasi-staționar MQS	91
2.2.4	Teorema de unicitate a regimului electrodinamic - general variabil ED	92
2.2.5	Teoreme de unicitate pentru regimurile generale armonice EDC	93
2.3	Existența și continuitatea soluției	96
2.3.1	Cadrul funcțional	96
2.3.2	Formularea corectă a problemei rot-rot	99
2.3.3	Regimuri variabile.	101
2.3.4	Formulari complementare	105
2.4	Întrebări privind modelarea matematică	110
3	Modelarea cu MEF	115
3.1	Concepte fundamentale	115
3.1.1	Definiția elementului finit	115
3.1.2	Formularea corectă a problemei discrete	117
3.1.3	Continuitatea soluției MEF	119
3.1.4	Cazul domeniilor nemarginite	122
3.2	Probleme cu potențialul scalar în medii liniare	122
3.2.1	Asamblarea matricei și a termenului liber	122
3.2.2	De la teorie la cod	127
3.3	Probleme cu potențialul vector (rot-rot). Elemente de muchie	130
3.4	Elemente finite de ordin superior	139
3.4.1	Rata și ordinul de convergență	139
3.4.2	Rafinarea adaptivă, de tip h	141
3.4.3	Elemente scalare de ordin superior. Rafinarea p	146
3.4.4	Elemente vectoriale de ordin superior	148

3.4.5	Secventa Rham a bazelor FEM ierarhice	150
3.4.6	Crime variaționale	158
3.5	Probleme de câmpul staționar în medii neliniare	162
3.5.1	Probleme cu caracteristica de magnetizare neliniară	164
3.5.2	Probleme magnetostaționale plan-paralele	168
3.5.3	Metoda punctului fix al polarizației	173
3.5.4	Metoda iterativă Newton	175
3.6	Rezolvarea problemelor de câmp variabil în timp	180
3.6.1	Câmpuri reprezentate în complex	181
3.6.2	Frecvențe și moduri proprii de rezonanță	186
3.6.3	Câmpuri în regim tranzitoriu	188
3.6.4	Câmpuri variabile în medii nelinare și cu histerezis	193
3.7	Descompunerea în subdomenii. Rezolvări iterative în paralel	197
3.7.1	Studiu de caz - doua subdomenii	199
3.7.2	Metoda Schwarz aditiva	205
3.7.3	Algoritmul metodei Schwarz	207
3.8	Intrebari privind modelarea numerica FEM	215

Prefață

Folosirea tot mai frecventă a calculatoarelor numerice în viața de zi cu zi, dar mai ales în inginerie este o evidență care nu mai necesită demonstrație. Încă din faza de concepție, urmând apoi cu proiectarea, fabricarea, dar și în exploatarea echipamentelor și instalațiilor tehnice, calculatorul este folosit ca instrument indispensabil pentru cele mai diverse operații și tehnologii.

În ingineria electrică, în prezent este de neconceput proiectarea dispozitivelor electromagnetice, fără utilizarea calculatoarelor. Pe lângă modelarea și simularea sistemelor și circuitelor electrice, problema cea mai frecvent rezolvată este problema directă a analizei numerice a câmpului electromagnetic, în cele mai diverse regimuri și pentru o largă varietate de configurații geometrice. Urmează apoi problemele inverse sau probleme de optimizare a dispozitivelor electromagnetice, care stau la baza proiectării sau reproiectării optime a diferitelor echipamente electrice și magnetice.

În consecință, modelarea electromagnetică joacă un rol esențial în ingineria electrică actuală. Prin aceasta înțelgem toate etapele necesare analizei cu calculatorul a dispozitivelor în funcționarea cărora câmpul electromagnetic este important. Aceste etape sunt următoarele [68]:

- **modelarea fizică**, în care, pornind de la analiza principiului de funcționare a dispozitivului și identificarea principalelor fenomene și relații cauzale (cauzele interne și externe ale câmpului), se stabilesc ipotezele fizice simplificatoare ale analizei și implicit regimul câmpului electromagnetic și se identifică principalele mărimi fizice ce caracterizează funcționarea dispozitivului analizat, făcându-se presupuneri asupra modului în care acestea variază în timp și în spațiu;
- **modelarea geometrică** urmărește identificarea domeniului de calcul și a subdomeniilor ce au relevanță pentru problemă, analizând simetriile și variațiile spațiale ale problemei se determină dimensiunea domeniului spațial (1D, 1.5D, 2D, 2.5D, 3D) și forma acestuia. Modelarea geometrică și cea fizică alcătuiesc împreună modelarea conceptuală.

- **modelarea matematică** urmărește formularea problemei în termeni exclusiv matematici. Se specifică datele problemei, dar și soluția acesteia ca obiecte matematice corect și precis definite. Se (re)formulează ecuațiile și condițiile satisfăcute de soluție, care determină formularea corectă a problemei, asigurându-se existența, unicitatea și continuitatea soluției față de datele problemei;
- **modelarea analitică** aproximativă urmărește determinarea unei soluții aproximative, care se poate determina cu una din metodele analitice. Chiar dacă în această etapă sunt adoptate ipoteze simplificatoare suplimentare (de exemplu, presupunem că în unele subdomenii câmpul este uniform), care în mod evident introduc erori inacceptabil de mari, această etapă este esențială pentru validarea soluției finale, chiar și numai ca ordin de marime;
- **modelarea numerică** presupune discretizarea problemei cu derivate parțiale și implicit aproximarea ei cu o problemă, care are o soluție descrisă de un număr finit de grade de libertate, reducându-se astfel, cel mai adesea, rezolvarea problemei de câmp la rezolvarea unui sistem liniar de ecuații algebrice sau a unei serii de astfel de sisteme;
- **validarea soluției** numerice încheie modelarea electromagnetică, și constă în compararea soluției numerice cu soluții numerice obținute prin metode alternative, cu soluția analitică, sau cu rezultatul unor măsurători experimentale făcută pe dispozitivul real sau pe un model fizic al acestuia (macheta cu dimensiuni scalate sau cu fenomene diferite, dar similare).

Pentru analiza numerică a câmpului electromagnetic se folosesc mai multe abordări, dintre care cele mai importante sunt [69]:

- metoda elementului finit (MEF sau FEM - Finite Element Method);
- metoda diferențelor finite (MDF sau FDM - FInite Difference Method) sau variante ale acesteia cum sunt: metoda volumelor finite (FVM - Finite Volumes Method) sau tehnica integralelor finite (FIT - Finite Integrals Technique);
- metoda elementelor de frontieră (BEM - Boundary Element Method).

Metoda elementului finit este o tehnică numerică de calcul a soluțiilor aproximative ale ecuațiilor cu derivate parțiale, care intervin în cele mai diverse discipline fizice sau ingineresti: analiza structurilor mecanice, curgerea fluidelor, termotehnică, electromagnetism, cu aplicații în industria aeronautică, automobilului, navală, bio-mecanică, predicția vremii și multe altele. Forma acestor ecuații, naturală pentru aplicarea metodei elementului finit este forma lor slabă, numită și

variațională, care minimizează reziduul ecuației.

Metoda elementului finit poate fi privită ca o formă particulară a metodei Galerkin, în care variația spațială a soluției este aproximată prin funcții polinomiale pe porțiuni - elemente de forma geometrică simplă. Prin proiectarea reziduului ecuației de rezolvat pe funcțiile de test se elimină derivatele spațiale și se obține:

- un sistem de ecuații algebrice, în cazul problemelor staționare,
- un sistem de ecuații diferențiale ordinare, în cazul problemelor în regim tranzitoriu.

Aceste sisteme sunt liniare, în cazul problemelor de câmp în medii liniare și au ca necunoscute, gradele de libertate ale problemei discrete (coordonatele soluției numerice în spațiul finit dimensional al funcțiilor de încercare, care aproximează spațiul soluțiilor). Sistemele de ecuații algebrice sau diferențiale obținute prin discretizare se rezolvă cu metode numerice: directe sau iterative pentru sistemele algebrice liniare, Newton -Raphson sau Metoda punctului fix, în cazul ecuațiilor neliniare și metode de tip Euler sau Runge-Kutta, în cazul problemelor de regim tranzitoriu. Conceptul de element finit (la singular!) nu trebuie confundat cu elementele geometrice simple, în care se descompune domeniul de calcul, numite de multe ori elemente finite. După cum se va vedea ulterior, un element finit este o triadă, alcătuită din:

- mulțimea de celule elementare, în care se descompune domeniul spațial al problemei;
- funcțiile, care descriu modul de variație a soluției aproximative în aceste celule;
- gradele de libertate ale soluției numerice - mulțimea de variabile reale, care permit identificarea acestei soluții, care este deci o combinație liniară a funcțiilor de bază ale spațiului soluției, având gradele de libertate coeficienții acestei combinații.

Metoda elementului finit a fost aplicată la început, încă din anii 40 pentru rezolvarea problemelor de rezistența materialelor cu aplicații la proiectarea construcțiilor și aeronavelor. Unul din inițiatorii metodei a fost *R. Courant*, care a folosit discretizări triunghiulare și rezultatele cercetărilor făcute anterior de *Rayleigh*, *Ritz* și *Galerkin*. *O. Zienkiewicz*, profesor la *Imperial College* a fost cel care a fundamentat, începând din 1947 și apoi a răspândit metoda în cele mai largi cercuri de cercetători. Abia în 1950 a fost introdusă matricea de rigiditate și modul ei de asamblare prin parcurgerea elementelor. În 1965, NASA a solicitat din partea comunității științifice contribuții la dezvoltarea codului său de elemente finite,

numit NASTRAN. Abia în 1973, prin publicarea cărții lui *Strang și Fix* [47] s-au pus bazele teoretice ale metodei. De atunci, analiza cu element finit a devenit parte componentă a matematicilor aplicate, utilizată la modelarea celor mai diverse sisteme fizice, în ingineria mecanică sau cea electrică [130]. În prezent metoda elementului finit are cea mai largă aplicabilitate în comparație cu celelalte metode numerice [52]. Explicațiile sunt următoarele:

- Rețeaua MEF numită și triangulație, alcătuită din triunghiuri, tetraedre, hexaedre sau prisme nu trebuie să aibă o topologie structurată, cea ce asigură cea mai bună flexibilitate în modelarea geometrică a unor domenii de forme complicate;
- Formele simple ale celulelor elementare permit adaptarea unor variații simple ale soluției numerice în interiorul acestor celule, cum sunt polinoamele, rezultate foarte bune obținându-se chiar și în cazul polinoamelor de gradul întâi (elemente finite de ordinul întâi);
- Metoda elementului finit realizează astfel un echilibru perfect între simplitate și flexibilitate. Soluția numerică din această metodă este optimală, deoarece minimizând reziduul, ea oferă cea mai bună soluție numerică posibilă;
- În cazul discretizării în dreptunghiuri, descompuse într-o pereche de triunghiuri, metoda elementului finit este echivalentă cu metoda diferențelor finite, generând același sistem de ecuații algebrice;
- Topologia nestructurată a rețelei de discretizare permite rafinarea adaptivă, care va putea fi îndesită în vecinătatea punctelor critice, în care soluția are variații spațiale puternice, obținându-se astfel o precizie sportă în calculul câmpului;
- Matricea sistemului de ecuații generat în urma discretizării cu metoda elementului finit are proprietăți remarcabile, care fac ca sistemul liniar să se poată rezolva foarte eficient, ea este rară, simetrică, pozitiv definită, și diagonal dominantă.

Aceste avantaje fac ca MEF să fie folosită aproape exclusiv în analiza mecanicii corpurilor solide. Totuși în mecanica fluidelor - CFD (Computational Fluid Dynamics) este preferată metoda volumelor finite.

În electromagnetism sunt folosite toate cele trei abordări numerice, dar metoda elementului finit tinde să fie preponderentă. Principalele cărți referitoare la metoda elementului finite în electromagnetism sunt:

1. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, Robert Leroy Taylor , The finite element method: its basis and fundamentals - 2005 [134];
2. P.P. Silvester, R.L. Ferrari, Finite Elements for Electrical Engineers, CUP 1996 [113];
3. Alain Bossavit Computational Electromagnetism. Variational Formulations, Complementarity Edge elements, AP 1998 [17];
4. K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge, The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields Wiley, 1994 [74];
5. Jianming Jin, The Finite Element Method in Electromagnetics, 2nd Edition, 2002, Wiley-IEEE Press [73];
6. P. Monk. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2003 [89].

Informații privind elementul finit mai pot fi găsite și în:

1. Daniel Ioan, ș.a. - Metode numerice în ingineria electrică, Editura Matrix-Rom, București, 1998 [1];
2. Irina Munteanu, Gabriela Ciuprina, F.M.G. Tomescu - *Modelarea numerică a câmpului electromagnetic prin programe Scilab*, Editura Printech, București 2000; www.lmn.pub.ro/~gabriela/studenti/an4/carte_MNCE.pdf
3. R. Hiptmair. Finite elements in computational electromagnetism. Acta Numerica, pages 237-339, 2002 [61];
4. Leszek Demkowicz, Computing With Hp-adaptive Finite Elements: One and two dimensional elliptic and Maxwell problems, Chapman & Hall/CRC, 2006 [31];
5. Sabine Zaglmayr High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation, Thesis - Linz Univ, 2006 [133];
6. Endre Suli, FEM for PDE, Lecture notes [120].

Tot mai multe produse program de analiză cu element finit sunt disponibile atât comercial cât și în domeniul public:

- IFER - Internet Finite Element Resources http://homepage.usask.ca/~ijm451/finite/fe_resources/,

- NAFEMS, List of finite element software packages at Wikipedia <http://en.wikipedia.org/wiki/NAFEMS>,
- Electromagnetic Modeling web site at Clemson University <http://www.cvel.clemson.edu/modeling/>,
- FEAdomain.com <http://feadomain.com/>, NCLab <http://femhub.com/nclab-com/>.

În IFER sunt prezentate diferite resurse referitoare la FEM accesibile pe internet: conferințe, cursuri, grupuri de lucru, societăți, pagini web, reviste, cărți, biblioteci cu funcții utile în MEF, programe comerciale, freeware, opensources, și din domeniul public pentru elemente finite, generatoare de rețea, software matematic și pentru vizualizarea soluției.

Prezenta lucrare pornește de la observația că în literatură sunt disponibile mai multe cărți dedicate acestui domeniu și foarte multe articole științifice, dar cei care vor să folosească un program avansat de element finit au dificultăți în înțelegerea rapidă a principiilor esențiale și a felului în care pot modela în modul eficient și corect dispozitive electromagnetice relativ complexe. Pentru aceasta este nevoie nu numai de experiență în modelare, dar și de o fundamentare teoretică solidă și corectă a abordării numerice. Lucrarea încearcă să ofere o astfel de fundamentare, prin îmbinarea aspectelor fizice cu cele matematice și algoritmice. Din păcate documentele scrise de matematicieni nu dau o prea mare atenție aspectelor fizice și de multe ori nici celor algoritmice, cele scrise de ingineri sau fizicieni neglijează de multe ori aspecte matematice esențiale și chiar pe cele algoritmice, iar lucrările scrise de informaticieni nu excelează în prezentarea aspectelor fizice și chiar a celor matematice. Încercăm să corectăm aceste deficiențe, prin abordarea echilibrată, din cele trei puncte de vedere.

Documentul este structurat în patru capitole, o listă bibliografică și două anexe. Primul capitol este dedicat aspectelor fizice. Aici se prezintă pe scurt mărimile fizice care intervin în modelarea electromagnetică, legile electromagnetismului macroscopic, în forma lor globală, integrală, local-diferențială și pe suprafețele de discontinuitate. Se prezintă apoi teremele fundamentale ale electromagnetismului, care se referă la conservarea sarcinii electrice, energiei electromagnetice și impulsului electromagnetic. Ultimele două teoreme sunt folosite în etapa de postprocesare, pentru calculul efectelor termice și respectiv mecanice ale câmpului electromagnetic. Capitolul se încheie cu prezentarea regimurilor câmpului electromagnetic, pentru fiecare fiind descrise ipotezele definitorii, ecuațiile de ordinul unu pentru câmpuri și ecuațiile de ordinul doi pentru potențiale.

Cel de al doilea capitol al lucrării se referă la modelarea matematică. Se definește formularea corectă a problemei de câmp și se stabilește cadrul funcțional variațional pentru aceasta formulare. Se discută formularea variațională slabă abstractă

a problemei de câmp electromagnetic în diverse regimuri, indentificandu-se condițiile de frontieră naturale și cele esențiale. Se enunță teoremele de existență, unicitate și continuitate. Se discută echivalența dintre formalizarea variațională prin minimizarea funcționalei de energie, de tip *Ritz* și formularea variațională slabă, prin proiecție, de tip *Galerkin*.

Capitolul trei este dedicat modelării numerice cu metoda elementului finit. Se prezintă pentru început conceptele fundamentale ale acestei metode și se ilustrează aplicarea lor în cazul cel mai simplu al rezolvării ecuației Poisson $1D$ și $2D$, cu condiții Dirichlet. Se discută apoi extinderea la determinarea numerică a potențialului scalar în medii liniare dar și la rezolvarea ecuațiilor de tip rotor-rotor, pentru potențialul vector, arătându-se necesitatea folosirii elementelor de muchie. Se discută apoi aspecte mai speciale, cum sunt cele întâlnite în rezolvarea problemelor neliniare sau variabile în timp. Capitolul se încheie cu prezentarea felului în care se poate aplica metoda elementului finit pe sisteme de calcul multiprocesor, prin descompunerea domeniului de calcul în subdomenii și calculul iterativ al soluției numerice globale. Acest capitol îmbină aspectele algoritmice cu cele matematice dar și cu fundamentul fizic.

Fiecare capitol se încheie cu o listă de întrebări, care ajută la recapitularea, ordonarea și aprofundarea cunoștințelor prezentate anterior. Faptul că puteți răspunde la cea mai mare parte dintre ele dovedește că ați înțeles aceste cunoștințe. Întrebările reprezintă un excelent mijloc de învățare, de multe ori mai eficient decât exemple sau exerciții școlarești. Dacă știți să răspundeți la întrebări, puteți genera singuri astfel de exemple.

Documentul se adresează atât celor care doresc să-și dezvolte propriul cod sau părți de cod, pentru a fi încorporat într-un mediu de analiză sau proiectare mai amplu, disponibil comercial sau în domeniul public, cât și celor care vor să folosească în mod eficient programele profesionale de element finit și să înțeleagă, atât anatomia lor cât și implicațiile opțiunilor făcute în exploatarea lor.

Ca orice monografie, lucrarea nu este originală în conținut, ci doar în formă și viziune, conținutul reflectând ultimele realizări în domeniu. Prin alcătirea sa, lucrarea este diferită de multe alte cărți de element finit, existente în literatură, dedicate inginerilor, studenților sau cercetătorilor, din diferite domenii. Aceasta pentru că își propune să lămurească atât fundamentul teoretic al metodei, cât și modul în care metoda poate fi folosită în rezolvarea unor probleme practice de câmp electromagnetic. Ea se adresează celor care vor să își aprofundeze cunoștințele în domeniu, la nivel de master, doctorat, sau formare continuă, dar ea este folositoare și pentru studenții din primul ciclu, care au apetit pentru aspectele conceptual-teoretice. Prin parcurgerea ei, aflați modul în care s-au dezvoltat istoric principiile fundamentale ale metodei, dificultățile întâmpinate în aplicarea ei în electromagnetism și modul în care acestea au fost depășite. Lucrarea nu conține demonstrațiile matematice în detaliu, dar face trimiteri exacte la sursele din

literatură unde fiecare din acestea este prezentată. Tot prin trimiteri sunt indicate și principalele proiecte de dezvoltare software, referitoare la diferite aspecte ale metodei. Sunt abordate cu egala atenție, atât aspectul fundamental cât și cele avansate ale metodei și aplicațiilor sale în electromagnetism. Fiecare își poate selecta aspectul de care este interesat, dar lucrarea în ansamblul ei dă o imagine clară asupra arhitecturii cunoștinșelor referitoare la modelarea elctromagnetică, la cel mai înalt nivel. Studiată cu atenție, lucrarea duce la însușirea deprinderilor fundamentale necesare pentru formularea corectă a problemelor de câmp, în vederea rezolvării lor cu MEF, și determină dezvoltarea gândirii independente în acest domeniu.

În încheiere doresc sa exprim mulțumirile mele D-lui ing. drd. Daniel Dan, care a tehnoredactat in LaTeX acest document.

Capitolul 1

Aspectele fizice ale modelării electromagnetice

1.1 Mărimile caracteristice ale electromagnetismului

Câmpul electromagnetic este o formă de existență a materiei, diferită de substanță, capabilă să acumuleze și să transporte energie, dar și să interacționeze cu corpurile din punct de vedere mecanic, termic și/sau chimic.

Mărimile fizice caracteristice electromagnetismului se pot clasifica în următoarele trei categorii:

- Mărimi caracteristice *câmpului* electromagnetic;
- Mărimi caracteristice *corpurilor*;
- Mărimi ce caracterizează *efectele* câmpului electromagnetic.

După modul în care se raportează la spațiu, mărimile sunt *locale*, atunci când descriu starea unui punct din spațiu sau *globale*, atunci când descriu starea unei infinități de puncte.

Dacă o mărime este definită la un moment de timp, atunci ea se numește *instantanee*, iar dacă ea se referă la un interval de timp, ea se numește *de proces*.

1.1.1 Mărimile locale ale câmpului electromagnetic

Fiecare din componentele electrică sau magnetică este caracterizată local de doi vectori tridimensionali, **intensitatea** și **inducția** câmpului respectiv:

- **E** - intensitatea câmpului electric;

- $\mathbf{D}$ - inducția câmpului electric;
- $\mathbf{H}$ - intensitatea câmpului magnetic;
- $\mathbf{B}$ - inducția câmpului magnetic.

Aceste patru mărimi vectoriale caracterizează complet, local și instantaneu câmpul electromagnetic dintr-un punct din spațiu, la un moment de timp (fig. 1.1). Pentru a caracteriza câmpul într-un domeniu spațial pe un interval de timp cele patru mărimi devin funcții vectoriale de poziție și timp. Matematic cele patru sunt deci **funcții definite pe domeniul spațio-temporal cuadridimensional, cu valori în spațiul tridimensional**.

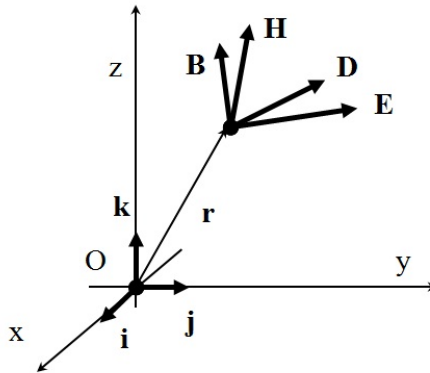


Figura 1.1: Mărimi locale ale câmpului electromagnetic

Intensitatea câmpului electric

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu **câmpul electric din punct de vedere longitudinal**:

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{E} = iE_x + jE_y + kE_z$. Unitatea de măsură a intensității câmpului : Volt pe metru [V/m].

Inducția electrică

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu comportarea **transversală a câmpului electric**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

1.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE ELECTROMAGNETISMULUI 17

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{D} = iD_x + jD_y + kD_z$.
Unitatea de măsură: Coulomb pe metru pătrat $[C/m^2]$.

Intensitatea câmpului magnetic

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu **câmpul magnetic din punct de vedere longitudinal**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.3)$$

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{H} = iH_x + jH_y + kH_z$.
Unitatea de măsură: Amper pe metru $[A/m]$.

Inducția magnetică

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu comportarea **transversală a câmpului magnetic**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

unde $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ este vectorul de poziție, iar $\mathbf{B} = iB_x + jB_y + kB_z$.
Unitatea de măsură: Weber pe metru pătrat sau Tesla $[Wb/m^2 = T]$.

1.1.2 Mărimile locale ale corpurilor

În interacțiune cu câmpul electromagnetic corpurile își schimbă starea. Pentru a caracteriza această schimbare de stare electromagnetică se folosesc următoarele mărimi fizice locale (fig. 1.2):

- ρ - densitatea de volum a sarcinii electrice;
- $\mathbf{J}$ - densitatea de curent electric.

Aceste mărimi caracterizează local și instantaneu corpurile. Pentru a caracteriza starea unui punct din corp pe un interval de timp, cele două mărimi devin **funcții** de poziție și timp, una scalară și alta vectorială, definite pe domeniul corpului și intervalul de timp.

Densitatea de sarcină

Mărime fizică scalară ce caracterizează local și instantaneu **starea de electrizare** a corpurilor:

$$\rho = f(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

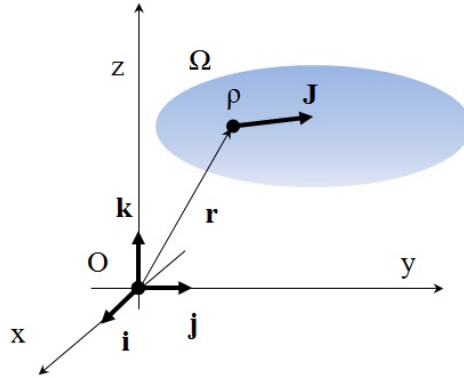


Figura 1.2: Mărimile locale ale corpurilor

cu $f : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ este vectorul de poziție cartezian.

Unitatea de masura: Coulomb pe metru cub $[\text{C}/\text{m}^3]$.

Densitatea de curent

Mărime fizică vectorială ce caracterizează local și instantaneu **starea electrocinetică** a corpurilor:

$$\mathbf{J} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

cu $\mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, iar $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ vectorul de poziție cartezian.

Unitatea de masura: Amper pe metru patrat $[\text{A}/\text{m}^2]$.

1.1.3 Mărimi globale ale câmpului electromagnetic

Fiecare mărime locală definește prin integrare pe o varietate spațială câte o mărime globală. Intensitățile câmpului se integrează pe varietăți unidimensionale (curbe) - integrale simple, iar inducțiile se integrează pe varietăți bidimensionale (suprafețe) - integrale duble (fig. 1.3):

- **tensiunea electrică** u se obține prin integrarea intensității câmpului electric $\mathbf{E}$ pe curbe închise sau deschise;
- **fluxul electric** ψ se obține prin integrarea inducției electrice $\mathbf{D}$ pe suprafețe;
- **tensiunea magnetică** u_m se obține prin integrarea intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}$ pe curbe închise sau deschise;

- **fluxul magnetic** φ se obține prin integrarea inducției magnetice $\mathbf{B}$ pe suprafețe.

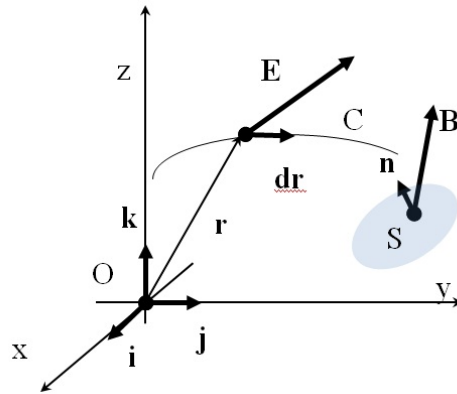


Figura 1.3: Mărimile globale ale câmpului electromagnetic

Aceste mărimi caracterizează global și instantaneu câmpul electromagnetic pe varietățile pe care sunt definite. Matematic ele sunt funcții reale de variabilă reală, **definite pe intervalul de timp al procesului considerat. Fiind asociate unor varietăți orientate, vom spune că au sens de referință.** Schimbarea sensului de referință (orientarea varietății) determină schimbarea semnului mărimii globale. Trebuie să mai luăm notă de un aspect extrem de important, referitor la orientarea varietăților, deci implicit referitor la sensurile de referință. Acestea trebuie să respecte următoarele **reguli de orientare**:

- Suprafețele închise se orientează întotdeauna spre exterior.
- Suprafețele deschise se orientează conform regulii burghiului drept, față de felul în care sunt orientate curbele lor de frontieră.
- Integralele curbilinii au elementul tangențial de linie orientat în sensul curbei, iar integralele pe suprafețe au elementul vectorial de arie $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$, orientat în sensul versorului $\mathbf{n}$, normal, la suprafață, care trebuie să respecte regulile de orientare anterioare.

Tensiunea electrică

În consecință tensiunea electrică este o mărime scalară ce caracterizează global și instantaneu câmpul electric de-a lungul unei curbe C , mărime derivată, definită de circulația lui $\mathbf{E}$:

$$u(t) = \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.7)$$

Unitatea de masura: Voltul [V].

Tensiunea este egală cu componenta tangențială a intensității câmpului, mediată pe curba C , înmulțită cu lungimea curbei: $u = E_{t,med} \cdot l_C$.

Definită pe curbe închise, ea se mai numește și *tensiune electro-motoare (t.e.m.)* și se mai notează cu e .

Matematic, tensiunea este o funcție reală de variabilă reală - timpul, asociată unei curbe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$u(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula U .

Fluxul electric

Fluxul electric este o mărime fizică scalară care descrie global câmpul electric de pe suprafața închisă sau deschisă, este o mărime derivată, definită de fluxul inducției $\mathbf{D}$:

$$\psi(t) = \int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A}. \quad (1.9)$$

Unitatea de măsură: Coulombul [C].

În consecință, fluxul este egal cu componenta normală a inducției, mediată pe suprafața S și înmulțită cu aria suprafeței: $\psi = D_{n,med} \cdot A_s$.

Matematic, fluxul este o funcție reală de variabilă reală - timpul, asociată unei suprafețe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$\psi(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula Ψ .

Tensiunea magnetică

Tensiunea magnetică este o mărime scalară ce caracterizează global și instantaneu câmpul magnetic de-a lungul unei curbe C , mărime derivată, definită de circulația lui $\mathbf{H}$:

$$u_m(t) = \int_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.11)$$

Unitatea de măsură: Amperul [A].

În consecință tensiunea este egală cu componenta tangențială a intensității câmpului, mediată pe curba C și înmulțită cu lungimea curbei: $u_m = H_{t,med} \cdot l_C$.

Definită pe curbe închise, ea se mai numește și *tensiune magneto-motoare (t.m.m.)*.

1.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE ELECTROMAGNETISMULUI 21

Matematic, tensiunea magnetică este o funcție reală de variabilă reală - timpul , asociată unei curbe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$u_m(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula U_m .

Fluxul magnetic

Fluxul magnetic este o mărime fizică scalară, care descrie global câmpul magnetic de pe suprafața S , mărime derivată, definită de fluxul inducției $\mathbf{B}$:

$$\varphi(t) = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A}. \quad (1.13)$$

Unitatea de măsură: Weberul [Wb].

În consecință fluxul este egal cu componenta normală a inducției, mediată pe suprafața S și înmulțită cu aria suprafeței: $\varphi = B_{n,med} A_s$.

Matematic, fluxul magnetic este o funcție reală de variabilă reală - timpul:

$$\varphi(t) = f(t), f : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

iar dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula Φ .

1.1.4 Mărimi globale ale corpurilor

Ca și mărimile globale ale câmpului, marimile globale ale corpurilor sunt asociate mărimilor locale și sunt obținute prin integrarea acestora pe diferite varietăți:

- q - **sarcina electrică** se obține prin integrarea pe domeniul corpurilor a densității de sarcină.
- i - **intensitatea curentului electric** se obține prin integrarea pe suprafețe ce aparțin corpurilor a densității de curent $\mathbf{J}$.

Aceste mărimi sunt funcții scalare de timp ce caracterizează global și instantaneu starea corpurilor pe varietățile pe care sunt definite. Deoarece este definită pe o varietate orientată, curentul are sens de referință, dar sarcina nu are, fiind definită pe o varietate neorientată.

Sarcina electrică

Sarcina electrică este o mărime fizică scalară, care descrie global **starea de electrizare** a unui corp, definită de integrala triplă, pe domeniul corpului a densității de sarcină:

$$q(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) dv. \quad (1.15)$$

Unitatea de măsură: Coulomb [C].

În consecință sarcina este egală cu densitatea de sarcină mediată pe domeniul Ω și înmulțită cu volumul domeniului: $q = \mathbf{r}_{med} \cdot V_{\Omega}$. Matematic, sarcina este o funcție de timp asociată domeniului Ω , definită pe intervalul de timp al procesului analizat:

$$q = f(t), f : (t_{min}, t_{max}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Dacă funcția este constantă, atunci valoarea ei se notează cu majuscula Q .

Curentul electric

Intensitatea curentului electric, pe scurt curentul este o mărime fizică scalară, care descrie global **starea electrocinetică** de pe o suprafața S sau Σ , definită de fluxul densității de curent $\mathbf{J}$:

$$i(t) = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A}. \quad (1.17)$$

Unitatea de masura: Amperul [A].

În consecință curentul este egal cu componenta normală a densității de curent mediată pe suprafața S și înmulțită cu aria suprafeței: $i = J_{n,med} A_s$. Matematic, curentul este o funcție reală de variabilă reală, definită pe intervalul de timp cât durează procesul analizat și asociată unei suprafețe orientate (ceea ce face să aibă sens de referință):

$$i(t) = f(t), f : (t_{min}, t_{max}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Dacă funcția este constantă atunci valoarea ei se notează cu majuscula I .

1.1.5 Recapitularea mărimilor electromagnetice

Perechile de mărimi globale-locale caracteristice electromagnetismului macroscopic sunt sintetizate în Tabelul (1.1). Toate mărimile globale sunt scalare, iar mărimile locale sunt vectoriale, cu excepția densității de sarcină. Mărimile locale

1.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE ELECTROMAGNETISMULUI 23

Mărimi locale	Mărimi globale
Intensitate câmp electric $\mathbf{E} = \mathbf{t} \cdot du/ds$ [V/m]	Tensiunea electrică $u = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}$ [V]
Intensitate câmp magnetic $\mathbf{H} = \mathbf{t} \cdot du_m/ds$ [A/m]	Tensiunea magnetică $u_m = \int_C \mathbf{B} d\mathbf{r}$ [A]
Inducția electrică $\mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot d\psi/dA$ [C/m ²]	Fluxul electric $\psi = \int \mathbf{D} d\mathbf{A}$ [C]
Inducția magnetică $\mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot d\varphi/dA$ [Wb/m ²] = [T]	Fluxul magnetic $\varphi = \int \mathbf{B} d\mathbf{A}$ [Wb]
Densitatea de sarcină $\rho = dq/dv$ [C/m ³]	Sarcina electrică $q = \int \rho dv$ [C]
Densitatea de curent $\mathbf{J} = d\mathbf{i}/d\mathbf{A}$ [A/m ²]	Curentul electric $i = \int \mathbf{J} d\mathbf{A}$ [A]

Tabela 1.1: Marimile macroscopice ale câmpului electromagnetic

definesc complet, analitic, atât câmpul cât și corpurile, în timp ce mărimile globale au un caracter sintetic, descriind doar starea medie a câmpului și a corpurilor dintr-o mulțime infinită de puncte. Cunoașterea mărimilor locale determină univoc, prin integrare mărimea globală, în schimb trecerea inversă nu este univoca.

Dupa cum s-a văzut, mărimile globale au valori egale cu componentele longitudinale sau transversale ale câmpului, mediate pe varietatea de definiție și înmulțite cu măsura varietății (lungime, arie sau volum, în cazul varietăților 3D).

Deoarece sunt destinate integrării pe anumite varietăți, este evident că mărimile locale sunt, de fapt, *forme diferențiale*. http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_form. Intensitățile câmpurilor sunt forme diferențiale de ordinul întâi (se integrează pe curbe - care sunt varietăți de ordinul unu), inducțiile și densitatea de curent sunt forme diferențiale de ordinul doi (se integrează pe suprafețe, care sunt varietăți de ordinul doi), iar densitatea de sarcină este o formă diferențială de ordinul trei (se integrează pe varietăți tridimensionale, domenii de volum nenul). Această observație explică de ce spunem că intensitatea caracterizează câmpul din punct de vedere *longitudinal* (de-a lungul curbei) iar inducția caracterizează câmpul din punct de vedere *transversal* (componenta normală la suprafață).

Am constatat că valorile medii ale componentelor mărimilor locale pe varietăți se pot calcula împărțind mărimea globală la măsura varietății. Dacă tindem această măsură spre zero, la limita se obține valoarea mărimii locale în punctul în care s-a strâns varietatea. În consecință se poate stabili și relația inversă, evidențiată în Tabelul 1.1, prin care mărimile locale sunt "derivatele fizice" ale mărimilor globale. În acest caz versorii $\mathbf{t}$ și $\mathbf{n}$, care dau orientarea mărimii locale corespund direcției pentru care limita ce definește derivata are valoare maximă, sau se obțin derivând succesiv după axele sistemului de coordonate. Aceste relații evidențiază metode de măsurare pentru mărimile locale, bazate pe valori ale mărimilor globale, măsurate pe varietăți de dimensiuni foarte mici. Dacă se împarte mărimea globală la măsura varietății ei, se obține de fapt doar o componentă a valorii medii a mărimii locale. Dacă în schimb varietatea este de dimensiuni foarte mici, atunci variația mărimii locale pe varietate poate fi neglijată și valoarea medie devine chiar valoarea locală.

Cele șase mărimi locale, patru ale câmpului și două ale corpurilor sunt mărimile primitive ale electromagnetismului macroscopic. Mărimile globale, fiind definite ca integrale ale mărimilor locale, sunt mărimi derivate.

În modelarea electromagnetică bazată pe analiza clasică, mărimile locale sunt funcții mărginite, integrabile. Totuși, în practică se folosesc în modelare, de multe ori distribuții de câmp, sarcină sau curent degenerate, care nu pot fi reprezentate matematic prin astfel de funcții. De exemplu, un corp de dimensiuni neglijabile (punctiform) electrizat cu sarcina q , plasat în origine. Densitatea de sarcină este în acest caz o funcție generalizată (o distribuție) de tip Dirac:

$$\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (1.19)$$

Tot o distribuție este densitatea de sarcină distribuită uniform pe planul $z = 0$, cu densitatea superficială $\rho_s = dq/dA$ [C/m^2], careia îi corespunde o densitate de sarcina:

$$\rho(x, y, z) = \rho_s\delta(z). \quad (1.20)$$

Folosind funcții generalizate, inclusiv distribuții în locul funcțiilor clasice, cadrul funcțional se extinde foarte mult și modelarea devine mult mai flexibilă. Dar mărimile locale pot avea singularități, puncte în care mărimile nu sunt mărginite. Integrarea mărimilor locale este o operație esențială, nu numai în definirea mărimilor globale ci și, după cum se va vedea ulterior, în calculul puterii și energiei, când vor fi integrate pe varietăți tridimensionale, produse scalare de tipul **ED**, **BH**, **JE**. Aceste operații duc în mod natural la spațiul funcțiilor L^2 de pătrat integrabil, care reprezintă câmpuri de energie finită. Folosirea integralei Lebesgue în locul integralei Riemann aduce mai multe avantaje legate de formularea corectă a problemelor, existența și continuitatea soluției. Dar această decizie schimbă complet cadrul funcțional, de la cel clasic al funcțiilor continue și derivabile la cadrul funcțional modern, în care câmpurile devin elemente ale spațiului Lebesgue L^2 , al funcțiilor de pătrat integrabil http://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space. Elementele acestui spațiu sunt clase de echivalență de funcții egale aproape peste tot. Lucrurile pot continua, prin introducerea spațiilor Sobolev http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space, atunci când generalizăm noțiunea de derivată sau prin folosirea teoriei distribuțiilor a lui Schwartz [http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics)).

În continuare vom folosi termenul de funcție generalizată atât pentru distribuții cât și pentru elementele spațiilor Lebesgue, alcătuite din clase de echivalență de funcții egale aproape peste tot.

În continuare vom considera toate mărimile ce caracterizează câmpul și corpurile, elemente ale spațiului L^2 ($\Omega \in \mathbb{R}^3$). Avantajul constă în faptul că acesta este un spațiu Hilbert, cadrul natural pentru a demonstra riguros diferite teoreme, care țin

de formularea corectă a problemeleor de câmp și soluționarea lor, precum și de a studia convergența soluției numerice.

Trecerea de la contextul clasic la cadrul funcțional modern, chiar dacă aduce multe avantaje, cere un mare sacrificiu, și anume renunțarea la conceptul clasic de funcție, prin care fiecărui punct din domeniul de definiție îi corespunde o valoare din codomeniu. Valoarea funcției într-un punct nu mai are sens în contextul funcțional modern, iar conceptul de funcție capătă un sens abstract.

Acesta este un sacrificiu de neacceptat pentru mulți ingineri, neobișnuiți cu raționamente abstracte. Acestora le propunem să își închipuie că în fiecare clasă de echivalență se află un element care se poate aproxima aproape peste tot, oricât de bine cu o funcție clasică, și să adopte acea funcție ca reprezentant al clasei de echivalență (cum se întâmplă în cazul funcțiilor suficient de netede). Astfel se poate continua folosirea reprezentărilor intuitive clasice, chiar și în cadrul modern.

Deoarece integrala unui polinom sau a unei funcții trigonometrice are aceeași expresie, chiar dacă este de tip Riemann sau Lebesgue, putem să nu luăm în considerare diferențele între concepția clasică și cea modernă, folosind reprezentanți clasici pentru clasele de echivalențe de funcții, întâlnite în analiza funcțională. Pe parcurs, se va vedea că falia conceptuală dintre cele două abordări devine tot mai evidentă. Dar menținerea în conceptul clasic, fără trecerea pe celălalt versant, nu pot fi înțelese sensurile profunde ale modelării electromagnetice cu elemente finite. Importanța acestor aspecte va fi mai clară în capitolul dedicat modelării matematice.

1.2 Legile generale ale electromagnetismului

Legile unei teorii fizice sunt afirmațiile de bază referitoare la mărimile primitive, fundamentale pentru acea teorie. Deoarece aceste afirmații au un caracter axiomatic, ele nu se demonstrează în cadrul teoriei, ci acestea rezultă prin inducție incompletă, prin generalizarea observațiilor experimentale. O teorie fizică este corect axiomatizată, doar dacă legile ei sunt necontradictorii, independente, și complete, atât din punct de vedere matematic cât și din punct de vedere fizic.

Legile electromagnetismului macroscopic se împart în trei mari categorii:

- legile **generale**, ale căror forme nu depind de corpurile în care acestea se aplică;
- legile **de material**, ale căror forme depind de substanța în care acestea se aplică;
- legile **de transfer**, descriu efectele ne-electromagnetice ale câmpului electromagnetic.

În continuare vor fi prezentate pe scurt legile electromagnetismului macroscopic. Pentru mai multe detalii puteți consulta:

[69],[88], [122], [101], [29], [105].

În aceste lucrări veți găsi mult mai multe discuții, interpretări, exemple, aplicații, inclusiv demonstrația teoremelor fundamentale, dar și a altor consecințe.

1.2.1 Legea fluxului electric

1. **Enunț:** Fluxul electric pe orice suprafață închisă este egal cu sarcina electrică din domeniul interior suprafeței.

2. **Forma globală - integrală:**

$$\psi_{\Sigma} = q \Rightarrow \oint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \rho dv, \quad (1.21)$$

relație valabilă pentru orice domeniu $\mathcal{D}$, marginit de frontiera sa $\Sigma = \partial\mathcal{D}$.

3. **Forma locală:**

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.22)$$

este o consecință directă a relației (1.21) transformată prin relația Gauss-Ostrogradski.

Forma generală a legii este cea globală. În sensul matematicii clasice, relația (1.22) se poate aplica doar dacă $\mathbf{D}$ este o funcție continuă și derivabilă, altfel nu are sens divergența. În schimb, relația (1.21) este valabilă și în cazul câmpurilor discontinue.

4. **Forma pe suprafețe de discontinuitate:**

La trecerea prin suprafețe de discontinuitate (de la un corp la altul) componenta normală a inducției electrice are saltul:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{D} = \rho_s \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \Rightarrow D_{n1} = D_{n2} \quad (1.23)$$

și se conservă, dacă suprafața este neelectrizată ($\rho_s = 0$). Relația (1.23) este o consecință directă a relației (1.21), aplicată pe un domeniu cilindric care tinde către un punct de pe suprafața de discontinuitate.

Cele două forme: locală și pe suprafețele de discontinuitate au semnificații diferite în cazul folosirii funcțiilor clasice, dar în cazul folosirii funcțiilor generalizate, relația (1.23) este un caz particular al relației (1.22).

5. **Semnificație fizică:**

Orice corp electrizat ($\rho \neq 0$) produce în vecinătatea sa un câmp electric ($D \neq 0$). Legea evidențiază o cauză a câmpului electric și anume electrizarea corpurilor.

6. **Consecință calitativă (forma și orientarea liniilor câmpului electric):**

Liniile câmpului inducției electrice D sunt curbe deschise, ce pornesc de pe sarcinile pozitive și se opresc pe cele negative. Ele sunt neîntrerupte în domeniile neutre.

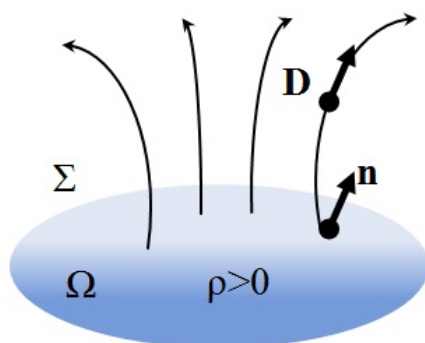


Figura 1.4: Legea fluxului electric

1.2.2 Legea fluxului magnetic

1. **Enunț:** Fluxul magnetic φ_Σ printr-o suprafață închisă oarecare Σ este nul.

2. **Forma globală - integrală:**

$$\varphi_\Sigma = 0 \Rightarrow \oint_\Sigma \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0. \quad (1.24)$$

3. **Forma locală:**

Se aplică teorema Gauss-Ostrogradski relației (1.24), se ține seama că volumul v_Σ , este arbitrar și rezultă:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.25)$$

4. **Forma pe suprafețe de discontinuitate:**

Ca și în cazul anterior:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}. \quad (1.26)$$

Componenta normală a inducției magnetice se conservă la trecerea prin orice suprafață de discontinuitate.

5. **Semnificație fizică:**

O consecință imediată a acestei legi este faptul că nu există sarcini magnetice (adevărate), similare celor electrice.

6. **Consecință calitativă:**

Liniile inducției magnetice sunt curbe continui, închise - care nu au punct de început sau de sfârșit.

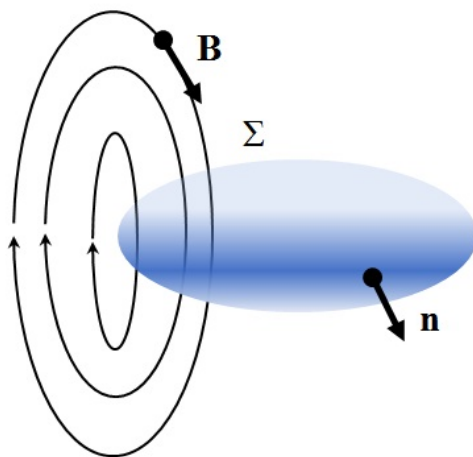


Figura 1.5: Legea fluxului magnetic

1.2.3 Legea inducției electromagnetice

1. **Enunț:** Tensiunea electrică de-a lungul unei curbe închise Γ este egală cu viteza de scădere în timp a fluxului magnetic printr-o suprafață S care se sprijină pe curba Γ .

Ipoteza Hertz: curba Γ și suprafața S_Γ sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor. În consecință inducția electromagnetică poate fi de transformare și/sau de mișcare.

2. Forma globală - integrală:

$$u_{\Gamma} = -\frac{d\varphi_{S_{\Gamma}}}{dt} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{B} d\mathbf{A}, \quad (1.27)$$

în care suprafața S_{Γ} este arbitrară iar Γ este frontiera sa.

3. Forma locală:

Pentru corpuri imobile ($v = 0$), transformând relația (1.27) cu formula lui Stokes se obține ecuația vectorială cu derivate parțiale:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

cunoscută sub numele de *a doua ecuație a lui Maxwell*.

În sens clasic, această ecuație are sens doar dacă $\mathbf{E}$ are variație spațială continuă și netedă iar $\mathbf{B}$ are variație temporală derivabilă. Aceste restricții dispar, dacă se operează cu distribuții [http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics)).

În cazul mediilor în mișcare, legea inducției electromagnetice are o formă mai complicată:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}), \quad (1.29)$$

în care intervine viteza locală a mediului v . Demonstarea formelor locale se face transformând (1.28) cu relația lui Stokes și identificând integranzii. În mediile mobile se calculează "derivata de flux", conform ipotezei lui Hertz.

4. Forma pe suprafețe de discontinuitate:

O altă consecință a relației (1.27) referitoare la intensitatea câmpului electric de o parte și alta a unei suprafețe de discontinuitate este

$$\text{rot}_s \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.30)$$

sau echivalent:

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}, \quad (1.31)$$

relație care afirmă continuitatea componentei tangențiale a intensității câmpului electric la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate.

5. Semnificație fizică: Variația în timp a câmpului magnetic induce un câmp electric, fenomen cunoscut sub numele de inducție electromagnetică. Este pusă în evidență astfel o a doua cauză posibilă a câmpului electric.

6. **Liniile câmpului electric indus:** sunt curbe închise, înconjoară câmpul magnetic inductor, sensul lor depinde de sensul liniilor câmpului magnetic inductor și de modul de variație al acestuia în timp. Câmpul electric indus de un câmp magnetic descrescător în timp are sensul dat de regula burghiului drept și este opus în cazul câmpului inductor crescător.

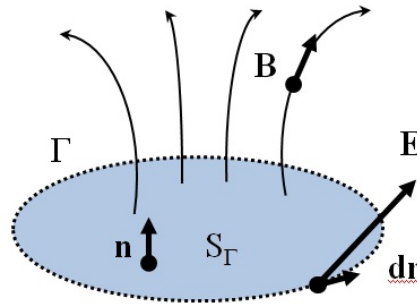


Figura 1.6: Legea inducției electromagnetice

În baza ipotezei lui Hertz, inducția electromagnetică poate fi de *transformare* (în absența mișcării) și/sau de *mișcare* (poate să apară și în câmpuri magnetice constante în timp).

1.2.4 Legea circuitului magnetic

1. **Enunț:** Tensiunea magnetică de-a lungul unei curbe închise Γ arbitrară este egală cu suma dintre curentul printr-o suprafață ce se sprijină pe curba Γ și viteza de creștere în timp a fluxului electric prin acea suprafață. Ipoteza lui Hertz se aplica și în acest caz.
2. **Forma globală - integrală:**

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}, \quad (1.32)$$

relație numită forma globală a legii, sau forma integrală a legii:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \mathbf{D} d\mathbf{A}, \quad (1.33)$$

relații valabile pentru o suprafață arbitrară S_Γ , marginită de frontiera sa $\Gamma = \partial S_\Gamma$.

3. Forma locală:

Utilizând teorema lui Stokes, aplicată relației (1.33) se obține în cazul mediilor imobile ecuația cu derivate parțiale, liniară și de ordinul întâi

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.34)$$

cunoscută sub numele de *prima ecuație a lui Maxwell*.

În cazul mediilor în mișcare, forma locală este:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + \text{rot} (\mathbf{D} \times \mathbf{v}), \quad (1.35)$$

obținută în baza ipotezei lui Hertz, folosind derivata de flux. Dacă se folosește teoria distribuțiilor, forma locală este la fel de generală ca și forma globală.

4. Forma pe suprafețe de discontinuitate:

Dacă pe suprafață există o distribuție de curent superficial cu densitatea $\mathbf{J}_s$ [A/m], atunci:

$$\text{rot}_s \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s. \quad (1.36)$$

iar dacă $\mathbf{J}_s = 0$:

$$\mathbf{H}_{2t} = \mathbf{H}_{1t}, \quad (1.37)$$

care afirmă continuitatea componentei tangențiale a câmpului magnetic la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care nu este pânză de curent.

- 5. Semnificație fizică:** Această lege evidențiază cauzele câmpului magnetic: curentul electric de conducție și variația în timp a câmpului magnetic (curentul de deplasare). Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise care înconjoară liniile curentului inductor și au sensul dat de regula burghiului drept.

Fenomenele fundamentale descrise de cele patru legi generale sunt reprezentate simbolic în (fig. 1.8).

Deoarece conform ecuațiilor lui Maxwell, inducțiilor electrice/magnetice li se aplică operatorul divergență iar intensităților câmpurilor electrice/magnetice li se aplică operatorul rotor, trebuie ca fiecare să îndeplinească condiții de continuitate și netezime specifice. La trecerea prin suprafețele de discontinuitate, inducția trebuie să-și conserve componenta normală iar intensitatea își conservă componenta tangențială. După cum se va vedea ulterior aceste restricții se mențin și în cazul lucrului cu funcții generalizate, fiind deci caracteristici fundamentale ale componentelor câmpului electromagnetic.

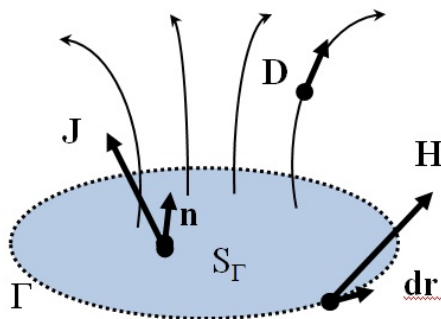


Figura 1.7: Legea circuitului magnetic

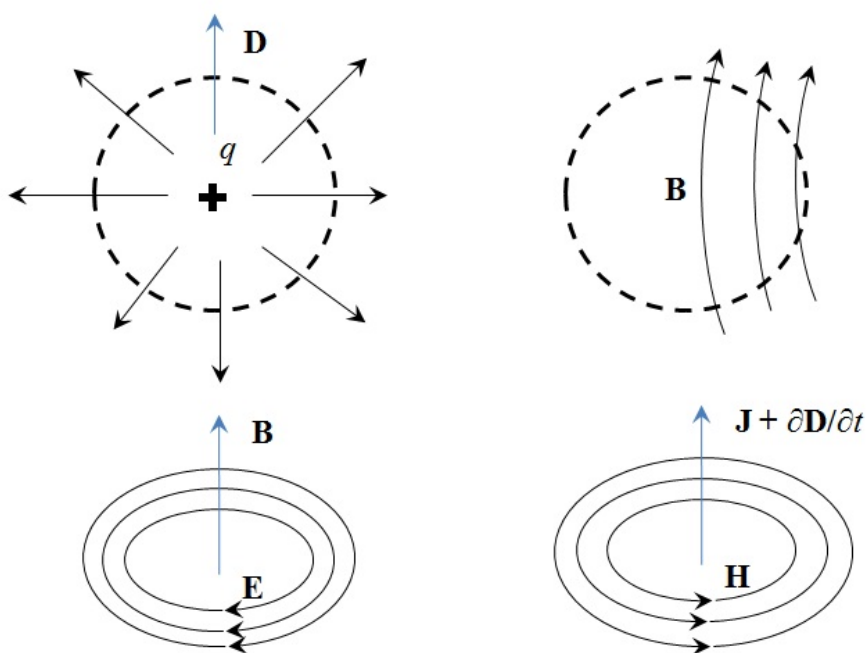


Figura 1.8: Reprezentarea simbolică a legilor generale

1.3 Legile de material

Legile de material, în număr de trei, completează legile generale, specificând existența anumitor relații constitutive între mărimile locale ale câmpului electromagnetic. Spre deosebire de legile generale, ale căror forme generale erau cele globale, în cazul legilor de material se va vedea că formele lor generale sunt formele

locale.

1.3.1 Legea legăturii între $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$

1. **Enunț:** Inducția electrică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea câmpului electric din acel punct. Forma concretă a dependenței este funcție de substanța în care se află punctul.

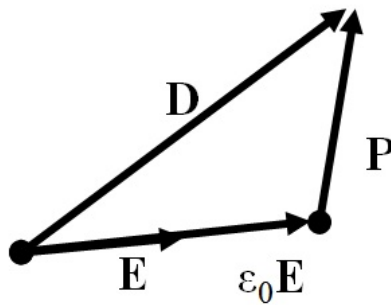


Figura 1.9: Definiția polarizației

2. **Forma generală (locală) a legii:**

$$\mathbf{D} = f(\mathbf{E}, \mathbf{r}), \quad f: \mathbb{R}^3 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.38)$$

în care f este o funcție vectorială de două variabile vectoriale numită *caracteristică dielectrică*, dar în cazul general, în care câmpul variază în timp, f poate fi un operator. Dacă nu are loc variația după $\mathbf{r}$, atunci avem un mediu *dielectric omogen*.

3. **Forme locale particulare:**

(a) În vid:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.39)$$

în care $\varepsilon_0 \cong \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ se numește *permitivitatea vidului* și este o constantă universală. Pentru valoarea exactă vedeți (http://en.wikipedia.org/wiki/Vacuum_permittivity). În consecință, inducția și intensitatea câmpului electric sunt coliniare și proporționale, fiind suficientă doar una dintre cele două mărimi vectoriale pentru a caracteriza complet câmpul electric dintr-un punct din vid.

(b) În dielectrici liniari izotropi:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r. \quad (1.40)$$

Aceștia sunt caracterizați de constanta de material ε_r , mărime fizică scalară, adimensională, numită *permitivitatea relativă* a mediului. Corpurile omogene au o valoare constantă a permitivității, în schimb în corpurile neomogene permitivitatea depinde de punct. Din punct de vedere matematic aceste corpuri sunt caracterizate de funcția reală de variabilă vectorială: $\varepsilon_r = f(\mathbf{r}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, definită pe domeniul corpului.

În modelarea electromagnetică se întâlnesc două cazuri degenerate: mediul *anelectric*, la care se presupune $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \mathbf{D} = 0$ și *dielectricul perfect*, la care $\varepsilon \rightarrow \infty \Leftrightarrow \mathbf{E} = 0$.

(c) În dielectricii liniari anizotropi:

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{E}; \quad \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Aceștia sunt caracterizați de mărimea fizică $\bar{\bar{\varepsilon}}$, numită *tensorul permitivității* (relative/ absolute). Acest tensor este descris într-un sistem de referință cartezian de o matrice pătrată de dimensiune 3×3 , simetrică și pozitiv definită. Matricea este diagonalizată, dacă axele sistemului coincid cu direcțiile proprii ale tensorului.

(d) În corpurile polarizate permanent se folosește *modelul afin* - aproximare de ordinul unu a funcției (1.38):

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p, \quad (1.42)$$

obținută prin truncherea seriei Taylor a funcției f doar la primii doi termeni. În realtă (1.42) $\bar{\bar{\varepsilon}}$ este tensorul permitivităților dinamice, definit ca matricea Jacobian a funcției f , iar $\mathbf{P}_p = f(0)$ este o matrice vectorială numită *polarizație permanentă*.

4. Semnificații fizice:

Polarizația $\mathbf{P}$ [C/m²] este o mărime derivată definită de relația (fig. 1.9):

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = f(\mathbf{E}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p \quad (1.43)$$

în care $\mathbf{P}_p = f(0)$ este *polarizația permanentă*, iar $\mathbf{P}_t(\mathbf{E}) = \mathbf{P} - \mathbf{P}_p = f(\mathbf{E}) - f(0)$ este *polarizația temporară*. Aceste mărimi fizice descriu fenomenul de polarizare permanentă - prin care electreții devin sursă de câmp

electric și respectiv fenomenul de polarizare temporară - prin care dielectri-
cii perturbă câmpul în care se află.

În medii liniare:

$$\mathbf{P}_p = 0, \mathbf{P} = \mathbf{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \Rightarrow \varepsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (1.44)$$

În care χ_e - se numește *susceptivitate dielectrică* și caracterizează capaci-
tatea corpului de a se polariza temporar (sub acțiunea câmpului electric).
Mărimea globală asociată polarizației este *momentul electric* definit ca in-
tegrala magnetizației pe volumul corpului:

$$\mathbf{p} = \int_{\Omega} \mathbf{P} dv \quad [\text{Cm}]. \quad (1.45)$$

În practică cel mai des folosit este modelul afin (1.42) și cazurile lui particu-
lare - mai ales modelul liniar și izotrop (1.40) pentru modelarea electreților.
Câmpul electric produs de un electret neîncărcat cu sarcină are liniile in-
ducției $\mathbf{D}$ curbe închise (orientate în interiorul corpului în sensul polariza-
ției sale permanente) și liniile intensității $\mathbf{E}$ curbe deschise, identice cu cele
ale lui $\mathbf{D}$ în exteriorul corpului și opuse (depolarizante) în interior. Corpu-
rile dielectrice liniare introduse în câmp electric perturbă liniile câmpului,
atrăgându-l în interiorul lor, cu atât mai mult cu cât au permeabilitate mai
mare. Inducția $\mathbf{D}$, care are liniile de câmp curbe închise crește în interiorul
corpului, dar scade în exterior. În schimb, intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$,
scade atât în interior, cât și în exterior.

5. Forma globală a legii în câmp uniform:

Fluxul electric ce străbate un corp cilindric omogen de lungime l și aria
bazei A , depinde de tensiunea de-a lungul său astfel:

$$\psi = A \cdot f(u/l). \quad (1.46)$$

În cazul particular al dielectricilor liniari, dependența $\psi - u$ este tot liniară:

$$\psi = A\varepsilon \frac{u}{l} = Cu. \quad (1.47)$$

cu $C = A\varepsilon/l$. O relație asemănătoare este valabilă și în cazul general al
unui tub de flux, sau al unui corp de formă arbitrară cu două borne echi-
potențiale disjuncte. Acesată relație evidențiază o metodă de măsurare a
permeabilității unui mic eșantion cilindric, măsurând mărimile globale u și
 ψ .

6. Forma pe suprafețe de discontinuitate - refracția liniilor de câmp:

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care separă mediile cu permitivitățile ε_1 și ε_2 , linia de câmp a inducției electrice se frânge cu unghiurile față de normală α_1 și α_2 , care satisfac relația:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (1.48)$$

Demonstrația acestei relații ce descrie *refracția liniilor de câmp electric* este o consecință imediată a conservării componente normale a inducției și a componente tangențiale a intensității câmpului. În particular, dacă unul din medii este degenerat, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ sau $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, atunci linia de câmp face cu suprafața acelui mediu unghiul $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ și respectiv $\alpha_2 \rightarrow 0$. În consecință, liniile de câmp sunt perpendiculare pe dielectricii perfecți și se preling pe la suprafața corpurilor anelectrice.

1.3.2 Legea legăturii între B și H

1. **Enunț:** Inducția magnetică dintr-un punct din spațiu depinde de intensitatea magnetică din acel punct. Forma concretă a dependenței este funcție de substanța în care se află punctul.

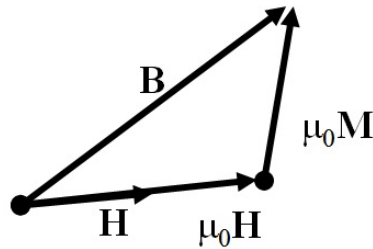


Figura 1.10: Definiția magnetizației

2. **Forma generală (locală) a legii:**

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{H}, \mathbf{r}), \quad f: \mathbb{R}^3 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.49)$$

în care f este o funcție vectorială de două variabile vectoriale, numită *caracteristică de magnetizare*, dar în cazul general, în care câmpul variază în

timp, f poate fi un operator, iar în cazul particular al mediilor *omogene*, variabila r nu mai apare.

În cazul mediilor cu histerezis, se stabilește o relație neliniară între modul de variație în timp al intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}$ și modul în care variază în timp inducția $\mathbf{B}$.

3. Forme locale particulare:

(a) În vid (și medii nemagnetice):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.50)$$

în care $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ se numește *permeabilitatea magnetică a vidului* și este o constantă universală. În consecință, inducția și intensitatea câmpului magnetic sunt coliniare și proporționale, fiind suficientă doar una dintre cele două mărimi vectoriale pentru a caracteriza complet câmpul magnetic dintr-un punct din vid.

(b) În medii liniare și izotrope:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \Rightarrow \mu = \mu_0 \mu_r. \quad (1.51)$$

Acestea sunt caracterizate de constanta de material μ_r , mărime fizică scalară, adimensională, numită *permeabilitatea magnetică relativă* a mediului. Corpurile omogene au o valoare constantă a permeabilității, în schimb în corpurile neomogene, permeabilitatea depinde de punct. Din punct de vedere matematic aceste corpuri sunt caracterizate de funcția reală de variabilă $\varepsilon_r = f(\mathbf{r}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, definită pe domeniul corpului.

Cazurile degenerte întâlnite în modelare sunt materialele *amagnetice*, la care $\mu = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = 0$ și mediul *feromagnetic perfect*, la care $\mu \rightarrow \infty \Leftrightarrow \mathbf{H} = 0$.

(c) În medii anizotrope:

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}} \mathbf{H}; \quad \bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Aceștea sunt caracterizate de mărimea fizică $\bar{\bar{\mu}}$ numită *tensorul permeabilității* (relative/ absolute). Acest tensor este descris într-un sistem de referință cartezian de o matrice pătrată de dimensiune 3×3 , simetrică și pozitiv definită, notată și cu $\bar{\bar{\mu}}$. Matricea este diagonalizată dacă axele sistemului coincid cu direcțiile proprii ale tensorului.

(d) În magneți permanenți se folosește *modelul afin*:

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}}\mathbf{H} + \mathbf{I}_p \quad (1.53)$$

obținut prin aproximarea caracteristicii neliniare de magnetizare (1.49) cu trunchierea de ordin întâi a seriei Taylor a funcției f .

Tensorul $\bar{\bar{\mu}}$ reprezentat de matricea Jacobian a caracteristicii neliniare de magnetizare este *permeabilitatea dinamică inițială* (în origine) a mediului, iar $\mathbf{I}_p = \mathbf{f}(0) = \mathbf{B}_r$, se numește *polarizația magnetică* sau inducția remanentă. De multe ori în locul lui este preferată mărimea $\mathbf{M}_p = \mathbf{I}_p/\mu_0$ numită *magnetizație permanentă*.

(e) În general:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \mathbf{M} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p, \\ \mathbf{M}_p &= \frac{\mathbf{f}(0)}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

(f) Iar în medii liniare:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= 0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) \chi_m \mathbf{H}; \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} \Rightarrow \mu_r = 1 + \chi_m. \end{aligned} \quad (1.55)$$

În care χ_m se numește *susceptibilitate magnetică*.

Relația $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ definește o nouă mărime fizică, care descrie fenomenul de magnetizare. Aceasta este $\mathbf{M} = (\mathbf{B}/\mu) - \mathbf{H}$, o mărime fizică vectorială locală, numită *magnetizație*. Cu toate că în definiția ei s-au folosit marimi ale câmpului, rezultatul este totuși o mărime caracteristică corpurilor (Fig. 1.10). Mărimea globală asociată magnetizației este *momentul magnetic*, definită ca integrala magnetizației pe domeniul corpului:

$$\mathbf{m} = \int_{\Omega} \mathbf{M} dv \quad [\text{A}/\text{m}^2]. \quad (1.56)$$

Ea este o mărime vectorială globală și instantanee, care descrie starea globală de magnetizare a unui corp.

4. Semificația fizică:

Legea descrie fenomenele de magnetizare permanentă - sursă de câmp magnetic și magnetizarea temporară, datorită căreia câmpul magnetic este perturbat de prezența corpurilor magnetizabile.

5. Forma globală a legii în camp uniform:

Fluxul magnetic ce străbate un corp cilindric omogen de lungime l și aria bazei A depinde de tensiunea de-a lungul său astfel:

$$\varphi = A \cdot f(t, u_m/l), \quad (1.57)$$

în cazul particular al corpurilor liniare, dependența $\varphi - u_m$ este tot liniară:

$$\varphi = A\mu \frac{u_m}{l} = Lu_m. \quad (1.58)$$

cu $L = A\mu/l$. Acesată relație evidențiază o metodă de determinare experimentală a permeabilității unui mic eșantion cilindric, măsurând mărimile globale u_m și φ .

6. Forma pe suprafețe de discontinuitate - refracția liniilor de câmp:

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care separă mediile cu permeabilitatea μ_1 și μ_2 , linia de câmp a inducției magnetice se frânge cu unghiurile față de normală α_1 și α_2 , ce satisfac relația :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (1.59)$$

Demonstrația este o consecință imediată a conservării componente normale a inducției și a componente tangențiale a intensității câmpului. În particular dacă unul din medii este degenerat, $\mu_1 \rightarrow 0$ sau $\mu_1 \rightarrow \infty$, atunci linia de câmp face cu suprafața aceluia mediu unghiul $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ și respectiv $\alpha_2 \rightarrow 0$. În consecință liniile de câmp sunt perpendiculare pe materialele perfect magnetice și se preling pe la suprafața corpurilor amagnetice.

Dacă adăugăm mărimile derivate $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{p}$ la cele introduse în capitolul (1.1), obținem un sistem de opt mărimi locale și opt mărimi globale, din care jumătate caracteristice câmpului și jumătate caracteristice corpurilor. Din cele 16 mărimi, doar 6 sunt primitive, iar celelalte sunt derivate. În diferite variante ale prezentării teoriei electromagnetismului macroscopic se consideră diverse mărimi din cele 16 ca fiind primitive, rezultatul fiind în cele din urmă același, obținându-se teorii echivalente. În consecință, nu are prea mare relevanță practică, care sunt cele șase mărimi primitive ale electromagnetismului și pe care le considerăm derivate.

1.3.3 Legea conducției

1. **Enunț:** Densitatea de curent dintr-un punct depinde de intensitatea curentului din acel punct. Forma concretă a dependenței este funcție de substanța în care se află punctul.

2. Forma generală (locală) a legii:

$$\mathbf{J} = f(\mathbf{E}, \mathbf{r}), \quad f: \mathbb{R}^3 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.60)$$

în care f este o funcție vectorială de două variabile vectoriale, dar în cazul general în care câmpul variază în timp, f poate fi un operator.

3. Forme locale particulare:

(a) În vid:

$$\mathbf{J} = 0. \quad (1.61)$$

(b) În conductoare liniare izotrope:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}, \quad (1.62)$$

în care $\sigma \left[\frac{\text{S}}{\text{m}} \right]$ se numește *conductibilitatea electrică*. Mărimea inversă conductivității este *rezistivitatea electrică*, cu simbolul ρ și unitatea de măsură $[\Omega \cdot \text{m}]$. Cazurile degenerate sunt *izolatorul perfect* $\sigma = 0 \Leftrightarrow \mathbf{J} = 0$ și *conductorul perfect*, sau *supraconductorul*: $\rho = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = 0$.

(c) În conductoare liniare anizotrope:

$$\mathbf{J} = \bar{\bar{\sigma}} \mathbf{E}. \quad (1.63)$$

Aceștia sunt caracterizați de mărimea fizică $\bar{\bar{\sigma}}$ numită *tensorul conductivității*. Acest tensor este descris într-un sistem de referință cartezian de o matrice pătrată de dimensiune 3×3 , simetrică și pozitiv definită. Matricea este diagonalizată dacă axele sistemului coincid cu direcțiile proprii ale tensorului.

(d) În corpuri cu câmp imprimat se folosește modelul afin de dependență între $\mathbf{J}$ și $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = \rho \mathbf{J} \Leftrightarrow \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \quad (1.64)$$

4. Semnificație fizică:

Legea evidențiază faptul că starea electrocinetică se datorează câmpului electric și că în corpurile cu câmp imprimat (din diferite cauze: termice, mecanice, chimice, cum se întâmplă în cazul bateriilor și acumulatorilor) apare un câmp electric generat de cauze ne-electrice.

5. Forma pe suprafețe de discontinuitate - refracția liniilor de câmp:

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, care separă mediile cu permitivitățile σ_1 și σ_2 , linia de câmp se frânge cu unghiurile față de normală α_1 și α_2 , ce satisfac relația ::

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (1.65)$$

În particular dacă unul din medii este degenerat, $\sigma_1 \rightarrow 0$ sau $\sigma_1 \rightarrow \infty$, atunci linia de câmp face cu suprafața aceluia mediu unghiul $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$ și respectiv $\alpha_2 \rightarrow 0$. Linia de curent cade perpendicular pe conductoarele perfecte și se prelinge pe suprafețele corpurilor izolante.

Cel mai adesea în modelarea electromagnetice se folosește forma liniară a legii conductiei. Un mediu liniar este caracterizat complet din punctul de vedere al parametrilor electromagnetici de material de trei constante de material: permeabilitatea ε , permitivitatea μ și conductivitatea σ .

1.4 Legile de transfer

1.4.1 Legea transferului de energie în conductoare

1. **Enunț:** Densitatea de volum a puterii transferate de câmp conductoarelor în stare electrocinetică este egală cu produsul scalar între intensitatea câmpului electric și densitatea curentului electric de conducție.

2. Forma locală:

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}. \quad (1.66)$$

Mărimea p măsurată în $[\text{W}/\text{m}^3]$ este o mărime fizică scalară, locală și instantanee ce descrie transferul de putere.

3. Forma globală:

$$P = \int_{\Omega} p dv = \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv. \quad (1.67)$$

Forma globală a legii dă valoarea puterii P [W] transferată de câmp unui corp întreg, fără să arate cum este distribuită disiparea de energie. Pentru a realiza o modelare precisă, de exemplu a distribuției temperaturii într-un corp conductor parcurs de curent, trebuie folosită forma locală a legii, care este forma generală.

4. **Semnificație fizică:** Această lege descrie efectul caloric al stării electrocinetice. În cazul mediilor conductoare liniare, deoarece densitatea de putere este pozitivă, transferul de putere are loc ireversibil, de la câmp la corp:

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \rho J^2 > 0. \quad (1.68)$$

1.4.2 Legea transferului de masă (a electrolizei)

1. **Enunț:** În procesul de conducție are loc un transfer de masă cu densitatea fluxului de masă proporțională și coliniară cu densitatea de curent.
2. **Forma locală**

$$\delta = k\mathbf{J} \quad (1.69)$$

în care k este neglijabil în metale și este egal cu coeficientul electrochimic în electroliți.

$$k = \frac{A}{Fn}, \quad (1.70)$$

A este masa atomică, n este valența elementului depus la electrod și $F = 96485,3365 \text{ C/mol}$ este numărul lui Faraday.

3. **Forma globală:** Debitul masic depus prin fenomenul de electroliză este în consecință:

$$Q_m = \int_{\Sigma} k\mathbf{J} d\mathbf{A}, \quad (1.71)$$

în care Σ este suprafața anodului, iar masa totală depusă în intervalul (t_1, t_2) este

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \int_S k\mathbf{J} d\mathbf{A} dt. \quad (1.72)$$

În particular, dacă $k = ct$. și $\mathbf{J}$ nu depinde de timp:

$$m = kIt, \quad (1.73)$$

în care $t = t_2 - t_1$, iar

$$I = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A} \quad (1.74)$$

este curentul ce străbate cuva electrolitică.

4. **Semnificație fizică:** legea descrie fenomenul de electroliză.

Forma globală a legii indică masa totală depusă prin electroliză dar nu și locul în care este aceasta depusă. Dacă se dorește calculul grosimii stratului depus prin electroliză trebuie aplicată forma locală a legii, care este forma generală.

După cum se constată, legile câmpului electromagnetic nu pun în evidență în mod direct efectele mecanice ale acestui câmp. Ele pot fi totuși determinate folosind teoremele câmpului electromagnetic, ale căror demonstrație se bazează pe legile prezentate.

1.5 Teoremele de conservare

1.5.1 Teorema conservării sarcinii

1. **Enunț:** Curentul electric ce părăsește orice suprafață închisă este egal cu viteza de scădere a sarcinii din domeniul interior suprafeței. Și de această dată se aplică ipoteza lui Hertz, conform căreia, curbele și suprafețele sunt antrenate de corpuri în mișcarea lor.

2. **Forma globală/integrală:**

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\mathcal{D}_{\Sigma}}}{dt} \Rightarrow \int_{\Sigma=\partial\mathcal{D}_{\Sigma}} \mathbf{J} d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \rho dv. \quad (1.75)$$

Prima relație este forma globală a legii iar a doua este forma sa integrală.

3. **Forma locală pentru medii imobile:**

$$\nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.76)$$

Se obține din relația (1.75) prin aplicarea relației lui Gauss. În medii mobile:

$$\nabla (\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{div} (\mathbf{J} + \rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.77)$$

se ține cont de derivata substanțială.

Vectorul $Jv = \rho v$ este densitatea curentului de convecție a sarcinii. Dacă notăm cu $Jd = d\mathbf{D}/dt$ densitatea curentului de deplasare, rezultă că suma celor trei curenți: de conducție, de convecție și de deplasare are întotdeauna divergența nulă, fiind deci un câmp solenoidal.

4. Forma pe suprafețe de discontinuitate:

$$\operatorname{div}_s \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Leftrightarrow \mathbf{n}_{12} (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \quad (1.78)$$

În cazul particular în care suprafața nu este electrizată, $\rho_s = 0$:

$$J_{n1} = J_{n2}, \quad (1.79)$$

ceea ce evidențiază conservarea componentei normale a densității de curent la trecerea prin suprafețele de discontinuitate ne-electrizate.

5. Semnificație fizică:

Între curent și sarcina există o foarte strânsă legatură. Sarcina se conservă sau migrează sub forma de curent. Linile de câmp ale densității totale de curent (convecție plus deplasare plus convecție) sunt curbe închise, deci acesta se conservă. În regim staționar, această concluzie este valabilă pentru curentul de conducție, deoarece ceilalți doi curenți sunt oricum nuli.

1.5.2 Teorema energiei electromagnetice

1. **Enunț:** Puterea transferată de câmpul electromagnetic unui domeniu prin frontiera acestuia este egală cu puterea transferată corpurilor din domeniu plus viteza de creștere a energiei câmpului electromagnetic din domeniu:

$$P_\Sigma = P_{\mathcal{D}_\Sigma} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \quad (1.80)$$

2. Forma locală în medii imobile:

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}. \quad (1.81)$$

este o consecință pătratică a legilor câmpului electromagnetic, în formele lor locale. Mai exact, prima ecuație a lui Maxwell (2.34) amplificată în produs scalar cu $\mathbf{E}$ se adună cu a doua ecuație a lui Maxwell (2.28) amplificată tot în produs scalar cu $-\mathbf{H}$. În consecință, în medii liniare imobile, termenii au expresiile:

- $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ - este vectorul Poynting, măsurat în W/m^2 ;
- $p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ - este densitatea de volum a puterii transferată de câmp corpurilor, se măsoară în W/m^3 ;

- $w_{em} = w_e + w_m$ este densitatea de volum a energiei electromagnetice, măsurată în J/m^3 ;
- $w_e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 2$ este densitatea de volum a energiei electrice, măsurată în J/m^3 ;
- $w_m = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} / 2$ este densitatea de volum a energiei magnetice, măsurată în J/m^3 .

Forma globală a teoremei rezultă prin integrarea formei locale pe domeniul corpului, deci:

- $P_\Sigma = - \int_{\Sigma=\partial D} \mathbf{S} d\mathbf{A}$ este puterea transferată prin suprafața domeniului, orientată convențional de la exterior spre interior, măsurată în W;
- $P = \int_D p dv = \int_D \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv$ este puterea transferată corpurilor din domeniu, măsurată în W;
- $W_{em} = \int_D w_{em} dv = \int_D \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \right) dv = W_e + W_m$ este energia câmpului electromagnetic din domeniu, măsurată în J.

În cazul **mediilor neliniare**, densitatea de energie electrică și cea magnetică au expresiile:

$$\begin{aligned} w_e &= \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D}' = \int_0^D f^{-1}(\mathbf{D}') d\mathbf{D}'; \\ w_m &= \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B}' = \int_0^B g^{-1}(\mathbf{B}') d\mathbf{B}'. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Dacă **mediile sunt în mișcare**, atunci în energia transferată corpurilor intervine și lucrul mecanic efectuat de acestea ca urmare a deplasării, sub acțiunea forțelor de natură electrică și magnetică. În aceste condiții, în acord cu principiul întâi al termodinamicii:

$$\begin{aligned} - \frac{dW_{em}}{dt} &= P_{mec} + P_{cond} + P_\Sigma \Leftrightarrow P_{mec} = - \frac{dW_{em}}{dt} - P_{cond} - P_\Sigma =_{def} \\ &=_{def} \int_D \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv = - \frac{dW_{em}}{dt} - \int_{D_\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV - \oint_\Sigma (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \\ &\int_{D_\Sigma} \left(- \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Big|_{\Psi=ct.} + \frac{E^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \Big|_{\Psi=ct.} - \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big|_{\Phi=ct.} + \frac{H^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \Big|_{\Phi=ct.} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Identificând termenii, rezultă densitățile volumetrice de forță electrică și magnetică

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_m = \rho_V \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} (\text{grad } \varepsilon) + \text{grad} \left(\frac{E^2}{2} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) + \\ + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{H^2}{2} (\text{grad } \mu) + \text{grad} \left(\frac{H^2}{2} \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \quad (1.84)$$

Această expresie pune în evidență următoarele forțe cu care câmpul electromagnetic acționează asupra corpurilor liniare: Coulomb (datorată electrizării), datorată polarizației temporare, de electrostricțiune, Laplace (datorată curentului electric), datorată magnetizației temporare și de magnetostricțiune.

Ca o consecință a teoremei energiei electromagnetice în medii neliniare, rezultă și expresiile **forțelor generalizate** de natură electrică și magnetică exercitate asupra unui sistem cu n grade de libertate:

$$\begin{aligned} X_{k\ e} = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_{Q=ct.}, \quad X_{k\ m} = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x_k} \right|_{\Phi=ct.} \\ X_{k\ e} = \left. \frac{\partial W_e^*}{\partial x_k} \right|_{U=ct.}, \quad X_{k\ m} = \left. \frac{\partial W_m^*}{\partial x_k} \right|_{I=ct.} \end{aligned} \quad (1.85)$$

în care s-a notat cu X_k forța generalizată (componetă a forței măsurată în N , momentul forței măsurat în Nm sau presiune măsurată în N/m^2) cu care câmpul electromagnetic acționează asupra sistemului, cu x_k s-a notat coordonata generalizată asociată (măsurată în m , radiani respectiv m^3), pentru $k=1,2,\dots,n$. S-a notat cu W_e , W_m energia electrică, respectiv magnetică a sistemului, și cu W^* s-a notat co-energia, adică integrala densității de co-energie, definită astfel:

$$w_e^* = \int_0^E \mathbf{D} d\mathbf{E}'; \quad w_m^* = \int_0^H \mathbf{B} d\mathbf{H}'. \quad (1.86)$$

În prima teoremă a forțelor generalizate, se derivează energia totală, în condițiile în care fluxurile magnetice Φ și sarcinile electrice Q nu variază, iar în a doua teoremă a forțelor generalizate, se derivează coenergia, în condițiile în care tensiunile electrice U și curenții I sunt constanți.

1.5.3 Teorema impulsului electromagnetic. Tensorul lui Maxwell

1. **Enunț:** Viteza de variație a impulsului electromagnetic al unui domeniu este egală cu fluxul tensorului tensiunilor lui Maxwell pe frontiera domeniului minus forța totală, cu care câmpul electromagnetic acționează asupra domeniului.
2. Forma globală:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{em}}{\partial t} = \oint_{\Sigma} \mathbf{T}_{em} \cdot \mathbf{n} dS - \mathbf{F}_{em} \quad (1.87)$$

3. Forma locală:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{em}}{\partial t} = \text{div}(\mathbf{T}_{em}) - \mathbf{f}_{em} \quad (1.88)$$

în care: $\mathbf{g}_{em} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$, măsurat în Ns/m^3 este *densitatea de volum a impulsului electromagnetic*;

$\mathbf{G}_{em} = \int_{D_{\Sigma}} \mathbf{g}_{em} dv = \int_{D_{\Sigma}} \mathbf{D} \times \mathbf{B} dv$ măsurat în Ns este *impulsul electromagnetic total*;

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{em} &= \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e + \overline{\overline{\mathbf{T}}}_m + \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{es} + \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{ms}; \\ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e &= \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}^T - w_e \overline{\overline{\mathbf{I}}}; \\ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_m &= \mathbf{H} \wedge \mathbf{B}^T - w_m \overline{\overline{\mathbf{I}}}, \\ \mathbf{T}_{ms} &= \overline{\overline{\mathbf{I}}} \frac{\mathbf{H}^2}{2} \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}, \\ \overline{\overline{\mathbf{T}}}_{es} &= \overline{\overline{\mathbf{I}}} \frac{E^2}{2} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (1.89)$$

este *tensorul tensiunilor maxwelliene*, cu o componentă electrică, una magnetică, una de electrostricțiune și a patra de magnetostricțiune. Aici intervine produsul diadic a doi vectori (notat cu $\wedge$) și $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$ – tensorul unitar, reprezentat de matricea unitate 3×3 . În final se obțin următoarele componente ale tensorului tensiunilor lui Maxwell:

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_e = \begin{bmatrix} E_x D_x - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} & E_x D_y & E_x D_z \\ E_y D_x & E_y D_y - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} & E_y D_z \\ E_z D_x & E_z D_y & E_z D_z - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

$$\text{cu } \left| \overline{\overline{\mathbf{T}}}_e \mathbf{n} \right| = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} = w_e.$$

$$\overline{\overline{\mathbf{T}}}_m = \begin{bmatrix} H_x B_x - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} & H_x B_y & H_x B_z \\ H_y B_x & H_y B_y - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} & H_y B_z \\ H_z B_x & H_z B_y & H_z B_z - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

$$\text{cu } \left| \overline{\overline{\mathbf{T}_e}} \cdot \mathbf{n} \right| = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} = w_m.$$

Iar tensorii de stricțiune sunt diagonali.

În consecință, în regim staționar, forța electromagnetică ce se exercită asupra unui domeniu este egală cu fluxul tensorului tensiunilor maxwelliene pe suprafața acelui domeniu:

$$\mathbf{F}_{em} = \oint_{\Sigma} \overline{\overline{\mathbf{T}_{em}}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.92)$$

În practică, această relație se aplică la viteze mici și în regim variabil, deoarece de obicei, viteza de variație a impulsului electromagnetic este neglijabilă. În cazul unui tub de flux, câmpul electric/ magnetic acționează asupra lui cu o presiune egală cu densitatea de volum a energiei electrice/ magnetice. Această presiune tinde să apropie liniile de câmp (comprimă domeniul, transversal pe liniile de câmp) și să le alungească (extinde domeniul de-a lungul liniilor de câmp).

Forma locală a teoremei impulsului electromagnetic este o consecință pătratică a legilor câmpului electromagnetic, în formele lor locale. Mai exact, prima ecuație a lui Maxwell (1.34) amplificată în produs vectorial cu $\mathbf{D}$ se adună cu a doua ecuație a lui Maxwell (1.28) amplificată în produs vectorial cu $-\mathbf{B}$ [88].

Exprimarea forțelor prin intermediul tensorului tensiunilor maxwelliene are importanță practică dar și teoretică. Ea arată că odată calculat câmpul electromagnetic din jurul unui corp, acesta determină forțele electromagnetice totale, asupra sa și că pentru calculul lor nu este necesară cunoașterea câmpului din interiorul corpului. Totuși pentru a determina felul în care se distribuie acțiunile ponderomotoare în interiorul corpului trebuie cunoscută distribuția volumetrică a câmpului electromagnetic CITARE: A. Bossavit [16].

1.6 Sinteză: relații cauzale - fenomene electromagnetice fundamentale

Legile câmpului electromagnetic au următoarea formă locală în medii imobile, cu caracteristici afine de material:

1. $\nabla \mathbf{D} = \rho$
2. $\nabla \mathbf{B} = 0$
3. $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

1.6. SINTEZĂ: RELAȚII CAUZALE - FENOMENE ELECTROMAGNETICE FUNDAMENTALE 49

$$4. \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$5. \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$$

$$6. \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p$$

$$7. \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

$$8. p = \mathbf{E} \mathbf{J}$$

$$9. \delta = k \mathbf{J}$$

$$10. \nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Diagrama cauzală este prezentată în (1.11)

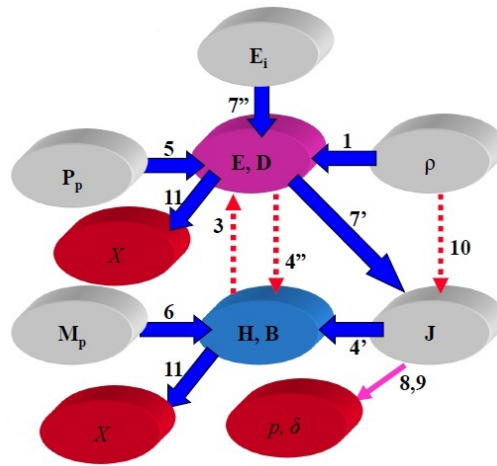


Figura 1.11: Diagrama cauzală

Această diagramă pune în evidență relațiile cauzale, fundamentale ale elector-magnetismului. Sunt marcate cu săgeată continuă relațiile valabile atât în regim staționar cât și în regim variabil. Cu săgeată punctată sunt marcate relațiile cauză-efect, care apar în regim dinamic, doar atunci când cauza este variabilă în timp. Sunt evidențiate cele patru cauze ale câmpului electric, trei generale: electreții, corpurile cu câmpuri imprimate, sarcinile electrice și una cu caracter dinamic: variația în timp a câmpului magnetic. La rândul său câmpul magnetic are două cauze generale: magneții permanenți și curenții electrice, dar și o cauză dinamică, variația în timp a câmpului electric. Curentul electric se datorează câmpului electric din conductoare, dar el apare și datorită variației în timp a sarcinii electrice. Transferul de energie, generarea de căldură și transferul de masă sunt toate datorate curentului electric, în schimb acțiunile mecanice apar datorită interacțiunii cu substanța, atât a câmpului electric cât și a celui magnetic.

1.7 Regimurile câmpului electromagnetic

Deoarece rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell în forma lor completă este dificilă, în modelarea electromagnetică se folosesc de cele mai multe ori regimurile câmpului electromagnetic, care sunt stări particulare ale acestui câmp, în care anumite fenomene dispar sau sunt neglijabile. Fiecare regim este definit de ipotezele sale simplificatoare, iar ecuațiile sale fundamentale se obțin din legile câmpului electromagnetic ca o consecință a acestor ipoteze, care în primul rând la modul în care variază câmpul în timp.

Dacă nu au loc variații în timp ale mărimilor fizice, atunci avem *regimuri staționare*, iar dacă în plus nu au loc transformări de energie (deci curenții sunt nuli), atunci obținem regimurile *statice*. Din Fig. (1.11) și 1.12 este evident că în regimurile statice, digrama cauzală se sparge în două părți disjuncte, una referitoare la câmpul electric (*ElectroStatica ES*) și cealaltă la cel magnetic (*MagnetoStatica MS*). În consecință, câmpurile electrostatic și magnetostatic pot coexista fără să se influențeze reciproc. În regimurile staționare din diagrama de cauzalitate reprezentată în fig. (1.11) dispar relațiile ciclice, ceea ce înseamnă că distribuția câmpului electric și a curentului determină distribuția câmpului magnetic, dar aceasta nu o influențează pe prima.

Deosebim în consecință, două regimuri staționare: *electrocinetica* - *EC*, are ca obiectiv studiul distribuției de curent și *regimul magnetic staționar MG*, care studiază distribuția câmpului magnetic produsă de o distribuție cunoscută de curent. În cazul variației în timp, relațiile fundamentale ale electromagnetismului se pot simplifica doar, dacă neglijăm curentul de deplasare sau fenomenul de inducție electromagnetică. Aceste ipoteze se pot adopta în corpurile bune, respectiv slab conductoare la viteze relativ mici de variație în timp a câmpului. Spunem că ne aflăm în regimuri cvasistaționare, primul este numit inductiv (sau *magneto-qvasi-staționar MQS*) iar al doilea este capacitiv (sau *electro-qvasi-staționar EQS*). Dacă nu avem alte ipoteze simplificatoare, decât caracterul imobil al corpurilor, atunci ne aflăm în *regimul genereal variabil*, sau *electrodinamic ED* al câmpului. Dacă mediile sunt izolante, atunci regimul este *electrodinamic fara pierderi-EDFP* numit *armonic*. În cazul în care mărimile variază sinusoidal în timp, cu aceeași frecvență, avem un regim al câmpului electromagnetic. Acest regim se simbolizează cu *AC*, spre al deosebi de regimul *tranzitoriu TR*, în care mărimile au o variație arbitrară în timp. Avem deci următoarele regimuri dinamice: *EQS*, *ED*, care pot fi *AC* sau *TR*.

Modelarea electromagnetică nu este o reflectare perfectă a realității, ci una aproximativă, care se dorește a fi bineînțeles cât mai fidelă dar, în limite rezonabile. De exemplu, ecuațiile regimurilor statice și staționare, se aplică nu numai la modelarea dispozitivelor în regim staționar ci și în cazul funcționării în regim variabil sau cu piese în mișcare, cu condiția ca vitezele de variație să fie suficient de mici,

pentru ca efectele dinamice să poată fi neglijate. Astfel de exemple sunt circuitele electrice cu parametri R , L , C concentrați, ale căror parametri se determină folosind ecuațiile regimurilor electrocinetic, magneto-staționar și respectiv electrostatic. Această tehnică se folosește cu succes de multă vreme pentru circuite care funcționează nu numai la 50Hz ci și în plaja MHz și chiar GHz.

1.7.1 Regimul electrostatic (ES)

Ipotezele definiției ale regimului

- corpurile sunt imobile;
- mărimile fizice sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie, deci vom presupune densitatea de curent nulă;
- interesează distribuția câmpului electric, care nefiind influențată de câmpul magnetic vom presupune că acesta din urmă este nul.

Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în fig. 1.12.

Ecuațiile de ordinul întâi ale electrostaticii

se obțin prin particularizarea legilor, conform ipotezelor regimului.

1. Teorema potențialului electrostatic:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \text{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (1.93)$$

se obține din legea inducției electromagnetice.

2. Teorema lui Gauss:

$$\nabla \mathbf{D} = \rho \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.94)$$

se obține din legea fluxului electric.

3. Ecuația constitutivă pentru dielectrici:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p. \quad (1.95)$$

este o consecință a legii conducției.

Ecuatiile pun în evidență sursele interne de câmp: ρ , $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_i$.

Cele două câmpuri $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$ satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale și algebrice, liniare, dacă dielectricii sunt liniari și ecuații neliniare, în caz contrar.

În regimul ES intervine o singură constantă de material - permitivitatea ε , iar câmpul este descris de vectorii $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, în timp ce sursele interne de câmp sunt caracterizate de marimile ρ , $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{E}_i$. Mărimile ce caracterizează sursele externe vor fi identificate ulterior, dar ele trebuie să fie referitoare la componentele câmpului (D_n , E_t), care se conservă la trecerea prin suprafața de frontieră.

Ecuatiile de ordinul doi

Caracterul irotațional al câmpului electric permite exprimarea acestuia cu ajutorul mărimii auxiliare denumită **potențialul electric scalar** $V(\mathbf{r})$, prin relația:

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (1.96)$$

Din relația (1.96) rezultă că potențialul electrostatic scalar este definit până la o constantă aditivă. Alegând valoarea potențialului într-un punct (de exemplu nulă, în punctul ales convențional și numit "de masă"), această constantă este fixată. Deoarece tensiunea între două puncte este potențialul inițial minus cel final (în ES valoarea tensiunii nu depinde de forma curbei), rezultă că potențialul unui punct este tensiunea de la acel punct la punctul de referință, în care potențialul este convențional nul:

$$u_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = V_A - V_B \Rightarrow V(P) = \int_{C_{PP_0}} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (1.97)$$

Folosirea potențialului electrostatic este evident avantajoasă, pentru faptul că în loc de a folosi două câmpuri vectoriale $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$, câmpul electrostatic este descris complet doar cu un câmp scalar V definit pe Ω . În plus, tensiunea electrică se calculează mult mai ușor, prin diferența de potențial.

Ținând seama de ecuația constitutivă $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$, rezultă:

$$\nabla(\varepsilon \nabla V) = -\rho + \nabla \mathbf{P}_p. \quad (1.98)$$

Această ecuație de ordinul al doilea, satisfăcută de potențial pune în evidență sursele locale ale câmpului electrostatic, interioare domeniului de calcul: densitatea de sarcină ρ (care poate lua forma densității de volum a sarcinii ρ_v sau cea a densității superficiale de sarcină ρ_s de pe suprafețele de discontinuitate, dacă operăm cu funcții generalizate) și polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$. Se constată că din punct de vedere al potențialului, polarizarea permanentă este echivalentă cu o distribuție

fictivă de sarcină $\rho_p = -\nabla(\mathbf{P}_p)$, numită *sarcină de polarizare*.

La trecerea prin suprafețele de discontinuitate, potențialul îndeplinește condițiile:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \Rightarrow V_1 = V_2. \quad (1.99)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{dV_1}{dn} = \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dn} = \rho_s. \quad (1.100)$$

Dacă suprafața este ne-electrizată:

$$\rho_s = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{dV_1}{dn} = \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dn}. \quad (1.101)$$

Aceste condiții sunt automat îndeplinite, dacă se operează cu funcții generalizate. Pot exista totuși situații speciale în modelare, în care potențialul are un salt la trecerea de pe o parte pe alta a suprafeței de discontinuitate. Spunem că avem un *dublu strat de potențial*, lucru care se întâmplă, atunci când pe suprafață este concentrat un câmp electric imprimat cu distribuție Dirac. Câmpul electric este local nemărginit, dar integrala sa pe un segment de curbă ce traversează suprafața este egal cu saltul de potențial. Această abordare este utilă în modelarea fenomenelor electrochimice de difuzie, care au loc la interfața dintre electrozi și electroliti, și care explică potențialul de electrod.

În baza condiției de echilibru electrostatic corpurile conductoare liniare sunt echi-potențiale, iar cele cu câmp imprimat au o variație a potențialului, care rezultă prin integrarea câmpului imprimat.

Formal condiția de echilibru electrostatic se obține, considerând conductoarele dielectrice perfecți:

$$\varepsilon \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = 0. \quad (1.102)$$

În concluzie, rezultă că în regim electrostatic, potențialul scalar satisface o ecuație cu derivate parțiale de ordiul doi, de tip eliptic, care în medii omogene devine ecuație Poisson:

$$\Delta V = -\frac{(\rho + \rho_p)}{\varepsilon}, \quad (1.103)$$

iar în cazul absenței surselor interne de câmp, devine ecuația lui Laplace: $\Delta V = 0$, potențialul scalar având în acest caz particular o variație spațială armonică.

După cum se va vedea ulterior, pentru determinarea potențialului mai trebuie adăugate la ecuația (1.103) condiția ei de frontieră, care din punct de vedere fizic descrie sursele externe de câmp.

Deoarece pe frontieră se conservă componenta normală a inducției și cea tangențială a intensității câmpului electric, condițiile de frontieră trebuie să fie corelate cu aceste componente ale câmpului. Dacă la frontieră se află un domeniu conductor, atunci $\mathbf{E}_t = 0$, $\mathbf{D}_n = \rho_s$, ceea ce corespunde condiției $V = ct.$, iar dacă frontiera este anelectrică, atunci $\mathbf{D}_n = 0$. Din punct de vedere fizic, oricare dintre acestea pot fi condiții de frontieră admisibile, dar este evident că ele descriu două situații complet diferite.

Identificarea condițiilor de frontieră pentru formularea corectă a problemei de câmp din fiecare regim va fi subiectul capitolului dedicat modelării matematice.

În modelarea dispozitivelor electrostatice intervine de regulă un număr finit de subdomenii omogene, fiecare având propria sa permitivitate. În consecință funcția ε definită pe Ω este constantă pe porțiuni. În interiorul fiecărui subdomeniu potențialul electric satisface de fapt ecuația Poisson. Soluția problemei trebuie să satisfacă cele două condiții de trecere pentru potențial pe toate interfețele între subdomenii.

Dacă dispozitivul conține și părți conductoare, atunci în acestea, câmpul este cunoscut $\mathbf{E} = 0$, deci ele se elimină din domeniul de calcul, dar condițiile de pe frontiera lor trebuie să reflecte contribuția lor la câmpul din domeniul de calcul. Un corp conductor poate fi încărcat fie la potențial cunoscut de o sursă exterioară sau poate avea o sarcină cunoscută.

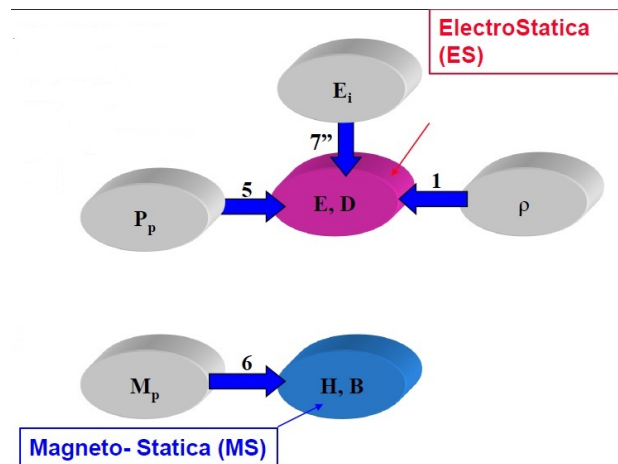


Figura 1.12: Diagrama pentru regimurile statice

1.7.2 Regimul magnetostatic (MS)

Ipotezele definitorii ale regimului

- corpurile sunt imobile;
- mărimile fizice sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie, deci vom presupune densitatea de curent nulă;
- interesează distribuția câmpului magnetic, care nefiind influențată de câmpul electric vom presupune că acesta din urmă este nul.

Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în fig. (1.12).

Ecuatiile de ordinul întâi ale magnetostaticii

se obțin prin particularizarea legilor, conform ipotezelor regimului.

1. Teorema potențialului magnetic scalar:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (1.104)$$

se obține din legea circuitului magnetic.

2. Teorema fluxului magnetic:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.105)$$

se obține din legea fluxului magnetic.

3. Ecuația constitutivă:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \text{ sau în particular } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p. \quad (1.106)$$

este consecință a legii de material referitoare la $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$.

Ecuatiile pun în evidență sursa internă de câmp: $\mathbf{M}_p$.

Cele două câmpuri $\mathbf{H}$ și $\mathbf{B}$ satisfac un sistem de ecuații cu derivate parțiale și algebrice, liniare, dacă materialele sunt liniare și ecuații neliniare, în caz contrar.

În regimul MS intervine o singură constantă de material - permeabilitatea μ , iar câmpul este descris de vectorii $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, în timp ce sursa internă de câmp este caracterizată de mărimea $\mathbf{M}_p$. Mărimile ce caracterizează sursele externe vor fi identificate ulterior, dar ele trebuie să fie referitoare la componentele câmpului (B_n , H_t), care se conservă la trecerea prin suprafața de frontieră.

Ecuatiile de ordinul doi

Caracterul irotațional al acestui câmp magnetic permite exprimarea acestuia cu ajutorul mărimii auxiliare denumită **potențialul magnetic scalar** $V_m(\mathbf{r})$, prin relația:

$$\mathbf{H} = -\nabla V_m. \quad (1.107)$$

Din relația (1.107) rezultă că potențialul magnetic scalar este definit până la o constantă aditivă.

Ținând seama de ecuația constitutivă $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{B}_r$ în care $\mathbf{B}_r = \mu_0\mathbf{M}_p$, rezultă ecuația satisfăcută de potențial:

$$\nabla(\mu\nabla V_m) = \nabla\mathbf{B}_r. \quad (1.108)$$

Între ecuațiile ES și MS există o similitudine evidentă. Singura deosebire constă în faptul că în MS nu există sarcini adevărate, ci numai sarcini de polarizație (magnetizație). Densitatea sarcinii de polarizație are expresia $\rho_p = \nabla\mathbf{B}_r$. Dacă de exemplu, mediul este omogen atunci $\mathbf{B}_r = c\mathbf{t} \Rightarrow \rho_p = \nabla\mathbf{B}_r = 0$. Dacă acest lucru este valabil numai în interiorul subdomeniului respectiv, deoarece pe frontieră apare o distribuție superficială de sarcină nenulă $\rho_{p,s} = \text{div}_s\mathbf{B}_r = \mathbf{n}\mathbf{B}_r$. În consecință, afirmațiile făcute la regimul electrostatic se transpun cu modificări de notații în regimul magnetostatic, inclusiv cele referitoare la relațiile de interfață satisfăcute de potențial, la trecerea prin suprafețele de discontinuitate.

1.7.3 Regimul electrocinetic staționar (EC)

Ipotezele simplificatoare ale regimului:

- Corpurile sunt imobile;
- Mărimile sunt constante în timp;
- Nu interesează distribuția câmpului magnetic, ci doar cea a curentului electric.

Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în Fig. 1.13.

Ecuatiile de ordinul întâi

1. Teorema potențialului electrocinetic:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \text{rot}\mathbf{E} = 0. \quad (1.109)$$

2. Teorema conservării curentului:

$$\nabla \mathbf{J} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (1.110)$$

3. Relația constitutivă:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad (1.111)$$

care, în particular se poate scrie:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \quad (1.112)$$

Aceste trei ecuații sunt forme particulare ale legii conservării sarcinii electrice, legea inducției electromagnetice și respectiv legea conducției electrice.

Considerând $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, rezultă că $\exists V$ scalar a. î. $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Ecuațiile de ordinul al doilea

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{J} = \sigma(-\nabla V + \mathbf{E}_i) \\ \nabla \mathbf{J} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla(\sigma \nabla V) = \nabla(\sigma \mathbf{E}_i) \quad (1.113)$$

Ultima expresie din (1.113) este ecuația Poisson generalizată.

Cazuri particulare

- Mediu izotrop, liniar și cu $\mathbf{E}_i = 0$, potențialul satisface ecuația Laplace generalizată:

$$\nabla(\sigma \nabla V) = 0. \quad (1.114)$$

- Mediu omogen, izotrop, liniar și cu $\mathbf{E}_i = 0$, potențialul satisface ecuația Laplace clasică:

$$\Delta V = 0. \quad (1.115)$$

- Mediu omogen, izotrop, liniar, potențialul satisface ecuația Poisson clasică

$$\Delta V = \nabla \mathbf{E}_i. \quad (1.116)$$

Constatăm și de această dată o similitudine a ecuațiilor electrocineticii cu ecuațiile celorlalte regimuri, statice și staționare. În consecință, analiza și concluziile din cazul electrosatisticii se transferă și la celelalte regimuri folosind Tabelul 1.2 de similitudine:

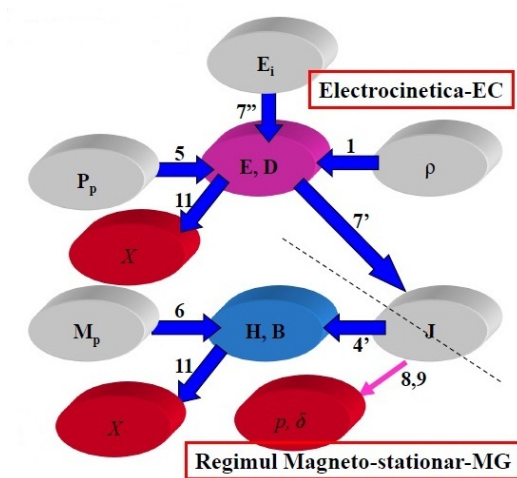


Figura 1.13: Diagrama regimurilor staționare

Regim:	ES	MS	EC
Câmpul	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$	$\mathbf{E}$
Inducția	$\mathbf{D}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{J}$
Sursa remanentă	$\mathbf{P}_p$	$\mathbf{B}_r$	$\mathbf{J}_i$
Potențialul	V	V_m	V
Sarcina	q	0	$\text{div} \mathbf{J}_i$
Sarcina de polarizație	ρ_p	ρ_m	ρ_p
Fluxul	ψ	φ	i

Tabela 1.2: Similitudinea între regimurile statice și staționare

1.7.4 Regimul magnetic staționar (MG)

Ipotezele simplificatoare ale regimului

- corpurile sunt imobile;
- mărimile nu variază în timp;
- interesează distribuția câmpului magnetic, generat de o distribuție de curent.

Pentru a determina câmpul magnetic se rezolvă anterior o problemă de electrocinetică. Relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate în fig. 1.12.

Ecuatiile de ordinul întâi

1. Teorema lui Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (1.117)$$

2. Teorema fluxului magnetic:

$$\nabla \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.118)$$

3. Ecuația constitutivă:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \text{ sau în particular } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_p. \quad (1.119)$$

Ecuatiile de ordinul al doilea

Datorita caracterului solenoidal al inducției magnetice, ecuația (1.119) permite definirea unei mărimi auxiliare $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, denumită *potențial magnetic vector*, astfel încât:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.120)$$

Pentru ca vectorul $\mathbf{A}$ să fie complet definit, se impune condiția de etalonare Coulomb:

$$\nabla \mathbf{A} = 0. \quad (1.121)$$

Chiar și așa, potențialul magnetic vector nu este unic. De exemplu, dacă se adaugă gradientul unei funcții armonice arbitrare λ , inducția rămâne aceeași:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \lambda); \\ \nabla \mathbf{A} &= \nabla (\mathbf{A} + \nabla \lambda) = \Delta \lambda = 0. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Constatăm deci că spațiul nul (nucleul) operatorului *rot* este mult mai amplu decât nucleul operatorului *grad*. Chiar dacă avantajele nu sunt atât de evidente, ca în cazul potențialului scalar, totuși cel puțin fluxul magnetic se calculează mai simplu, printr-o integrală simplă și nu dublă:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_{\Gamma=\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{r}, \quad (1.123)$$

dar acesta nu este singurul avantaj.

Ecuația de ordinul doi satisfăcută de potențialul magnetic vector:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{B} = 0 &\Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r &\Rightarrow \mathbf{H} = \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{B}_r)}{\mu} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} &\Rightarrow \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \nabla \times \nu \mathbf{B}_r. \end{aligned} \quad (1.124)$$

în care s-a notat cu $\nu = 1/\mu$.

Se constată că din punctul de vedere al potențialului vector, magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p = \mathbf{B}_r/\mu_0$ este echivalentă cu o distribuție fictivă de curent:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times (\nu \mathbf{B}_r) = \nabla \times (\nu \mu_0 \mathbf{M}_p) = \nabla \times \left(\frac{\mathbf{M}_p}{\mu_r} \right), \quad (1.125)$$

numit *curent amperian* (de magnetizație).

Ecuția de ordinul doi este în acest caz o ecuație vectorială cu operator de tip *rot-rot*. Regimul magnetostatic este un caz particular, al regimului magnetostaționar, obținut considerând $\mathbf{J} = 0$. Ecuția potențialului vector în acest caz este:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_m. \quad (1.126)$$

Această abordare corespunde modelului Amperian al magnetostatisticii. Dar deoarece magnetostatica este similară electrocineticii, rezultă că și în acest ultim caz se poate opera cu potențialul vector, notat acum cu $\mathbf{T}$. Ecuția satisfăcută de *potențialul vector al densității de curent* este:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T} &\Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla \times (\rho \mathbf{J} - \mathbf{E}_i) &= \nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{T}) - \nabla \times \mathbf{E}_i = 0. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Rezolvarea unei probleme prin doua metode, folosind și potențialul scalar și pe cel vector, se numește *abordare complementară* și are avantajul că permite estimarea erorii numerice [18].

Similitudinile între regimurile care folosesc potențialul vector este descrisă în Tabelul 1.2.

Lucrurile se simplifică substanțial în **cazul 2D**. Dacă de exemplu, avem o distribuție de curent plan paralelă, orientată de-a lungul axei Oz , atunci $\mathbf{J} = \mathbf{k}J(x, y)$, iar potențialul vector $\mathbf{A} = \mathbf{k}A(x, y)$ are o singură componentă, care satisface ecuația:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \mathbf{k}J(x, y) = \text{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \quad (1.128)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, B_y = -\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \Rightarrow H_x = \nu \frac{\partial A}{\partial y}, H_y = -\nu \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\nabla (\nu \nabla \mathbf{A}) = -\mathbf{J} \Rightarrow -\text{div} [\nu \text{grad } A] = J.$$

care este chiar ecuația scalară Poisson generalizată, perfect similară cu cea satisfăcută de potențialul electrostatic scalar (1.98).

Comportarea **potențialului magnetic vector la trecerea prin suprafețele de discontinuitate**: $\mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}$, pentru că altfel, suprafața ar fi pânză de flux. În plus,

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_{n1} = \mathbf{A}_{n2}. \quad (1.129)$$

În consecință, potențialul vector $\mathbf{A}$ este o funcție continuă în tot domeniul (își conservă atât componentele tangențiale cât și cele normale la trecerea prin suprafețele de discontinuitate). În plus

$$\mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} \Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_2, \quad (1.130)$$

condiție îndeplinită dacă $\mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}$ și

$$\begin{aligned} \nabla_s \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s &\Rightarrow \nabla_s \times (\nu \nabla \times \mathbf{A} - \nu \mathbf{B}_r) = \mathbf{J}_s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nu_1 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}_1) = \nu_2 \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}_2), \end{aligned} \quad (1.131)$$

pentru suprafețe neparcurse de curenți superficiali, de conducție sau Amperieni, pe care $\mathbf{J}_s = 0$.

Trebuie remarcat că aceste trei condiții de interfață sunt automat îndeplinite, atunci când se operează cu funcții generalizate, care satisfac ecuațiile fundamentale ale regimului. Astfel de câmpuri vectoriale, au divergența nulă, atunci au și divergența superficială nulă, iar dacă rotorul este nul, atunci și rotorul superficial este tot nul.

Condițiile de frontieră se vor referi la $\mathbf{B}_n$ sau $\mathbf{H}_t$, deci respectiv la $\mathbf{A}_t$ sau la

$$\nu \mathbf{B}_t = \nu (\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \times \mathbf{n}. \quad (1.132)$$

Dacă pe frontieră se află un material feromagnetic ideal,

$$\mathbf{H}_t = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0, \quad (1.133)$$

iar dacă avem un material amagnetic,

$$\mathbf{B}_n = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (1.134)$$

condiție îndeplinită dacă $\mathbf{A}_t = 0$.

În concluzie, putem afirma că ecuațiile acestui regim sunt mai complicate decât ecuațiile celorlalte regimuri staționare. Explicația principală constă nu numai în caracterul tridimensional - vectorial al lor, ci mai ales în amploarea nucleului operatorului *rot rot*, spațiu care trebuie identificat corect și anulat prin adoptarea unor condiții corecte de frontieră.

1.7.5 Regimul cvasistaționar capacitiv (sau amagnetic - EQS)

În regim cvasistaționar câmpul electromagnetic este variabil în timp, dar suficient de lent pentru ca unele fenomene să poată fi neglijate. În acest caz neglijăm fenomenul de inducție electromagnetică.

Ipotezele simplificatoare

- corpurile sunt imobile;
- variația în timp a mărimilor este suficient de lentă pentru ca fenomenul de inducție electromagnetică să aibă efecte, deci îl neglijăm.

Deoarece dacă presupunem corpurile amagnetice ($\mu = 0$), atunci inducția magnetică se anulează și implicit se anulează și inducția electromagnetică. Această presupunere este deci una din ipotezele regimului.

Fenomene fundamentale și relațiile cauzele specifice acestui regim sunt reprezentate grafic în diagrama din Fig. 1.14.

Ecuatiile fundamentale (de ordinul întâi)

ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \text{ în particular } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p. \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}), \text{ în particular } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \end{array} \right. \quad (1.135)$$

obținute din legea fluxului electric, teorema conservării sarcinii electrice, legea inducției, legea circuitului magnetic, legile de material, particularizate în ipoteza $B = 0$. Aplicând primei ecuații Maxwell operatorul divergență și ținând cont de teorema lui Gauss, rezultă a doua relație de ordinul întâi, care descrie conservarea sarcinii. De obicei se elimină din sistemul ecuațiilor fundamentale a patra relație, cea referitoare la legea circuitului magnetic, astfel încât din ecuații dispar toate mărimile caracteristice câmpului magnetic. În aceste condiții, relația care descrie conservarea sarcinii electrice devine independentă.

Problema fundamentală a acestui regim constă în determinarea modului în care difuzează câmpul electric $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, dar și densitatea de sarcină și cea de curent $\mathbf{J}$ în domeniile slab conductoare de formă cunoscută cu proprietăți dielectrice și de conducție cunoscute, în condiții inițiale și de frontieră date. Aceste condiții reprezintă în mod uzual sursa câmpului electromagnetic în acest regim. Dintre efectele specifice acestui regim menționăm: difuzia sarcinilor, spre deosebire de cazul regimului cvasistaționar inductiv, în care sarcinile se redistribuie practic instantaneu, în regimul capacitiv este necesar un timp pentru ca acesta să se relaxeze.

Regimul cvasistaționar capacitiv este utilizat în studiul comportării izolanților în câmp variabil, ca de exemplu dielectricii condensatoarelor. În acest regim, la fel ca în cel electrostatic, câmpul este irotațional și admite deci un potențial scalar. Deosebirea constă în faptul că potențialul variază nu numai în funcție de vectorul de poziție $\mathbf{r}$, ci și de timpul t .

În ecuațiile regimului EQS intervin două constante de material: permitivitatea ε și conductanța σ . Asta indică faptul că sunt modelate efecte capacitive ca în electrostatică dar și cele rezistive, ca în electrocinetică. Spre deosebire de regimurile staționare, în care efectele C și R erau independente, acum cele două efecte CR sunt distribuite și se influențează reciproc.

Ecuția de ordinul al doilea

Se obține exprimând câmpurile din ecuațiile de ordin unu în funcție de potențialul scalar V :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla D}{\partial t} &\Rightarrow \nabla (\sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i) + \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \left(\sigma \nabla V + \frac{\partial (\varepsilon \nabla V)}{\partial t} \right) &= \nabla \left(\mathbf{J}_i + \frac{\partial \mathbf{P}_p}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (1.136)$$

Ecuția EQS de ordin doi, este o ecuație de tip parabolic, care combină ecuațiile

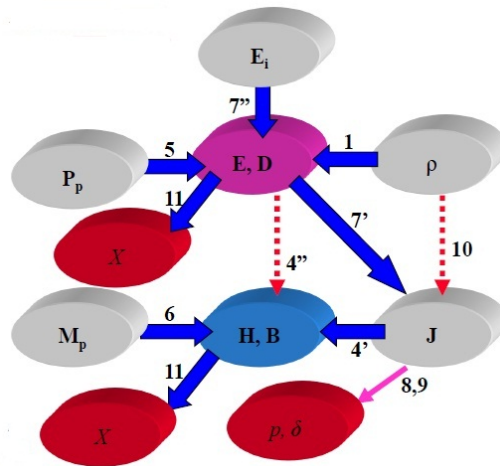


Figura 1.14: Diagrama regimului electro-cvasistaționar - EQS

electrostaticii cu cele ale electrocineticii. Pe parcursul regimului tranzitoriu, la început comportarea electrostatică este preponderentă, iar la sfârșit, cea electrocinetică devine preponderentă.

Pe suprafețele de discontinuitate, potențialul scalar satisface condiții de trecere similare cu cele din electrostatică și electrocinetică. Potențialul este continuu, dar derivata sa după normală are saltul dat de expresia:

$$\nabla_s \left(\sigma \frac{dV}{dn} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{dV}{dn} \right) \right) = 0. \quad (1.137)$$

De această dată, ecuația cu derivate parțiale satisfăcută de potențialul scalar este o ecuație parabolică, a cărei soluție $V(\mathbf{r}, t)$ este definită pe domeniul Ω al problemei și pe intervalul de timp (t_{min}, t_{max}) . Problemele de regim variabil nu au numai condiții de frontieră ci și condiții inițiale. Mai exact, trebuie cunoscută distribuția potențialului electric la momentul inițial, în tot domeniul problemei.

1.7.6 Regimul cvasistaționar de tip inductiv (sau anelectric - MQS)

Ipotezele simplificatoare

Pentru acest regim se consideră următoarele ipotezele simplificatoare:

- corpurile sunt imobile;
- variația în timp a mărimilor este suficient de lentă pentru ca efectul magnetic al curenților de deplasare să fie neglijabil, față de cel al curenților de conducție, deci vom presupune că nu există curent de deplasare.

Deoarece dacă presupunem corpurile anelectrice ($\varepsilon = 0$), atunci se anulează inducția electrică și implicit și curenții de deplasare. Caracterul anelectric al corpurilor este deci una din ipotezele regimului.

Fenomenele fundamentale și relațiile cauzale specifice acestui regim sunt reprezentate grafic în diagrama din Fig. 1.15.

Curenții de deplasare sunt neglijăți față de cei de conducție, lucru ce poate fi făcut până la frecvențe foarte mari, deoarece

$$J_d = \omega D = \omega \varepsilon E \ll J = \sigma E \Rightarrow \omega \ll \sigma / \varepsilon.$$

Ecuatiile fundamentale (de ordinul întâi)

Ecuatiile fundamentale ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \quad \text{în particular } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r. \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \quad \text{în particular } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \end{array} \right. \quad (1.138)$$

Ele sunt de fapt ecuațiile regimului magnetostatic combinate cu ecuațiile regimului electrocinetic, în care este considerată și inducția electromagnetică, ceea ce face ca intensitatea câmpului electric să-și piardă caracterul irotațional.

Exemple de aplicații în care este necesară analiza câmpului electromagnetic în regim cvasistatic inductiv sunt: încălzire prin curenți turbionari, aparate de măsură bazate pe curenți turbionari cum sunt contoarele de inducție, mașini electrice bazate pe inducție cum sunt transformatoarele, motoarele asincrone și frânele electromagnetice, etc. De această dată materialele sunt caracterizate de două constante: μ și σ , ceea ce indică faptul că regimul modelează fenomenele magnetice și cele de conducție distribuite.

Ecuatiile de ordinul al doilea

Deoarece inducția magnetică este solenoidală, ea admite un potențial vector $\mathbf{A}$. $\mathbf{E}$ nu este irotațional, dar împreună cu $-\partial \mathbf{A}/\partial t$ se obține un câmp irotațional, care admite un potențial scalar, notat cu V și numit *potențialul electric*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} \text{ a.î. } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \quad (1.139)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V.$$

Mai avem că:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \\ \mathbf{H} = \mu^{-1} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_p) \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times (\mu^{-1} (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_p)) = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (1.140)$$

Această relație arată că în regim MQS, dacă am ști distribuția curentului $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$, atunci câmpul magnetic se distribuie exact ca în regimul magnetostatic

MG. Dar în MQS, distribuția de curent nu este o dată a problemei, ci ea rezultă în urma rezolvării problemei, fiind afectată de efecte cum sunt cel pelicular, de aglomerare sau de curenți turbionari.

În final dacă notăm $\nu = 1/\mu$, ecuațiile de ordinul al doilea sunt de forma:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{J}_i = \nabla \times (\nu \mu_0 \mathbf{M}_p) + \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right). \quad (1.141)$$

În zonele neconductive ($\sigma = 0$), ecuațiile degenerază în ecuațiile MG.

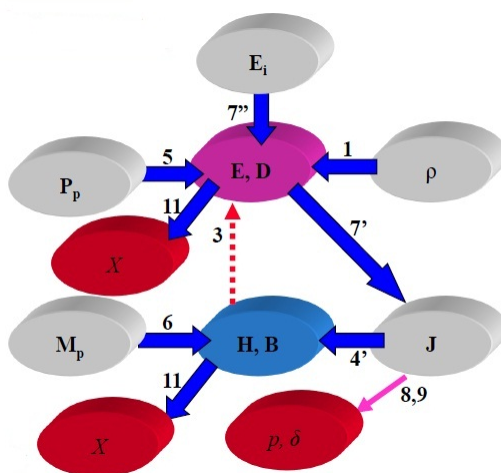


Figura 1.15: Diagrama regimului magneto-cvasistationar - MQS

Dupa cum s-a arătat în regimul MG, potențialul vector $\mathbf{A}$ este continuu în întreg domeniul de calcul, iar așa cum s-a văzut în regimul EC, potențialul electric scalar V este continuu. În schimb, la trecerea prin suprafețele de discontinuitate, potențialele pot avea discontinuități ale derivatelor, și trebuie să îndeplinească anumite condiții de interfață:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} &\Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_2, \Leftarrow \mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}; \\ \nabla_s \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s &\Rightarrow \nabla_s \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{pentru } \mathbf{J}_s = 0 : \mathbf{n} \times \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \times \nu_2 \nabla \times \mathbf{A}_2 \end{aligned} \quad (1.142)$$

Aceste condiții sunt automat îndeplinite, dacă se operează cu funcții generalizate, care satisfac ecuațiile fundamentale ale regimului.

Și de această dată, condițiile de frontieră se aleg dintre componentele care se conservă la trecerea prin suprafețele de discontinuitate: $\mathbf{H}_t = (\mathbf{n} \times \nu \nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}$ sau B_n echivalent cu cunoașterea componentei tangențiale $\mathbf{A}_t$ a potențialului magnetic vector. Cel mai adesea aceasta este nulă. Se va vedea ulterior că pentru a

asigura unicitatea soluției $\mathbf{A}$, mai trebuie adăugate condiții de frontieră suplimentare.

Ecuatiile sunt vectorile de tip parabolic, cu un operator de derivare spațială de ordinul doi de tip *rot-rot*. De data aceasta constantele de material care intervin sunt μ și σ , ceea ce indică faptul că în acest regim sunt modelate efectele inductiv-rezistive distribuite. Pentru caracterizarea câmpului se folosesc: potențialul magnetic vector, dar și potențialul electric scalar, ambele funcții de poziție și timp. Deoarece

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.143)$$

rezultă că $\mathbf{J}$ este solenoidal:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.144)$$

și în consecință

$$\nabla (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \mathbf{J}_i \Rightarrow -\nabla (\sigma \nabla V) = \nabla \left(\sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{J}_i \right), \quad (1.145)$$

care în medii omogene devine: $\nabla V = 0$, deoarece conform condiției de etalonare Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Condițiile de interfață ale potențialului scalar sunt cele din electrocinetică.

În zonele neconductoare ($\sigma = 0$), ecuațiile degenerază în ecuațiile MG și nu mai este necesară utilizarea aici a potențialului scalar.

După cum s-a arătat în regimul MG, potențialul vector $\mathbf{A}$ este continuu în întreg domeniul de calcul. În schimb, la trecerea prin suprafețele de discontinuitate pot să apară discontinuități ale derivatelor, și trebuie ca el să îndeplinească anumite condiții de interfață:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{n1} = \mathbf{B}_{n2} &\Rightarrow \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \nabla \times \mathbf{A}_2 \Leftrightarrow \mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}; \\ \nabla_s \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s &\Rightarrow \nabla_s \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \end{aligned} \quad (1.146)$$

de unde rezultă rezultă că pentru $\mathbf{J}_s = 0$: $\mathbf{n} \cdot \nu_1 \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{n} \cdot \nu_2 \nabla \times \mathbf{A}_2$. Aceste condiții sunt automat îndeplinite, dacă se operează cu funcții generalizate, care satisfac ecuațiile fundamentale ale regimului.

Și de această dată, condițiile de frontieră se aleg dintre componentele care se conservă la trecerea prin suprafețele de discontinuitate:

$$\mathbf{H}_t = (\mathbf{n} \cdot \nu \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}, \quad (1.147)$$

sau B_n echivalent cu cunoașterea lui $\mathbf{A}_t$. Cel mai adesea acestea sunt nule. Se va vedea ulterior că pentru a asigura unicitatea soluției $\mathbf{A}$ mai trebuie adăugate

condiții de frontieră suplimentare, referitoare la A_n .

Trebuie să remarcăm că folosirea potențialelor $\mathbf{A} - V$ cu etalonarea Coulomb nu este singura alegere. Se poate folosi potențialul vector $\mathbf{T}$ al densității de curent, împreună cu potențialul magnetic scalar redus Φ , cu sau fără etalonări. În [78] sunt prezentate nu mai puțin de 13 astfel de formulări. Scopul lor este de a rezolva cât mai precis probleme, la care constantele de material au variații extrem de ample în domeniul de calcul.

1.7.7 Regimul electrodinamic general variabil (ED)

Ipotezele simplificatoare ale regimului

Pentru a menține concizia prezentării, studiul fenomenelor electromagnetice se face în medii liniare, omogene și imobile.

Ecuatiile de ordinul întâi

Câmpul electromagnetic în medii liniare și imobile se studiază sistematic cu următoarele forme locale ale legilor generale (*Ecuatiile Maxwell*) completate cu legile de material în medii liniare:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \mathbf{B} &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}\end{aligned}\tag{1.148}$$

În consecință, câmpul electromagnetic este complet descris de cele două potențiale: unul vector $\mathbf{A}$ și altul scalar V , funcții de spațiu și timp, *numite potențiale electrodinamice*.

În acest regim se preferă folosirea relației Loerntz:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \varepsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t},\tag{1.149}$$

pentru etalonarea potențialului magnetic vector, în locul relației Coulomb folosită în regimurile MG și MQS.

Ecuatiile de ordinul al doilea

Ecuatiile de ordinul al doilea pe care le satisfac intensitățile câmpurilor electric și magnetic se deduc în medii omogene, luând rotorul primei, respectiv a celei de a doua ecuații (1.148) și ținând seama de celelalte ecuații, cum urmează [88]:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \sigma \nabla \times \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \nabla \times \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow (1.150) \\ &\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Potențialele vector și scalar satisfac în acest regim ecuațiile:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J}; \\ \Delta V - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon},\end{aligned}\tag{1.151}$$

în care intervin mărimile cu distribuție necunoscută $\mathbf{J}$ și ρ . Dacă acestea se exprimă în funcție de câmpul electric se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\sigma \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right); \\ \nabla A &= \varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t},\end{aligned}\tag{1.152}$$

Relațiile obținute sunt ecuații cu derivate parțiale, vectoriale, liniare, de ordinul doi, de tip hiperbolic. Ele descriu propagarea câmpului electromagnetic în medii liniare și omogene.

În acest regim sunt folosite toate cele trei constante de material: μ, ε, σ , ceea ce indică faptul că sunt luate în considerare toate efectele: inductiv, capacitaiv și rezistiv. Ele sunt acum distribuite spațial împreună și se influențează reciproc. În zonele neconductoare ($\sigma = 0$) ecuațiile își pierd termenul difuziv-parabolic (derivata în-tâi față de timp) și descriu propagarea fără pierderi a câmpului electromagnetic, datorată interacțiunii capacitiv-inductive distribuite (regimul EDFP al câmpului). Pentru a fi bine formulate, problemele în acest regim trebuie să aibă pe lângă condițiile de frontieră și condiții inițiale nenule, deoarece sursele interne de câmp sunt nule, mediile fiind considerate liniare.

1.7.8 Reprezentarea în complex a ecuațiilor câmpurilor sinusoidale

Cel mai des întâlnit și în același timp cel mai simplu regim periodic permanent al câmpului electromagnetic este *regimul sinusoidal*, în care variația în timp a mărimilor fizice caracteristică câmpului este de forma:

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_x) \quad (1.153)$$

unde x - *valoare instantanee*; $t \in (-\infty, \infty)$ - variabila timp; X - *valoarea efectivă*; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - *pulsația*; T - *perioada*; f - *frecvența*; φ_x - *faza inițială a mărimii* x .

În regimul de variație sinusoidală (numită și armonică) toate mărimile unei probleme au frecvență comună de variație, fiecare mărime scalară având specific doar doi parametri reali: valoarea efectivă X și faza inițială φ_x . Din acest motiv, putem asocia fiecărei funcții $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ cu variație sinusoidală ($x \in \mathcal{S}$ - clasa funcțiilor sinusoidale de pulsație ω) în mod biunivoc un număr complex $\underline{X} \in \mathbb{C}$, definit de relația $\underline{X} = X_e e^{j\varphi_x}$, în care j este unitatea imaginară, cu $j^2 = -1$.

Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale este o transformată $\mathcal{C} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ liniară.

Principalul avantaj al reprezentării complexe constă în faptul că ecuațiile diferențiale în variabila timp se transformă în ecuații algebrice (complexe), dar în care variabila timp nu mai intervine (ecuațiile au un caracter staționar). Din acest motiv, analiza câmpurilor cu variație temporală sinusoidală este făcută aproape exclusiv prin reprezentare complexă.

Primul lucru care trebuie remarcat este faptul că un sistem se poate afla în regim armonic, doar dacă ecuațiile sale au un caracter liniar. În cazul câmpului electromagnetic, acesta presupune că toate cele trei relații de material sunt liniare:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{\epsilon} \mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \bar{\mu} \mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \bar{\sigma} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.154)$$

În caz contrar, dacă un câmp dintr-o relație de material este sinusoidal (de exemplu intensitatea câmpului), atunci celălalt (de exemplu, inducția câmpului) nu va mai avea variație armonică în timp.

În regim armonic câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele funcții vectoriale cu componente complexe:

- inducția electrică în complex $\underline{\mathbf{D}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- intensitatea câmpului electric în complex $\underline{\mathbf{E}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;

- densitatea de curent în complex $\underline{\mathbf{J}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- inducția magnetică în complex $\underline{\mathbf{B}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- intensitatea câmpului magnetic în complex $\underline{\mathbf{H}} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;
- densitatea de sarcină în complex $\underline{\rho} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^d$;

în care $d = 1, 2, 3$, în funcție de dimensiunea problemei.

Câmpurile vectorial - complexe satisfac următoarele ecuații obținute din ecuațiile lui Maxwell prin aplicarea transformatei complexe $\mathcal{C}$ și ținând cont de proprietățile acesteia, de liniaritate și de faptul că transformă derivatele față de timp în operații algebrice de înmulțire cu $j\omega$:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \underline{\mathbf{B}} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{J}} + j\omega \underline{\mathbf{D}} \\ \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\bar{\epsilon}} \underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{B}} &= \underline{\bar{\mu}} \underline{\mathbf{H}} \\ \underline{\mathbf{J}} &= \underline{\bar{\sigma}} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_i\end{aligned}\tag{1.155}$$

Pentru a evidenția curentul imprimat, ca sursă a câmpului magnetic, s-a presupus că densitatea $\underline{\mathbf{J}}_i$ are și ea o variație sinusoidală în timp, cunoscută.

Aplicând primelor două ecuații, operatorul divergență, se obțin consecințele:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} &= 0, \\ \nabla \cdot \underline{\mathbf{J}} &= -j\omega \underline{\rho},\end{aligned}\tag{1.156}$$

care sunt formele complexe ale legii fluxului magnetic și a teoremei conservării sarcinii. Iată deci că legea fluxului magnetic este o consecință a relațiilor fundamentale ale acestui regim, dar relația:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}\tag{1.157}$$

trebuie adăugată relațiilor fundamentale independente.

Pentru a simplifica notațiile, vom renunța la barele care indică tipul tensorial sau complex al mărimii respective.

Eliminând inducțiile se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{E}} &= -j\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{H}} \\ \nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\sigma} \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_i + j\omega \underline{\epsilon} \underline{\mathbf{E}},\end{aligned}\tag{1.158}$$

din care prin aplicarea roturului se obțin ecuațiile de ordinul doi, valabile în medii omogene:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) + (j\omega \underline{\mu} \underline{\sigma} - \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon}) \underline{\mathbf{E}} = -\omega \underline{\mu} \underline{\mathbf{J}}_i\tag{1.159}$$

și

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon) \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}_i, \quad (1.160)$$

Acestea sunt ecuații vectoriale cu derivate parțiale de tip Helmholtz complex cu operator *rot-rot* și parametrul $\gamma = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon$. În regimul fără pierderi $\gamma = -\omega^2\mu\varepsilon$ este real iar în regim MQS $\gamma = j\omega\mu\sigma$ devine pur imaginar.

Ecuații asemănătoare sunt satisfăcute și de potențialele vector și scalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &\Rightarrow \nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla V \\ \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) &= (\sigma + j\omega\varepsilon) (-j\omega\mathbf{A} + \nabla V). \end{aligned} \quad (1.161)$$

Constatăm că studiul regimului tranzitoriu al câmpului electromagnetic folosind transformata Laplace conduce la ecuații asemănătoare ale câmpului, singura deosebire fiind aceea că variabila pur imaginara $j\omega$ este înlocuită cu variabila complexă s .

Dacă interesează și distribuția de sarcină, atunci se calculează câmpul scalar complex:

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}. \quad (1.162)$$

Constatăm spre deosebire de regimul tranzitoriu, în regimul sinusoidal nu sunt necesare condiții inițiale.

Prin particularizări ale constantelor de material se obțin diferite regimuri ale câmpului armonic:

- $\bar{\varepsilon} = 0$ - regimul cvasistaționar inductiv (anelectric);
- $\bar{\mu} = 0$ - regimul cvasistaționar capacitiv (amagnetic);
- $\bar{\sigma} = 0$ - regimul general variabil în medii fără pierderi.

În modelarea electromagnetică se întâlnesc situații în care un dispozitiv are în părțile sale diferite regimuri ale câmpului electromagnetic, obținute prin anularea locală a constantelor de material.

În concluzie, putem afirma că studiul regimurilor câmpului este util nu numai pentru înțelegerea fenomenelor electromagnetice în cazuri particulare ci și pentru o înțelegere mai profundă a modului în care interacționează componentele câmpului în cazul general.

Capitolul 2

Modelarea matematică

Modelarea matematică urmărește formularea problemei de câmp în termeni exclusiv matematici. În această etapă, se specifică datele problemei, dar și soluția acesteia ca obiecte matematice, corect și precis definite. Formularea în termeni matematici trebuie făcută în așa fel, încât să nu mai fie necesar apelul ulterior la semnificații fizice, ipoteze sau presupuneri de natură fizică, de exemplu la pasivitatea sau reciprocitatea materialelor, dacă acestea sunt relevante pentru rezolvarea problemei, ele trebuie specificate cu ocazia formulării matematice ca restricții algebrice. Cu ocazia modelării matematice, se (re)formulează ecuațiile și condițiile satisfăcute de soluție, de exemplu condițiile de frontieră, alese astfel încât să asigure formularea corectă a problemei, demonstrându-se existența, unicitatea și continuitatea soluției față de date. Un aspect fundamental al modelării matematice este stabilirea cadrului funcțional al problemei.

2.1 Formularea matematică

2.1.1 Formularea corectă

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în diferite regimuri are de regulă categoriile de **date** prezentate în continuare:

1. **Forma și dimensiunile domeniului** de calcul Ω , și modul în care acesta este structurat în subdomenii. Domeniul Ω este o parte deschisă, mărginită și conexă din $\mathbb{R}^d$, în care $d = 1, 2$ sau 3 , în funcție de dimensiunea problemei 1D, 2D și respectiv 3D. Simbolul 2.5D se referă la problemele axisimetrice, la care datele și soluția depind de două variabile r și z ale unui sistem cilindric de coordonate. În problemele axisimetrice domeniul de calcul este tot bidimensional, ca și în problemele 2D, dar aici soluția nu depinde de coordonata φ , în timp ce la o problemă 2D, numită și plan-paralelă, soluția

nu depinde de coordonata carteziană z .

În literatura matematică se întâlnesc multe domenii stranii, unele definite special, cu multă fantezie pentru a construi contraexemple la afirmațiile analizei clasice. Ne referim, de exemplu la domenii multiplu conexe cu o infinitate de goluri, și la domeniile cu frontiere fractale (http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension). La cealaltă limită se află domeniile cele mai netede, cum este cel sferic. În practică, se întâlnesc rar domenii cu forme atât de netede, mai curând ele sunt reuniuni finite de domenii rectangulare și/sau cilindrice. Constatăm că frontiera domeniilor întâlnite cel mai frecvent în practică nu este perfect netedă ci are vârfuri și muchii.

Categoria de domenii, suficient de netede pentru a menține bunele proprietăți ale funcțiilor definite pe ele, dar care cuprinde suficient de multe cazuri de interes practic sunt domeniile Lipschitz (http://en.wikipedia.org/wiki/Lipschitz_domain), care pot avea colțuri și muchii, dar aproape peste tot, pe frontieră se poate defini un versor normal $\mathbf{n}$, orientat spre exteriorul domeniului. Dacă domeniul este mărginit, atunci spațiul de funcții extrem de netede $C^\infty(\bar{\Omega})$ este dens în spațiile de funcții generalizate, cum sunt spre exemplu spațiile Sobolev, H^1 , $H(\text{rot})$, $H(\text{div})$, în normele acestor spații. Adică orice element al spațiilor Sobolev menționate poate fi aproximat oricât de bine cu o funcție clasică foarte netedă, infinit derivabilă. Aceasta permite definirea urmei funcției generalizate pe frontiera domeniului și demonstrarea pentru aceasta a formulelor lui Green, Gauss și Stokes [133]. Acesta este motivul pentru care în continuare vom considera numai probleme definite pe domenii Lipschitz, despre care vom spune că au o frontieră suficient de netedă.

2. **Caracteristicile de material:** dielectrice, magnetice și de conducție trebuie specificate în fiecare punct din domeniul de calcul. De cele mai multe ori, domeniul de calcul este format prin reuniunea unui număr finit de subdomenii omogene. Dacă materialele au caracteristici afine:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r, \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_i, \end{aligned} \tag{2.1}$$

atunci fiecare subdomeniu omogen este caracterizat de trei parametri de material (pseudo)scalari sau tensoriali $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$ și de trei mărimi vectoriale $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{B}_r$, $\mathbf{J}_i$, care sunt nu numai caracteristici de material, ci descriu și sursele interne, imprimate ale câmpului. Multă grijă trebuie acordată proprietăților matricelor ce descriu cei trei tensori (care de cele mai multe ori sunt

diagonalizați, sau chiar reduși la pseudosclari, în cazul mediilor izotrope) și anume simetria și pozitivă lor definire, proprietăți care au semnificații fizice clare, asigurând reciprocitatea și respectiv pasivitatea mediului respectiv.

În cazul mediilor neliniare, constantele de material ε , μ , σ se înlocuiesc cu funcții de E , H și respectiv E sau se consideră că $\mathbf{P}_p$, $\mathbf{B}_r$ sau $\mathbf{J}_i$ depind de $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ și respectiv $\mathbf{E}$.

3. **Sursele interne de câmp**, sunt mărimile locale care intervin în membrul drept al ecuațiilor, cum sunt densitatea de sarcină în electrostatică sau densitatea de curent în regimul magneto-staționar. Acestea sunt descrise de funcții scalare și respectiv vectoriale, definite pe domeniul de calcul Ω . Ele sunt funcții clasice, dar sunt și funcții generalizate, distribuții, pentru a modela cazurile degenerate, în care sursele de câmp sunt distribuite superficial, lineic sau chiar concentrate punctual [131]. După cum am menționat anterior, câmpurile vectoriale $\mathbf{P}_p$; $\mathbf{B}_r$; $\mathbf{J}_i$, definite pe Ω sunt la rândul lor surse interne de câmp. În regimurile de evoluție, aceste surse pot fi funcții cunoscute și de timp, în intervalul $(t_{\min}, t_{\max})$. De exemplu, $\mathbf{J}_i = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, cu $\mathbf{r} \in \Omega$ și $t \in (t_{\min}, t_{\max})$, deci curentul impus este descris de funcția vectorială $\mathbf{f} : \Omega \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Trebuie să mai remarcăm, că în funcție de regim, densitatea de sarcină ρ și densitatea de curent $\mathbf{J}$ pot fi fie date, fie necunoscute.
4. **Sursele externe de câmp** sunt descrise de condițiile de frontieră. Acestea sunt specifice fiecărui regim, dar se referă la componentele câmpului, care se conservă la trecerea prin suprafața de discontinuitate, deci și prin frontieră, și anume: componenta tangențială a intensității câmpului electric/magnetic, componenta normală a inducției electrice/magnetice, sau componenta normală a densității de curent. Condițiile de frontieră pentru potențialul vector $\mathbf{A}$ și pentru cel scalar V se referă în fond tot la componentele menționate anterior, dar pentru a asigura unicitatea potențialelor pot să apară și valoarea potențialului scalar V sau a componenteii normale/tangențiale a potențialului vector $\mathbf{A}$. Identificarea exactă a condițiilor de frontieră se face în enunțul teoremelor de unicitate pentru soluția problemei, care vor fi prezentate în capitolul următor.
5. **Sursele anterioare de câmp**, intervin doar în regimurile evolutive în timp: EQS, MQS sau ED, în regim tranzitoriu, și sunt descrise de condițiile inițiale ale câmpului electromagnetic. De regulă trebuie cunoscută distribuția la momentul inițial, a acelei componente, care descrie starea câmpului electromagnetic, și apare deci derivată față de timp în ecuațiile regimului respectiv: inducția electrică la momentul inițial $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ în EQS, inducția

magentiacă $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ în MQS, iar în regimul electrodinamic general variabil ED, trebuie cunoscută distribuția la momentul inițial a ambelor câmpuri $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$ și $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$, $\forall \mathbf{r} \in \Omega$.

Soluția problemei este alcătuită, în funcție de regim, de unul sau mai multe câmpuri și potențiale, din lista: $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{A}, V, \mathbf{J}, \rho$, dar și alte potențiale cum este $\mathbf{T}$ - potențialul vector al densității de curent sau V_m - potențialul scalar al câmpului magnetic. În funcție de regim, $\mathbf{J}$ și ρ sunt când date ale problemei, când părți ale soluției. Toate aceste câmpuri sunt definite pe domeniul Ω , iar cazul regimurilor variabile în timp, și pe intervalul $(t_{\min}, t_{\max})$. De regulă, cele două extreme ale intervalului de timp, sunt de la caz la caz: $t_{\min}$ are valoarea $-\infty$ sau 0, în timp ce $t_{\max}$ este o constantă reală nenulă, mărginită T sau $+\infty$. Aceste lucruri au mai fost spuse, dar ce este de fapt nou și specific formulării matematice, este identificarea clasei de funcții - a spațiului de funcții, liniar sau afin din care face parte soluția, care se face prin specificarea cadrului funcțional, despre care vom vorbi în continuare.

Formularea corectă a unei probleme, care presupune rezolvarea unei ecuații cu derivate parțiale impune următoarele trei condiții (http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem):

1. **Existența soluției**, demonstrată printr-o teoremă de existență, care poate fi abstractă neconstructivă, sau constructivă, adică să indice cum se construiește soluția. Demonstrând existența unei soluții numerice, de exemplu obținută prin algoritmul elementului finit, împreună cu o teoremă de convergență, prin care se demonstrează că soluția numerică tinde către cea exactă, atunci când rețeaua de discretizare devine tot mai fină, se obține o demonstrație constructivă a existenței soluției exacte.
2. **Unicitatea soluției**, demonstrată printr-o teoremă de unicitate. De regulă, pentru demonstrație se folosește reducerea la absurd, presupunând că există două soluții distincte ale problemei. Diferența dintre cele două soluții satisface aceleași ecuații ca cele ale problemei originale, numai că în condiții de surse nule. Dacă se demonstrează că anularea surselor atrage după sine anularea soluției, lucru realizat de obicei folosind funcționala de energie a problemei, atunci demonstrația este încheiată deoarece diferența nu poate fi și nulă și nenulă în același timp. În cazul problemelor liniare, teorema de unicitate este consecința lemei soluției banale, care afirmă că problema cu surse interne/externe și anterioare nule are o singură soluție, cea banală (nulă). Pentru demonstrația ei se folosește tot funcționala de energie, care se anulează în ipotezele lemei și odată cu ea și câmpul soluție. Dacă problema liniară cu surse nule are soluție nulă, atunci operatorul liniar care leagă soluția de sursele sale are nucleul nul, iar problema cu surse nenule are soluție

unică.

3. **Stabilitatea** în sens Hadamard, demonstrată printr-o teoremă de continuitate a soluției față de datele problemei. Condiția s-a impus prin exemplu dat de Hadamard în 1902 (<http://www.apmaths.uwo.ca/~rcorless/AM505/day3/node2.html>), în care este rezolvată ecuația lui Laplace cu condiții de frontieră, care asigură existența și unicitatea, dar nu și stabilitatea soluției. Problemele prost formulate în sens Hadamard nu au nici o valoare practică, deoarece cele mai mici perturbații ale datelor (de exemplu prin trunchierea lor, în urma reprezentării pe calculator, cu un număr finit de cifre semnificative) pot genera modificări mari ale soluției, care astfel devine total nerelevantă.

O problemă de câmp presupune rezolvarea unei ecuații, pe care o să o scriem generic astfel:

$$F(x) = y, \quad (2.2)$$

unde $y \in Y$ reprezintă datele, $x \in X$ reprezintă soluția și aplicația $F : X \rightarrow Y$ reprezintă ecuația ce trebuie rezolvată. Ca o problemă să fie bine formulată trebuie ca $\forall y \in Y, \exists! x \in X$, adică să existe în spațiul soluției X un element x , care verifică ecuația, iar acesta să fie unic. Acestea sunt chiar condițiile ca aplicația F să fie inversabilă (adică bijectivă). În consecință, F trebuie să fie surjectivă și injectivă. Condiția de injectivitate este dată de teorema de unicitate a soluției, iar cea de surjectivitate este dată de teorema de existență. În plus, mai trebuie îndeplinită o a treia condiție, cea de continuitate a aplicației inverse F^{-1} , care leagă datele de soluție. În consecință, cele două spații X și Y , în care se caută soluția și în care se află datele, trebuie să fie nu numai spații cu structuri algebrice, ci și spații cu structuri topologice, ca să se poată vorbi de continuitate, normă, distanță, convergență, etc. Convergența este importantă, și pentru că multe teoreme de existență sunt constructive (de ex. teorema punctului fix) și stau la baza algoritmilor numerici de tip iterativ, în care se construiește un șir de soluții numerice, aproximative, convergente către soluția exactă. Iată de ce condițiile de bună formulare nu pot fi prezentate fără specificarea exactă (matematică) a spațiilor în care se caută soluția și a spațiului în care se află datele. Acestea sunt spații de funcții numerice scalare sau vectoriale, deci au o structură de spațiu vectorial (eventual afin), dar au și o structură topologică (de regulă sunt spații Banach (http://en.wikipedia.org/wiki/Banach_space) sau Hilbert (http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_space), deci sunt complete, șirurile Cauchy fiind convergente - lucru extrem de important pentru demonstrarea existenței).

În cazul în care F este un operator liniar, lucrurile se simplifică, deoarece unicitatea este asigurată, și problema are soluție unică pentru orice $y \in Y$, dacă ecuația

omogenă $F(x) = 0$ are doar soluția banală $x = 0$, adică dacă nucleul operatorului F se reduce la zero.

În cazul finit dimensional, funcția F se reprezintă prin matricea $\mathbf{F}$, care trebuie să aibă nucleu nul, deci să nu aibă valori proprii nule, iar pentru existența soluției, trebuie ca y să aparțină imaginii matricei $\mathbf{F}$ (dacă $\mathbf{F}$ este pătrată, condiția de unicitate este echivalentă cu cea de existență (http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_algebra).

Pentru a caracteriza cantitativ cât de bine este formulată o problemă, se folosește **numarul ei de condiționare** $\kappa(F)$. Acesta exprimă cât de mari pot fi erorile relative ale soluției raportate la erorile datelor http://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number. În cazul liniar, finit dimensional, numărul de condiționare al matricei $\mathbf{F}$ este $\kappa(\mathbf{F}) = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{F}^{-1}\|$, egal pentru matrice simetrice și pozitiv definite cu raportul dintre valoarea proprie maximă și cea minimă a matricei $\mathbf{F}$. Cu cât acest factor de amplificare a erorii este mai mare, cu atât problema este mai slab condiționată și mai dificil de rezolvat, atât de metodele directe cât și de cele iterative, a căror convergență este mai slabă, pe măsură ce acest număr este mai mare (iar peste o limită a acestui număr, metodele iterative devin chiar divergente).

De exemplu, în rezolvarea pe calculator, logaritmul zecimal al numărului de condiționare indică numărul de cifre semnificative exacte, pe care le pot pierde datele, până să se ajungă la soluție. Precondiționarea este tehnica prin care se îmbunătățește numărul de condiționare al matricei [10], (<http://en.wikipedia.org/wiki/Preconditioner>). În particular, dacă datele sunt exprimate cu 6 cifre semnificative exacte și numărul de condiționare este un milion, soluția numerică nu are relevanță, deoarece aceasta nu are nici o cifră semnificativă exactă. În acest caz, problema este imposibil de rezolvat numeric, cu un minim de precizie, chiar dacă sunt îndeplinite cele trei condiții teoretice de bună formulare: unicitate, existență și continuitate în sens Hadamard. Din aceste motive, în buna formulare a problemelor de câmp, ce vor fi rezolvate numeric, condiția de continuitate (stabilitate în sens Hadamard) se înlocuiește de obicei cu o condiție mai tare, de **bună condiționare**, mai exact: se impune să existe constanta reală L , a.î.

$$\|F^{-1}(u) - F^{-1}(v)\|_X < L\|u - v\|_Y, \quad (2.3)$$

pentru orice $u, v \in Y$, numită condiția lui Lipschitz (http://en.wikipedia.org/wiki/Lipschitz_continuity). Constanta L este proporțională cu numărul de condiționare al problemei

$$\kappa(F) = \frac{L\|x\|_X}{\|y\|_Y}. \quad (2.4)$$

Prin această condiție, impunem numărului de condiționare al problemei valori rezonabile, dependente de precizia pe care o considerăm acceptabilă.

În concluzie, constatăm ca nu se poate vorbi deci de buna formulare a unei probleme, dacă nu sunt identificate spațiile X și Y , în care căutăm soluția și respectiv se află datele problemei și nu specificăm normele $\|\cdot\|_X$ și respectiv $\|\cdot\|_Y$ din aceste spații. Această operație fundamentală în modelarea matematică se numește stabilirea cadrului funcțional al problemei.

2.1.2 Forme clasice și slabe ale problemelor scalare

Forma tare a ecuațiilor. După cum am văzut anterior, ecuațiile pe care trebuie să le satisfacă soluția într-o problemă de câmp au fie forma unor ecuații cu derivate parțiale și algebrice de ordinul întâi, satisfăcute de componentele câmpului, fie în cazul potențialelor, aceste ecuații sunt cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Forma acestor ecuații se modifică de la regim la regim. Pentru a prezenta conceptele în forma lor cea mai clară, vom porni de la cel mai simplu caz, al regimului electrostatic în medii liniare, într-o problemă în care pe frontieră se află un conductor, pe care îl presupunem chiar masa dispozitivului studiat. În acest caz simplu, modelul diferențial de ordinul doi conține relațiile:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon(x) \operatorname{grad} V(x)) = \rho(x), \forall x \in \Omega, \\ V(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

aceasta fiind formularea clasică ("tare") a problemei de potențial, în care soluția se caută în spațiul funcțiilor $\mathcal{C}_0^2(\Omega)$ continue și dublu derivabile, definite pe Ω cu condiții Dirichlet nule pe frontieră, iar ecuația de tip Poisson generalizată este satisfăcută punctual de soluție.

Un prim pas către verificarea formulării corecte a acestei probleme va fi făcut prin reformularea ei. Dacă vrem ca ecuația să fie satisfăcută, reziduul ei trebuie să fie identic nul, deci îl putem proiecta pe toate direcțiile unui spațiu Hilbert infinit-dimensional, complet, H alcătuit din funcțiile "de test" u :

$$(-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v), u) = (\rho, u), \forall u \in H. \quad (2.6)$$

Aici ca și în continuare vom folosi notația preferată de matematicieni, $v = V(x)$ pentru potențial și dx în loc de dv . Putem afirma că această formă a ecuației nu este altceva decât aplicarea metodei reziduurilor ponderate. Deoarece ne așteptăm ca soluția să aibă energie finită, produsul scalar este cel din L^2 :

$$(\rho, u) = \int_{\Omega} \rho u dx = f(u); \quad (2.7)$$

relație care definește o funcțională liniară f de u , pentru $\rho \in L^2(\Omega)$ și $u \in H$. Iar

$$\begin{aligned} (-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v), u) &= - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u(\varepsilon \operatorname{grad} v)) dx + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \\ &= - \int_{\partial\Omega} u \varepsilon \frac{dv}{dn} dA + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = a(v, u) \end{aligned} \quad (2.8)$$

este o funcțională biliniară simetrică definită pe $H \times H$, în condiții de frontieră Dirichlet nule.

Aici o etapă importantă a demonstrației a fost parcursă, aplicând relația lui Green și apoi relația Gauss, care ca în forma finală să intervină doar derivate spațiale de ordinul întâi (*grad*). Dacă vom presupune că și funcțiile de test u satisfac condiția Dirichlet nulă, atunci integrala pe frontiera domeniului se anulează iar ecuația (2.6) devine:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \rho u dx, \quad \forall u \in H, \quad (2.9)$$

relație care este **forma slabă a ecuațiilor problemei**, cunoscută și ca forma variațională sau de proiecție.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation). Compact ea se scrie astfel:

$$a(u, v) = f(u), \quad \forall u \in H, \quad (2.10)$$

în care $a(.,.) = \langle ., . \rangle$ este funcționala biliniară simetrică numită și "produsul scalar energetic" (a nu se confunda cu $(.,.)$ - produsul scalar din L^2), și care pentru $u = v$ măsoară "energia" potențialului v .

Comparând forma slabă cu cea tare, constatăm următoarele:

- în forma tare intervin derivate de ordinul doi, pe când în cea slabă numai derivate de ordinul unu;
- în forma tare, condiția de frontieră este scrisă separat, pe când în forma slabă ea este inclusă în ecuație;
- ecuația tare se verifică punctual (în fiecare punct din domeniul de calcul), în timp ce în forma slabă, ecuația se verifică global - funcțional (pentru fiecare funcție de test, de bază);
- parametrul de material ε poate avea o variație spațială arbitrară în forma slabă, deoarece nu este derivat, în timp ce în forma tare el trebuie să aibă o variație suficient de netedă pentru a fi derivabil după înmulțire cu $\operatorname{grad} v$.

Sunt evidențiate fără dubiu avantajele folosirii formei slabe a ecuației. Ele devin și mai evidente dacă derivatele (*grad*), care apar în forma slabă sunt considerate în sens generalizat. Atunci spațiul H al funcțiilor de test este chiar spațiul Sobolev $H_0^1(\Omega)$ al funcțiilor de pătrat integrabil pe Ω , ale căror derivate generalizate sunt tot de pătrat integrabil, și care au valori nule pe $\partial\Omega$, care este un spațiu Hilbert cu produsul scalar $(u, v)_H = (u, v) + (\nabla u, \nabla v)$ (http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space) [45].

Forma slabă a problemei de electrostatică poate fi considerată ca un caz particular al unui cadru funcțional, abstract, de foarte mare generalitate. În acesta, un rol esențial îl are următoarea teorema de Analiza Funcțională.

Teorema Lax-Milgram: dacă funcționala (forma) biliniară $a(u, v)$ definită pe spațiul Hilbert $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad (2.11)$$

și coercivă, adică $\exists c$, a.î.

$$|a(u, u)| \geq c \|u\|^2, \quad (2.12)$$

atunci ecuația $a(u, v) = f(u)$ are o soluție $v \in H, \forall f \in H'$ (spațiului dual al lui H , al funcționalelor continue pe H), aceasta este unică și mărginită $\|v\| < \|f\|/c$, unde c este constanta de coercitivitate, ceea ce garantează îndeplinirea tuturor condițiilor de bună formulare (inclusiv cea de bună conditionare, cu $L = 1/c$).

(http://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Milgram_theorem),

(http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation),

(http://en.wikipedia.org/wiki/Babuska-Lax-Milgram_theorem), [7].

După cum se va constata și ulterior, în acest document sunt prezentate doar principiile și ideile matematice. Pentru detalii și demonstrații trebuie folosite trimiterele bibliografice.

Formularea corectă a problemei *div-grad*. Buna formulare, existența, unicitatea și stabilitatea soluției pentru forma slabă a problemelor de regim staționar cu potențial scalar este o consecință a teoremei Lax-Milgram, în care singurele condiții sunt cele de marginire și coercitivitate ale funcționalei biliniare $a(u, v)$. Dacă se definește $\|u\|_H := \|\nabla u\|$ cu $\|\cdot\|$ norma din $L^2(\Omega)$, cele două norme fiind echivalente în baza inegalității lui Poincaré- Friedrichs (http://en.wikipedia.org/wiki/Poincare_inequality), [120], [64], atunci cele două condiții de bună formulare sunt îndeplinite, deoarece:

$$|a(u, u)| = \|\nabla u\|^2 = \|u\|_H^2, \quad (2.13)$$

deci constanta de coercitivitate $c = 1$ și

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\| \|\nabla v\| = \|u\|_H \|v\|_H, \quad (2.14)$$

conform inegalității Cauchy-Swarz

(http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarz_inequality),

deci constanta de continuitate este $C = 1$. În consecință, forma slabă a problemei lui Poisson cu condiții de frontieră de tip Dirichlet nule este corect formulată, și are soluție unică $u \in H = H_0^1(\Omega)$, pentru orice sursă $f \in [H]' = L^2(\Omega)$, soluție continuă față de date deoarece $\|\nabla u\| \leq \|f\|$. Ceea ce face ca procedura de determinare a câmpului să fie una constructivă față de sursele de câmp.

Problema mixtă. Să vedem cum putem reformula problema determinării potențialului electrostatic, despre care știm că satisface ecuația:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = \rho, \quad (2.15)$$

în domenii, care au condiții mixte de frontieră: $V = V_0(x), x \in S_D$ - condiții Dirichlet pe o parte a frontierei și $\varepsilon dV/dn = g(x), x \in S_N = \partial\Omega \setminus S_D$ - condiții Neumann pe restul frontierei.

Afirmația referitoare la formularea corectă se extinde și la problema, cu condiții mixte, adecvând cadrul funcțional, prin alegerea $H = \{u \in H^1(\Omega) | u = 0 \text{ în } S_D\}$ [120].

Pentru început, dacă $S_N = \emptyset$, atunci este suficient să translatăm spațiul $H_0^1(\Omega)$ cu o funcție constantă V_0 și obținem un spațiu afin $H_0 = V_0 + H_0^1(\Omega)$, în care vom căuta soluția, iar raționamentele anterioare rămân neschimbate. Din acest motiv spunem despre condiția Dirichlet că este una *esențială*.

Dacă $S_D = \emptyset$, și $g = 0$, atunci avem o problemă Poisson cu condiții Neumann nule. În acest caz funcționala biliniară are expresia:

$$\begin{aligned} a(v, u) &= (-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v), u) = - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} v) dx = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(u(\varepsilon \operatorname{grad} v)) dx + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \\ &= - \int_{\partial\Omega} u g dA + \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u dx = a(u, v), \end{aligned} \quad (2.16)$$

iar funcțiile de test nu trebuie să mai aibă valori nule pe frontieră, deci $H = H^1(\Omega)$, spațiul Sobolev al funcțiilor de pătrat integrabil, cu derivate generalizate de pătrat integrabil. De astă dată, soluția satisface condițiile de frontieră, fără ca acestea să fie impuse de la început, ci ele rezultă în urma rezolvării problemei. Din acest motiv, spunem despre condițiile Neumann nule că sunt condiții de frontieră *naturale*. Problema cu condiții Neumann pe întreaga frontieră nu este corect formulată, deoarece nu are soluție unică. Problema poate îndeplini condițiile teoremei Lax-Milgram, doar dacă S_D se reduce la o mulțime oricât de mică dar de măsură nenulă $\operatorname{meas}(S_D) > 0$, pentru a avea punct de referință pentru potențial. Doar așa funcționala biliniară este coercivă. Altfel, potențialul este definit

univoc până la o constantă aditivă, care se fixează dacă se caută, de exemplu soluții cu medie nulă pe domeniul Ω , spațiu notat cu $H = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. În consecință, în condiții de frontieră pur Neumann trebuie să *etalonăm* potențialul pentru a avea soluție unică.

Dacă valoarea condiției Neumann este nenulă, atunci problema are soluție, doar dacă integrala pe frontiera $\partial\Omega$ a condiției g este egală cu integrala pe Ω a densității de sarcină ρ (altfel este lezată legea fluxului electric, dacă valoarea fluxului pe frontieră nu este egal cu sarcina din interiorul domeniului). Folosind funcții cu medie nulă, condițiile de existență sunt automat îndeplinite. Forma slabă a ecuației

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall u \in H = H^1(\Omega)/\mathbb{R} \quad (2.17)$$

are

$$\begin{aligned} a(v, u) &= \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx; \\ f(u) &= \int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u g \, dA. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Și de această dată condiția Neumann este *naturală*, iar în plus, așa cum era de așteptat, valoarea ei nenulă apare în expresia formei slabe a ecuației.

În *cazul mixt*, în care ambele suprafețe S_N și S_D sunt nevide, forma slabă a ecuației devine:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx = \int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{S_N} u g \, dA, \quad \forall u \in H, \quad (2.19)$$

cu expresia funcționalei $a(u, v)$ dată de (2.18) și

$$f(u) = \int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{S_N} u g \, dA, \quad (2.20)$$

ecuație, care îndeplinește condițiile teoremei Lax-Milgram pentru $\operatorname{meas}(S_D) > 0$, garantând astfel buna formulare a problemei [120, 133], [8]. De această dată spațiul Sobolev $H = \{u \in H^1(\Omega) | u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ asociat problemei mixte este cuprins între spațiul H_0^1 corespunzător problemei cu condiții Dirichlet nule și H^1 corespunzător problemei cu condiții Neumann nule. Acum se înțelege și mai clar cum se comportă condițiile de frontieră esențiale (Dirichlet) și cel naturale (Neumann). Cele esențiale sunt impuse ca restricții în spațiul funcțiilor de test, iar cele naturale intervin în expresia funcționalei de energie, deci implicit în expresia proiecției. Constatăm că pasul central în formularea matematică stă în identificarea cadrului funcțional, adică a spațiului complet al funcțiilor de test,

care include condițiile esențiale de frontieră. Alegerea nu este pur matematică ci pretinde înțelegerea perfectă a aspectelor fizice ale problemei, în particular a modului în care sursele externe de câmp se reprezintă prin condiții de frontieră.

Echivalența Ritz-Galerkin. În încheiere, remarcăm faptul că expresia funcționalei biliniare simetrice $a(v, u) = a(u, v)$ se poate obține pe cale variațională, prin derivarea **funcționalei de energie**, definită astfel:

$$\begin{aligned} F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) &\Rightarrow \min F(v) \Leftrightarrow dF = 0 \Leftrightarrow \frac{da(v, v)}{2} - df(v) = \\ &= \frac{a(dv, v) + a(v, dv)}{2} - f(dv) = a(u, v) - f(u) = 0, \forall u = dv. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Soluția problemei de câmp electrostatic minimizează deci funcționala de energie

$$F(V) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(\varepsilon(\text{grad } V)^2 - \rho V)dv - \frac{1}{2} \int_{S_N} gV dA. \quad (2.22)$$

care este convexă în cazul în care $a(., .)$ este simetrică și pozitiv definită și în consecință, funcționala de energie are un singur minim în H .

Orice altă funcție de încercare pentru soluție are o "energie" mai mare decât cea corespunzătoare minimului. Aceasta este formularea variațională Ritz a problemei fundamentale a electrostaticii, în timp ce formularea variațională slabă, bazată pe proiecție este numită formularea Galerkin. Ce mai este specific metodei Galerkin este că funcțiile de test (pe care se proiectează reziduurile), ponderile din metoda reziduurilor ponderate sunt identice (sau izomorfe) cu funcțiile de formă - numite și de încercare, sau de "formă"(baza spațiului în care se caută soluția).

Se constată că în cazul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip eliptic, cu operatori autoadjuncți, în care funcționala $a(., .)$ este simetrică, cele două formulări variaționale Ritz și Galerkin sunt echivalente, iar funcționala de energie este convexa. În continuare, vom utiliza de preferință forma slabă, Galerkin. Aceasta deoarece poate fi extinsă la cazul general al metodelor de proiecție, în care funcțiile de test nu sunt identice cu cele de formă, variantă a metodei cunoscută sub numele Galerkin-Petrov. Metodele de proiecție, inclusiv Galerkin pot fi aplicate folosind forma slabă a ecuațiilor (numită impropriu variațională) și în cazul problemelor cu operatori care nu sunt autoadjuncți (cum este cazul ecuațiilor parabolice sau hiperbolice, întâlnite în regimurile MQS, EQS și ED), pentru care nu există funcționala de energie convexa, care să fie minimă pentru soluție, deci metoda Ritz, de minimizare a unei funcționale de energie nu poate fi aplicată. În unele situații, cum este cazul regimului electrodinamic fără pierderi, se poate defini o funcțională de energie, care are un punct staționar, dar nu un minim, iar condiția de staționaritate (variație nulă, sau gradient nul al funcționalei) implică proiecția nulă a reziduului, deci forma slabă a ecuațiilor lui Maxwell, echivalentă metodei Galerkin [14], [64].

Metoda Galerkin face parte din tehnica rezidurilor ponderate, care constă în minimizarea reziduului ecuațiilor cu derivate parțiale, proiectându-le pe o mulțime de funcții de test, adică impunând ca integrala reziduului multiplicat cu funcțiile de pondere să se anuleze. După cum am mai menționat anterior, în metoda Galerkin funcțiile de test sunt chiar funcțiile folosite pentru a exprima soluția căutată. Un pas important în această abordare, constă în folosirea integrării prin părți, pentru a rescrie integralele, astfel încât ordinul operatorilor diferențiali de sub integrale să scadă cu o unitate. Abia după această transformare se obține forma slabă a ecuațiilor problemei. Modul în care abordările variaționale au condus, în final, la metoda elementului finit este prezentat în [44].

Formularea ecuațiilor prin minimizarea unei funcționale de energie este în mod evident corelată cu principii mai profunde ale fizicii, cum este cel al minimei acțiuni, sau altele similare de tip Lagrange, d'Alambert, Gauss, Hamilton, Maupertuis sau Rayleigh, așa cum se prezintă în detaliu în [3], [110], [82].

2.2 Teoreme de unicitate

În acest paragraf sunt prezentate teoremele de unicitate pentru soluția ecuațiilor regimurilor: ES - electrostatică, MG - magnetostatică, MQS - magneto-quasi-statică, ED - electrodinamic tranzitoriu și EDC - electrodinamic în complex. Teoremele celorlalte regimuri se obțin prin similitudine. Pentru a menține prezentarea simplă se vor considera doar materialele cu caracteristică afină sau liniară. Cazul materialelor neliniare generale, ca și demonstrațiile teoremelor pot fi găsite în [68].

2.2.1 Teorema de unicitate a regimului electrostatic ES

Ecuațiile fundamentale ale electrostaticii (1.93-1.95) în medii cu caracteristică dielectrică afină au soluția $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, unică într-un domeniu simplu conex Ω , dacă sunt cunoscute densitatea de sarcină ρ , polarizația permanentă și tensorul permeabilităților $\bar{\epsilon}$ pozitiv definit (are valori principale strict pozitive) în orice punct din domeniu, și este îndeplinită una din următoarele trei condiții de frontieră:

- DN : În orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componenta normală a inducției electrice $D_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$, astfel încât

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{D}_n d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \rho dv; \quad (2.23)$$

- *ET*: În orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componenta tangențială a intensității câmpului electric $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, astfel încât

$$\int_{\partial S} \mathbf{E}_t d\mathbf{r} = 0, \quad \forall S \subset \partial\Omega; \quad (2.24)$$

- *MX*: În orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie D_n fie $\mathbf{E}_t$, iar în plus, dacă mulțimea punctelor S_E pe care este dat $\mathbf{E}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe: $S_E = \bigcup S_k, k = 1 : m$ trebuie cunoscute și valorile a $(m - 1)$ fluxuri electrice ψ_k de pe suprafețele S_k , sau valorile tensiunii electrice u_k , pe curbe din $\partial\Omega$ ce formează arbori cu nodurile în S_k (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).

Potențialul electrostatic scalar, soluție a ecuației (1.98), este unic determinat, dacă este cunoscută valoarea sa cel puțin într-un punct de pe frontieră. Deoarece este necesar ca punctul de referință să fie cunoscut, rezultă ca S_E nu poate fi vidă. Condiția de frontieră (*MX*) rescrie în termeni de potențial astfel:

- *MX*: orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este fie din mulțimea S_N pe care este data $D_n = -\varepsilon dV/dn$ fie din mulțimea S_D nevidă, pe care este dată valoarea potențialului, și care determină univoc $\mathbf{E}_t = -\mathbf{t}dV/dt$, fie din mulțimea S_E pe care se știe că potențialul este constant și implicit $\mathbf{E}_t = 0$, fără a se cunoaște în mod necesar valoarea constantei. Dacă S_E nu este conexă, ci formată din m părți conexe $S_E = \bigcup S_k, k = 1 : m$, echipotențiale (numite și borne sau terminale), atunci trebuie cunoscute valorile a $(m - 1)$ fluxuri electrice ψ_k pe suprafețele bornelor S_k sau valorile potențialelor electrice V_k , ale acestor borne (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu potențiale și reciproc), important este ca pe fiecare bornă "flotantă", cu excepția uneia "borna fixă - de referință" să se dea fie valoarea potențialului, fie valoarea fluxului.

Situația, numită mixtă (*MX*) sau hibridă este cazul cel mai general, *DN* și *ET* fiind cazuri particulare ale acesteia. Frontiera este partajată disjunct într-o parte cu condiții Neumann (S_N) - este dată derivata după normală a potențialului, una cu condiții Dirichlet (S_D) - este dată valoarea potențialului în orice punct al acestei suprafețe și o parte notată S_E , care la rândul ei poate fi formată din m suprafețe disjuncte, care reprezintă suprafețele unor conductoare. Știm că aceste suprafețe sunt echipotențiale fiecare, dar nu știm în mod necesar valoarea potențialului decât pentru $n > 0$ dintre ele, la celelalte sunt date sarcinile electrice (egale cu fluxurile acelor suprafețe). Din cele m conductoare, n au potențialul cunoscut iar pentru celelalte $(m - n)$ sunt cunoscute sarcinile fiecăreia. O astfel de situație se întâlnește, atunci când se extrage matricea capacităților unui sistem de m conductoare

scufundate într-un dielectric liniar, prin rezolvarea problemelor de câmp electrostatic.

Teorema energiei electromagnetice aplicată problemei de electrostatică oferă identitatea energetică:

$$2W = \int_{\Omega} \varepsilon (\text{grad } V)^2 dv = \int_{\Omega} \rho V dv - \int_{\partial\Omega} D_n dA, \quad (2.25)$$

baza teoretică a lemei soluției banale. Observând că ultima integrală se descompune în:

$$\int_{\partial\Omega} D_n dA = \int_{S_N} V D_n dA + \int_{S_D} V D_n dA + \sum_{k=1}^m V_k \int_{S_k} D_n dA, \quad (2.26)$$

termeni care se anulează fiecare în condițiile de frontieră menționate anterior, când acestea au valoare nulă. Fiecare termen din suma de m termeni se anulează fie pentru că $V_k = 0$, fie pentru că fluxul electric (egal cu sarcina conductoului) $\psi_k = 0$. Integrala din ρV se anulează pentru că $\rho = 0$, de unde din (2.25) rezultă că $W = 0$, deci că potențialul este constant în tot domeniul de calcul. Dar deoarece el este nul în punctul de referință, rezultă că problema are doar soluția nulă, în condiții de surse interne și de frontieră nule, ceea ce demonstrează lema soluției banale. Acesta este modul cel mai simplu de a verifica unicitatea soluției, chiar și la probleme complicate. Fiecare termen din expresia energiei pune în evidență o categorie de date ce trebuie știută pentru a avea o problemă bine formulată, cu soluție unică. Dacă acele date nu sunt corect specificate, energia sistemului nu este univoc determinată, deci problema nu este corect rezolvată.

În baza similitudinii dintre ecuațiile regimurilor: ES, MS și EC, teoreme de unicitate similare se enunță și în cazul regimurilor magnetostatic MS și electrocinetic staționar EC. Deosebirea este că, în aceste regimuri câmpul B respectiv J este solenoidal, deci se consideră $\rho = 0$.

Condiția ca domeniul de calcul să fie simplu conex este esențială, mai ales în regimul magnetostatic. Dacă de exemplu, câmpul dintr-un miez toroidal prin golul căruia trece curentul I este unul magnetostatic, intensitatea câmpului nu se anulează dacă pe frontiera torului $B_n = 0$, ci are valoarea $H = I/(2\pi r)$, proporțională cu curentul I . Mai mult, potențialul magnetic scalar are expresia $V = I\alpha/(2\pi)$, care nu este univocă, pentru unghiuri α care depășesc 2π . Pentru a obține unicitate, soluția este să se transfere torul într-un domeniu simplu conex, printr-o tăietură, cu un semiplan la care firul este muchie. Această tăietură interzice unghiului α să depășească valoarea 2π .

2.2.2 Teorema de unicitate a regimului magnetostaționar MG

Ecuatiile fundamentale ale regimului magneto-staționar (1.104-1.106) în medii cu caracteristică de magnetizare afină au soluția $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , dacă sunt cunoscute densitatea de curent $\mathbf{J}$, inducția remanentă $\mathbf{B}_r$ și tensorul $\bar{\mu}$ pozitiv definit (are valori principale strict pozitive) în orice punct din domeniu, și este îndeplinită una din următoarele condiții de frontieră:

- BN : în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este cunoscută componeneta normală a inducției magnetice $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, astfel încat

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} n d\mathbf{A} = 0; \quad (2.27)$$

- HT : în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componeneta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, astfel încât

$$\int_{\partial S} \mathbf{H}_t d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{S}, \quad \forall S \subset \partial\Omega; \quad (2.28)$$

- MX (mixtă): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie B_n în punctele mulțimii S_B , fie $\mathbf{H}_t$, în punctele mulțimii S_H , complementară suprafeței S_B , iar în plus, dacă mulțimea punctelor S_H pe care este dat $\mathbf{H}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe disjuncte $S_H = \bigcup S_k$, $k = 1 : m$ trebuie cunoscute și valorile a $(m - 1)$ fluxuri magnetice φ_k de pe suprafețele S_k , sau valorile tensiunii magnetice i_k , ale câte unui punct de pe acea suprafață (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).

Expesia energiei magnetice dată de teorema energiei oferă identitatea energetica:

$$2W = \int_{\Omega} \nu (\text{rot} \mathbf{A})^2 dv = \int_{\Omega} \mathbf{J} \mathbf{A} dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S}, \quad (2.29)$$

bază teoretică a lemei soluției banale. Observând că ultima integrală se descompune în termenii:

$$\int_{S_B} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} + \int_{S_H} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} + \sum_{k=1}^m i_k \varphi_k, \quad (2.30)$$

care se anulează fiecare în condițiile de frontieră menționate anterior, atunci când acestea au valoare nulă. Integrala din $\mathbf{J} \mathbf{A}$ se anulează în condițiile lemei, pentru că $J = 0$, de unde rezultă că $W = 0$, deci ca potențialul magnetic vector este irotațional tot domeniul de calcul, ceea ce conduce la un camp magnetic nul, iar

demonstrația este încheiată.

Condiția de frontieră (MX) este des întâlnită în practică, inclusiv partiția disjunctă a suprafeței S_H . De exemplu, atunci când se extrage matricea inductanțelor proprii și mutuale a unui sistem de bobine, dacă circuitul magnetic pe care sunt montate bobinele are terminalele magnetice echipotențiale pe frontiera domeniului de calcul. Pentru ca energia unui sistem de bobine filiforme este semiprodusul scalar $\varphi_i/2$, condiția de frontieră pentru fiecare terminal magnetic flotant, care asigură unicitatea este cunoașterea fie a fluxului terminalului φ , fie a potențialului său magnetic (egal cu curentul bobinei ce înconjoară terminalul).

Teorema se referă la unicitatea câmpului $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, dar nu și la cea a potențialului magnetic vector $\mathbf{A}$. Potențialul magnetic vector, care satisface condițiile de etalonare Coulomb este unic determinat, de condiții de frontieră ceva mai restrictive, decât cele pentru câmp. Condițiile de frontieră pentru unicitatea potențialului vector se enunță astfel:

- *BN* (Dirichlet vectorial): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este cunoscută componeneta tangențială a potențialului vector $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ care permite determinarea univoca a inducției magnetice normale $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}_t$;
- *HT* (Neumann vectorial): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată $\nu \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{A})$, care determină componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) = \nu \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{A}) \times \mathbf{n}$ și în plus componenta normală a potențialului magnetic vector $A_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$;
- *MX* (mixtă): în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ - în punctele mulțimii S_B , fie $\nu \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{A}) \times \mathbf{n}$ și A_n , în punctele mulțimii S_H , complementara suprafeței S_B , iar în plus, dacă mulțimea punctelor S_H pe care este dat $\mathbf{H}_t$ nu este conexă ci formată din m părți conexe $S_H = \bigcup S_k$; $k = 1 : m$ trebuie cunoscute și valorile a $(m - 1)$ fluxuri magnetice φ_k de pe suprafețele S_k sau valorile tensiunii magnetice i_k , ale câte unui punct din acele suprafețe (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni și reciproc).

Se constată că pentru unicitatea lui $\mathbf{A}$ trebuie cunoscută în plus componenta sa normală A_n pe suprafața S_H , pe care este dată $\mathbf{H}_t$ (condiția Neumann vectorială). Pentru detalii privind unicitatea potențialului magnetic vector puteți consulta [30] sau [12].

Dacă domeniul de calcul este multiplu conex, atunci lucrurile se complică, pentru că pentru fiecare gaură de tip toroidal trebuie cunoscute condiții de frontieră suplimentare. Studiul poate fi adus la cazul structurii topologice banale a domeniului Ω , dacă toate găurile toroidale sunt eliminate prin "tăieturi" (suprafețe de secțiune,

care elimină golul) sau prin "adăugiri" (suprafețe care astupă golul). Structura topologică a unui astfel de domeniu este descrisă de graful sau, la care laturile sunt curbele mediane ale tronsoanelor elementare simplu conexe. De exemplu, graful circuitului feromagnetic al unui transformator trifazat (cu trei coloane) este alcătuit din trei laturi, are două noduri și două bucle fundamentale. Să ne imaginăm că domeniul de calcul este un circuit magnetic, atunci energia câmpului său magnetic generat de cei g curenți care trec prin găurile domeniului este

$$2W = \int_{\Omega} \nu \mathbf{B}^2 dv = \sum_{k=1}^g \varphi_k u_k, \quad (2.31)$$

în care φ_k este fluxul magnetic ciclic (prin bucla fundamentală k) corespunzător solenației u_k .

Modul sistematic de a identifica buclele fundamentale este de a construi un arbore al grafului. Fiecare coardă k , parcursă de fluxul φ_k generează o buclă fundamentală cu t.m.m. u_k calculată de-a lungul laturilor buclei, deci pe o curbă închisă care inconjoară o "gaură" tubulară. Suprafața care se sprijină pe o astfel de curbă este o "adăugire", care dacă este reunită cu domeniul îl transformă în unul simplu conex. Tensiunea magnetică u_k este chiar solenația ce străbate această "adăugire". Fiecare ramură a arborelui în graf generează o secțiune fundamentală, cu flux total nul. Dacă ramurile sunt tăiate, atunci sunt eliminate toate buclele. Notând cu t numărul de tăieturi (egal cu numărul de ramuri), cu v_j saltul potențialului magnetic pe cele două fețe ale tăieturii, și cu φ_j fluxul magnetic prin tăietură, atunci energia câmpului magnetic are expresia:

$$2W = \int_{\Omega} \nu \mathbf{B}^2 dv = \sum_{j=1}^t \varphi_j v_j. \quad (2.32)$$

Prin "tăieturi" și "adăugiri", domeniul multiplu conex se transforma în unul simplu conex.

În consecință, în cazul domeniilor multiplu conexe, condițiile de frontieră suplimentare, care trebuie cunoscute pentru a asigura unicitatea câmpului magnetic sunt:

- pentru fiecare tăietură (ramura în arbore) trebuie fie dat fluxul ce străbate tăietura fie saltul potențialului scalar de dublu strat, pe cele două fețe ale tăieturii;
- pentru fiecare adăugire (descrisă de o coardă în coarbore) trebuie dat fie fluxul ciclic ce străbate coarda fie t.m.m. de-a lungul buclei generată de coarda - egală cu solenția bobinei secționată de adăugire.

De exemplu, în cazul transformatorului trifazat, în care arborele este coloana centrală, unicitatea câmpului magnetic din miez este asigurată în condiții de frontieră $\mathbf{B}_n = 0$, de cunoașterea solenației bobinei de pe coloana centrală (care dă tensiunea magnetică a tăieturii) și de cunoașterea solenației bobinelor montate pe coloanele laterale, care dau solenațiile în cele două ferestre ale transformatorului (adăugirile din cazul nostru), sau în loc de solenații, de fluxurile celor trei bobine [122], [18], [51].

2.2.3 Teorema de unicitate a regimului magneto-cvasi-staționar MQS

Ecuațiile fundamentale ale regimului magneto-qvasi-staționar (1.138) în medii liniare cu condiții inițiale cunoscute pentru $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$, $\forall \mathbf{r} \in \Omega$ au soluția $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , pe intervalul de timp $(t_{\min}, t_{\max})$, dacă tensorul $\bar{\sigma}$ este pozitiv definit în orice punct din domeniu, iar permeabilitatea μ este și ea pozitivă, și dacă în orice punct de pe frontieră este cunoscută fie componenta $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului magnetic, fie componenta $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului electric.

Notăm cu S_H partea de frontieră pe care este dată $\mathbf{H}_t$ și cu S_E , restul frontierei, pe care este dată $\mathbf{E}_t$. Demonstrația se bazează pe teorema energiei electromagnetice:

$$P_s = P + \frac{dW_m}{dt} \Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{E} \bar{\sigma} \mathbf{E} + \frac{dw_m}{dt} \right) dv \quad (2.33)$$

cu $w_m = \mathbf{B}\mathbf{H}/2 = \mu\mathbf{H}^2/2$ densitatea energiei magnetice, în cazul mediilor liniare. Integrala pe frontieră a vectorului Poynting $S_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)$ se anulează în condițiile lemei soluției banale și în consecință:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \bar{\sigma} \mathbf{E} dv = - \int_{\Omega} \frac{dw_m}{dt} dv > 0, \quad (2.34)$$

deoarece $\bar{\sigma}$ este pozitiv definit, relație care obligă la scăderea energiei magnetice. Dar această energie nenegativă prin definiție are valoare inițială nulă, deci nu poate scădea mai mult decât atât, ceea ce implică $W_m = 0, \forall t \in (t_{\min}, t_{\max})$, ceea ce corespunde unui câmp magnetic nul. Deoarece $P = 0$ și $\bar{\sigma} > 0$, rezultă că și câmpul electric $\mathbf{E}$ trebuie să se anuleze.

Chiar dacă este simplă, această teoremă de unicitate nu este prea utilă în cazurile practice. Și aceasta din două motive: condiția ca tot domeniul de calcul să fie conductor este prea restrictivă, iar condiția de frontieră pentru $\mathbf{E}_t$ este mai puțin utilă decât B_n , care intervine în regimul magneto-staționar MG. În [12] se demonstrează o altă teoremă de unicitate pentru regimul MQS în medii liniare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, dar care pot avea și subdomenii izolate, cu $\sigma = 0$. În aceste

subdomenii câmpul MQS devine magnetostatic MS sau magnetic staționar MG. Pe interfețele de trecere între subdomenii se conservă $\mathbf{H}_t$ și B_n . O astfel de problemă, de regim MQS combinat cu MG are soluție unică, în condiții de frontieră similare cu cele de la regimul MG, adică dacă în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este cunoscută:

- componenta normală a inducției magnetice $B_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$, în punctele suprafeței S_B , și
- componenta tangențială a intensității câmpului magnetic $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, în punctele suprafeței $S_H = \partial\Omega - S_B$.

Dacă se folosesc potențialele magnetic vector $\mathbf{A}$ și scalar V în domeniul conductor și doar $\mathbf{A}$ în domeniul neconductor, atunci condițiile de unicitate pentru aceste potențiale sunt și ele aceleași ca în cazul MG: se referă la $\mathbf{A}_t$ pe S_B și la $\nu \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{A}$ pe S_H , iar în plus cunoașterea pe suprafața S_H a componentei $A_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$ a potențialului magnetic vector asigură unicitatea soluției, mai exact a potențialelor $\mathbf{A} - V; \mathbf{A}$ în domeniile conductoare; respectiv neconductoare, pe intervalul de timp $(t_{\min}, t_{\max})$, dacă sunt cunoscute condițiile inițiale pentru $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = \text{rot} \mathbf{A}$ cu $\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, 0) = 0$.

2.2.4 Teorema de unicitate a regimului electrodinamic - general variabil ED

Ecuatiile fundamentale ale regimului electrodinamic (1.148) în medii liniare cu condiții inițiale cunoscute pentru $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ și $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0)$, $\forall \mathbf{r} \in \Omega$ au soluția $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , pe intervalul de timp $(t_{\min}, t_{\max})$, dacă ε și μ sunt strict pozitive iar σ nu este negativ (se pot admite părți izolante, fără pierderi în domeniul de calcul), și dacă în orice punct de pe frontieră este cunoscută fie componenta $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului magnetic, fie componenta $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului electric.

Notăm cu S_H partea de frontieră pe care este dată $\mathbf{H}_t$ și cu S_E , restul frontierei, pe care este dată $\mathbf{E}_t$. Demonstrația se bazează pe teorema energiei electromagnetice:

$$P_s = P + \frac{dW_{em}}{dt} \Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{E} \sigma \mathbf{E} + \frac{dw_{em}}{dt} \right) dv \quad (2.35)$$

unde s-a notat cu

$$w_{em} = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} + \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} = \varepsilon \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \mu \frac{\mathbf{H}^2}{2}, \quad (2.36)$$

densitatea energiei electromagnetice, în cazul mediilor liniare. Integrala pe frontieră a vectorului Poynting $S_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)$ se anulează în

condițiile lemei soluției banale, și în consecință:

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{E} \sigma \mathbf{E} dv = - \int_{\Omega} \frac{dw_{em}}{dt} dv \geq 0, \quad (2.37)$$

deoarece σ nu este negativ, relație care obligă la scăderea energiei electromagnetice. Dar această energie nenegativă prin definiție are datorită condițiilor inițiale pentru câmp, valoare inițială nulă, deci nu poate scădea mai mult decât atât, ceea ce implică $W_{em} = 0$, $\forall t \in (t_{\min}, t_{\max})$, ceea ce corespunde unui câmp electromagnetic $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ nul în tot domeniul de calcul. Pe baza relațiilor de material se anulează și câmpurile $\mathbf{B}, \mathbf{D}$, și $\mathbf{J}$, iar pe baza legii fluxului electric se anulează și ρ din orice punct al domeniului de calcul.

Dacă se folosesc potențialele vector $\mathbf{A}$ și scalar V , atunci condițiile de unicitate pentru aceste potențiale se referă la valoarea potențialului scalar V în toate punctele frontierei; la $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ pe S_E ; și la $\nu \mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{H}_t$ și A_n pe S_H , așa cum s-a văzut anterior.

2.2.5 Teoreme de unicitate pentru regimurile generale armonice EDC

Ecuatiile fundamentale ale regimului electrodinamic reprezentate în complex (1.155) au soluția $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ unică într-un domeniu simplu conex Ω , dacă ε, μ și σ sunt strict pozitive în orice punct din domeniu, și dacă în orice punct de pe frontieră este cunoscută fie componenta $\mathbf{H}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului magnetic, fie componenta $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$, tangențială a intensității câmpului electric. Notăm cu S_H partea de frontieră pe care este dată $\mathbf{H}_t$ și cu S_E , restul frontierei, pe care este dată $\mathbf{E}_t$.

O alternativă a acestei teoreme de unicitate este cea pentru *elementul multipolar de circuit electric* cu m terminale $S_1, S_2, \dots, S_m$ părți disjuncte ale $\partial\Omega$ (Fig. 2.1). Condițiile de pe S_E și S_H se înlociesc cu următoarele condiții de frontieră:

- $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = 0$ pe toate terminalele S_k , $k = 1, 2, \dots, m$;
- $\mathbf{n} \cdot (\text{rot} \mathbf{E}) = 0$ pe frontiera $\partial\Omega$;
- $\mathbf{n} \cdot (\text{rot} \mathbf{H}) = 0$ pe frontiera $\partial\Omega$, cu excepția terminalelor;
- pe fiecare terminal S_k , cu excepția celui de referință S_m , este dată fie valoarea potențialului complex $V_k = \int_{C_{km} \in \partial\Omega} \mathbf{E} d\mathbf{r}$ fie valoarea curentului complex $I_k = \int_{\partial S_k} \mathbf{H} d\mathbf{r}$ [122], [Bermudez], [Bossavit00Nonlocal].

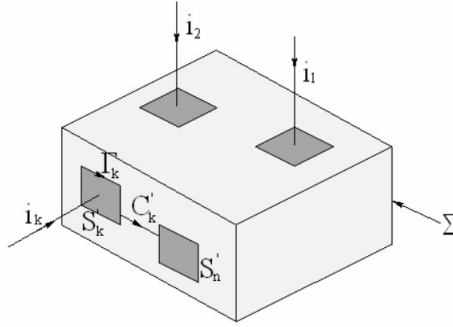


Figura 2.1: Element multipolar de circuit electric

Demonstrația se bazează pe forma complexă a teoremei energiei electromagnetice:

$$P_s = P + jQ \Rightarrow - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\Omega} (\mathbf{E} \sigma \mathbf{E}^* + j\omega (\mathbf{B} \mathbf{H}^* - \mathbf{E} \mathbf{D}^*)) \cdot d\mathbf{V} \quad (2.38)$$

În cazul elementului electromagnetic de circuit electric, integrala pe frontieră a vectorului Poynting $S_n = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*)$ are expresia:

$$P_s = - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m-1} V_k I_k^* \quad (2.39)$$

și se anulează în ipotezele lemei soluției nule, datorită condițiilor de frontieră din cele două teoreme de unicitate: $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$, V_k sau I_k . Numărul complex $P + jQ$ din membrul drept al identității energetice are, în consecință, nulă atât partea reală P cât și partea sa imaginară Q . Anularea puterii active P , implică anularea câmpului electric $\mathbf{E}$, deoarece $\sigma > 0$. Dar dacă se anulează puterea reactivă Q și câmpul electric $\mathbf{E}$, atunci se va anula și câmpul magnetic, rezultând unicitatea câmpului electromagnetic.

Chiar dacă pare excesiv de restrictivă, condiția ca domeniul să fie conductor, oricât de slab, dar să nu aibă părți perfect izolante, aceasta este justificată de faptul că în cavități izolante câmpul electromagnetic poate avea mai multe moduri distincte de a rezona, iar pentru fiecare, atât P cât și Q se anulează datorită absenței pierderilor și respectiv faptului că $\mathbf{B} \mathbf{H}^*$ și $\mathbf{E} \mathbf{D}^*$ se compensează reciproc.

În cazul elementului de circuit, teorema de unicitate garantează corecta definire și unicitatea potențialului V_k și a curentului I_k pentru fiecare terminal $k = 1, 2, \dots, m-1$. Datorită liniarității ecuațiilor, soluțiile I_k și V_k pentru terminalele controlate în potențial și respectiv în curent sunt funcții liniare complexe de datele problemei. Dacă primele n terminale sunt controlate în curent iar celelalte sunt controlate în

potențial, rezultă următoarea expresie pentru relația între semnalele de ieșire și cele de intrare:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_a \\ \mathbf{I}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{aa} & \mathbf{A}_{ab} \\ \mathbf{B}_{ba} & \mathbf{Y}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{V}_b \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

în care s-a notat cu a grupul primelor n terminale controlate în curent și cu b celălalt grup, care are $m - n$ terminale controlate în potențial. Această relație matriceală, pune în evidență funcțiile de transfer ale elementului multipolar de circuit excitat hibrid: $\mathbf{Z}_{aa}$ - matricea impedanțelor, $\mathbf{Y}_{bb}$ - matricea admitanțelor, $\mathbf{A}_{ab}$ - matricea factorilor de transfer în tensiune și $\mathbf{B}_{ba}$ - matricea factorilor de transfer în curent. Elementele acestor matrice sunt funcții complexe de frecvență, care descriu relația intrare-ieșire la diferite frecvențe, impusă de elementul multipolar electromagnetic de circuit. Definiția lor corectă este consecința teoremelelor de unicitate în regimul general variabil, dar dacă se consideră limita $\varepsilon \rightarrow 0$ atunci elementul devine anelectric și funcționează în regim MQS, fiind unul de tip inductiv-rezistiv cu $Q > 0$, în timp ce limita $\mu \rightarrow 0$ face ca elementul să devină unul amagnetic, care funcționează în regim EQS, ca un element capacitiv-rezistiv cu $Q < 0$.

O generalizare a condițiilor de frontieră se obține considerând un *element electromagnetic de circuit*. Acesta este un domeniu marginit, simplu conex, pe suprafața căruia deosebim n' suprafețe disjuncte, numite terminale electrice și încă n'' terminale magnetice. De această dată condițiile de frontieră au forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in \Sigma \setminus S''_k \\ \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{H}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in \Sigma \setminus S'_k \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in S'_k \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H}(P, t) &= 0, \quad \forall P \in S''_k \end{aligned} \quad (2.41)$$

Terminalele electrice pot fi controlate în curent, respectiv potențial:

$$i_k(t) = \int_{\Gamma_k = \partial S_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}; \quad v_k(t) = \int_{C_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.42)$$

iar cele magnetice pot fi controlate în flux respectiv tensiuni magnetice:

$$\varphi'_k(t) = \int_{\Gamma_k = \partial S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}; \quad u_k(t) = \int_{C_k} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.43)$$

De această dată puterea transferată prin frontiera domeniului este

$$P = \sum_{k=1}^{n'-1} (v_k i_k) + \sum_{k=1}^{n''} u_k \frac{d\varphi_k}{dt} \quad (2.44)$$

care evidențiază în baza lemei soluției nule toate tipurile condițiilor de frontieră trebuie impuse terminalelor (câte una pentru fiecare termen din aceste sume). Și aceasta teoremă de unicitate a fost extinsă, considerând elementul electromagnetic, multiplu conex de circuit CITATRE Timotin 71EMCE. În concluzie, constatăm importanța fundamentală a condițiilor de frontieră pentru modelarea electromagnetică. Aceste condiții trebuie să reflecte fenomenele fizice și cauzalitățile din dispozitivul de studiat. Deoarece matematica ne poate spune doar dacă o anumită condiție de frontieră este corectă sau nu, dar nu ne spune care este alegerea potrivită, această alegere trebuie făcută doar din considerente fizice, ceea ce presupune înțelegerea profundă a dispozitivului modelat și a relațiilor de cauzalitate specifice lui.

2.3 Existența și continuitatea soluției

2.3.1 Cadrul funcțional

Odată stabilite condițiile de frontieră, putem reveni la cadrul funcțional adecvat formulării corecte a problemei, pentru a exista soluție, iar aceasta să fie stabilă. Vom folosi următoarele spații funcționale:

- $L^2(\Omega) = \{u \mid \int_{\Omega} u^2 dv < \infty\};$
- $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \text{grad } u \in [L^2(\Omega)]^3\};$
- $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\};$
- $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3 \mid \text{rot } \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^3\};$

pe care le vom numi spațiile: funcțiilor de pătrat integrabil, derivabile generalizat, div-conforme și rot-conforme (http://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space). Acestea sunt spații Hilbert cu produsele scalare:

- $(u, v)_0 = \int_{\Omega} uv \, dx, u, v \in L^2(\Omega);$
- $(u, v)_1 = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx + (u, v)_0, u, v \in H^1(\Omega);$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{div}} = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \cdot \text{div } \mathbf{v} \, dx + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega);$
- $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\text{rot}} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \, dx + (\mathbf{u}, \mathbf{v})_0, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega);$

iar normele induse de acestea vor fi notate cu $\|u\|_0, \|u\|_1, \|\mathbf{u}\|_{\text{div}}, \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}}$. Așa cum am mai menționat anterior, dacă domeniul Ω este suficient de neted, de exemplu este de tip Lipschitz, atunci se poate defini urma unui element din spațiile Sobolev menționate anterior pe frontiera și se pot demonstra teoremele lui Green:

$$\bullet \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \, dx = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \, d\mathbf{A}, u \in H^1, \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}).$$

Dacă adăugăm condițiile de frontieră esențiale: Dirichlet $V = 0$, componenta normală nulă și respectiv componenta tangențială nulă se obțin subspațiile

- $H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v(\partial\Omega) = 0\};$
- $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ pe } \partial\Omega\};$
- $\mathbf{H}_0(\operatorname{rot}, \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \mid \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0 \text{ pe } \partial\Omega\}.$

Trebuie să remarcăm faptul că datorită celebrei teoreme de urmă din spațiile Sobolev (http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space), putem vorbi despre urma pe frontiera unui domeniu lipschitzian, chiar dacă valoarea locală a funcției nu are sens nici în spațiile Sobolev nici în L^2 . Urmele de pe frontieră alacătuiesc și ele un spațiu Hilbert de indice fracționar $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Pe suprafețele de discontinuitate, sunt continue:

- $v_1 = v_2$, dacă $V \in H^1(\Omega)$, continuitatea valorii;
- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_2$ dacă $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$, continuitatea componentei normale;
- $\mathbf{n} \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_2$ dacă $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$, continuitatea componentei tangențiale.

Pentru a înțelege proprietățile de transfer ale celor trei operatori de derivare spațială se introduc nucleele ($\ker$) și imaginile (Im - range) acestor operatori astfel:

- $\ker(\operatorname{grad}) := \{v \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{grad} v = 0\}; \operatorname{grad} H^1(\Omega) \subset \ker(\operatorname{rot}) :$
- $\ker(\operatorname{div}) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}; \operatorname{div} \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \subset L^2(\Omega);$
- $\ker(\operatorname{rot}) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \mid \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0\}; \operatorname{rot} \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega) \subset \ker(\operatorname{div}).$

Realizațiile de incluziune ale imaginilor menționate anterior în nuclee, se datorează identităților clasice satisfăcute doar de operatorii de derivare spațială:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0; \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0. \quad (2.45)$$

Aceste relații de incluziune devin relații de identitate, dacă domeniul Ω este un domeniu suficient de neted, de exemplu, dacă este lipschitzian, marginit și simplu conex. De exemplu, egalitatea $\ker(\operatorname{rot}) = \operatorname{grad} H^1(\Omega)$ ne spune că în aceste condiții, orice câmp irotațional are un potențial scalar al cărui gradient este, iar egalitatea $\ker(\operatorname{div}) = \operatorname{rot} \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$ spune faptul că orice câmp solenoidal are un potențial vector, al cărui rotor este. În consecință, se ajunge la teorema care dă

descompunerea Helmholtz: orice câmp vectorial $\mathbf{u}$ admite un potențial scalar V și un vector $\mathbf{A}$, adică se descompune unic în două părți ortogonale:

$$\mathbf{u} = \text{grad } V + \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.46)$$

$V \in \text{grad } H^1(\Omega)$ și $\mathbf{A} \in \text{rot } H(\text{rot}, \Omega)$, $\forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3$. Produsul scalar al celor două componente, adică integrala produsului dintre ele pe domeniul problemei are valoare nulă. În consecință, orice câmp vectorial este univoc determinat de divergența și rotorul său, teorema garantând existența și unicitatea celor două potențiale, deci buna formulare a problemei de câmp [109]. Aceasta afirmație, care se aplică, evident și câmpurilor electrice și magnetice este cunoscută sub numele de **teorema fundamentală a analizei vectoriale**, dar probabil că este una din cele mai profunde descoperiri matematice, permițând structurarea cunoștințelor noastre despre modul în care este descrisă lumea fizică.

Relațiile stabilite de operatorii diferențiali între spațiile de funcții, prezentate anterior se reprezintă printr-o elegantă construcție matematică, o secvență de operatori, numită **complexul de Rham**:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\text{rot}} \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} 0 \quad (2.47)$$

În condițiile specificate anterior pentru netezimea domeniului Ω , această secvență este exactă, adică imaginea unui operator coincide cu nucleul operatorului succesiv:

$$\begin{aligned} \ker(\text{grad}) &= \mathbb{R}; \quad \ker(\text{rot}) = \text{grad } H^1(\Omega); \\ \ker(\text{div}) &= \text{rot } \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega); \quad L^2(\Omega) = \text{div } \mathbf{H}(\text{div}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.48)$$

ceea ce garantează existența potențialelor scalar și vector. Dacă ne referim la câmpuri cu condiții pe frontiera $\partial\Omega$ esențiale nule, atunci sub-secvența de Rham:

$$\mathbb{R} \rightarrow H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega) \rightarrow \{0\} \quad (2.49)$$

își pastrează din nou caracterul exact [133].

Aplicarea complexului de Rham la mărimile câmpului electromagnetic conduce la o construcție mai elaborată, numită **diagrama lui Tonti** (2.2) [123]. Aici sunt evidențiate atât mărimile câmpurilor, corpurilor și potențialele, precum și relațiile dintre ele, impuse prin legi sau prin definiții. Spre deosebire de complexul de Rham [15] în care apar doar operatori de derivare spațială, în diagrama Tonti apar și derivatele temporale. Cele patru coloane din această diagramă, numită și casa lui Maxwell sunt de fapt secvențe de Rham. În diferite regimuri ale câmpului electromagnetic aceasta diagramă se simplifică în mod corespunzător, prin eliminarea unor coloane. Pentru mai multe detalii referitoare la acest cadru funcțional puteți consulta [133], [18], [64] sau [62].

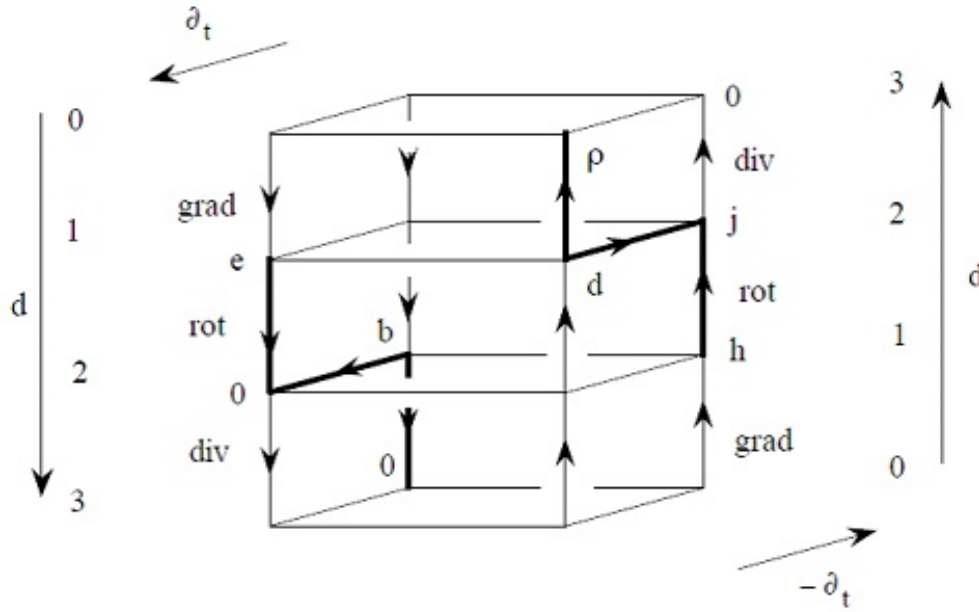


Figura 2.2: Diagrama Tonti pentru câmpul electromagnetic [18]

2.3.2 Formularea corectă a problemei *rot-rot*

Am văzut în capitolul 2.1. cum buna formulare, existența, unicitatea și stabilitatea soluției pentru forma slabă a problemelor de regim staționar cu potențial scalar este o consecință a teoremei Lax-Milgram. Singurul regim staționar care nu satisface acest cadru funcțional este cel magneto-staționar, descris de ecuațiile cu derivate parțiale:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} \Rightarrow \operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \text{ cu } \operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \nu \mathbf{B}; \end{aligned} \quad (2.50)$$

și cu condițiile de frontieră:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ pe } S_B \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \text{ pe } S_B, \quad (2.51)$$

condiție esențială (poate fi nenulă), și

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \Rightarrow \mathbf{n} \times (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \text{ pe } S_H = \partial\Omega \setminus S_B, \quad (2.52)$$

condiție naturală și care au forma slabă: $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in H_0(\text{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ pe } S_B)$, în care

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nu \text{rot } \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v} dx; \\ f(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} dx + \int_{S_H} \mathbf{u} \mathbf{J}_s d\mathbf{A}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

iar soluția $\mathbf{v}$ este căutată în sptiul H_0 (sau în cel afin, translatat față de H_0 , în cazul condiției nenule pe S_B).

Aceste relații pot fi extinse la mediile neliniare magnetic în două feluri, fie în mediile izotrope se consideră ν dependent de $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}(\text{rot} \mathbf{v})$, fie se consideră $\mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I}$, în care $\mathbf{I}$ este polarizația magnetică, dependentă de $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$. În ultimul caz, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_c - \text{rot} \mathbf{I}$ este suma dintre curentul de conducție și cel Amperian de polarizație magnetică iar $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_{cs} - \text{rot}_s \mathbf{I}$, ceea ce face ca (2.52) să devină $\mathbf{n} \times (\nu \text{rot} \mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathbf{J}_{sc}$ [78].

Funcționala din (2.53), funcționala $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ nu mai este coercivă, și în consecință potențialul magnetic vector nu este unic. Excepție face cazul 2D, cu două componente ale câmpului și o singură componentă a curentului și potențialului vector, care este automat etalonat. Deci în 3D teorema Lax-Milgram nu se poate aplica direct în cazul regimului magneto-staționar, pentru determinarea potențialului magnetic vector. Pentru a ieși din acest impas s-au găsit mai multe solutii.

- **Etalonarea Coulomb.** Așa cum s-a procedat în cazul problemei Lapalce-Poisson cu condiții pure Neumann, pentru a asigura unicitatea potențialului se folosește etalonarea acestuia. În cazul potențialului magnetic vector, aceasta se realizează prin condiția Coulomb (1.121) și prin adăugarea condiției de frontiera $A_n = 0$ pe S_B .
- **Regularizare.** O altă abordare, numită de regularizare, constă în adăugarea la funcționala biliniară a unui termen coerciv, ponderat cu un parametru ε [Costabel91]:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nu \text{rot } \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{v} dx + \varepsilon \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} dx. \quad (2.54)$$

Condiția de coercitivitate este acum îndeplinită din nou și problema este bine formulată, oricât de mic ar fi ε . Soluția găsită este apoi trecută la limită pentru $\varepsilon \rightarrow 0$.

- **Cu multiplicator Lagrange.** În cazul formei slabe de tip *rot-rot*, altă abordare posibilă constă în extinderea teoremei Lax-Milgram, astfel încât extensia să poată fi aplicată la probleme variaționale cu multiplicatori Lagrange,

care nu au puncte de minim, ci puncte critice de tip γ . O astfel de extensie este realizată de teorema lui Brezzi, ceea ce permite să se demonstreze că problemele de câmp magnetic vectorial cu soluție unică, în forma lor slabă sunt bine formulate. [20], [133], [64], [109].

- **Cu potențial scalar redus.** O altă abordare diferită pentru analiza câmpului în regim MG constă în folosirea potențialului magnetic scalar redus [78]. În această lucrare sunt prezentate pe lângă acest potențial și alte formulări, cu diferite potențiale ale câmpului în regim MQS.

Asupra acestor aspecte vom mai reveni, în capitolul următor, când vom discuta despre construcția efectivă a soluției numerice.

2.3.3 Regimuri variabile.

Problemele de regim variabil cer și ele un cadru funcțional adecvat, dar pentru a simplifica lucrurile vom discuta buna lor formulare, după reprezentarea în complex sau în operațional, prin transformata Laplace. Cadrul funcțional adecvat și demonstrarea bunei formulări în regim magneto-quasi-static MQS tranzitoriu este prezentată în

[26]. O altă abordare constructivă constă în discretizarea derivatelor față de timp, care apar în ecuațiile regimurilor variabile în timp, cu diferențe finite implicite. La fiecare pas de timp trebuie rezolvată o ecuație cu derivate parțiale *div-grad* sau *rot-rot*, de tip Helmholtz, care, după cum se va demonstra mai jos, este corect formulată. În condițiile în care convergența discretizării în timp este asigurată, există și limita, care este soluția problemei continue. Detalii privind această abordare vor fi date în capitolul 3, referitor la modelarea numerică.

Tot la o ecuație Helmholtz se ajunge, dacă regimul tranzitoriu al câmpului electromagnetic este analizat prin metode operaționale, bazate pe transformate de tip Fourier sau Laplace, iar în particular, folosind aproximările discrete: Discrete Fourier Transform - DFT, sau Fast Fourier Transform - FFT (http://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform).

Formularea corectă pentru ecuația Helmholtz. În regim armonic, după reprezentarea în complex, câmpul satisface ecuațiile (1.158-1.161) de tip Helmholtz:

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} \mathbf{u}) + \gamma \mathbf{u} = \mathbf{J} \quad (2.55)$$

cu condiții de frontieră de tipul:

$$\begin{aligned} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{g} \text{ pe } S_N; \\ \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= \mathbf{h} \text{ pe } S_D = \partial\Omega - S_N. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Forma slabă a acestei probleme caută soluția $\mathbf{u}$ în $H_D(\text{curl}, \Omega, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{h}$ pe S_D) a.î.

$$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dx + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} + \int_{S_N} \mathbf{u} \mathbf{h} d\mathbf{A}, \quad (2.57)$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_{D0}(\text{curl}, \Omega, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ pe } S_D).$$

Deoarece funcționala biliniară (mai corect spus forma sesquilineară, pentru că este complexă) este marginită și coercivă, condițiile teoremei Lax-Milgram sunt îndeplinite cu constantele [109]:

$$c = \min \left\{ \inf_{x \in \Omega} \mu^{-1}(x), \inf_{x \in \Omega} \gamma(x) \right\} \quad (2.58)$$

$$C = \max \left\{ \sup_{x \in \Omega} \mu^{-1}(x), \sup_{x \in \Omega} \gamma(x) \right\}$$

și în consecință problema are soluție, iar aceasta este stabilă.

Revenind în domeniul timpului, constatăm că multe dintre problemele practice, atât de regim tranzitoriu cât și de regim armonic sunt probleme de curenți turbionari. La acestea domeniul modelat are o parte conductoare (D_c) și o parte izolantă, de obicei aer (D_a), dar care este sediul unor curenți cu densitate cunoscută $\mathbf{J}_0$. În consecință, regimul câmpului este MQS în conductor și MG în izolat (Fig. ...), având ecuațiile:

$$D_a : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad D_c : \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (2.59)$$

Legătura dintre ele este realizată de condițiile de interfațare de pe suprafața:

$S_{ac} : \nabla_s \cdot \mathbf{B} = 0; \nabla_s \times \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_c \cdot (\mathbf{B}_a - \mathbf{B}_c) = 0; \mathbf{n}_c \times (\mathbf{H}_a - \mathbf{H}_c) = 0 \Rightarrow B_{an} = B_{cn}; \mathbf{H}_{at} = \mathbf{H}_{ct}$, la care se adaugă faptul că pe această suprafață, componenta normală a curentului se conservă, deci curenții bin conductor satisfac condiția de frontieră : $S_{ac} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$.

Domeniul de calcul $\Omega = D_a \cup D_c$ este mărginit de frontiera $\partial\Omega = S_{Ha} \cup S_B \cup S_{Hc} \cup S_E$ partiționată în primele două fețe de pe frontiera domeniului neconductor și ultimele două pe frontiera domeniului conductor, pe care sunt îndeplinite condițiile de frontieră:

$S_{Ha} : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s$, dar de obicei frontiera nu este pânză de curent și $S_{Hc} : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$,

condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie pe care liniile de câmp pică perpendicular sau la suprafața domeniilor feromagnetice ideale;

$S_B : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = b$, dar de obicei $S_B : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie pe care liniile de câmp se preling fără să le traverseze, sau pe suprafețele aflate la depărtare suficient de mare, ca valoarea componentei normale a inducției să se anuleze.

$S_{Hc} : \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$, condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie pe care liniile de câmp pică perpendicular sau la suprafața domeniilor feromagnetice ideale;

$S_E : \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, condiție îndeplinită pe suprafețele de simetrie sau nu, care sunt echipotențiale electric (de exemplu, pe electrozii de potențial cunoscut), pe care liniile de câmp electric pică perpendicular.

Consecință a acestor condiții, rezultă: $S_{Hc} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$; $S_E : \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$, ceea ce înseamnă că S_{Hc} este marginea conductorului spre un dielectric, iar S_E nu este traversată de linii ale câmpului magnetic.

Exprimând câmpul magnetic din D_a în funcție de potențialul său vector $\mathbf{A}$ și câmpurile electric și magnetic din D_c , în funcție de potențialul vector $\mathbf{A}$ și cel scalar V se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} D_a : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 ; \\ \mathbf{H} = \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} \end{array} \right. \\ D_c : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{I} \\ \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Din care, după eliminarea densității de curent și a câmpului electric, se obțin ecuațiile:

$$\begin{aligned} D_c : \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla \times \mathbf{I} &= 0; \\ \nabla \cdot \left(\sigma \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

satisfăcute de $\mathbf{A}$ - V în D_c , la care se adaugă ecuația potențialului $\mathbf{A}$ din D_a :

$$\nabla \times (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nu_0 \nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0. \quad (2.62)$$

După cum se va vedea în paragraful 3.6.1, introducerea în ecuații a termenilor care conțin divergența potențialului vector nu fac decât să întărească condiția de

etalonare a lui Coulomb.

Condițiile de frontieră și de interfață ale acestor trei ecuații sunt următoarele:

$$S_{Ha} : \nu_0(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0; \quad (2.63)$$

$$S_B : \mathbf{n} \times \mathbf{A} = \alpha; \quad \text{dar de obicei } S_B : \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.64)$$

$$S_{Hc} : (\nu \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{I}) \times \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.65)$$

$$S_E : \mathbf{n} \times \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0; \quad V = V_0; \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} S_{ac} : \mathbf{n}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_a - \nabla \times \mathbf{A}_c) &= 0; \\ \mathbf{n}_c \times (\nu_0(\nabla \times \mathbf{A}_a) - \nu \nabla \times \mathbf{A}_c + \mathbf{I}) &= 0; \\ \mathbf{n}_c \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}_c}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Forma slabă a acestor ecuații, în care potențialul vector satisface implicit condiția de etalonare Coulomb este:

$$\begin{aligned} & \int_{Da} (\nu_0(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu_0 \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A}) d\Omega + \\ & + \int_{Dc} \left(\nu(\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu \nabla \cdot \mathbf{W} \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \mathbf{W} \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \\ & \int_{Da} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_0 d\Omega - \int_{Dc} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{I} d\Omega + \int_{S_{Ha}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_s dS \\ & \int_{Dc} \sigma \nabla N \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Aici s-a notat cu $\mathbf{W}$ o funcție arbitrară de test vectorială și cu N o funcție arbitrară de test scalară, dar care satisfac următoarele condiții esențiale de frontieră:

$$S_{Hc} \cup S_{Ha} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{W} = 0; \quad S_E \cup S_B : \mathbf{n} \times \mathbf{W} = 0; \quad S_E : N = 0. \quad (2.69)$$

Dacă domeniul conductor are conductivitatea σ constantă, atunci potențialul scalar V poate fi ales nul, iar soluția problemei este dată doar de potențialul vector $\mathbf{A}$, definit în întregul domeniu de calcul.

Dacă potențialul vector nu este etalonat, problema nu are soluție unică. Chiar și

așa, după cum se va vedea în capitolul următor, această problemă neetalonată stă la baza unor metode de calcul numeric mai eficiente decât cele bazate pe potențial vector etalonat. Deoarece din ecuații dispar în acest caz cei doi termeni, care se referă la divergența potențialului vector, ei dispar și din forma slabă neetalonată, care devine mai simplă:

$$\begin{aligned} & \int_{D_a} \nu_0 (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega + \\ & + \int_{D_c} \left(\nu (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \mathbf{W} \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) d\Omega = \\ & = \int_{D_a} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{T}_0 d\Omega - \int_{D_c} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot \mathbf{Id} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Pentru a descrie curenții sursă, aici s-a folosit potențialul lor vector $\mathbf{T}_0$:

$$\nabla \times \mathbf{T}_0 = \begin{cases} \mathbf{J}_0 & \text{în } D_a \\ 0 & \text{în } D_a \end{cases} \quad \text{cu } \mathbf{T}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \text{ pe } S_{Ha}. \quad (2.71)$$

Aceasta face ca distribuția de curent, dată a problemei să fie implicit strict solenoidală, chiar și în urma aproximărilor datorate rotunjirilor, trunchierilor sau altor erori numerice.

Evident că aceste relații se transformă în ecuații complexe, atunci când se preferă studiul în domeniul frecvenței, prin transformată Laplace sau reprezentare în complex.

Discuția privind modul efectiv de formulare a problemei și de găsim a soluției în regimurile dinamice va fi aprofundată în capitolul următor dedicat abordărilor numerice.

2.3.4 Formulări complementare

O abordare funcțională diferită, pentru problemele de câmp magnetic este propusă în [21]. Aici se operează cu ambele câmpuri $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ ca necunoscute (sau cu potențialele lor, lucru ce asigură satisfacerea automată a ecuațiilor regimului magnetostatic), minimizarea aplicându-se erorii cu care este satisfăcută ecuația constitutivă de legătură între $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$. Definind funcționala care va fi minimizată ca norma reziduului ecuației constitutive, rezultă:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{B}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\mathbf{B} - f(\mathbf{H})]^2 dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\text{rot} \mathbf{A} - f(-\text{grad } V_m)]^2 dv, \forall \mathbf{B} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega), \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Abordarea poate fi extinsă și în regimul magneto-staționar, dacă la funcțională se adaugă factori penalizanti, care descriu constrângerile impuse de relațiile Gauss și Ampère:

$$F(\mathbf{B}, \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} [\mathbf{B} - f(\mathbf{H})]^2 + \frac{k_1}{\mu} (\operatorname{div} \mathbf{B})^2 + k_2 \mu (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J})^2 \right] dv. \quad (2.73)$$

În cazul afin, funcționala devine:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{B}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} [\mathbf{B} - \mu \mathbf{H} - \mathbf{B}_r]^2 dv \Rightarrow dF(\mathbf{B}, \mathbf{H}) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} - \mu \mathbf{H} - \mathbf{B}_r) d(\mathbf{B} - \mu \mathbf{H}) dv = 0, \\ \forall d\mathbf{B} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega), \quad d\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega), \end{aligned} \quad (2.74)$$

care implică următoarele forme variaționale pentru cele două potențiale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu (\operatorname{rot} \mathbf{A} - \mu \operatorname{grad} V - \mathbf{B}_r) \operatorname{rot} \mathbf{A}' dv &= 0, \\ \int_{\Omega} (\mu \operatorname{grad} V - \operatorname{rot} \mathbf{A} + \mathbf{B}_r) \operatorname{grad} V' dv &= 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Deoarece, conform teoremei lui Tellegen, câmpul $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ sunt ortogonale, ecuațiile (2.75), satisfăcute de cele două potențiale capătă următoarele forme slabe, mai simple:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nu \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \operatorname{rot} \mathbf{A}' dv &= 0, \\ \int_{\Omega} (\mu \operatorname{grad} V + \mathbf{B}_r) \operatorname{grad} V' dv &= 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

În această abordare, sunt analizate simultan cele două formulări complementare pentru potențialul vector și pentru potențialul scalar al câmpului magnetic, iar erorile de metodă sunt transferate caracteristicii de material. O astfel de abordare se poate aplica și câmpurilor electrostatice sau electrocinetice. Fiecare din perechile formate din câmpurile $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$, sau respectiv $(\mathbf{E}, \mathbf{J})$ se reprezintă prin potențialele "complementare" scalar V sau vector $\mathbf{T}$.

Faptul că cele două reprezentări duale sunt echivalente este evident în cazul regimului electrocinetic, în care $\mathbf{E}$ este irotațional și $\mathbf{J}$ este solenoidal. Nu există deci un motiv profund care să privilegieze reprezentarea coulombiană (prin V) față de cea amperiană (prin $\mathbf{T}$), în afara celui pragmatic, în baza căruia V fiind scalar are doar o componentă, față de $\mathbf{T}$, care fiind vector are 3 componente, în cazul general

3D. În cazul 2D și acest motiv dispare, deoarece $\mathbf{T}$ are și el o singură componentă. Când se folosește potențialul scalar V , pe suprafața de frontieră S_E se impune o condiție Dirichlet pentru acest potențial, iar pe $S_J = \partial\Omega - S_E$ se impun condiții Neumann. În schimb, când se folosește potențialul vector, lucrurile se inversează: condiția de frontieră pe S_E este de tip Neumann - se referă la derivata potențialului vector, mai exact $\mathbf{E}_t = \rho \mathbf{J}_t = \rho \mathbf{n} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{n}) = \rho \mathbf{n} \times (\text{rot} \mathbf{T} \times \mathbf{n})$ în timp ce condiția de frontieră pe S_J este de tip Dirichlet - se referă la $\mathbf{T}_t$, iar $\mathbf{J}_n = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{T}_t$. Dualitatea reprezentărilor complementare se păstrează și în cazul regimurilor electrostatic și magneto-staționar, chiar dacă aparent în primul este preferată reprezentarea coulombiană prin potențialul scalar (datorită faptului că $\mathbf{E}$ este irotațional), iar în al doilea caz este preferată reprezentarea amperiană, prin potențialul vector $\mathbf{A}$ (datorită faptului că $\mathbf{B}$ este solenoidal). Din considerente de simetria dualității, câmpul electrostatic poate fi reprezentat la fel de bine prin potențialul vector redus $\mathbf{T}'$ al inducției electrice: $\mathbf{D} = \mathbf{D}_s + \text{rot} \mathbf{T}'$, cu $\text{div} \mathbf{D}_s = \rho$, iar câmpul magnetostationar prin potențialul scalar redus ϕ' al intensității câmpului magnetic: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \text{grad} \phi'$, cu $\text{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}$. În fiecare regim, cele două formulări duale reprezintă "fața longitudinală" (fața $\mathbf{E}$ sau $\mathbf{H}$) respectiv "fața transversală" (fața $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ sau $\mathbf{J}$) a câmpului din regimul respectiv.

Cele două reprezentări complementare au nu numai o importanță teoretică ci și una practică, fiecare generând o metodă diferită de calcul numeric, pentru care cele două soluții duale sunt încadrări ale soluției exacte.

În concluzia acestui capitol, indicăm spațiile de funcții, cărora le aparțin diferitele mărimi locale ale câmpului electromagnetic:

- intensitatea câmpului electric și magnetic: $\mathbf{E} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega); \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega);$
- inducția electrică și magnetică: $\mathbf{D} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \mathbf{B} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega);$
- potențialul electric scalar: $V \in H^1(\Omega)$, cu $\mathbf{E} = -\text{grad} V;$
- potențialul magnetic scalar: $V_m \in H^1(\Omega)$, cu $\mathbf{H} = -\text{grad} V_m;$
- potențialul magnetic vector: $\mathbf{A} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, cu $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}.$
- potențialul vector al densității de curent: $\mathbf{T} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, cu $\mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{T};$

Bineînțeles că în cazul fiecărei probleme modelate, intervin restricții suplimentare, referitoare în primul rând la condițiile de frontieră esențiale. Trebuie să remarcăm că determinarea câmpurilor cu potențial vector cere o atenție deosebită, deoarece abordarea scalară, pe componente nu dă rezultate bune, după cum se va vedea în capitolul următor. Soluția acestor probleme nu trebuie căutată în $[H^1(\Omega)]^3$, ci în $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, deci trebuie să fie rot-conformă.

În Tabelul 2.1 sunt sintetizate formele tari și cele slabe: $a(v, u) = f(u)$, $\forall u \in H_0g$ ale principalelor ecuații întâlnite în diferite regimuri ale câmpului electromagnetic. Funcționalele de energie sunt $F(v) = (1/2)a(v, v) - f(v)$. În literatură se întâlnesc multe alte formulări, specifice diferitelor probleme concrete, care au fiecare diverse avantaje. Ele nu trebuie privite ca rețete, ci ca exemple de raționamente, prin care, pornind de la fenomenele fizice esențiale se realizează modelarea matematică a dispozitivului analizat, adică se formulează corect problema de câmp în termeni exclusiv matematici.

Regimul	soluția:	Ecuatia de ord. II	$a(u, v)$ $f(v)$	Spatul H_g al funcțiilor de încercare Spatul H_0^g al funcțiilor de test
ES:	V	$\nabla (\varepsilon \nabla V) = -\rho + \nabla \mathbf{P}_p$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx$ $\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MS:	V_m	$\nabla (\mu \nabla V_m) = \nabla \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MS:	$\mathbf{A}$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \nu \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx$ $\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
EC:	V	$\nabla (\sigma \nabla V) = \nabla (\sigma \mathbf{E}_i)$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx$ $\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
EC:	$\mathbf{T}$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{T}) = \nabla \times \nu \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx$ $\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MG:V'	$\mathbf{A}$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J} + \nabla \times \nu \mathbf{B}_r$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx$ $\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
EQS:	V	$\nabla \left(\sigma \nabla V + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \nabla V) \right) = \nabla \left(\mathbf{J}_i + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_p \right)$	$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx$ $\int_{\Omega} \rho u \, dv + \int_{\partial\Omega} u \, g \, dA$	$\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = u_0(x), \forall x \in S_D\}$ $\{u \in H_1(\Omega) \mid u(x) = 0, \forall x \in S_D\}$
MQS:	$\mathbf{A}, V$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{J}_i = \nabla \times (\nu \mu_0 \mathbf{M}_p) + \sigma \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \right)$ $\nabla (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \mathbf{J}_i \Rightarrow -\nabla (\sigma \nabla V) = \nabla \left(\sigma \frac{d\mathbf{A}}{dt} - \mathbf{J}_i \right)$	$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dx$ $\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} \, dx + \int_{S_H} \mathbf{u} \mathbf{J}_s \, d\mathbf{A}$	$H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{A}_t \text{ pe } S_B)$ $H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ pe } S_B)$
ED:	$\mathbf{A}, V$	$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}; \Delta V - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dx$ $\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} \, dx + \int_{S_H} \mathbf{u} \mathbf{J}_s \, d\mathbf{A}$	$H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{A}_t \text{ pe } S_B)$ $H_0(\operatorname{rot}, \Omega, \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0 \text{ pe } S_B)$
EDC:	$\mathbf{A}, V$	$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = (\sigma + j\omega\varepsilon) (-j\omega \mathbf{A} + \nabla V)$	$\int_{\Omega} \nu \operatorname{rot} \mathbf{u} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dx + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} \, dx$ $\int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{J} + \int_{S_N} \mathbf{u} \mathbf{h} \, d\mathbf{A}$	$H_{D0}(\operatorname{curl}, \Omega, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ pe } S_D)$ $H_{D0}(\operatorname{curl}, \Omega, \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \text{ pe } S_D)$

Tabela 2.1: Formele tari și slabe ale ecuațiilor regimurilor câmpului el-mg

2.4 Întrebări privind modelarea matematică

1. În ce constă modelarea matematică? Ce etape o preced și ce o urmează? De la ce pornește și ce rezultat are? Care sunt sub-etapele ei? Care este cea mai importantă sub-etapă?
2. De ce natură sunt datele și necunoscutele unei probleme de analiză a câmpului electromagnetic? Dar în cazul unei probleme inverse?
3. Care este definiția domeniului de calcul? Ce cazuri particulare se pot întâlni în practică? Cum se exploatează simetria problemei pentru a reduce externalitatea și numărul de dimensiuni? Ce înțelegem prin probleme plan paralele? Dar prin probleme axisimetrice? Cum se pot descrie forma și dimensiunile unui domeniu de calcul? Menționați câteva programe CAD și formatele fișierelor de descriere a geometriei folosite de acestea. Din ce este alcătuit domeniul de calcul? Ce condiții trebuie să îndeplinească domeniul de calcul într-o modelare electromagnetică?
4. Cum se descriu caracteristicile de material într-o problemă de analiza câmpului. Cum se clasifică materialele în electromagnetism și cum se caracterizează ele din punct de vedere matematic?
5. Care sunt sursele interne de câmp, întâlnite în modelarea electromagnetică? Cum se descriu aceste surse din punct de vedere matematic?
6. Care sunt sursele externe de câmp, întâlnite în modelarea electromagnetică? Cum se descriu aceste surse din punct de vedere matematic? Ce mărimi fizice pot fi condiții de frontieră? Alegerea condițiilor de frontieră se face din considerente fizice sau matematice?
7. Dați exemple de câmpuri produse exclusiv de sursele lor anterioare. Care sunt sursele anterioare de câmp, întâlnite în modelarea electromagnetică? Cum se descriu aceste surse d.p.d.v. matematic? Ce mărimi fizice pot fi condiții inițiale? Ce legătură există între condițiile inițiale și variabilele de stare? Care este dimensiunea spațiului stărilor într-o problemă de câmp ?
8. În ce constă soluția unei probleme de analiza câmpului. Cum este descrisă din punct de vedere matematic soluția problemei de câmp? Dați exemple de necunoscute principale și de necunoscute derivate.
9. În ce constă formularea corectă a unei probleme de câmp. Care sunt cele trei condiții de bună formulare și cum pot fi prezentate acestea din punct de vedere matematic. Care este importanța lor relativă?

10. Ce înseamnă o teoremă de existență a soluției? De câte feluri sunt aceste teoreme? Cum pot fi ele demonstrate? Care este deosebirea dintre o demonstrație constructivă și una abstractă. Dați câteva exemple de existențe demonstrate constructiv. Dați câteva exemple de probleme fără soluție.
11. Ce înseamnă o teoremă de unicitate a soluției unei probleme de câmp? Cum pot fi demonstrate teoremele de unicitate ale câmpului el-mg? Ce înseamnă lema soluției banale? Cum este folosită ea la demonstrarea unicității? În ce condiții se folosește această leamnă pentru demonstrarea unicității. Dați câteva exemple de probleme cu mai multe soluții.
12. Ce înseamnă o teoremă de stabilitate a soluției unei probleme de câmp? În ce constă exemplul lui Hadamard? Care este importanța practică a stabilității? Ce înseamnă numărul de condiționare? Care este importanța sa practică? Cum pot fi demonstrate teoremele de stabilitate ale câmpului electromagnetic? Dați câteva exemple de probleme cu soluții instabile și de probleme slab condiționate.
13. În ce constă forma tare a ecuațiilor problemelor de câmp electromagnetic. Ce condiții trebuie să îndeplinească soluția unei ecuații, scrisă în forma sa tare? Dați exemple de ecuații în forma tare, scrise pentru diferite regimuri ale câmpului. Cum sunt tratate în acest caz condițiile de interfață (de trecere prin suprafețele de discontinuitate)?
14. În ce constă forma slabă a ecuațiilor unei probleme de câmp electromagnetic. Cum se obține forma slabă a ecuațiilor? Comparați formele tare și slabă și indicați principalele caracteristici ale fiecăreia. Dați exemple de ecuații în forma slabă, scrise pentru diferite regimuri ale câmpului. De ce este numită aceasta forma și variațională? Ce înțelegem prin funcții de încercare și prin funcții de test? Dar prin condiții de frontieră naturale și esențiale? În ce condiții sunt echivalente formulările variaționale prin minimizare, de tip Ritz cu cel prin proiecție, de tip Galerkin? Dați exemple.
15. Enunțați Teorema Lax-Milgram și indicați importanța ei pentru modelarea electromagnetică. Care sunt cele două condiții ale acestei teoreme? Cum pot fi ele demonstrate, în cazul cel mai simplu al modelării electromagnetice? Dați contraexemple.
16. Enunțați teorema de bună formulare a problemei *div-grad*. Ce importanță are această teoremă pentru modelarea electromagnetica? În ce regimuri intervine ea?

17. Enunțați o teoremă de unicitate pentru regimul electrostatic ES. Care este principiul demonstrării ei? Dați exemple de probleme din acest regim, care au soluție unică și de probleme care nu au soluție unică. La ce alte regimuri se aplică această teoremă, prin similitudine? Ce alte teoreme de unicitate pentru acest regim mai cunoașteți?
18. Enunțați o teoremă de unicitate pentru regimul magneto-staționar MG. Care este principiul demonstrării ei? În ce condiții obținem unicitatea potențialului magnetic vector? Dați exemple de probleme din acest regim, care au soluție unică și de probleme care nu au soluție unică. La ce alte regimuri se aplică această teoremă? Ce alte teoreme de unicitate pentru acest regim mai cunoașteți?
19. Enunțați o teoremă de unicitate pentru regimul magneto-qvasi-staționar MQS. Care este principiul demonstrării ei? În ce condiții obținem unicitatea potențialului magnetic vector și a celui scalar? Dați exemple de probleme din acest regim care au soluție unică și de probleme care nu au soluție unică. Ce alte teoreme de unicitate pentru acest regim mai cunoașteți? Cum arată teorema de unicitate pentru regimul EQS?
20. Enunțați o teoremă de unicitate pentru regimul electrodinamic general-variabil ED. Care este principiul demonstrării ei? În ce condiții obținem unicitatea potențialelor electrodinamice? Dați exemple de probleme din acest regim, care au soluție unică și de probleme care nu au soluție unică. Ce alte teoreme de unicitate pentru acest regim mai cunoașteți? Cum se enunță teorema de unicitate pentru Elementul Electromagnetic de Circuit - EMCE? Ce implicații are unicitatea caracterul multiplu conex al domeniului.
21. Enunțați o teoremă de unicitate pentru câmpul sinusoidal reprezentat în complex, din regimul electrodinamic general-variabil EDC. Care este principiul demonstrării ei? Discutați particularizarea ei în cazul fără pierderi și în regimurile MQS, EQS. În ce condiții obținem unicitatea potențialelor electrodinamice? Dați exemple de probleme din acest regim, care au soluție unică și de probleme care nu au soluție unică. Ce alte teoreme de unicitate pentru acest regim mai cunoașteți? Cum se enunță teorema de unicitate pentru Elementul Electromagnetic de Circuit - EMCE în regim armonic? Ce implicații are unicitatea câmpului în acest caz?
22. Care sunt principalele spații funcționale întâlnite în modelarea electromagnetică. Ce înseamnă un spațiu Banach, Hilbert, Lebesgue, Sobolev? În ce constă deosebirea esențială între abordarea clasică și cea funcțională? Ce înțelegem prin spații Sobolev rot-conforme și div-conforme. Care este

importanța teoremei urmei în spațiile Sobolev. Care sunt relațiile Gauss, Stokes și Green? Care sunt condițiile de trecere pe suprafețele de discontinuitate. Din ce spații fac parte diferitele mărimi locale ale câmpului și potențialele lor?

23. În ce constă descompunerea Helmholtz a unui câmp vectorial. Discutați existența potențialului scalar și a celui vector și despre importanța cunoașterii rotorului și divergenței unui câmp. Explicați importanța descompunerii Helmholtz. Care sunt formele generalizate ale teoremei Helmholtz de descompunere?
24. Care sunt nucleul și imaginea (codomeniul) operațiilor de derivare spațială: *grad*, *div*, *rot*? Care sunt relațiile între aceste spații? În ce constă complexul de Rham? În ce condiții este această secvență exactă și ce înseamnă acest lucru?
25. Cum se aplică complexul de Rham la modelarea electromagnetică? În ce constă diagrama Tonti și de ce poartă ea numele de casa lui Maxwell? Cum arată această diagramă în diferite regimuri ale câmpului electromagnetic?
26. Enunțați teorema de bună formulare a problemei *rot-rot*. Ce importanță are această teoremă pentru modelarea electromagnetică? În ce regimuri intervine ea? Dați exemple de probleme vectoriale prost formulate.
27. Enunțați teorema de bună formulare a problemei cu ecuație Helmholtz. Ce importanță are această teoremă pentru modelarea electromagnetică? În ce regimuri intervine ea? Dați exemple de probleme prost formulate, cu ecuații Helmholtz. Care este forma slabă a ecuațiilor câmpului armonic din elementul electromagnetic de circuit și care este spațiul funcțiilor de test, în acest caz? Completați Tabelul (2.1) cu un rând referitor la formularea $T - V_m$ a ecuațiilor regimului MQS.
28. Enumerați minim trei cărți sau articole, pe care le considerați importante pentru înțelegerea modelării matematice în electromagnetism.

Capitolul 3

Modelarea cu MEF

3.1 Concepte fundamentale

3.1.1 Definiția elementului finit

Cadrul natural de descriere a metodei elementului finit pentru analiza numerică a problemelor de câmp este forma variațională slabă, de tip Galerkin prezentată anterior, în care problema este reformulată astfel: găsiți $v \in X$, a.î. $a(v, u) = f(u)$, $\forall u \in X$.

Așa cum este normal, în urma discretizării, soluția problemei este căutată într-un spațiu finit dimensional, pe care o să îl notăm X_h . Dacă $X_h \subset X$, atunci spunem că discretizarea este conformă, iar soluția numerică se obține prin rezolvarea unei probleme, similară cu cea anterioară:

$$\text{găsiți } v_h \in X_h, \text{ a.î. } a(v_h, u_h) = f(u_h), \forall u_h \in X_h. \quad (3.1)$$

De regulă, h este un parametru real, care descrie discretizarea (de exemplu, norma rețelei, definită ca lungimea laturii maxime), iar în condiții rezonabile, dacă $h \rightarrow 0$, atunci soluția numerică $u_h \in X_h$ converge către soluția exactă $u \in X$, deci $X_h \rightarrow X$.

X_h fiind un spațiu finit dimensional, elementele sale se exprimă prin combinații liniare ale *funcțiilor de bază* (numite și "funcții de formă" sau funcții de încercare, sau interpolare) : $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$:

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i^h \varphi_i, \quad (3.2)$$

în care numerele u_i se numesc *grade de libertate*. Trebuie să remarcăm un fapt neplăcut, în literatură unii autori notează cu N_i gradele de libertate, în timp ce

alții folosesc această notație pentru funcțiile de formă. Oricum spațiul funcțiilor de formă și cel al gradelor de libertate sunt duale, iar soluția numerică este "produsul scalar", mai corect produsul de dualitate al elementelor din cele două spații duale. Dacă înlocuim această expresie în (3.1), se obține sistemul de N ecuații algebrice liniare:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (3.3)$$

cu $\mathbf{A} = [a(\varphi, \varphi_j)] \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathbf{f} = [f(\varphi_j)] \in \mathbb{R}^N$ și $\mathbf{u} = [u_i^h] \in \mathbb{R}^N$.

Metoda elementului finit este o metodă de tip Galerkin, cu următoarele *trei caracteristici definitorii* [133]:

- Domeniul $\bar{\Omega} \in \mathbb{R}^d$ cu $d = 1, 2$ sau 3 mărginit, cu frontiera netedă pe porțiuni este acoperit de o triangulație $\mathcal{T}_h$, de exemplu o reuniune disjunctă de elemente poliedrale sau poligonale K ;
- Spațiul X_h constând din polinoame definite pe porțiuni, mai exact restricția funcției $u_h \in X_h$ pe elementul $K \in \mathcal{T}_h$ este un polinom de variabilele spațiale x, y și/sau z ;
- X_h are o bază φ cu suport local, numite funcții de formă, de exemplu funcțiile polinomiale definite pe porțiuni, care se anulează în toate elementele $K \in \mathcal{T}_h$, cu excepția celor care au un element geometric comun (nod, latură sau față).

Pe scurt, în metoda elementului finit domeniul de calcul mărginit este discretizat de o triangulație, iar soluția este căutată sub forma unor polinoame de variabilele spațiale, definite pe fiecare celulă a triangulației, necunoscutele problemei numerice fiind referitoare la nodurile, laturile sau fețele triangulației.

Ultima condiție face ca matricea $\mathbf{A}$ a sistemului liniar să fie una rară. În metoda Galerkin aplicată ecuațiilor eliptice, această matrice este simetrică și pozitiv definită.

Spunem că o triangulație $\mathcal{T}_h = (K_i)$, $i \in I$ este regulată (conformă), dacă îndeplinește următoarele trei condiții:

- elementele nu se suprapun $Int(K_i) \cap Int(K_j) = \emptyset$, $\forall i \neq j$;
- elementele acoperă domeniul de calcul $\bigcup_{i \in I} K_i = \bar{\Omega}$;
- nu sunt permise noduri agățate pe laturi, adică intersecția a două elemente $K_i \cap K_j$, pentru $i \neq j$ este fie în nod, o latură sau față care aparține ambelor elemente.

Se vor folosi următoarele notații:

- $\mathcal{V}$ - mulțimea celulelor V_i , în particular V_K - interiorul elementului K ;
- $\mathcal{F}$ - mulțimea fețelor F_i , în particular F_K - fețele elementului K ;
- $\mathcal{E}$ - mulțimea laturilor E_i , în particular E_K - laturile elementului K .
- $\mathcal{N}$ - mulțimea nodurilor N_i , în particular N_K - nodurile elementului K .

Acest preambul permite să *definim elementul finit prin tripletul* (K, P_T, Σ_T) , în care:

- $K \in \mathbb{R}^n$ este celula elementară din triangulație;
- P_T este un spațiu finit dimensional φ al funcțiilor de interpolare (de "bază" sau de "formă") definite pe K ;
- Σ_T este o mulțime de variabile, baza spațiului P'_T , dualul spațiului P_T , numite grade de libertate, soluția numerică din K fiind produsul de dualitate.

Asta înseamnă că la scară globală, soluția FEM este descrisă de tripletul: triangulația $\mathcal{T}_h$ a domeniului de calcul, mulțimea funcțiilor de formă - definită fiecare pe domeniul de calcul (dar cu suport redus la câteva celule adiacente) și vectorul dual al gradelor de libertate, cu semnificațiile lor geometrice (ele fiind asociate nodurilor, muchiilor, fețelor sau volumelor). Spunem că funcțiile de formă alcătuiesc o bază nodală, dacă gradele de libertate sunt valorile din noduri ale soluției numerice, respectiv funcțiile de bază au valorile $\varphi_j(N_i) = \delta_{ij}$, în nodurile $N_1, N_2, \dots, N_k$ ale triangulației.

3.1.2 Formularea corectă a problemei discrete

Trebuie să remarcăm că în condiții de conformitate, funcționala biliniară a moștenește caracteristicile de simetrie, marginire și coercitivitate și în subspațiul $X_h \subset X$, și în consecință conform teoremei Lax-Milgram, problema discretă este *bine formulată*, având și ea soluție, aceasta este unică și continuă față de date. Prin discretizare FEM, forma slabă a ecuației de rezolvat devine $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, cu $a(.,.)$ simetrică, marginită și coercivă. Aceasta este de fapt forma slabă a sistemului de ecuații liniare, cu matricea $\mathbf{A} : \mathbf{v}^T(\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{v}^T \mathbf{f}$. În consecință, matricea $\mathbf{A}$ a sistemului generat prin discretizare FEM este simetrică și pozitiv definită (are valori proprii mai mari sau egale cu constanta c de coercitivitate), deci este inversabilă (condiția de marginire nu are relevanță în spațiul finit dimensional, deoarece este implicită) http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation. Iată cum condițiile de bună formulare a problemei continue de câmp se propagă în cazul elementelor finite conforme, până la faza finală de rezolvare a sistemului cu un număr finit de ecuații algebrice liniare. Este o proprietate

remarcabilă, care explică succesul elementelor finite conforme.

O a patra condiție pe care trebuie să o îndeplinească orice soluție numerică aproximativă, în afara de cele trei de bună formulare, este cea de *convergență*, către soluția exactă.

Două teoreme fundamentale ilustrează proprietățile de aproximare și convergență ale elementelor finite conforme. Prima este **lema lui Céa**, care arată că soluția discretă obținută prin metoda elementului finit are cea mai mică eroare de aproximare, dintre toate elementele subspațiului discret X_h . În condițiile teoremei Lax-Milgram

$$\|u - u_h\|_X \leq (C/c) \|u - v_h\|_X, \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.4)$$

în care u este soluția exactă a problemei, u_h este soluția sa numerică, C este constanta de continuitate și c este constanta de coercitivitate a funcționalei $a(., .)$ pe X . Soluția dată de metoda elementelor finite este deci pseudo-optimală, fiind până la o constantă multiplicativă, *cea mai bună soluție* din sub-spațiul finit dimensional al soluțiilor numerice posibile. Dacă se utilizează semi-norma energetică $|\cdot|^2 = a(., .)$, generată de produsul scalar definit de funcționala biliniară a , inegalitatea anterioară devine:

$$|u - u_h| \leq |u - v|, \quad \forall v \in V_h. \quad (3.5)$$

De această dată constanta C/c nu mai apare, deci soluția numerică este chiar cea mai bună soluție, în norma energetică. Fiind proiecția soluției exacte (element într-un spațiu Hilbert) pe subspațiul discret, soluția FEM are cea mai mică eroare, măsurată în norma energetică (http://en.wikipedia.org/wiki/Cea's_lemma), [120], [64]. Oricum, după cum s-a văzut în Capitolul 2.3, în cazul problemelor scalare $C = 1$, și $c = 1$, în consecință, soluția numerică este optimală și în norma Sobolev (deci din punctul de vedere al intensității câmpului, care este gradientul potențialului).

Deoarece $a(u, v) = f(v)$ și $a(u_h, v) = f(v)$, $\forall v \in V_h$, rezultă imediat că abaterea soluției numerice față de cea exactă este ortogonală pe spațiul discret al funcțiilor de test:

$$a(u - u_h, v) = 0. \quad (3.6)$$

Această relație, fundamentală pentru FEM este cunoscută sub numele de **condiția Galerkin de ortogonalitate**.

A doua teoremă se referă la **convergență**. Să presupunem acum că funcțiile de formă sunt polinoame de gradul k pe porțiuni (pe fiecare element), dar soluția este continuă pe întreg domeniul de calcul este suficient de netedă, $u_h \in H^{(k+1)}(\Omega)$. În aceste condiții, eroarea soluției numerice este [133], [64]:

$$\|u - v_h\|_{H^m} < h^{(k+1-m)} \|u\|_{H^{(k+1)}}, \quad \forall v_h \in X_h \quad (3.7)$$

Netezimea soluției numerice depinde de netezimea termenului liber al problemei, a felului în care variază spațial constanta de material, de netezimea frontierei domeniului și a condiției de frontieră. Din acest motiv ne vom mulțumi pentru început să folosim elemente finite "liniare", de ordinul minim, care este ordinul întâi: $k = 1$. Relațiile de tipul (3.7) sunt cunoscute sub numele de estimatori a priori de eroare.

Trebuie să remarcăm faptul că teoremele prezentate asigură convergența globală "în medie" a soluției numerice către cea exactă pe întreg domeniul și nu o convergență locală, punctuală. Următoarea teoremă, numită a energiei erorii ilustrează în mod memorabil acest aspect: *Energia erorii este egală cu eroarea energiei.*

Pentru demonstrație se consideră seminorma energetică a abaterii soluției numerice față de cea exactă:

$$\begin{aligned} |u - u_h|^2 &= a(u - u_h, u - u_h) = \\ &= a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) = \\ &= |u|^2 - |u_h|^2 + 2a(u_h, u_h) - 2a(u, u_h) = |u|^2 - |u_h|^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

deoarece, datorită condiției Galerkin $a(u - u_h, u_h) = 0$, funcționala bilinară simetrică se anulează:

$$a(u, u_h) - a(u_h, u_h) = f(u_h) - f(u_h) = 0. \quad (3.9)$$

Toate aceste proprietăți remarcabile [9], [64] explică de ce FEM are o poziție privilegiată, între metodele de rezolvare numerică a problemelor de câmp electromagnetic.

3.1.3 Continuitatea soluției MEF

În figura (3.1) sunt reprezentate funcțiile de bază nodale (cu albastru) și soluția numerică (cu roșu), ce se obține prin combinația liniară a funcțiilor de bază (numite și "de formă"), și care are graficul o linie poligonală continuă. Gradele de libertate sunt valorile soluției numerice în nodurile $x_1, x_2, \dots, x_n$. În nodurile extreme x_0 și x_5 , soluția satisface condiții Dirichlet nule. În Fig. 3.2 este reprezentată grafic soluția unei probleme 2D cu condiții Dirichlet nule. Funcția se obține prin combinația liniară (suma ponderată) a funcțiilor de formă asociate nodurilor interne, care au graficele de formă piramidală cu înălțime unitară (Fig. 3.3). Gradele de libertate sunt chiar valoarea soluției în nodurile interne ale rețelei de triunghiuri.

Relația (3.7) demonstrează convergența soluției numerice către soluția exactă, atunci când $h \rightarrow 0$. Curba și suprafața din figurile 3.1 și 3.2 tind către graficele netede ale soluțiilor exacte. Convergența este mai rapidă, dacă se folosesc ca funcții

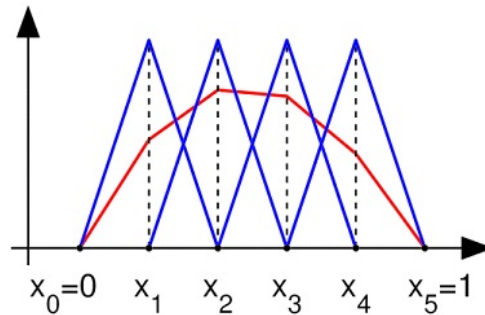


Figura 3.1: Soluția numerică în cazul 2D și funcțiile de forma (wiki/finiteelements)

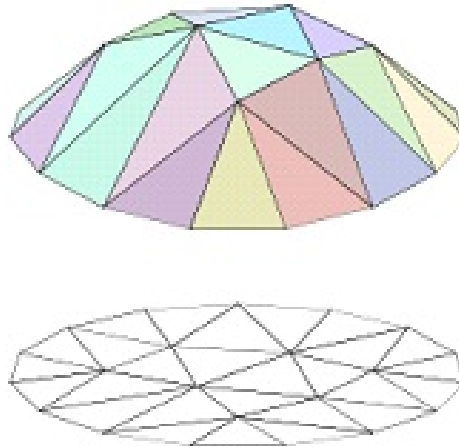


Figura 3.2: Graficul soluției numerice, liniară pe porțiuni, în cazul 2D ([wiki/finitelements](http://wiki/finiteelements))

de formă, polinoame de grad mai înalt, dar acest lucru este limitat și de netezimea intrinsecă a soluției exacte.

Trebuie să remarcăm că folosirea aproximărilor de ordinul întâi pentru potențial, face ca acesta să fie continuu pe tot domeniul de calcul, dar gradientul său (intensitatea câmpului) să fie constant(ă) pe fiecare element, deci să aibă salturi la trecerea de la un element la altul, ceea ce conduce la erori destul de mari. Acesta este motivul pentru care, în practică se folosesc deseori pentru soluții mai precise elemente finite de ordin mai înalt, cel puțin doi, chiar dacă *elementele liniare* rămân cele mai răspândite.

Trebuie remarcat faptul că soluția numerică nu satisface în sens clasic ecuația diferențială în nici un punct din domeniul de calcul, deoarece derivata sa de ordinul

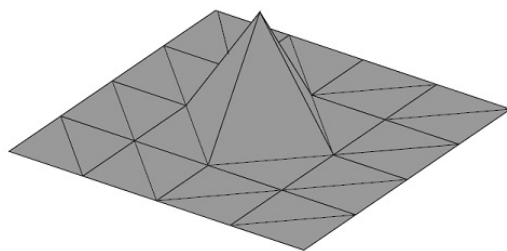


Figura 3.3: Funcția de formă MEF liniară nodală [91]

doi este nulă în interiorul elementelor, deci aproape peste tot, iar în rest soluția numerică nu este derivabilă. Cu toate acestea după cum s-a arătat, linia poligonală generată de FEM este cea mai aproape de graficul soluției exacte, dintre toate liniile poligonale de pas dat. Mai mult, abaterea față de soluția exactă poate fi făcută oricât de mică (atât global cât și local), dacă micșorăm pasul h . Acum înțelegem de ce am renunțat la forma clasică a ecuațiilor diferențiale, care avea un caracter local și am preferat forma slabă a problemei, care are un caracter global. Doar așa am putut găsi o soluție simplă - liniară pe porțiuni și precisă - pe cât posibil de aproape de cea exactă.

Abordarea prezentată este cea mai des utilizată în MEF, dar nu este singura. O variantă este cea numită *Galerkin discontinuă* - (*DG FEM* - "*discontinuous Galerkin Finite Element Method*"), în care funcțiile de formă nu sunt continue, la trecerea de la un element la altul (elementele finite sunt neconforme, și pot avea noduri agățate). Chiar dacă are mai multe grade de libertate, deci necesită un efort de calcul mai mare, metoda DG are o serie de avantaje, în primul rând flexibilitatea ei sporită, [107]. În Tabelul 3.1 se prezintă caracteristicile acestei abordări în comparație cu alte metode numerice: diferențe finite (FDM), volume finite (FVM) și elemente finite (FEM). DG-FEM combină flexibilitatea FEM de ordin înalt cu comportarea locală conservativă a FVM, fiind potrivită mai ales pentru rezolvarea problemelor neeliptice (noncoercitive).

	Geometrii complexe	Acuratețe de ordin superior și adaptivitate $h - p$	Forma semi-discretă explicită	Conservare	Probleme eliptice
FDM	×	✓	✓	✓	✓
FVM	✓	×	✓	✓	(✓)
FEM	✓	✓	×	(✓)	✓
DG-FEM	✓	✓	✓	✓	(✓)

Tabela 3.1: Caracteristicile metodelor numerice pentru analiza câmpului [58]

3.1.4 Cazul domeniilor nemarginite

O problemă dificilă cu care se confruntă metoda elementului finit este modelarea domeniilor nemărginite, a spațiului fizic infinit extins. Soluția este să se introducă o frontieră fictivă, numită "*frontiera deschisă*", de forma geometrică simplă: sferă, cilindru, cub, cerc sau pătrat, și care divizează domeniul spațial într-o parte interioară, marginită și una exterioară. Se rezolvă apoi problema interioară, pentru care se impun condiții speciale de frontieră. În aplicații, cel mai des se întâlnesc următoarele abordări:

- Spațiul exterior omogen poate fi modelat numeric, în mod natural prin metoda elementelor de frontieră (BEM = Boundary Element Method). Aceasta stabilește o relație matricială între valorile discretizate ale potențialului de pe suprafață (condiția Dirichlet) și derivata sa după normală (condiția Neumann), relație care este forma discretă a operatorului Poincare-Steklov (http://en.wikipedia.org/wiki/Poincare-Steklov_operator). Dacă ulterior se rezolvă cu MEF problema interioară cu această condiție de frontieră, am modelat de fapt cele două domenii cuplate, folosind combinația *FEM-BEM* [65], [38], [121], [37].
- Se folosește pe frontiera deschisă o condiție aproximativă, de tip *Robin*, în care se impune valoarea combinației liniare dintre potențial și derivata sa după normală [70], (http://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition). Rezultate bune se obțin considerând ca soluție numerică media dintre soluțiile celor două probleme duale: cu condiții Dirichlet nule și cu condiții Neumann nule.
- Se adaugă în exteriorul frontierei un *strat fictiv* de grosime finită, în care materialele au proprietăți absorbante sau elementele finite au funcții de bază care modelează spațiul infinit, numite "*elemente finite infinite*" [4].

Dupa cum se va vedea ulterior, în cazul regimurilor evolutive se folosesc și alte tehnici de tratare a frontierelor deschise, numite în acele cazuri și frontiere absorbante.

3.2 Probleme cu potentialul scalar in medii liniare

3.2.1 Asamblarea matricei si a termenului liber

Un aspect cheie al concepției eficiente a codurilor de analiza cu element finit îl reprezintă folosirea *elementului de referință* și transformarea ulterioară a acestuia

în elementele fizice, care alcătuiesc triangulația domeniului de calcul (Fig. 3.4).
Elementul de referință $\hat{K}$ de forma geometrică simplă: 1D - segment de dreaptă,

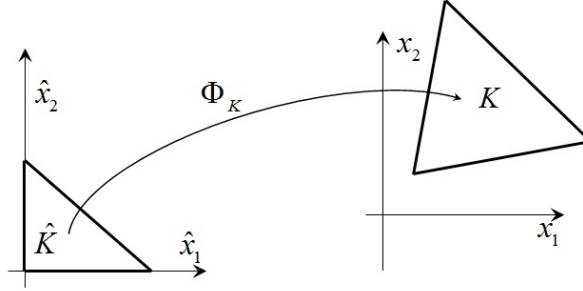


Figura 3.4: Transformarea elementului de referință în elementele fizice

2D - triunghi sau pătrat, 3D: tetraedru, prismă sau cub este transformat într-un element fizic K , folosind transformarea bijectivă, continuă și derivabilă (conformă):

$$\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K, \quad (3.10)$$

care leagă coordonatele elementului fizic, $x = \Phi_K(\hat{x})$ de cele ale elementului de referință $\hat{x}$. Matricea jacobian $\mathbf{F}_K(\hat{x})$ a transformării Φ_K (conformă) are determinantul $J_K = \det(\mathbf{F}_K)$ nenul. Aceste transformări pot fi folosite în cazul unor sisteme de coordonate ortogonale necarteziene, dar în continuare ne vom limita la cazul cel mai simplu în care Φ_K este o *transformare afină*:

$$\Phi_K(\hat{x}) = \mathbf{B}_K \hat{x} + \mathbf{b}_K, \mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^d, \quad (3.11)$$

deci elementele fizice au aceeași formă ca cel de referință, și se obțin doar prin translația, rotația sau scalarea elementului de referință. În acest caz, $\mathbf{F}_K = \mathbf{B}_K$ și $J_K = \det(\mathbf{B}_K)$ este constant pe K . Avantajul acestei alegeri este că transformă polinoamele din elementul de referință în polinoame de același grad definite pe elementul fizic, ceea ce simplifică foarte mult analiza cu element finit.

Norma matricei jacobian $h(x) = \|\mathbf{F}_K\|$ descrie mărimea locală a elementului fizic din rețeaua de discretizare, iar norma rețelei este definită ca $h = \sup h(x)$. Dacă toate elementele au aceeași valoare a parametrului h , *rețeaua este uniformă*, iar dacă valorile acestui parametru sunt aproximativ egale, numim triangulația *quasi-uniformă*. Dacă $h(x)$ este marginit inferior și superior, atunci avem o triangulație *nede generată*. În continuare vom presupune că transformările tuturor elementelor fizice sunt bine condiționate, adică *numărul de condiționare* $\|\mathbf{F}_K\| \|\mathbf{F}_K^{-1}\|$ este marginit (de preferință ar trebui să aibă valoare cât mai aproape de unitate), triangulația care respectă această condiție numindu-se *regulată*.

Cea mai simplă formă a elementului de referință este cea *simplicială*, adică triunghi pentru $d = 2$ și tetraedru, pentru $d = 3$. În acest caz, de mare utilitate practică se dovedește folosirea *coordonatelor baricentrice* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, (\lambda_4)$ în locul celor carteziane: $\hat{x}_1, \hat{x}_2 (\hat{x}_3)$. Fiecare coordonată barimetrică este asociată unui vârf al elementului de referință, și în consecință ele sunt în număr de $d + 1$, cu una în plus față de cele carteziane, adică trei coordonate în 2D și patru coordonate în 3D, care evident nu sunt independente. După cum se va vedea, suma lor este unitară în orice punct. Ele se definesc foarte simplu, ca fiind polinoame de grad unu, care se anulează în toate vârfurile, cu excepția celui caracteristic, în care coordonata baricentrică are valoarea unu:

$$\lambda_i \in P^1(K) \text{ a.î. } \lambda_i(V_j) = \delta_{ij}, \forall 1 \leq j \leq d + 1. \quad (3.12)$$

În cazul 2D (elementul de referință este triunghiul dreptunghic): $d = 2$,

$$\hat{K} \in \mathbb{R}^d, \hat{K} = \{\hat{x} \mid 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, x^1 + x^2 \leq 1\} \quad (3.13)$$

$$\lambda_1 = 1 - x^1 - x^2, \lambda_2 = x^1, \lambda_3 = x^2. \quad (3.14)$$

În cazul 3D (elementul de referință este tetraedrul): $d = 3, \hat{K} \in \mathbb{R}^d$,

$$\hat{K} = \{\hat{x} \mid 0 \leq x^1 \leq 1, 0 \leq x^2 \leq 1, 0 \leq x^3 \leq 1, x^1 + x^2 + x^3 \leq 1\} \quad (3.15)$$

$$\lambda_1 = 1 - x^1 - x^2 - x^3, \lambda_2 = x^1, \lambda_3 = x^2, \lambda_4 = x^3. \quad (3.16)$$

În literatură se întâlnesc și alte notații pentru coordonatele baricentrice, de exemplu L_i , sau φ_i . Remarcăm că aceste coordonate sunt numere reale cuprinse între 0 și 1, iar în 2D/3D, pentru un punct interior elementului triunghiular/tetraedru, ele sunt egale cu măsura (arie/volum) a triunghiului/teraedrului obținut din element prin înlocuirea nodului caracteristic cu punctul curent, raportată la măsura elementului. Asta explică de ce suma celor $d + 1$ coordonate barimetricale ale elementului K este egală cu 1, relație care permite determinarea valorii oricărei coordonate baricentrice folosind celelalte variabile.

Cea mai simplă alegere pentru elementele finite este cea în care *funcțiile de formă (de bază) sunt chiar coordonatele baricentrice* asociate vârfurilor din interiorul triangulației. Acestea sunt funcții continue pe toată triangulația și au suportul nenul doar pe elementele care au nodul caracteristic, nod comun. Această alegere, cu funcții de ordinul întâi, numită și "liniară" este potrivită pentru rezolvarea ecuației Poisson cu condiții Dirichlet nule, satisfăcută de potențialul electrostatic scalar. Gradele de libertate sunt valorile nodale ale potențialelor din vârfurile interioare ale triangulației. Soluția numerică va fi o funcție continuă pe tot domeniul

de calcul cu variație liniară pe laturi, determinată de valorile din noduri. Principiul dezavantaj constă în faptul că derivata după normala a potențialului nu va avea trecere continuă, de la un triunghi la altul, deoarece câmpul este constant în fiecare triunghi. Această dificultate se va remedia ulterior, când vom folosi elemente finite de ordin superior.

Partea centrală a algoritmului metodei elementului finit constă în **asamblarea matricei sistemului** $\mathbf{A}$ și a vectorului termenilor liberi $\mathbf{f}$, numite din considerente istorice cu termenii mecanici: *matrice de rigiditate și vector de sarcină*. Pentru aceasta se parcurg elementele triangulației $\mathcal{T}_h$ și se adaugă contribuția fiecărui element K la cele două matrice. În final se obține:

$$\mathbf{A} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{A}^K \mathbf{C}^K, \quad \mathbf{f} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{f}^K, \quad (3.17)$$

în care matricea $\mathbf{C}^K$ este o matrice topologică, de conectivitate, care descrie relația dintre gradele locale de libertate și cele globale (matrice rară cu elemente egale cu 1, în cele trei poziții în care gradul local corespunde cu gradul global de libertate, și 0 în rest). În consecință și matricea $\mathbf{A}$ este rară.

Dacă se rezolvă de exemplu, problema variațională prin care se caută $u \in X_h \subset H_D^1(\Omega)$ a.i.

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} k u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (\forall) v \in X_h, \quad (3.18)$$

aceasta corespunde ecuației Helmholtz, care degenerază în ecuația Poisson, în cazul particular $k = 0$. În consecință, discuția se referă la aspectele algoritmice ale rezolvării problemelor statice și staționare ES, MS, EC, dar și problemelor descrise de ecuațiile Helmholtz complexe din regimul EQS.

Contribuțiile elementului K la matricele sistemului sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^K &= \varepsilon^K \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \int_K k \varphi_i \varphi_j dx = \\ &= \varepsilon^{\hat{K}} \int_{\hat{K}} (\mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i (\mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j \mathbf{J} d\hat{x} + \int_{\hat{K}} k \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \mathbf{J} d\hat{x} \\ \mathbf{f}_i^K &= \int_K \mathbf{f} \varphi_i dx = \int_{\hat{K}} \mathbf{f} \hat{\varphi}_i \mathbf{J} d\hat{x} \end{aligned} \quad (3.19)$$

în care $\hat{\varphi}$ sunt funcțiile de forma ale elementului de referință. Tot din considerente de similitudine mecanică, cei doi termeni ai matricei $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{M}$ se mai numesc *matrice de rigiditate* (integralele produsului scalar de gradienti multiplicat cu $\varepsilon - \mathbf{S}$) și respectiv *matrice de masă* (integralele produsului scalar de funcții de forma multiplicat cu $k - \mathbf{M}$).

De exemplu, în cazul elementelor finite 2D de ordinul întâi, la care funcția de forma este $\varphi_j = a_j x + b_j y + c_j$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{ij}^K &= \varepsilon^K (a_i a_j + b_i b_j) \mathbf{A} + k^K \mathbf{A}_K / 12; \\ \mathbf{f}_i^K &= \mathbf{f}^K \mathbf{A}^K / 3,\end{aligned}\quad (3.20)$$

cu $a_i = (y_j - y_k)/(2A)$; $b_j = -(x_j - x_k)/(2A)$; în care (x_i, y_i) , (x_j, y_j) și (x_k, y_k) sunt coordonatele varfurilor elementului K iar

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}$$

este aria sa. Relațiile rezultă fără dificultate din definiția coordonatelor baricentrice $\lambda_i = \varphi_i(x, y)$.

Aici s-a folosit formula Holland-Bell

[91]:

$$\int K \lambda_i^m \lambda_j^n \lambda_k^p dx = 2A_K mnp / (m + n + p + 2). \quad (3.21)$$

Transformarea afină în cazul 2D duce varfurile triunghiului de referință $\hat{x}^1 = [0, 0]'$; $\hat{x}^2 = [1, 0]'$; $\hat{x}^3 = [0, 1]'$ în vârfurile triunghiului fizic K cu coordonatele $x_1 = [x_1, y_1]'$; $x_2 = [x_2, y_2]'$; $x_3 = [x_3, y_3]'$. În consecință, matricea transformării

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = x \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} B_{11} + b_1 \\ B_{21} + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} B_{12} + b_1 \\ B_{22} + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}; \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathbf{F}_K = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \text{ și jacobianul ei}\end{aligned}\quad (3.22)$$

$$J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

se exprimă în funcție de proiecțiile laturilor triunghiului fizic. Rezultele obținute pe această cale sunt aceleași cu cele determinate anterior, fără folosirea triunghiului de referință.

În cazul unor rețele de triunghiuri cu structura uniformă, care au la fiecare nod cel mult șase triunghiuri concurente (așa cum se întâmplă în Fig. 3.2 și Fig. 3.3), matricea $\mathbf{A}$ are cel mult șase elemente nenule pe fiecare linie, deci necesarul de memorie pentru a reține matricea de rigiditate și cei doi vectori, soluție (care conține gradele de libertate ale problemei) și de sarcina este de $8N$, în care N este numărul de grade de libertate, egal cu numărul nodurilor interioare din rețeaua de triunghiuri.

3.2.2 De la teorie la cod

În continuare, se exemplifică procedura descrisă anterior printr-un cod minimal de element finit scris în limbajul MATLAB, dedicat determinării numerice a soluției ecuației Laplace cu condiții de tip Dirichlet nenule pe o parte a frontierei și Neumann nule în rest, într-un domeniu bidimensional de forma arbitrară discretizat în triunghiuri.

```

1  infile % Datele problemei: citeste din scriptul .m:
2  % na,nb,nc(1:ne) — indicii nodurilor triunghiurilor i: ne
3  % x,y,z(1:nn) — coordonatele nodurilor n = 1:nn
4  % nf,vf(1:nf) — indicele nodului de frontiera n = 1:nf, cu conditie
5  % Dirichlet si valoarea conditiei
6  A = zeros(nnod,nnod); % matricea sistemului si
7  b = zeros(nnod); v = b; % termenul liber si solutia
8  for i = 1:ne % parcurge elementele si aduna contributia lor la matricea A
9      n1 = na(i); n2 = nb(i); n3 = nc(i); % nodurile
10     x1=x(n1); x2=x(n2); x3=x(n3); y1=y(n1); y2=y(n2); y3=y(n3); cordonatele
11     S = (x2*y3-x3*y2-x1*y3+x3*y1+x1*y2-x2*y1)/2 % si aria elementului curent
12     c1=y2-y3; c2=y3-y1; c3=y1-y2; d1=x3-x2; d2=x1-x3; d3=x2-x1;% proiectii
13     % contributiile (3x3) la matricea A ale elementului curent:
14     c11=(c1*c1+d1*d1)/(4*S); c12=(c1*c2+d1*d2)/(4*S); c13=(c1*c3+d1*d3)/(4*S);
15     c21=(c2*c1+d2*d1)/(4*S); c22=(c2*c2+d2*d2)/(4*S); c23=(c2*c3+d2*d3)/(4*S);
16     c31=(c3*c1+d3*d1)/(4*S); c32=(c3*c2+d3*d2)/(4*S); c33=(c3*c3+d3*d3)/(4*S);
17     A(n1,n1)=A(n1,n1)+c11; A(n1,n2)=A(n1,n2)+c12; A(n1,n3)=A(n1,n3)+c13;
18     A(n2,n1)=A(n2,n1)+c21; A(n2,n2)=A(n2,n2)+c22; A(n2,n3)=A(n2,n3)+c23;
19     A(n3,n1)=A(n3,n1)+c31; A(n3,n2)=A(n3,n2)+c32; A(n3,n3)=A(n3,n3)+c33;
20 end
21 for i=1:nf % parcurge nodurile de pe frontiera cu cond. Dirichlet
22     n=nf; v(n)=vf(i); b(n)=v(n); %n nod pe frontiera, vf valoare cond. Dirichlet
23     for j = 1:nnod % inlocuieste ecuatia nodului n cu: Vn = val_cond_fr.
24         a(n,j)=0;
25         if (j~=n & a(j,n) ~=0) b(j)=b(j)-a(j,n)v(n); a(j,n)=0; end
26     end
27     a(n,n) = 1;
28 end
29 v=A\b; % solutia problemei: potentialele in nodurile retelei

```

Procedura prezentată se poate generaliza relativ ușor în cazul tridimensional, dar și în cazul condițiilor de frontieră nenule. Condițiile Dirichlet nenule sunt condiții esențiale, deci trebuie satisfăcute apriori de soluție. Ecuațiile acestor noduri se scriu sub forma $V_j = \text{cunoscut}$, dar acesată formă duce la pierderea simetriei matricei de rigiditate. Putem salva această simetrie, dacă observăm că nodurile vecine cu nodurile de pe frontiera care au condiție Dirichlet nenula $V = V_j$ pot avea ecuații cu un termen liber suplimentar de forma

$$f_k = - \sum_{j \in \Gamma_D} A_{kj} V_j. \quad (3.23)$$

Condițiile Neumann sunt condiții naturale, în consecință, gradele de libertate vor conține și potențialele acestor noduri de pe frontiera, iar latura l care uneste nodul

i cu j va contribui la termenul liber al nodului i cu

$$\varphi^l = - \int_i^j g \varphi_i ds = -g \frac{h}{2}, \quad (3.24)$$

în care g este valoarea condiției de frontieră, iar h este lungimea laturii l . Chiar în condiții nule ($g = 0$), gradele de libertate conțin și potențialele nodurilor de pe partea de frontieră cu condiții Neumann.

Alte coduri simple de element finit pot fi găsite în

- [55] - Program MATLAB cu elemente finite triunghiulare de ordinul întâi, pentru ecuația Helmholtz scalară. Primește la intrare descrierea rețelei și generează în 30 de instrucțiuni matricea sistemului FEM.
- [83] Cod cu 83 linii MATLAB pentru rezolvarea cu FEM liniar a ecuației Poisson 2D cu condiții Dirichlet.
- [28] - Funcții MATLAB pentru programe de element finit cu aplicații mecanice, exemplificate prin două probleme una statică de elasticitate liniară și alta de frecvențe proprii. Lucrarea descrie modul eficient și flexibil de asamblare a matricei elementelor finite în MATLAB, folosind integrarea numerică a elementelor finite Lagrange de grad ridicat și jacobianul transformării conforme. Partea de procesare conține aproximativ 100 instrucțiuni MATLAB.
- [2] - program de numai 50 linii MATLAB care implementează $P_1 - Q_1$ MEF pentru rețele nestructurate de triunghiuri și patrulatere, pentru rezolvarea problemelor de ecuații cu derivate parțiale de tip eliptic și condiții mixte de frontieră. Ca și celelate programe de acest tip primește la intrare fișiere de descrierea geometriei care conțin coordonatele nodurilor, topologia elementelor (triunghiuri și patrulatere) și descrierea condițiilor de frontieră (Neumann și Dirichlet). Se explică simplu și clar pasul de la teorie la implementare. Pornind de la instrucțiunile de bază sunt realizate patru programe FEM, fiecare cu mai puțin de 50 linii, pentru rezolvarea: ecuației Laplace 2D, ecuația difuziei căldurii în 2D, a unei ecuații neliniare (Ginzburg-Landau), și a ecuației Laplace 3D. Sursele sunt disponibile la (http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/fem_50/fem_50.html)
- [111] este o pagină din blogul intitulat "Loren on the art of MATLAB", în care autoarea descrie cum pot fi asamblate rapid matricele FEM rare (timpul scade de la 200s la 1s!).

- [43] Programul prezentat este compact și foarte bine explicat . El are 30 linii MATAB și rezolvă cu MEF liniare (P_1) a ecuației Poisson 2D cu condiții de frontieră mixte Dirichlet-Neumann. Este prezentată apoi o versiune cu matrice rare, "vectorizată", mult mai eficientă, care are doar 5 instrucțiuni în plus. În continuare este prezentat un algoritm de elemente finite cu rețea 2D auto-adaptivă, obținută prin rafinarea și rarefierea locală rețelei inițiale, pe baza unui indicator de eroare. Exemplul numeric indică performanțele codului dezvoltat, care rezolvă probleme cu până la 2,8 milioane de elemente în 17 secunde. Din acest timp, jumătate este consumat de rezolvarea directă a sistemului cu $\backslash$, 20% pentru asamblarea matricei, iar restul pentru rafinarea adaptivă. Timpul de calcul depinde aproximativ liniar de numărul de elemente, iar rata de convergență a normei energetice a erorii este de $1/2$ pentru algoritmul adaptiv și $1/3$ pentru rafinarea uniformă.
- [25] descrie programul iFEM, de elemente finite adaptive, implementat în MATLAB, folosind intensiv matrice rare (nou stil de programare, numit de autor *matricializare rară*). Lucrarea descrie acest stil. Sunt folosite numai rețele de elemente finite simpliciale (triunghiuri și tetraedre), nodală liniare. Algoritmul adaptiv AFEM are etapele: rezolvă $\rightarrow$ estimează $\rightarrow$ marchează $\rightarrow$ rafinează/rărește. Rezolvarea se face direct cu $\backslash$, dar pentru sisteme mari, autorul recomandă solvele iterative bazate pe CG, cu precondiționare multigrid, care sunt mai eficiente. Estimarea se face calculând în fiecare element un indicator rezidual, bazat pe normele sursei și a saltului gradientului pe fețele elementului. După valoarea mare/mică a indicatorului, sunt marcate elementele pentru rafinare/rarefiere. Rafinarea se realizează prin disecție iar rădirea prin reunire. Programul iFEM calculează până la 10^5 necunoscute în câteva secunde, cu o rată de convergență unitară în 2D și de $2/3$ în 3D (pe jumătate pentru derivată). (<http://ifem.wordpress.com/>), (http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/fem_50/fem_50.html.)

Funcții pentru vizualizarea soluției sunt disponibile la [32]. În Matlab nu este prea simplu să se vizualizeze rețelele nestructurate. Pachetul oferă o serie de rutine dedicate acestui scop. Acestea au ca intrare descrierea geometriei și a soluției, iar ca rezultate, diferite tipuri de vizualizări:

- soluția cu elemente colorate;
- soluția cu umbre interpolate;
- rețeaua de discretizare;

- rețeaua cu laturi colorate în acord cu soluția;
- curbele de contur;
- vectorii gradient în noduri.

(http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=20).

Studiul acestor coduri și a documentației asociate evidențiază foarte clar legătura dintre partea teoretică și cea de implementare a metodei elementului finit, legătura esențială pentru înțelegerea metodei, dar și pentru folosirea ei corectă și eficientă. Nu este greu să ne imaginăm, cum ar putea fi folosite eficient programele profesionale de element finit, fără înțelegerea arhitecturii și a anatomiei interne a programelor simple de element finit. O listă de pachete software de element finit, comerciale și din domeniul public este disponibilă la http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_element_software_packages/. Lista generatoarelor automate de rețea http://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_generation este disponibilă la <http://www.robertschneiders.de/meshgeneration/software.html>. Unul dintre generatoarele din domeniul public, cel mai des utilizate este gmsh <http://geuz.org/gmsh/>.

3.3 Probleme cu potențialul vector (*rot-rot*). Elemente de muchie

Modul în care s-a aplicat metoda elementului finit, prezentat în paragraful anterior este portiv pentru rezolvarea problemelor staționare cu potențial scalar, cum sunt cele întâlnite în regimurile ES, MS, EC și EQS, dar nu este potrivit pentru regimurile în care trebuie folosit potențialul vector, cum sunt regimurile MG, MQS sau ED. După cum s-a văzut, în aceste regimuri trebuie rezolvate ecuații, care au forma slabă, în care se caută $u \in X_h \subset H(\text{rot}, \Omega)$ a.i.

$$\int_{\Omega} \nu \text{rot } u \text{rot } v \, dx + \int_{\Omega} k u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad (\forall) v \in X_h. \quad (3.25)$$

Explicația principală constă în faptul că de astă dată, soluția trebuie căutată într-un subspațiu *rot-conform*. Încercarea de a rezolva astfel de probleme folosind funcții de forma nodale, pentru fiecare componentă a soluției duce la erori numerice importante, mai ales în jurul singularităților câmpului, care apar pe suprafețele de separație (cu muchii și vârfuri), între subdomeniile cu caracteristici magnetice diferite. S-a constatat și faptul că în calculul frecvențelor proprii de rezonanță ale cavităților rezonante, atunci când se folosesc elemente finite nodale, apar moduri

3.3. PROBLEME CU POTENȚIALUL VECTOR (ROT-ROT). ELEMENTE DE MUCHIE 131

de rezonanță false, numite "*spurious modes*", fenomen numit de "*poluare spectrală*", care dispare atunci când soluția este căutată într-un spațiu *rot-conform*. Explicația este aceea că în $H^1(\Omega)$ nucleul operatorului *rot rot* nu este bine reprezentat [14], [126]. O analiză a acestui fenomen este făcută în [95].

Soluția este să se folosească elemente finite cu funcții de forma potrivite pentru problema vectorială, cu operator diferențial de tip *rot - rot* ce va fi rezolvată. Acestea sunt *funcțiile de forma vectoriale, numite și elemente de muchie*. [18], [78], [12], [80], [72]. O analiză critică privind elementele de muchie este făcută în [93], [94].

În 2D și respectiv 3D, un câmp vectorial se reprezintă prin două sau trei câmpului scalare cuplate, componente ale câmpului vectorial:

$$\mathbf{T} = T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y \quad (3.26)$$

și respectiv

$$\mathbf{T} = T_x \mathbf{e}_x + T_y \mathbf{e}_y + T_z \mathbf{e}_z, \quad (3.27)$$

în care $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ sunt versorii sistemului cartezian de coordonate. În principu, fiecare componeta T_x, T_y, T_z ar putea fi reprezentată prin combinații de funcții de formă nodale, dar această abordare este cea care se dorește a fi evitată. O alternativă este data de expresia:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^k \mathbf{W}_i T_i, \quad (3.28)$$

în care T_i este integrala câmpului vectorial $\mathbf{T}$ de-a lungul laturii l_i din triangulația considerată. În consecință, funcțiile de forma vectoriale $\mathbf{W}_i$ sunt definite de relațiile:

$$\int_{l_j} \mathbf{W}_i ds = \delta_{ij}, \quad (3.29)$$

adică funcția de formă vectorială $\mathbf{W}_i$ este orientată tangențial de-a lungul laturii i și este orientată normal de-a lungul celorlalte laturi ale elementului K . Mai mult, funcția de formă vectorială $\mathbf{W}_i$ are în 3D componenta tangențială nulă pe orice față care nu conține muchia i . În literatură se întâlnesc și alte notații pentru funcțiile de bază vectoriale, de exemplu $\mathbf{N}_i$.

Restricțiile constatate fac ca în 2D, două triunghiuri cu latura comună să aibă la trecerea prin această latură aceeași componentă tangențială a funcțiilor de formă, dar nu și aceeași componentă normală. În 3D, funcțiile de formă vectorială își conservă componenta tangențială la trecerea de la un tetraedru la altul, prin fața lor

comună. În consecință, componenta tangențială a funcțiilor de formă vectoriale (de muchie) este continuă, în tot domeniu de calcul, motiv pentru care ele se mai numesc și *funcții de formă vectoriale cu tangenta continuă*. Aceasta rot-conformitate le face potrivite pentru a reprezenta intensitatea câmpului electric sau magnetic, dar și potențialul magnetic vector.

Funcțiile vectoriale care au următoarele expresii în coordonate baricentrice:

$$\mathbf{w}_{ij} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i, \quad (3.30)$$

valabile atât în 2D, când $i, j = 1, 2, 3$ cât și în 3D, când $i, j = 1, 2, 3, 4$, iar ij este latura ce leagă nodurile i cu j satisfac aceste condiții.

Aceste funcții, numite *elemente Whitney* [18], [133], [78] sunt potrivite pentru a fi alese funcții de forma pentru potențialul magnetic vector (Fig. 3.5), deoarece ele au componenta tangențială constantă de valoare $1/l_{ij}$ pe latura ij și nulă pe celelalte laturi, divergența nulă pe întreg elementul K , și rotor constant pe acel element: $\text{rot} \mathbf{w}_{ij} = 2 \nabla \lambda_i \times \nabla \lambda_j$. Gradele de libertate asociate acestor funcții sunt valorile integralelor pe muchiile lor caracteristice.

Lucrurile stau similar cu reprezentarea potențialului electric scalar prin elemente nodale de ordinul întâi, unde soluția numerică trece continuu de la un element la altul, are gradientul (intensitatea câmpului electric) constant pe fiecare element, deci cu divergența și rotor nule pe element. Rotorul superficial este și el nul pe fețele elementelor, deoarece componenta tangențială a intensității câmpului se conservă la trecerea de la un element la altul, datorită continuității potențialului scalar. Singura "imperfecțiune" se referă la divergența superficială pe fețele elementelor, care este nenulă, deoarece componenta normală a câmpului are un salt pe aceste fețe. Putem spune că, în acest caz, sursa de câmp este distribuită exclusiv pe fețele elementelor finite și este divergența intensității (implicit a inducției) câmpului electric.

În cazul elementelor de muchie de ordinul întâi, potențialul magnetic vector are componenta tangențială continuă la trecerea între elemente, iar rotorul sau (inducția magnetică) este constant în interiorul elementului, deci cu divergența și rotorul nule, chiar dacă la trecerea între elemente rotorul superficial este nenul (în schimb divergența superficială este implicit nulă, fiind un câmp solenoidal ca orice rotor). Mai mult, soluția numerică - potențialul vector are divergența nulă atât în interiorul elementului cât și superficial, deoarece componenta normală a potențialului se conservă la trecerea de la un element la altul fiind nulă. Rotorul superficial al potențialului vector este și el nul, deoarece componenta tangențială a acestui potențial se conservă la trecerea de la un element la altul. În acest caz sursa de câmp este distribuită atât în interiorul elementelor cât și pe fețele lor, fiind rotorul potențialului magnetic și respectiv al inducției magnetice (și implicit al intensității câmpului magnetic).

3.3. PROBLEME CU POTENȚIALUL VECTOR (ROT-ROT). ELEMENTE DE MUCHIE 133

În concluzie, în cazul soluției FEM a problemei de ES cu elemente nodale, densitatea de sarcină este distribuită superficial pe fețele elementelor, iar în problema MG rezolvată cu elemente de muchie, curentul electric este distribuit pe fețele elementelor. Câmpul generat de elementele nodale este irotațional iar cel generat de elementele de muchie este solenoidal. În ambele cazuri, câmpul electric, respectiv magnetic este constant în fiecare element iar sursa sa este superficială, pe fețele elementelor. Prin discretizare în FEM se rezolvă deci o altă problemă, ușor diferită de cea originală, dar care tinde către aceasta, pe măsură ce rețeaua de discretizare se rafinează. Aceasta explicație combinată cu teorema Helmholtz, de descompunere a câmpurilor arată cele două fețe complementare ale FEM: elementele nodale și cele de muchie. Doar prin ambele abordări combinate se obține o reprezentare corectă și completă a câmpului electromagnetic, și în gneral a câmpurilor fizice. FEM nu poate fi înțeleasă complet, fără înțelegerea ambelor tehnici, nodală și de muchie. Numai împreună se obțin rezultate corecte, nu numai din punct de vedere matematic ci și algoritmic dar și fizic.

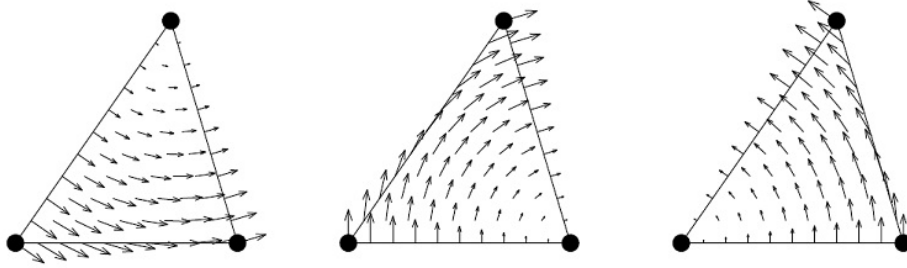


Figura 3.5: Funcțiile de formă vectoriale (de muchie) în 2D: w23, w13, w12 [14]

În [133], (<http://www.math.chalmers.se/~stig/underv/doktorandkurs/FEM/200607/nedelec.pdf>) sunt prezentate și alte elemente de muchie, cunoscut sub numele de elemente Nédélec: de ordin zero și de prima speță, definite în 3D de $N_0^I = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x} | \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ cu dimensiune 6; sau de ordin unu și de a doua speță, definite de $N_1^{II} = (P^1(K))^d$ de dimensiune 12 pentru $d = 3$, cu proprietatea $rot N_0^I(K) = rot N_1^{II}(K)$. În cazul 2D $N_0^I = \{ \mathbf{a} + b[y, -x]' | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \}$ are dimensiunea 3. Se demonstrează că funcțiile vectoriale de formă

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{N_0} &= \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i \\ \widehat{\varphi}_E &= \nabla (\lambda_i \lambda_j) \end{aligned} \quad (3.31)$$

alcătuiesc o bază a elementelor de muchie de tip Nédélec de ordinul întâi: $N_1^{II}(K)$. Deoarece aparțin spațiului $H(rot, \Omega)$, elementele de muchie, sunt potrivite pentru a reprezenta potențialul magnetic vector, dar și intensitatea câmpurilor. Pentru reprezentarea inducțiilor electrice și magnetice ar trebui folosite alte feluri de

elemente finite, care aparțin spațiului $H(\text{div}, \Omega)$. În [133] se introduc astfel de elemente de ordin redus astfel: $RT0(K) = \{\mathbf{a} + b\mathbf{x} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, b \in \mathbb{R}\}$ cu dimensiune 4 - elemente *Raviart-Thomas*, care au gradele de libertate fluxurile pe fețele elementelor, motiv pentru care se numesc *elemente de față*;

$BDM_k = (P^k(K))^d$ - elemente *Brezzi-Douglas-Marini*, cu proprietatea $\text{div} RT0(K) = \text{div} BDM1 = P^0(K)$, adică au divergența constantă pe element.

Prin discretizarea spațiilor din diagrama de Rham, folosind elemente finite convenabil alese se obține o nouă diagramă, care la randul ei este o secvență exactă [133]: Acestea sunt spațiile liniare finit dimensionale, generate de funcțiile de

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(\text{rot}, \Omega) & \xrightarrow{rot} & H(\text{div}, \Omega) & \xrightarrow{div} & L_2(\Omega) & \xrightarrow{0} & \{0\} \\ & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & W_h & \xrightarrow{\nabla} & V_h & \xrightarrow{rot} & Q_h & \xrightarrow{div} & S_h & \xrightarrow{0} & \{0\} \end{array}$$

bază ale elementelor nodale, de muchie, de față și respectiv de volum.

Pentru elementul de referință $\hat{K}$, secvența de dimensiune minimă conține: elementul nodal, de muchie, de față, de volumul:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^1(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_0^I(\hat{K}) \xrightarrow{rot} \mathcal{RT}_0 \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \quad (3.32)$$

asa cum sunt ele reprezentate în Fig. 3.9 unde sunt marcate colorat și gradele de libertate.

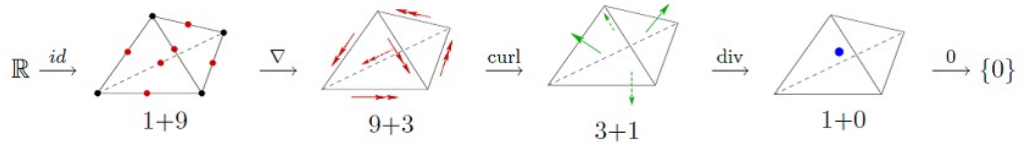


Figura 3.6: Secvența de Rham pentru elementele finite 3D de dimensiune minimă [133]

Imaginea (codomeniul) fiecărui operator de derivare spațială și nucleul operatorului următor (spațiul în care acesta se anulează) din diagrama au dimensiuni egale. În Fig. 3.9 sunt indicate dimensiunile nucleului și imaginii: $\dim Xh = \dim(\ker(D)) + \dim(\text{range}(D))$, pentru fiecare operator $D = \text{grad}, \text{rot}, \text{div}$. Situația se menține și în cazul 2D, în care se întâlnesc două variante (corespunzătoare câmpului magnetic sau electric axial și respectiv transversal): cu elemente de muchie - Nédélec:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^1(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_0^I(\hat{K}) \xrightarrow{rot} P^0 \xrightarrow{0} \{0\} \quad (3.33)$$

3.3. PROBLEME CU POTENȚIALUL VECTOR (ROT-ROT). ELEMENTE DE MUCHIE 135

sau cu elemente de fata - Raviart-Thomas:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^1(\hat{K}) \xrightarrow{rot} \mathcal{RT}_0(\hat{K}) \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.34)$$

Ele sunt reprezentate grafic în Fig. 3.7 , unde sunt puse în evidență în culori și gradele de libertate (nodale cu negru, de muchie/față cu roșu și de volum cu albastru), numărul lor, dar și separația dimensiune nucleu/imagine.

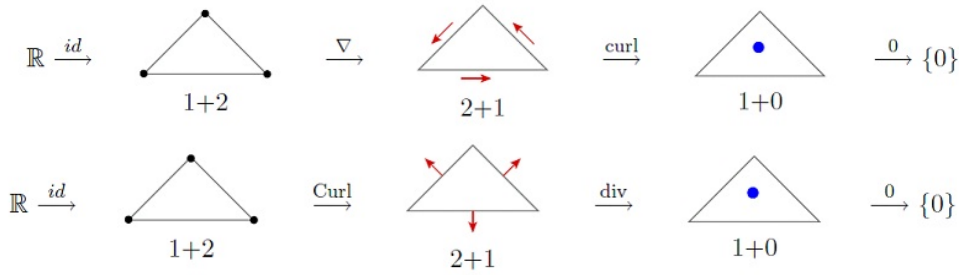


Figura 3.7: Secvența exactă de elemente finite de ordin minim în 2D: Nédélec și Raviart-Thomas [133]

Remarcăm faptul că în 2D, elementele div-conforme se obțin prin rotația cu 90 de grade a elementelor rot-conforme. În cazul 2D (plan paralele) se definesc doi operatori rotor: rot și pentru câmpuri transversale și respectiv orientate axial. În cazul elementelor bidimensionale de ordinul doi, secvența de Rham exactă este:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^2(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_1^{II}(\hat{K}) = P^1(\hat{K}) \xrightarrow{rot} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.35)$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^2(\hat{K}) \xrightarrow{rot} BDM_1^{II}(\hat{K}) = P^1(\hat{K}) \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{id} \{0\}. \quad (3.36)$$

iar gradele de libertate și numărul lor sunt reprezentate în Fig. 3.8.

În cazul 3D secvența de Rham exactă cu polinoame complete de grad minim este:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{id} P^3(\hat{K}) \xrightarrow{\nabla} (P^2(\hat{K}))^3 = \mathcal{N}_2^{II}(\hat{K}) \xrightarrow{rot} P^1((\hat{K}))^3 = \\ &= BDM_1(\hat{K}) \xrightarrow{div} P^0(\hat{K}) \xrightarrow{0} \{0\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

cu reprezentarea grafică din Fig. 3.9, în care sunt marcate gradele de libertate și numărul lor, sumă a dimensiunii imaginii și nucleului celor doi operatori succesivi.

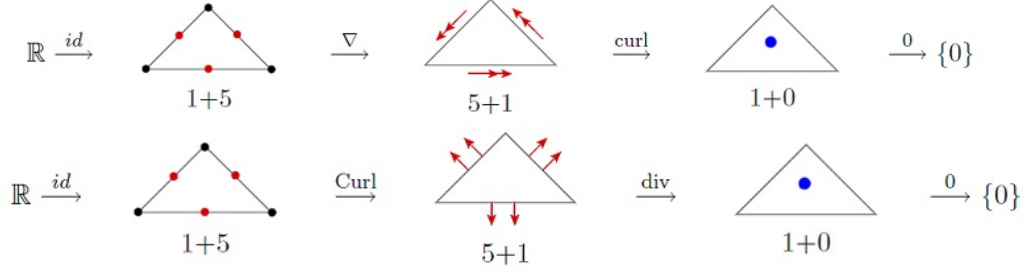


Figura 3.8: Secvența exactă de elemente finite de ordinul doi în 2D: de muchie - Nédélec și de față - BDM [133]

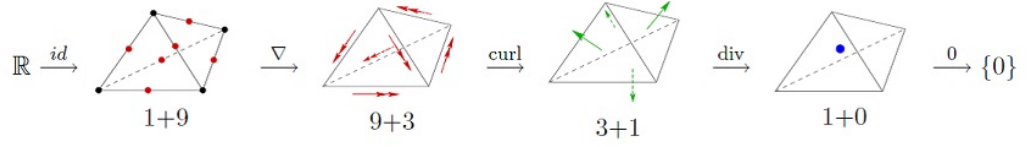


Figura 3.9: Secvența exactă de elemente polinomiale de ordin 2 în 3D: de muchie - Nédélec și de față - BDM [133]

Cu aceste preliminarii teoretice, suntem în măsură să abordăm rezolvarea cu FEM a problemelor din regimurile MG, MQSC și EDC, care au forme slabe de tipul (3.25), în care intervin operatorii *rot-rot*.

Și de această dată, partea centrală a algoritmului constă în asamblarea matricei sistemului $\mathbf{A}$ și a vectorului termenilor liberi $\mathbf{f}$. Pentru aceasta se parcurg elementele triangulației T_h și se adaugă contribuția fiecărui element K la cele două matrice de rigiditate și de masă. În final se obține:

$$\mathbf{A} = \sum_{K \in T_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{A}^K \mathbf{C}^K, \quad \mathbf{f} = \sum_{K \in T_h} (\mathbf{C}^K)^T \mathbf{f}^K, \quad (3.38)$$

în care matricea $\mathbf{C}^K$ este matricea topologică, de conectivitate, care descrie relația dintre gradele locale de libertate și cele globale. Aceasta este o matrice rară cu elemente egale $+1$ sau -1 , după cum muchia locală coincide ca sens cu cea globală sau nu și zero în rest. Constatăm ca spre deosebire de elementele nodale, cele de muchie sunt orientate și acest lucru trebuie tratat cu grijă la asamblarea matricei $\mathbf{A}$, folosind matrice de selecție cu elemente, care au nu numai valori pozitive ci și negative. O metodă simplă este să se considere că muchiile sunt orientate în ordinea crescătoare a numărului nodurilor, atât local cât și global. Și de aceasta dată, matricea $\mathbf{A}$ este rară.

Și de aceasta dată, pentru a simplifica și modulariza programarea se folosește elementul de referință $\hat{K}$ și o transformare conformă $\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K$, cu $x = \Phi(\hat{x})$,

3.3. PROBLEME CU POTENȚIALUL VECTOR (**ROT-ROT**). ELEMENTE DE MUCHIE 137

care duce pe $\widehat{K}$ în elementele fizice K , ce alcătuiesc rețeaua de discretizare spațială. Vom nota cu $\mathbf{F}_K$ matricea jacobian a transformării conforme și cu J determinantul său. Gradele de libertate își prezervă valoarea, dar funcțiile de forma și coordonatele se transformă conform.

Contribuțiile elementului K la matricele sistemului sunt [133]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^K &= \int_K \mu^{-1} \text{rot } \varphi_\alpha \text{rot } \varphi_\beta dx + \int_K k \varphi_\alpha \varphi_\beta dx - \\ &- \int_{\widehat{K}} \mu^{-1} J^{-1} (F_K \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha) (F_K \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta) dx + \\ &+ \int_{\widehat{K}} k (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha) (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta) d\widehat{x} \\ \mathbf{f}_\alpha^K &= \int_K \mathbf{j} \varphi_\alpha dx = \int_{\widehat{K}} \mathbf{j} (F_K^{-T} \widehat{\varphi}_\alpha) d\widehat{x}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

în care $\widehat{\varphi}_\alpha$ sunt funcțiile de formă ale elementului de referință, care generează un spațiu de elemente finite locale, rot-conform, parte din $H(\text{rot}, \Omega)$. Aici s-a notat cu $\mathbf{j}$ sursa internă de câmp - densitatea de curent și cu $\mu = 1/\nu$ permeabilitatea magnetică, în cazul în care se rezolvă ecuația satisfăcută de potențialul magnetic vector.

În cazul 2D, expresia capătă o formă mai simplă:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^K &= \int_{\widehat{K}} \mu^{-1} J^{-1} \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta dx + \\ &+ \int_{\widehat{K}} k (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\alpha) (F_K^{-T} \text{rot } \widehat{\varphi}_\beta) J d\widehat{x}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

în care primul termen este matricea "de rigiditate", iar al doilea este matricea "de masă".

De exemplu, în cazul 2D cu elemente de muchie Nédélec, de speța întâi, la care funcția de forma este $\varphi_i = (a_{1i} + b_i y)\mathbf{i} + (a_{2i} - b_i x)\mathbf{j}$ cu $\text{rot } \varphi_i = -2b_i \mathbf{k}$, sau în coordonate baricentrice $\varphi_i = \lambda_j \nabla \lambda_k - \lambda_k \nabla \lambda_j$ cu $\text{rot } \varphi_i = 2 \nabla \lambda_j \times \nabla \lambda_k$, deci $\text{rot } \varphi^k = -2k$ [14]:

$$\mathbf{A}_{ij}^K = \mathbf{S}_{ij}^K + \mathbf{M}_{ij}^K, \quad (3.41)$$

cu

$$\mathbf{S}_{ij}^K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} / A, \quad (3.42)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^K = 2A \begin{pmatrix} \nabla \lambda_2 \\ \nabla \lambda_2 \mathbf{M}_{22} + \nabla \lambda_2 \\ \nabla \lambda_3 \mathbf{M}_{23} + \nabla \lambda_3 \\ \nabla \lambda_3 \mathbf{M}_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

cu $A = J/2$ este aria triunghiului și

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{22} &= \begin{bmatrix} +3 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_{23} &= \begin{bmatrix} +3 & +3 & +1 \\ +3 & +3 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_{33} &= \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 \\ +1 & +3 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^K &= j^K A \int_{\hat{K}} \mathbf{F}_K^{(-T)} \varphi_i d\hat{x} \Rightarrow \\ \mathbf{f}_1^K &= j^K A \mathbf{B}^{(-T)} [-1 \ 1]' / 3, \\ \mathbf{f}_2^K &= j^K A \mathbf{B}^{(-T)} [-1 \ -2]' / 3, \\ \mathbf{f}_3^K &= j^K A \mathbf{B}^{(-T)} [2 \ 1]' / 3, \end{aligned} \quad (3.45)$$

în care, în cazul transformării conforme afine

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

iar $\lambda_1 = 1 - x^1 - x^2$, $\lambda_2 = x^1$, $\lambda_3 = x^2$.

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_1 &= [-1 \ -1]'; \\ \nabla \lambda_2 &= [1 \ 0]'; \\ \nabla \lambda_3 &= [0 \ 1]'; \\ \varphi_1 &= \lambda_2 \nabla \lambda_3 - \lambda_3 \nabla \lambda_2 = [0, x^1]' - [x^2, 0]' = [-x^2, x^1]'; \\ \varphi_2 &= \lambda_3 \nabla \lambda_1 - \lambda_1 \nabla \lambda_3 = x^2 [-1 \ -1]' - (1 - x^1 - x^2) [0 \ 1]' = [-x^2, -1 + x^1]'; \\ \varphi_3 &= \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1 = (1 - x^1 - x^2) [10]' - x^1 [-1 - 1] = [1 - x^2, x^1]'; \end{aligned} \quad (3.47)$$

au divergența nulă și rotor constant pe element.

Combi-na-țiile liniare ale unor astfel de funcții de formă sunt potrivite să reprezinte

atât distribuția inducției magnetice cât și cea a potențialului magnetic vector în condiții de etalonare coulombiană. În acest caz, gradele de libertate sunt tensiunile de-a lungul laturilor interioare ale triunghiurilor rețelei de discretizare. Valorile acestor tensiuni pe laturile de pe frontiera domeniului sunt condiții esențiale de frontiera.

Un cod MATLAB pentru elemente de față este disponibil în [5], iar pentru elemente de muchie în [14]. După cum se va vedea totuși, în capitolul 3.5, aceste complicații (utile de altfel din punct de vedere didactic) se evită, deoarece problemele de regim magnetic staționar plan-paralele 2D, cu câmp magnetic transversal se reduc la probleme scalare *div-grad*.

Dificultățile întâlnite în asamblarea matricelor elementelor de muchie și de față sunt tratate într-o lucrare recentă [85], dovadă privind actualitatea temei.

3.4 Elemente finite de ordin superior

3.4.1 Rata și ordinul de convergență

Obiectivul acestui capitol constă în studiul performanțelor metodei elementului finit și a modului în care acestea pot fi îmbunătățite. Principalele performanțe ale unei metode numerice, cum este și metoda elementului finit se referă la acuratețea soluției numerice și la costul determinării ei.

Acuratețea soluției numerice este măsurată de distanța între aceasta și soluția exactă. De multe ori se calculează *eroarea relativă*, raportând această distanță la norma soluției exacte. Aceasta definiție este inutilă în majoritatea cazurilor practice, deoarece ea folosește soluția exactă, care este necunoscută. Valoarea exactă a erorii este calculată doar în cazurile de test, în care se rezolvă o problemă cu soluție cunoscută, tocmai pentru a evalua performanța algoritmului.

O altă dificultate constă în alegerea normei ce va fi folosită pentru evaluarea erorii. Cea mai simplă alegere este norma L^2 , dar când se dorește să fie controlată nu numai valoarea soluției, care este de regulă un potențial ci și derivata spațială a acesteia, care este un câmp, se folosește norma Sobolev, care adaugă la norma din L^2 și norma L^2 a derivatei (*grad*, *rot* sau *div*). În multe cazuri se folosește seminorma, definită ca norma L^2 a derivatei soluției, numită și norma energetică, deoarece este chiar energia câmpului. Ea este indusă de produsul scalar definit de funcționala biliniară $a(.,.)$, care intervine în forma slabă a ecuației.

O altă abordare ar fi cea în care se determină norma reziduului ecuației rezolvate. Totuși, această abordare nu este de încredere în toate cazurile, deoarece se pot da ușor exemple de probleme care au soluții aproximative cu eroare mare, dar cu o valoare mică a normei reziduului. Metoda cea mai frecvent folosită pentru estima-

rea acurateții este bazată pe majoranți ai erorii reale, care se determină a posteriori, pe baza soluției numerice. Aceștia se numesc *indicatori ai erorii* și au un caracter local, evidențiind repartitia spațială a erorii, motiv pentru care ei sunt utili la controlul rafinării adaptive a rețelei de discretizare. Ultima categorie de *estimatori de eroare*, sunt cei cu caracter aprioric, care sunt majoranți ai erorii globale, pe care se bazează demonstrația convergenței soluției numerice către soluția exactă, și care sunt utili în predicția ratei de convergență.

Costul determinării soluției se referă la *necesarul de resurse de calcul*, în special necesarul de memorie și de timp de calcul. Cel mai important parametru de care depinde acest cost este numărul N al gradelor de libertate. Cu cât acesta este mai mare, cu atât matricea sistemului ce trebuie rezolvat are dimensiune mai mare, ceea ce sporește atât necesarul de memorie, cât și timpul de calcul necesar generării sistemului și rezolvării acestuia. Un parametru de performanță este și simplitatea algoritmului. Pentru că, la fel de important (poate chiar și mai important) ca timpul de calcul este timpul programatorului. Mai sunt și alți parametri de performanță, de exemplu raritatea matricei sistemului și numărul ei de condiționare, dar aceștia ies pentru moment în afara interesului acestei lucrări. Notăm totuși ca în cazul rețelelor de discretizare cu elemente *quasi-degenerate* (cu unghiuri foarte mici sau foarte mari) și în cazul unor mari variații ale constantelor de material, matricea sistemului liniar poate fi *extrem de slab condiționată*, iar acesta să ajunga aproape imposibil de rezolvat. Indicatori asupra *calității rețelei* sunt prezentați și discutați în [77].

Trebuie să remarcăm că cele două obiective: sporirea acurateții și micșorarea efortului de calcul sunt într-o contradicție puternică. Dacă dorim micșorarea erorii de metodă, atunci numărul gradelor de libertate trebuie crescut, și reciproc, scăderea acestui număr duce la creșterea erorii. Modul în care depinde eroarea soluției numerice de numărul gradelor de libertate este o funcție caracteristică a metodei folosită pentru rezolvarea problemei. De obicei această funcție se reprezintă grafic în scara dublu logaritmică. Panta tangentei dusă la acest grafic se numește *rata de convergență* și este cel mai important parametru de performanță al metodei numerice. De regulă modulul acestei rate este cuprins între $1/2$ și 2 , cu cât este mai mare, cu atât algoritmul este mai performant. Dacă rata de convergență este de exemplu egală cu doi, atunci înzecirea numărului de necunoscute adaugă încă două cifre semnificative corecte la soluție.

După cum rezultă din teorema convergenței, prezentată anterior, eroarea soluției numerice are expresia:

$$\begin{aligned} err &= \|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^{p+1}|u|_{H_{p+1}} = O(h^{p+1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log err \leq C' + (p+1) \lg h, \end{aligned} \quad (3.48)$$

în care p este ordinul elementului finit (gradul polinomului - funcție de formă) iar h este măsura rețelei (cel mai mare diametru al unui element K). Numărul

gradelor de libertate este proporțional cu numărul de elemente din domeniu, după relația: $N \cong c \text{Mes}(\Omega)/h^d$, deci $\lg h = c' - \frac{\lg N}{d}$, în cazul rețelelor de discretizare relativ uniforme. În consecință,

$$\text{err} = O(N^{-(p+1)/d}) \Rightarrow \log \text{err} < C + (p+1) \lg h = C' - \frac{p+1}{d} \lg N \quad (3.49)$$

de unde rezultă că rata de convergență a metodei elementului finit este $(p+1)/d$, care în cazul elementelor finite triunghiulare ($d = 2$) de ordinul întâi, "liniare" (pentru care $k = 1$) are valoarea 1, în condițiile în care, soluția exactă este suficient de netedă $u \in H^2(\Omega)$. În problemele tridimensionale rata de convergență scade la $2/3$. Rata de convergență este mai mică de atât, dacă soluția are puncte singulare, de exemplu colțuri sau muchii înfundate în domeniul Ω , care scad netezimea soluției. Dacă soluția $u \in H^k(\Omega)$, adică ea are derivatele până la ordinul k de pătrat integrabil, atunci $\text{err} = O(h^q)$, în care $q = \min\{p+1, k\}$ se numește *ordinul de convergență* [49]. Când $q = 1$, convergența se numește liniară (eroarea scade proporțional cu norma h a rețelei), iar când $q = 2$, convergența se numește pătratică (eroarea scade mai rapid, proporțional cu pătratul parametrului h). O degradare a ordinului de convergență se constată și atunci când sursa de câmp nu este netedă (de exemplu este concentrată, ca o distribuție de tip Dirac), sau atunci când frontierele curbe sunt approximate prin linii poligonale, lucru implicit în cazul elementelor finite triunghiulare sau tetraedrale [49].

Trebuie să remarcăm că în cazul neted, elementele finite de ordin minim au $\text{err} = O(h^2)$, indiferent de dimensiunea d , dar exprimarea erorii în funcție de N este mult mai relevantă, mai ales în cazul rafinării adaptive a rețelei de discretizare, în care parametrul h nu mai are relevanța așteptată. Aceasta deoarece, în acest caz, pe măsura rafinării, N crește, dar h se menține constant.

3.4.2 Rafinarea adaptivă , de tip h

Din expresia erorii $\text{err} = O(h^{p+1})$ prezentată anterior, rezultă că, pentru a crește acuratețea soluției numerice avem două căi: scaderea lui h (rafinarea rețelei de discretizare) și creșterea lui p (gradul polinoamelor care constituie funcțiile de formă). În cazul ordinului minim $p = 1$, teoretic convergența este pătratică, dar în practică, datorită singularităților soluției exacte, ordinul de convergență este depreciat la unul liniar $\text{err} = O(h)$, caz în care nu se justifică folosirea unor polinoame de grad mai înalt $p > 1$, pentru ca ordinul convergenței nu poate depăși valoarea $q = \min\{p+1, k\}$. O metodă de a recupera deprecierea datorată singularităților este de a folosi un *algoritm auto-adaptiv de rafinare* a rețelei de discretizare - "Adaptive Mesh Refinement" - AMR, tehnică numită și "Adaptive Finite Element Method" - AFEM [14]. Acest algoritm iterativ pornește de la o rețea grosieră, și rezolvă problema pe rețele de discretizare cu tot mai multe elemente, și

deci cu mai multe grade de libertate. La fiecare iterație, o parte a elementelor, mai exact cele în care soluția are o eroare inadmisibilă sunt rafinate, prin divizarea lor. De exemplu, în 2D, un triunghi se poate împărți în 2, 3 sau 4 subtriunghiuri, după cum se introduc noduri suplimentare în mijlocul unei laturi, a două laturi sau pe toate cele trei laturi [43]. Elementul cel mai important al unei proceduri de rafinare auto-adaptivă AMR este folosirea unei estimări robuste și precise a erorii soluției.

În literatură sunt descriși mai mulți estimatori atât din categoria *apriori* (ce pot fi evaluați înainte de calculul numeric) cât și *aposterior*, dar majoritatea implementărilor folosesc indicatori din a doua categorie, datorită preciziei lor suplimentare. Indicatorii de eroare au un caracter local și sunt folosiți pentru a decide care muchii trebuie divizate, în timp ce estimatorii de eroare au un caracter global, sunt obținuți de regulă prin sumarea indicatorilor pe întreaga rețea și sunt folosiți pentru a decide când poate fi oprită procedura iterativă de rafinare succesivă. Un bun indicator de eroare trebuie să fie nu numai precis ci și simplu de implementat și să aibă un cost mic de calcul.

Estimarea erorii se face fie folosind soluția numerică și derivatele ei (tehnica numită de post-procesare), fie folosind abordări complementare, care dau încadrări ale soluției. Pentru a identifica singularitățile soluției, care pot fi de natură geometrică (colțuri, muchii) sau de natură fizică (discontinuități de material sau de surse), indicatorii de eroare folosesc aproximări netezite ale soluției în aceste zone de singularitate. Aceste operații de post-procesare permit evaluarea mai precisă a derivatelor soluției. Metoda complementarității este precisă, dar necesită un efort de calcul relativ mare, deoarece problema trebuie rezolvată de două ori la fiecare iterație [18], [120]. În [67] se propune un indicator simplu de eroare, definit în fiecare element (triunghi sau tetraedru), de norma diferenței dintre gradientul soluției (componentele câmpului) și o aproximare netezită a acestuia, obținută prin interpolarea cu funcțiile de bază liniare ale valorilor componentelor gradientelor din vârfurile elementului, valori calculate ca media din elementele vecine. În acest fel, soluția este netezită prin medierea ei, nu numai pe elementul curent ci și în toate elementele vecine cu acesta. Estimatorul global de eroare are pentru cele N elemente expresia:

$$\eta_\tau = \left\{ \frac{\|e_{g_i}\|_{L_2}}{\left[\sum_{i=1}^N \|g_i\|^2 + \|e_{g_i}\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}} \right\} 100\% \quad (3.50)$$

în care g_i este gradientul local în elementul i iar

$$\|e_{g_i}\|^2 = \left\{ \sum_{i=1}^N \|e_{g_i}\|_{L_2}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.51)$$

cumulează abaterile gradientilor $e_{g_i} = g_i - g^i$ din toate elementele. Aici s-a notat cu g^i gradientul netezit din elementul i , obținut prin interpolarea valorilor medii din vârfurile elementului i :

$$\tilde{g}_x = N\bar{g}_x, \quad \tilde{g}_y = N\bar{g}_y \quad (3.52)$$

Vor fi divizate elementele care au e_{g_i} în norma mai mare decât valoarea admisibilă:

$$\|e_{g_i}\| \leq \eta_\tau \left[\frac{\left\{ \sum_{i=1}^N \|g_i\|^2 + \|e_{g_i}\|_{L_2}^2 \right\}}{N} \right]^{1/2} = e \quad (3.53)$$

Alți indicatori și estimatori de eroare sunt prezentați în [43], [96], [64]. Majoritatea acestor indicatori măsoară norma reziduul ecuației pe elementul curent K și saltul derivatei după normală a soluției pe fețele elementului:

$$\eta_K^2 = \eta_{B_K}^2 + \eta_{E_K}^2 \quad (3.54)$$

$$\eta_{B_K}^2 = \frac{h_K^2}{p_K^2} \|f_{p_K} + \Delta u_{FE}\|_{L^2(K)}^2 \quad (3.55)$$

$$\eta_{E_K}^2 = \sum_{e \in \partial K \cap \Omega} \frac{h_e}{2p_e} \left\| \left[\frac{\partial u_{FE}}{\partial n_e} \right] \right\|_{L^2(e)}^2 \quad (3.56)$$

în care f_{p_K} este proiecția sursei pe spațiul polinoamelor de grad $p_K - 1$, iar $[\cdot] = \text{div}_s$ este saltul la trecerea prin frontiera elementului K , egal cu divergența superficială a câmpului. Este evident că pentru soluția exactă, acest indicator are valoare nulă.

În Fig. 3.10 este reprezentată rețeaua de discretizare generată în urma rafinării adaptive AMR. Se constată că rețeaua este îndesită selectiv, în special în vecinătatea colțului care generează singularitatea. Pentru această problemă este prezentat în Fig. 3.11 modul în care variază eroarea relativă în funcție de numărul de noduri N_n (numarul gradelor de libertate), pentru cazul rafinării uniforme a rețelei

de discretizare și în cazul rafinării adaptive. Se constată că în primul caz rata de convergență este aproximativ 0,7, valoare corespunzătoare unui ordin de convergență $q = 1,4 \cong 4/3 < 2$ (care este valoarea ideală, în absența singularității). În schimb, în cazul adaptiv, rata de convergență este unitară $err = O(N_n^{-1})$, care ar corespunde în cazul unei rețele uniforme la o convergență pătratică, care este maximul ideal. Această estimare are mai mult un caracter teoretic, deoarece nu trebuie să uităm că în abordarea adaptivă, nu rezolvăm un singur sistem de ecuații, ci o serie de sisteme de dimensiuni din ce în ce mai mari. Chiar și așa, folosirea rețelelor adaptive este recomandabilă, deoarece acestea sunt optime și oferă un control al erorii de metodă. În ultima perioadă, strategiile adaptive AMR de analiză cu elemente finite nu sunt numai proceduri recomandabile, ci ele tind să devină abordările standard. Iar pentru a compara performanțele procedurilor adaptive de rezolvare, cel mai relevant este modul în care indicatorul global de eroare depinde de timpul de calcul, necesar efectuării iterațiilor de rafinare succesivă a rețelei.

Pe de altă parte, se pot obține accelerări extraordinare ale vitezei de calcul, deoarece folosirea diferitelor nivele de rafinare în rezolvarea iterativă a sistemului de ecuații conduce la preconditionarea multigrid (Fig. 3.12), care este cea mai rapidă metodă cunoscută în prezent pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor eliptice reale [53], (<http://www.mgnet.org/>). În principiu, *tehnica multigrid* presupune parcurgerea ierarhiei de rețele de la cea mai fină la cea mai grosieră și înapoi, efectuând operațiile de *netezire* (reducerea erorilor "de înaltă frecvență"), de *restricție* (transferul reziduului pe o rețea mai grosieră), iar la întoarcere, operația de *interpolare* (transferul reziduului pe o rețea mai fină). (http://en.wikipedia.org/wiki/Multigrid_method). Ciclul multigrid poate fi folosit ca atare în rezolvare, dar se preferă să fie folosit ca preconditionare pentru metodele iterative de tip Krylov [71], ca de exemplu metoda gradientilor conjugați (CG), folosită pentru matricele simetrice și pozitiv definite, cum sunt matricele generate de FEM aplicată ecuațiilor eliptice. De obicei, după mai puțin de zece iterații se obține o soluție cu precizie acceptabilă.

Complexitatea algoritmului este liniară, timpul de calcul având ordinul $O(N)$, ceea ce este ideal [22]. O listă codurilor multigrid din domeniul public este disponibilă la (<http://www.mgnet.org/mgnet-codes.html>).

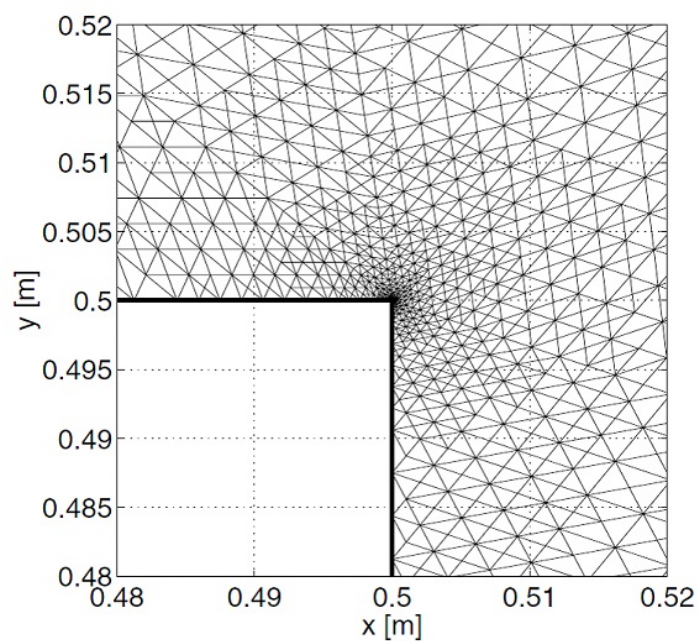


Figura 3.10: Exemplu de rețea de discretizare adaptivă [14]

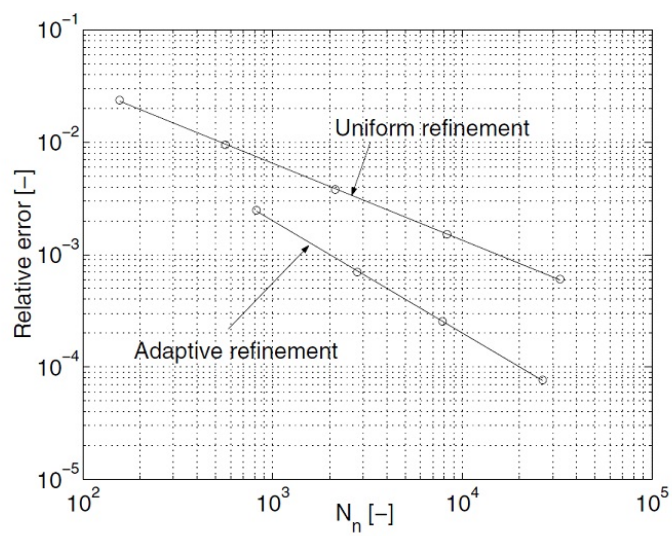


Figura 3.11: Eroarea relativă în funcție de numărul de noduri, pentru rafinare uniformă și adaptivă [14]

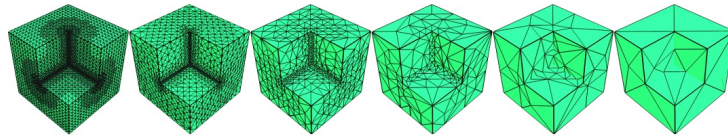


Figura 3.12: FEM multigrid cu rafinare adaptivă (<http://people.cs.uchicago.edu/~knepley/>)

3.4.3 Elemente scalare de ordin superior. Rafinarea p

Dupa cum am constatat anterior, o altă metodă de a scădea eroarea este de să creștem gradul polinoamelor folosite în definirea funcțiilor de formă. În cazul bidimensional, polinomul de grad n în două variabile conține termeni de forma $x^p y^q$, cu $p + q \leq n$, care pot fi grupați în triunghiul lui Pascal:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & & & \\
 x & y & & \\
 x^2 & xy & y^2 & \\
 x^3 & x^2y & xy^2 & y^3
 \end{array} \quad (3.57)$$

fiecare polinom complet având $m = (n + 1)(n + 2)/2$ termeni. Adică $m = 1, 3, 6, 10, \dots$ pentru $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ceea ce înseamnă că polinomul este determinat de m coeficienți, sau echivalent de valorile lui în m puncte nodale din interiorul triunghiului. Prin *unisolență*, proprietate caracteristică a acestor polinoame, înțelegem faptul că dacă valoarea este nulă în noduri atunci și coeficienții sunt nuli, deci polinomul este identic nul. Aceste puncte se aleg de preferință în vârfuri și pe laturi. În consecință, cunoașterea valorilor din noduri determină o soluție unică în întreg domeniul de calcul. Aceasta nu numai că este unică ci este și continuă, deoarece pe fețele și muchiile comune avem tot polinoame unisolvante. De exemplu, polinomul de gradul întâi este determinat de valorile lui din cele trei vârfuri, polinomul de gradul doi are pe lângă aceste puncte, ca noduri și mijloacele laturilor, adică în total 6 grade de libertate. Polinomul de gradul trei are 10 noduri: trei în vârfuri, câte două pe fiecare latură și unul în centrul triunghiului. Spunem că funcțiile de bază sunt izoparametrice, deoarece numărul lor de parametri (grade de libertate) este egal cu numărul de noduri.

Funcțiile de bază se anulează în toate nodurile, cu excepția uneia, în care funcția are valoare unitară. Pentru gradul $n = 2$, funcțiile de bază au graficele similare cu cele reprezentate în Fig. 3.13 Rotind nodurile se obțin toate cele șase funcții de

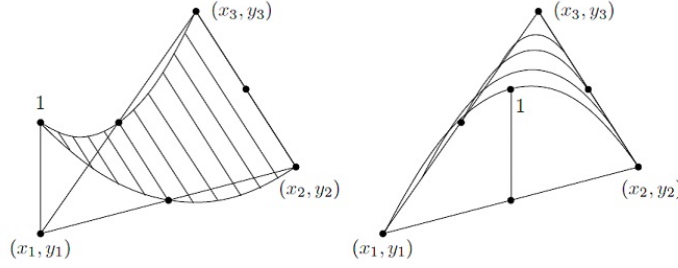


Figura 3.13: Funcții de bază de gradul doi și nodurile lor [78]

bază. Față de coordonatele baricentrice, ele au expresiile:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \lambda_1(2\lambda_1 - 1) \\
 N_2 &= \lambda_2(2\lambda_2 - 1) \\
 N_3 &= \lambda_3(2\lambda_3 - 1) \\
 N_4 &= 4\lambda_1\lambda_2 \\
 N_5 &= 4\lambda_2\lambda_3 \\
 N_6 &= 4\lambda_3\lambda_1
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

În general, funcțiile de bază au expresiile [78]:

$$N_i = P_I^n(\lambda_1)P_J^n(\lambda_2)P_K^n(\lambda_3), \quad I + J + K = n, \tag{3.59}$$

iar

$$\begin{aligned}
 P_I^n(\lambda_1) &= (1/I!) \quad (p = 0, I - 1) \quad (n\lambda_1 - p), \quad I > 0; \\
 P_J^n(\lambda_2) &= (1/J!) \quad (p = 0, J - 1) \quad (n\lambda_2 - p), \quad J > 0; \\
 P_K^n(\lambda_3) &= (1/K!) \quad (p = 0, K - 1) \quad (n\lambda_3 - p), \quad K > 0;
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

cu $P_0^n = 1$.

Prezența polinoamelor de interpolare Lagrange în aceste relații explică de ce elementele finite care folosesc aceste funcții de bază se numesc elemente finite de tip *Lagrange*. Aceste funcții de bază generează o familie ierarhică de elemente finite nodale de grade crescătoare, definite pe triunghi și are deci valori identice pe această latură.

Funcțiile de formă definite pe întreaga triangulație sunt funcții continue, deoarece în două triunghiuri alăturate, funcția este unic determinată de valorile ei din nodurile plasate pe latura comună a celor două triunghiuri.

În cazul 3D, polinomul de gradul n conține $m = (n+1)(n+2)(n+3)/6$ termeni de forma $x^p y^q z^r$ cu $p+q+r \leq n$, adică 1, 4, 10, 20, ... termeni în polinoamele de

gradul 0, 1, 2, 3, ... Funcțiile de bază din familia ierarhică definite pe tetraedru au expresii similare cu cele din cazul 2D:

$$N_i = P_I^n(\lambda_1)P_J^n(\lambda_2)P_K^n(\lambda_3)P_L^n(\lambda_4), \quad (3.61)$$

în care P sunt polinoamele Lagrange cu $I + J + K + L = n$. De exemplu, în cazul $n = 2$, nodurile sunt plasate în cele 4 vârfuri ale tetraedrului și în mijloacele celor 6 laturi.

3.4.4 Elemente vectoriale de ordin superior

Construirea bazelor vectoriale de elemente de muchie de ordin înalt a reprezentat o preocupare a mai multor cecetări, care au făcut diferite propuneri. Printre primele este baza de gradul al doilea pentru tetraedre, propusă de Lee în [80] și alcătuită din:

$$\{12 \text{ funcții de bază "de muchie" } \lambda_i \nabla \lambda_j \text{ } i \neq j\} \cup \{\lambda_1 \lambda_2 \nabla \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3 \nabla \lambda_2, \lambda_2 \lambda_3 \nabla \lambda_4, \lambda_2 \lambda_4 \nabla \lambda_3, \lambda_3 \lambda_4 \nabla \lambda_1, \lambda_3 \lambda_1 \nabla \lambda_4, \lambda_4 \lambda_1 \nabla \lambda_2, \lambda_4 \lambda_2 \nabla \lambda_1\} \quad (3.62)$$

folosită ulterior pentru dezvoltarea unor baze ierarhice. În [127] sunt inventariate mai multe astfel de baze și sunt studiate folosind tehnici simbolice, iar în [103], patru dintre ele sunt comparate din punctul de vedere al ratei de convergență, a rezolvării iterative a sistemului liniar, obținut prin discretizare. În această lucrare se constată că baza Lee determină cea mai rapidă convergență.

Bazele vectoriale ale elementelor de muchie de ordin înalt se pot genera în mod similar cu cele nodale. De exemplu în 2D, funcțiile de bază ierarhice rot-conforme pentru triunghi au expresiile [78]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{12}^{IJK} &= \alpha_{12}^{IJK} S_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) \mathbf{w}_{12} \\ \mathbf{W}_{23}^{IJK} &= \alpha_{23}^{IJK} P_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) \mathbf{w}_{23} \\ \mathbf{W}_{31}^{IJK} &= \alpha_{31}^{IJK} S_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) \mathbf{w}_{31} \end{aligned} \quad (3.63)$$

în care coeficienții α sunt factori de normalizare, aleși astfel încât integrala de linie a funcției $\mathbf{W}_{ab}^{IJK}$ pe muchia $a - b$ să aibă valoare unitară. Aici s-au notat cu L_k coordonata baricentrică λ_k , cu $\mathbf{w}_{ab}$, funcțiile vectoriale de muchie de ordin minim, cu P polinoamele de interpolare Lagrange, pentru care $P_0(\cdot) = 1$, iar cu S polinoamele Silvester definite astfel:

$$S_J^{n+2}(L_2) = P_{J-1}^{n+2}\left(L_2 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{(J-1)!} \prod_{p=0}^{J-1} [(n+2)L_2 - p]. \quad (3.64)$$

Numarul acestor funcții de bază vectoriale este $k = (n+1)(n+3)$. De exemplu, în cazul $n = 1$, cele opt funcții de bază au expresiile:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_1 &= \mathbf{W}_{12}^{120} = \alpha_{12}^{120} S_1^3(L_1) S_2^3(L_2) P_0^3(L_3) \mathbf{w}_{12} = \alpha_{12}^{120} (3L_2 - 1) \mathbf{w}_{12} \\
 \mathbf{W}_2 &= \mathbf{W}_{12}^{210} = \alpha_{12}^{210} S_2^3(L_1) S_1^3(L_2) P_0^3(L_3) \mathbf{w}_{12} = \alpha_{12}^{210} (3L_1 - 1) \mathbf{w}_{12} \\
 \mathbf{W}_3 &= \mathbf{W}_{12}^{111} = \alpha_{12}^{111} S_1^3(L_1) S_1^3(L_2) P_1^3(L_3) \mathbf{w}_{12} = \alpha_{12}^{111} 3L_2 \mathbf{w}_{12} \\
 \mathbf{W}_4 &= \mathbf{W}_{23}^{012} = \alpha_{23}^{012} P_0^3(L_1) S_1^3(L_2) S_2^3(L_3) \mathbf{w}_{23} = \alpha_{23}^{012} (3L_3 - 1) \mathbf{w}_{23} \\
 \mathbf{W}_5 &= \mathbf{W}_{23}^{021} = \alpha_{23}^{021} P_0^3(L_1) S_2^3(L_2) S_1^3(L_3) \mathbf{w}_{23} = \alpha_{12}^{021} (3L_2 - 1) \mathbf{w}_{23} \\
 \mathbf{W}_6 &= \mathbf{W}_{31}^{102} = \alpha_{31}^{102} S_1^3(L_1) P_0^3(L_2) S_2^3(L_3) \mathbf{w}_{31} = \alpha_{31}^{102} (3L_3 - 1) \mathbf{w}_{31} \\
 \mathbf{W}_7 &= \mathbf{W}_{31}^{201} = \alpha_{31}^{201} S_2^3(L_1) P_0^3(L_2) S_1^3(L_3) \mathbf{w}_{31} = \alpha_{31}^{201} (3L_1 - 1) \mathbf{w}_{31} \\
 \mathbf{W}_8 &= \mathbf{W}_{31}^{111} = \alpha_{31}^{111} S_1^3(L_1) P_1^3(L_2) S_1^3(L_3) \mathbf{w}_{31} = \alpha_{31}^{111} 3L_2 \mathbf{w}_{31}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

în care s-a folosit schema de numerotare a indicilor I, J, K reprezentat în Fig. 3.14.

Construcții asemănătoare pentru familii ierarhice de elemntele vectoriale de mu-

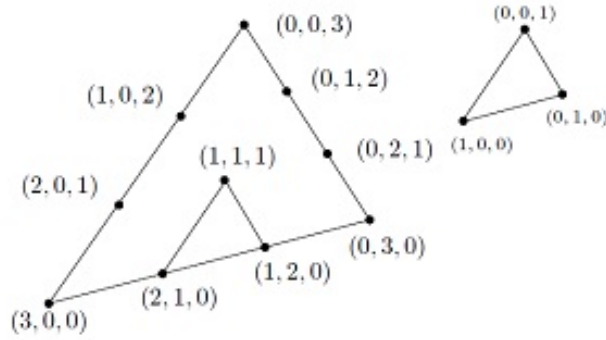


Figura 3.14: Schema de numerotare (I, J, K) asociata elementului de muchie $\mathbf{w}_{12}$ de ordin $n = 1$ [78]

chie de ordin mai înalt se realizează și în tetraedrele din 3D:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{12}^{IJKL} &= \alpha_{12}^{IJKL} S_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) P_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{12} \\
 \mathbf{W}_{23}^{IJKL} &= \alpha_{23}^{IJKL} P_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) P_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{23} \\
 \mathbf{W}_{31}^{IJKL} &= \alpha_{31}^{IJKL} S_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) P_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{31} \\
 \mathbf{W}_{14}^{IJKL} &= \alpha_{14}^{IJKL} S_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) S_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{14} \\
 \mathbf{W}_{24}^{IJKL} &= \alpha_{24}^{IJKL} P_I^{n+2}(L_1) S_J^{n+2}(L_2) P_K^{n+2}(L_3) S_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{24} \\
 \mathbf{W}_{34}^{IJKL} &= \alpha_{34}^{IJKL} P_I^{n+2}(L_1) P_J^{n+2}(L_2) S_K^{n+2}(L_3) S_L^{n+2}(L_4) \mathbf{w}_{34}
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

numai că acum, numărul funcțiilor de baza crește la $k = (n+1)(n+3)(n+4)/2$.

3.4.5 Secvența Rham a bazelor FEM ierarhice

Un mod principal diferit de a construi baze ierarhice, de ordin înalt este prezentat în teza de doctorat [133]. Ideea centrală a tezei este să se construiască baze care satisfac secvența de Rham. Aplicând gradientul elementelor nodale se obțin elementele de muchie, apoi aplicându-le acestora rotorul se obțin elementele de față, iar în final, elementele de celulă se obțin din divergența elementelor de față. Se pornește de la baze de grad minim: elemente finite nodale liniare, elemente de muchie de tip Nédélec și elemente de față de tip Raviart-Thomas, prezentate în capitolul anterior, iar apoi folosind polinoame ortogonale de ordin tot mai mare, se construiește ierarhia de funcții de bază. Scopul este de a construi clase ierarhice de baze conforme în spațiile H^1 , $H(rot)$ și $H(div)$, potrivite pentru rafinarea hp , atât după parametrul geometric h cât și după gradul p , al polinoamelor folosite în aceste baze. Pentru aceste baze, secvența de Rham este exactă, atât local cât și global. Bazele sunt anizotrope, adică pot avea grade diferite pe muchii și fețe diferite, pentru a permite rafinarea geometrică neuniformă a rețelei de discretizare și modelarea foliilor. Gradul polinomului poate avea valori arbitrare doar pe diferite muchii, fețe sau celule elementare, fără ca funcția de bază să piardă conformitatea cu spațiul în care se află, sau să dispară exactitatea secvenței de Rham, căreia îi aparține acel polinom. Mai mult, strategia de construire a bazei trebuie să se aplice pentru diferite forme ale elementelor: triunghi, patrulater, tetraedru, prismă, hexaedru, pentru a permite rețelele de discretizare cu elemente mixte, care apar în urma rafinării locale. Trebuie să reținem că elementele geometrice: muchie, față sunt orientate în ordinea descrescătoare a nodurilor lor. După cum se va vedea, fiecare subspațiu de elemente finite poate avea funcții de bază nodale, de muchie, de față sau de volum (de celulă).

În elementele de referință rectangulare (pătrat, cub) se folosește pentru funcțiile de bază produsul tensorial de polinoame ortogonale Legendre, care are avantajul evaluării rapide, garantează liniar independența, raritatea matricei generate și a foarte bune ei condiționări. În final, se obține o suită de astfel subspații (elemente finite).

Funcțiile de bază (liniar independente) polinomiale pentru elemente patrulater (Q) în $H^1(Q)$, $H(rot, Q)$ și $H(div, Q)$ se definesc astfel:

- Funcții de tip nodal

$$\text{pentru } i = 1, \dots, 4 : \quad \phi_i^V = \lambda_i.$$

- Funcții de tip muchie

$$\text{pentru } m = 1, 2, 3, 4 : \text{ se consideră muchiile } E_m = [e_1, e_2] ..$$

$$\text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 2 : \quad \phi_i^{E_m} = L_{i+2} (\sigma_{e_2} - \sigma_{e_1}) (\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2})$$

- Funcții celulare

$$\text{pentru } 0 \leq i, j \leq p_C - 2 : \quad \phi_{ij}^C = L_{i+2} (2x - 1) L_{j+2} (2y - 1)$$

față de coordonatele (biliniare și respectiv liniare):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= (1 - x)(1 - y) & \sigma_1 &:= (1 - x) + (1 - y) \\ \lambda_2 &:= x(1 - y) & \sigma_2 &:= x + (1 - y) \\ \lambda_3 &:= xy & \sigma_3 &:= x + y \\ \lambda_4 &:= (1 - y) + x & \sigma_4 &:= (1 - x) + y \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ele definesc subspațiile:

$$\begin{aligned} W^V(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\phi_m^V)_{1 \leq m \leq 4} \right), \\ W_{p_{E_m}}^{E_m}(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\phi_i^{E_m})_{1 \leq i \leq p_{E_m} - 1} \right), \quad m = 1, \dots, 4 \\ W_{p_C}^C(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\phi_{ij}^C)_{1 \leq i, j \leq p_C} \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

care adunate dau subspațiul polinomial de grad $\mathbf{p}$ al elementelor finite patrulate din $H^1(Q)$:

$$W_{\mathbf{p}}(\mathcal{Q}) := W^V(\mathcal{Q}) \oplus \bigoplus W_{p_{E_m}}^{E_m}(\mathcal{Q}) \oplus W_{p_C}^C(\mathcal{Q}) \quad (3.69)$$

în care $\mathbf{p} = (p_{E_1}, p_{E_2}, p_{E_3}, p_{E_4}, p_C)$ este un vector cu componente întregi, care indică gradele polinoamelor de tip muchie și respectiv celula elementară. Dimensiunea acestui spațiu este $|W_{\mathbf{p}}(Q)| = (p + 1)^2$, dacă polinoamele sunt uniforme (au același grad p pe toate muchiile ca și pe celulă).

Funcțiile de bază polinomiale rot-conforme din $H(\text{rot}, Q)$ se obțin aplicând gradientul funcțiilor de baza din H^1 :

- Funcții de tip muchie

pentru $m = 1, 2, 3, 4$: se consideră muchiile $E_m = [e_1, e_2] ..$

- Funcții de formă de ordin redus

$$\varphi_m^{\mathcal{N}_0} = \frac{1}{2} \nabla ((\sigma_{e_2} - \sigma_{e_1}) (\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}))$$

– Funcții de formă de ordin înalt

$$\text{for } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1 \quad \varphi_i^{E_m} = \nabla (L_{i+2} (\sigma_{e_2} - \sigma_{e_1}) (\lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}))$$

• Funcții de bază de tip celulă

– Tipul 1

$$\text{pentru } 0 \leq i, j \leq p_C - 1$$

$$\varphi_{ij}^{C_1} = \nabla (L_{i+2} (2x - 1) L_{j+2} (2y - 1))$$

– Tipul 2

$$\text{pentru } 0 \leq i, j \leq p_C - 1$$

$$\varphi_{ij}^{C_1} = L'_{i+2} (2x - 1) L_{j+2} (2y - 1) \mathbf{e}_x - L_{i+2} (2x - 1) L'_{j+2} (2y - 1) \mathbf{e}_y$$

– Tipul 3

$$\text{pentru } 0 \leq i \leq p_C - 1$$

$$\varphi_i^{C_3} = L_{i+2} (2y - 1) \mathbf{e}_x;$$

$$\varphi_{i+p_C}^{C_3} = L_{i+2} (2x - 1) \mathbf{e}_y.$$

Acestea genereaza subspatiile:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_m^{\mathcal{N}_0})_{1 \leq m \leq 4} \right), \\ V_{p_{E_m}}^{E_m}(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_i^{E_m})_{0 \leq i \leq p_{E_m}-1} \right), \\ V_{p_C}^{C_1}(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_{ij}^{C_1})_{0 \leq i, j \leq p_C-1} \right), \\ V_{p_C}^{C_2}(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_{ij}^{C_2})_{0 \leq i, j \leq p_C-1} \right), \\ V_{p_C}^{C_3}(\mathcal{Q}) &:= \text{span} \left((\varphi_i^{C_3})_{0 \leq i \leq 2p_C-1} \right). \end{aligned} \tag{3.70}$$

care adunate dau subspațiul polinomial al elementelor finite patrulare din $H(\text{rot}, \mathcal{Q})$ de grad p :

$$V_p(\mathcal{Q}) := \mathcal{N}_0(\mathcal{Q}) \oplus \bigoplus_{p_{E_m}} V_{p_{E_m}}^{E_m}(\mathcal{Q}) \oplus V_{p_C}^C(\mathcal{Q}) \tag{3.71}$$

Dimensiunea acestui spatiu este $|Vp(Q)| = 2(p+1)(p+1)$, în cazul polinoamelor uniforme.

Funcțiile de bază polinomiale div-conforme din patrulatere din $H(div, Q)$ pentru Q pătrat în 2D se obțin rotind cu 90 de grade funcțiile de bază din $H(rot, Q)$:

- Funcții de formă de tip muchie

pentru $m = 1, 2, 3$: muchia E^m cu vârfurile $\{e_1, e_2\}$

$$\psi_m^{N_0} = \text{rot } \lambda_{e_1} \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} \text{rot } \lambda_{e_2}$$

$$\psi_i^{E_m} = \text{rot } (L_{i+2}^S (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}, \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1})) , \quad \text{for } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1$$

- Funcții de de formă de tip celulă

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{C_1} &= \text{rot } u_i v_j + u_i \text{rot } v_j, & \text{for } 0 \leq i+j \leq p_C - 2 \\ \psi_{i,j}^{C_2} &= \text{rot } u_i v_j - u_i \text{rot } v_j, & \text{for } 0 \leq i+j \leq p_C - 2 \\ \psi_j^{C_3} &= (\text{rot } \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \text{rot } \lambda_2) v_j, & \text{for } 0 \leq j \leq p_C - 2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

cu $u_i := L_{i+2}^S (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$ și $v_j := \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1)$

Funcțiile de bază div-conforme în cazul elementelor 2D triunghiulare se obțin din cele prezentate anterior, aplicând transformarea Duffy:

$$\mathcal{D} : Q = [-1, 1]^2 \rightarrow T; \quad (\xi, \eta) \rightarrow (x, y) \quad (3.73)$$

definită ca

$$x = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta); \quad y = \frac{1}{2} (1 + \eta), \quad (3.74)$$

care transforma un pătrat Q în triunghiul de referință T (Fig. 3.15). Transformarea inversă are expresia:

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \frac{x}{1-y} - 1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \in [-1, 1] \\ \eta &= 2y - 1 = 2\lambda_3 - 1 = 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (3.75)$$

în care $\lambda_{1,2,3}$ sunt coordonatele baricentrice ale triunghiului.

Funcțiile de bază ale pătratului se transformă și devin funcțiile de bază ale triunghiului. Se obține următoarea **ierarhie de funcții de forma polinomiale, definite pe triunghi**:

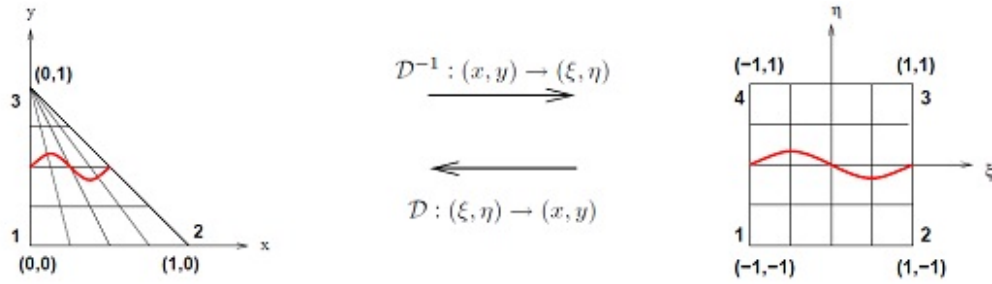


Figura 3.15: Transformarea Duffy între un pătrat și un triunghi de referință [133]

- Funcții de tip nod

$$\text{pentru } i = 1, 2, 3 : \phi_i^V = \lambda_i \quad (3.76)$$

- Funcții de tip muchie

$$\begin{aligned} \text{pentru } m = 1, 2, 3 : \text{ muchia } E_m &= [e_1, e_2] \\ \text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 2 : \phi_i^{E_m} &= L_{i+2}^S(\lambda_{e_2} - \lambda_{e_1}, \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}) \end{aligned} \quad (3.77)$$

- Funcții de tip celulă

$$\begin{aligned} \text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 3, \quad i, j \geq 1 : \\ \phi_{(i,j)}^C &= L_{i+2}^S(\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1) \end{aligned} \quad (3.78)$$

Dimensiunea spațiului generat de aceste funcții de bază este $|Wp(T)| = (p + 1)(p + 2)/2$, în cazul polinoamelor unipentru.

Baze ierarhice de ordin superior, rot-conpentru:

- Funcții de tip muchie

$$\text{pentru } m = 1, 2, 3 : \text{ muchia } E^m = [e_1, e_2].$$

- Funcțiile ordin redus

$$\varphi_m^{\mathcal{N}_0} = \nabla \lambda_{e_1} \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} \nabla \lambda_{e_2}$$

– Funcțiile de ordin înalt

$$\text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1 \quad \varphi_i^{E_m} = \nabla (L_{i+2} (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}, \lambda_{e_1} + \lambda_{e_2}))$$

• Funcțiile de tip celulă

Definim

$$u_i := L_{i+2}^S (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \text{ și } v_j := \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1)$$

$$\text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 2, \quad i, j \geq 0$$

– Tipul 1 (câmpuri de gradienti)

$$\varphi_{i,j}^{C_1} = \nabla (u_i v_j) = \nabla u_i v_j + u_i \nabla v_j$$

– Tipul 2

$$\varphi_{i,j}^{C_2} = \nabla u_i v_j - u_i \nabla v_j$$

– Tipul 3

$$\varphi_{0,i}^{C_3} = (\nabla \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nabla \lambda_2) v_j$$

Dimensiunea spațiului generat de aceste funcții de baza este $|V_p(T)| = (p+1)(p+2)$, în cazul polinoameleor unipentru, număr egal cu cel specificat anterior pentru construcția cu polinoame Lagrange-Sylvester.

Baze ierarhice polinomiale de ordin superior div-conpentru pe triunghi:

• Funcții de pentrumă de tip muchie

$$\text{pentru } m = 1, 2, 3 : \text{ muchia } E^m \text{ cu vârfurile } \{e_1, e_2\}$$

$$\psi_m^{N_0} = \text{rot } \lambda_{e_1} \lambda_{e_2} - \lambda_{e_1} \text{rot } \lambda_{e_2}$$

$$\psi_i^{E_m} = \text{rot } (L_{i+2}^S (\lambda_{e_1} - \lambda_{e_2}, \lambda_{e_2} + \lambda_{e_1})), \quad \text{pentru } 0 \leq i \leq p_{E_m} - 1$$

• Funcții de pentrumă de tip celulă

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{C_1} &= \text{rot } u_i v_j + u_i \text{rot } v_j, & \text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 2 \\ \psi_{i,j}^{C_2} &= \text{rot } u_i v_j - u_i \text{rot } v_j, & \text{pentru } 0 \leq i + j \leq p_C - 2 \\ \psi_j^{C_3} &= (\text{rot } \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \text{rot } \lambda_2) v_j, & \text{pentru } 0 \leq j \leq p_C - 2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\text{cu } u_i := L_{i+2}^S (\lambda_2 - \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \text{ și } v_j := \lambda_3 l_j (2\lambda_3 - 1)$$

Și de această dată funcțiile de bază se obțin prin rotirea cu 90 de grade a funcțiilor

de bază ale subspațiului $V_p(T)$. Dimensiunea spațiului generat de aceste funcții de bază este $|Qp(T)| = (p+1)(p+2)$. După modelul din 2D, procedura de generare a funcțiilor de bază se extinde și în cazul 3D, cu aplicații la elemente hexaedrale și respectiv tetraedrale. Aplicând transpentrurarea Duffy, succesiv diferitelor fețe ale hexaedrului acesta colapsează într-o prismă, apoi într-o piramidă și în final în tetraedru. Spațiul elementelor finite polinomiale poate fi generat de funcțiile de bază:

$$P^p(\mathcal{T}) := \{x^i y^j z^k : 0 \leq i + j + k \leq p, i, j, k \geq 0\}, \quad (3.80)$$

care dacă au ordin unipentru generează secvența:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} P^{p+1}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\nabla} P^p(\mathcal{T}) \xrightarrow{rot} P^{p-1}(\mathcal{T}) \xrightarrow{div} P^{p-2}(\mathcal{T}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.81)$$

Realizând o construcție cu polinoame ortogonale Legendre, așa cum s-a procedat în cazul 2D se obține și în 3D pentru fiecare element, o secvență de tip de Rham, dar de această dată, dimensiunile subspațiilor elementelor nodale, de muchie, de față și de volum au în cazul polinoamelor unipentru următoarele valori:

$$\begin{aligned} |W_p(H)| &= (p+1)^3; \\ |V_p(H)| &= 3(2+2)^2(p+1); \\ |Q_p(H)| &= 3(p+2)(p+1)^2, \end{aligned} \quad (3.82)$$

în care H este elementul hexaedral și

$$\begin{aligned} |W_p(T)| &= (p+1)(p+2)(p+3)/6; \\ |V_p(T)| &= (p+1)(p+2)(p+3)/2; \\ |Q_p(T)| &= p(p+1)(p+2)/2, \end{aligned} \quad (3.83)$$

în care T este elementul tetraedral.

Funcțiile de bază definite pe elementul de referință $\hat{K}$ se extind prin transpentrurări conpentrume $\Phi_K : \hat{K} \rightarrow K$ pe elementele fizice K și devin funcții de pentrumă definite pe întreaga rețea de discretizare (T_h) . Funcțiile de bază se transpentrură astfel:

- în cazul elementelor din H^1 : $\phi := \hat{\phi} \circ \Phi_K^{-1}$;
- în cazul elementelor din $H(rot)$: $\varphi := \mathbf{F}_K^{-T} \hat{\varphi} \circ \Phi_K^{-1}$;
- în cazul elementelor din $H(div)$: $\psi := J_K^{-1} \mathbf{F}_K \hat{\psi} \circ \Phi_K^{-1}$;
- în cazul elementelor celulare, din L_2 : $\vartheta := J_K^{-1} \hat{\vartheta} \circ \Phi_K^{-1}$.

O proprietate remarcabilă a construcției descrisă în [133] și prezentată anterior este aceea că secvența de Rham este exactă nu numai pentru elementele de referință ci și pentru întreaga triangulație, cât și pentru o parte a ei:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{id} W_{h,p+1}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{\nabla} V_{h,p}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{rot} Q_{h,p}(\mathcal{T}_h) \xrightarrow{div} S_{h,p}(\mathcal{T}) \xrightarrow{0} \{0\}. \quad (3.84)$$

Aceasta proprietate face ca algoritmi de rezolvare iterativă a ecuațiilor *rot-rot* să fie mult mai stabili și mai robuști, decât în cazul în care această condiție nu este îndeplinită. Strategii pentru construirea bazelor ierarhice pentru elementele finite, de muchie și de față sunt prezentate și în [59], [60], [61], [50],

[81]. Un rol important în estimarea erorii de metodă a soluției numerice cu elemente finite și în studiul convergenței acestei metode îl are următoarea *diagramă comutativă*:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(rot, \Omega) & \xrightarrow{rot} & H(div, \Omega) & \xrightarrow{div} & L_2(\Omega) \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \parallel \\ W & & V & & Q & & S \\ \bigcup & & \bigcup & & \bigcup & & \parallel \\ W_h & \xrightarrow{\nabla} & V_h & \xrightarrow{rot} & Q_h & \xrightarrow{div} & S_h \end{array} \quad (3.85)$$

în care sunt evidențiate spațiile Sobolev, în secvența de Rham și subspații ale lor cu funcții suficient de netede, notate cu W, V, Q și S , care sunt approximate cu subspațiile discrete, de elemente polinomiale nodale, de muchie, de față și de volum: W_h, V_h, Q_h și respectiv S_h . În consecință, operatorii de interpolare nodală

$\Pi_X(v) = \sum_{i=1}^N N_i(v)\varphi_i$ satisfac relațiile:

$$\begin{aligned} \Pi_V \nabla w &= \nabla \Pi_W w \quad \forall w \in W \subset H^1(\Omega), \\ \Pi_Q \nabla \mathbf{v} &= rot \Pi_V \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V \subset H(rot, \Omega), \\ \Pi_S \nabla \mathbf{q} &= div \Pi_Q \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{q} \in Q \subset H(div, \Omega). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Și implicit, de la caz la caz, relațiile Stokes, Gauss și Green. Teorema care estimează apriori "**eroarea de interpolare**" afirmă că [133], [120]:

- $\|w - \Pi_W w\|_1 \preceq h^{s-1} \|w\|_s$ pentru $\forall w \in H^s(\Omega)$ cu $3/2 + \delta \leq s \leq k+1, \delta > 0$ și W_h spațiul elementelor finite de grad k ;
- $\|\mathbf{v} - \Pi_V \mathbf{v}\|_0 \preceq h^s (\|\mathbf{v}\|_s + \|rot \mathbf{v}\|_s)$ pentru $\forall \mathbf{v} \in (H^s(rot, \Omega))^3$ cu $1/2 + \delta \leq s \leq k+1$ și V_h spațiul elementelor de muchie de grad k ;
- $\|\mathbf{q} - \Pi_Q \mathbf{q}\|_0 \preceq h^s \|\mathbf{q}\|_s$ pentru $\forall \mathbf{q} \in (H^s(div, \Omega))^3$ cu $1/2 + \delta \leq s \leq k+1$ și Q_h spațiul elementelor de față de grad k .

Aici s-a notat cu $\prec$ marginirea cu o constanta : $\prec C$. Aceste relații generalizează teorema convergenței, bazată pe estimarea apriori a erorii și prezentată anterior, pentru cazul scalar.

3.4.6 Crime variaționale

Un alt aspect referitor la eroarea de metodă care trebuie menționat este cel cunoscut sub numele de "*crima variațională*". Aceasta apare atunci când este violată condiția de ortogonalitate Galerkin (3.6)[120], [119]. După cum am văzut, contribuțiile elementelor la matricea sistemului și la termenii liberi se calculează în problemele scalare *div-grad* cu relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij}^K &= \int_K \varepsilon^K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \int_K \kappa \varphi_i \varphi_j dx \\ \mathbf{f}_i^K &= \int_K \mathbf{f} \varphi_i dx \end{aligned} \quad (3.87)$$

iar în cazul problemelor vectoriale de tip *rot-rot* cu relațiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta}^K &= \int_K \mu^{-1} \text{rot } \varphi_\alpha \text{rot } \varphi_\beta dx + \int_K \kappa \varphi_\alpha \varphi_\beta dx - \\ &- \int_{\hat{K}} \mu^{-1} \mathbf{J}^{-1} (F_K \text{rot } \hat{\varphi}_\alpha) (F_K \text{rot } \hat{\varphi}_\beta) dx + \\ &+ \int_{\hat{K}} \kappa (F_K^{-T} \text{rot } \hat{\varphi}_\alpha) (F_K^{-T} \text{rot } \hat{\varphi}_\beta) d\hat{x} \\ \mathbf{f}_\alpha^K &= \int_K \mathbf{j} \varphi_\alpha dx = \int_{\hat{K}} \mathbf{j} (F_K^{-T} \hat{\varphi}_\alpha) d\hat{x} \end{aligned} \quad (3.88)$$

În condițiile în care funcțiile de formă au expresii complicate sau constantele de material și sursele variază pe element, atunci aceste integrale se calculează cu metode numerice de tip Gauss sau Simpson [118], [134]. Indiferent care este metoda numerică folosită pentru integrare, aceasta introduce erori numerice, care perturbă valoarea atât a funcționalei biliniare $a(\cdot, \cdot)$, cât și acelei liniare $f(\cdot)$, din membrul drept. Pentru a simplifica prezentarea vom presupune că doar $f(\cdot)$ este înlocuit cu o aproximare a $f_h(\cdot)$, iar problema rezolvată devine acum $a(v_h, u_h) = f_h(u_h)$, iar relația de ortogonalitate Galerkin, fundamentală pentru metoda elementului finit nu mai este satisfăcută: $a(u - u_h, v_h) = a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = f(v_h) - f_h(v_h) \neq 0$, iar caracteristicile de optimalitate ale MEF se pierd. Este motivul pentru care se spune că am comis o crimă variațională. Pentru a evalua gravitatea acestei crime, vom folosi următorul majorant al erorii [120], [64]:

$$\|u - u_h\|_\infty \leq Ch^{m-1} |u|_{H^m(\Omega)} + \sqrt{(2)/c} \sup(w_l \in V_h) |f(w_h) - f_h(w_h)| / \|w_h\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.89)$$

în care $m - 1$ este gradul polinomului funcțiilor de bază. Abateră funcționalei $f(\cdot)$ este acceptabilă, doar dacă termenul al doilea, care descrie efectul acestei abateri are ordinul erorii $O(h^{m-1})$ comparabil cu ordinul primului termen. Situația în care perturbația intervine asupra funcționalei $a(\cdot, \cdot)$ se analizează în mod asemanator. O crimă variațională se comite și prin aproximarea domeniului Ω cu unul mărginit de o linie poligonală, lucru necesar pentru a aplica metoda elementului finit triunghiular de ordinul întâi. Toate eceste crime sunt acceptabile, dacă sunt luate măsurile de precauție ca eroarea introdusă să nu depășească ordinul erorii de aproximare intrinsec MEF.

Rafinarea succesivă a ordinului p dă rezultate foarte bune în cazul soluțiilor extrem de netede (care sunt funcții analitice, indefinit derivabile, funcții armonice, soluții ale ecuației Lapalce, etc.), la care eroarea scade exponențial cu creșterea ordinului p . Pentru a recâștiga această proprietate în cazul problemelor cu singularități, se folosește rafinarea hp , care combină rafinarea geometrică adaptivă cu rafinarea adaptivă a ordinului. Justificarea lor se bazează pe observația că în zonele în care soluția este netedă este mai eficient să se folosească valori mari ale gradului p , iar în zonele din vecinătatea singularităților, rafinarea spațială prin micșorarea parametrului h este mai eficientă [100]. Algoritmii hp sunt super-convergenți, asigurând o scădere exponențială a erorii pe care strategiile $h-$ sau $p-$ nu o pot obține. Așa cum se vede în Fig. 3.16 problema L-shape este rezolvată prin rafinarea h cu o rată de convergență de $2/3$, prin rafinare p cu o rată de $5/4$, iar prin rafinare hp cu o convergență exponențială:

$$|u - u_N| < Ce^{(-cN^\delta)}. \quad (3.90)$$

Prin rafinare $hp-$ se obțin erori relative pentru câmp de ordinul 10^{-6} , adică șase cifre semnificative corecte, cu mai puțin de 10 000 de necunoscute - grade de libertate.

În Fig. 3.17 se reprezintă principiul strategiei de rafinare hp . Alegerea alternativei optime de rafinare se face folosind o strategie bazată pe indicatori posteriori de eroare [96], [36], [31], [108]. Spre deosebire de rafinarea auto-adaptivă de tip h , în abordarea hp , pe parcursul iterațiilor, gradul p , dar și parametrul h pot să crească sau să scadă (se realizează o rafinare locală, sau dimpotrivă, o scădere a gradului p și/sau eliminarea unor noduri, care duce la creșterea lui h și obținerea unei rețele mai groșiere de discretizare). În [87] sunt prezentate, studiate și comparate nu mai puțin de 13 strategii privind modul în care se aleg rafinările de tip p sau h . În Fig. 3.18 este prezentată o rețea de discretizare rezultată în urma rafinării hp , iar în fiecare element este indicat ordinul p , folosit în final.

Importanța abordării hp -FEM este ilustrată și de faptul că în prezent se derulează în paralel mai multe proiecte de cercetare-dezvoltare a codurilor pentru aceasta tehnică (<http://en.wikipedia.org/wiki/HP-FEM>):

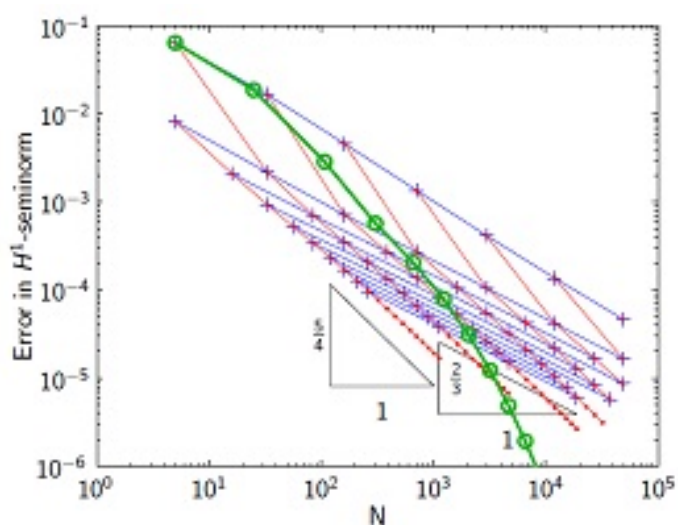


Figura 3.16: Convergența FEM cu rafinare h – (albastru, pentru diferite valori p), p – (roșu, pentru diferite valori h) și hp – (verde) [27]

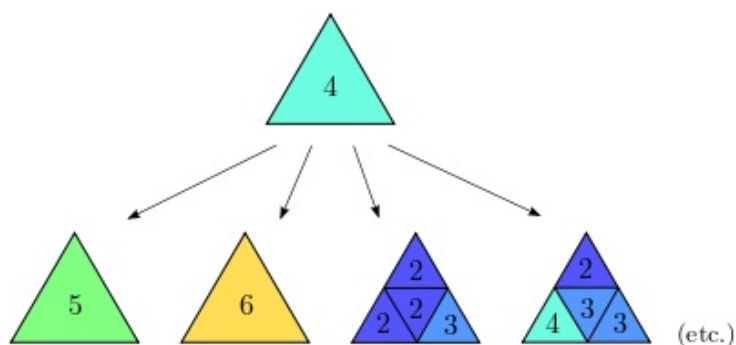


Figura 3.17: Strategia de rafinare hp (<http://hpfem.org/hermes2d/doc/src/tutorial-2.html>)

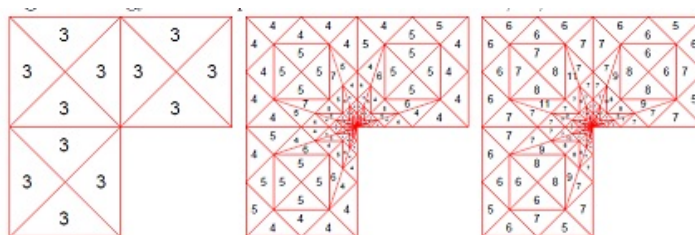


Figura 3.18: Iterațiile 0, 15 și 25 în rafinare adaptivă hp [36]

- **Concepts:** C/C++ hp-FEM/DGFEM/BEM bibliotecă de funcții dedicată rezolvării ecuațiilor de tip eliptic, dezvoltat de *SAM, ETH Zurich* (Elveția) (<http://www.concepts.math.ethz.ch/>);
- **2dhp90, 3dhp90:** coduri pentru rezolvarea ecuațiilor eliptice și a ecuațiilor lui Maxwell, dezvoltate de *L. Demkowicz la ICES, UT Austin - SUA* (<http://hpfem.org/main/links.php>);
- **PHAML:** The Parallel Hierarchical Adaptive MultiLevel Project. Software de element finit dezvoltat la *NIST (National Institute for Standards and Technology), USA*, pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale eliptice 2D pe calculatoare cu memorie distribuită și multicore, folosind rafinare adaptivă a rețelei și tehnici multigrid - (<http://math.nist.gov/phaml/>);
- **Hermes Project:** bibliotecă de funcții C/C++/Python pentru realizarea rapidă a prototipurilor de solve *hp-FEM* pentru o gamă largă de probleme multifizice staționare sau variabile, dezvoltate la *University of Nevada, Reno (USA)* și *Institute of Thermomechanics, Prague (Czech Republic)* (<http://hpfem.org/main/>);
- **PHG:** pachet de instrumente pentru dezvoltarea programelor paralele de elemente finite adaptive, h –, p – și *hp-FEM*. PHG este dezvoltat la *State Key Laboratory of Scientific and Engineering Computing, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing of Chinese Academy of Sciences (LSEC, CAS, China)*. PHG operează cu rețele tetraedrale conforme, auto-adaptive, pe sisteme distribuite cu MPI. PHG este proiectat orientat pe obiecte, ascunzând detaliile privind paralelizarea, permițând utilizatorilor să se concentreze pe aspectele numerice, folosind concepte abstracte referitoare la rețelele de discretizare și elementele finite - (http://lsec.cc.ac.cn/phg/index_en.htm).

Următoarele proiecte și programe au sursele MATLAB disponibile pe net:

- [24] **AFEM@matlab** este un pachet MATLAB de elemente finite adaptive (AFEMs) pentru rezolvarea ecuațiilor cu derivate parțiale 2D staționare și evolutive. El conține coduri robuste, eficiente și ușor de urmarit pentru modulele constitutive ale unui cod de elemente finite adaptive. Aceste caracteristici sunt avantaje nu numai pentru înțelegerea metodei elementului finit, ci și pentru cercetarea și dezvoltarea ulterioară. Programul a fost realizat în spiritul "Ten digit, five seconds, and one page". Pentru o comunicare cât mai ușoară și pentru o bună educație, algoritmii principali au fost scriși într-o singură pagină, folosind structuri de date compacte și comentarii pertinente.

- [41] Colecție de rutine, pentru asamblarea, rezolvarea și estimarea erorii la elementele finite P2 (patrulatere de ordinul 2). Codul are scop didactic, nu este optimizat pentru eficiență.
- [40] Calculează eroarea elementelor finite, măsurată în normele L_2 și H^1 pentru probleme 2D. Necesită MATLAB PDE Toolbox.

Programele și proiectele cu elemente finite auto-adaptive și de ordin înalt au o complexitate mult sporită față de cele prezentate în capitolul anterior, dar performanțele lor sunt mult sporite. Aceasta explică interesul pentru dezvoltarea unor baze ierarhice cu proprietăți cât mai bune. În perspectivă, devine tot mai evident faptul că alegerea tipului de element finit pentru o aplicație particulară avansată tinde să devină o problemă relativ dificilă, pentru rezolvarea căreia nici măcar nu este necesar un efort de programare, ci unul de înțelegere a unor subtilități matematice de nivel tot mai înalt.

3.5 Probleme de câmpul staționar în medii neliniare

Ecuatiile lui Maxwell sunt liniare, dar această caracteristică fundamentală este pierdută, dacă adăugăm la ele ecuațiile constitutive ale materialelor dielectrice, conductoare sau magnetice neliniare. Dintre acestea, primele cu care s-au confruntat inginerii interesați în dispozitive electromagnetice au fost materialele feromagnetice, folosite în construcția mașinilor și aparatelor electrice. Relația dintre inducția și intensitatea câmpului magnetic, descrisă de caracteristica de magnetizare este în cazul acestor materiale una neliniară, prezentând fenomenul de saturație sau cel de histerezis. Ceva mai târziu au început să prezinte un mare interes joncțiunile din dispozitivele semiconductoare, care au o caracteristică de conducție puternic neliniară. S-au pus astfel bazele unei noi direcții de cercetare, și chiar a unei noi discipline, cea de *modelare și simulare numerică a dispozitivelor semiconductoare* [Vasilescu 08], a cărei interacțiune cu modelarea electromagnetică este reprezentată schematic în (Fig. 3.19). Ce este specific acestei discipline este mai ales modelarea fenomenelor de transport a purtătorilor de sarcină, care poate fi făcută clasic, semi-clasic sau cuantic (Fig. 3.20). Trebuie remarcat că această disciplină are un puternic caracter multifizic, în modelare intervenind nu numai ecuațiile de transport ci și cele electromagnetice și de multe ori și cele termice [Holst01], [Holst03]. În Fig. 3.21 și fig. 3.22 sunt prezentate câteva imagini reprezentative pentru rezultatele privind simularea dispozitivelor semiconductoare. Acest subiect excede nivelul prezentului document.

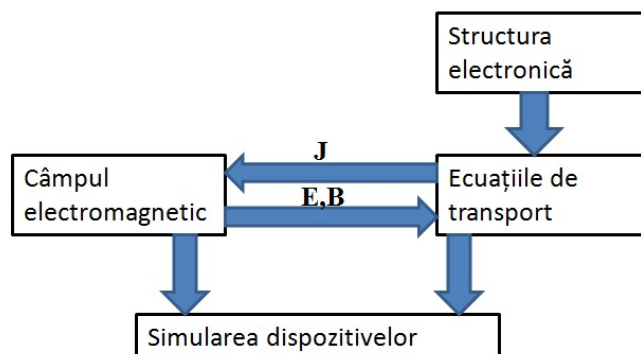


Figura 3.19: Descrierea schematică a simulării dispozitivelor semiconductoare [Vasileska 08]

MODEL	ÎMBUNĂTĂȚIRI
Modele compacte	
Ecuații de Difuzie-Drift	Bun pentru dispozitive mai mici de 0.5μm, inclusiv μ(E)
Ecuații hidrodinamice	
Ecuația de transport Boltzmann Metode Monte Carlo/CA	
Hidrodinamici cuantice	
Metode cuantice Monte Carlo/CA	
Ecuația cuanto-cinetică (Liouville, Wigner-Boltzmann)	
Metoda funcțiilor Green	Include corelații în ambele domenii: spațial și temporal
Soluția directă a n-body Ecuația Schrödinger	Poate fi rezolvată numai pentru un nr. mic de particule

Figura 3.20: Ilustrarea ierarhiei modelelor de transport [Vasileska 08]

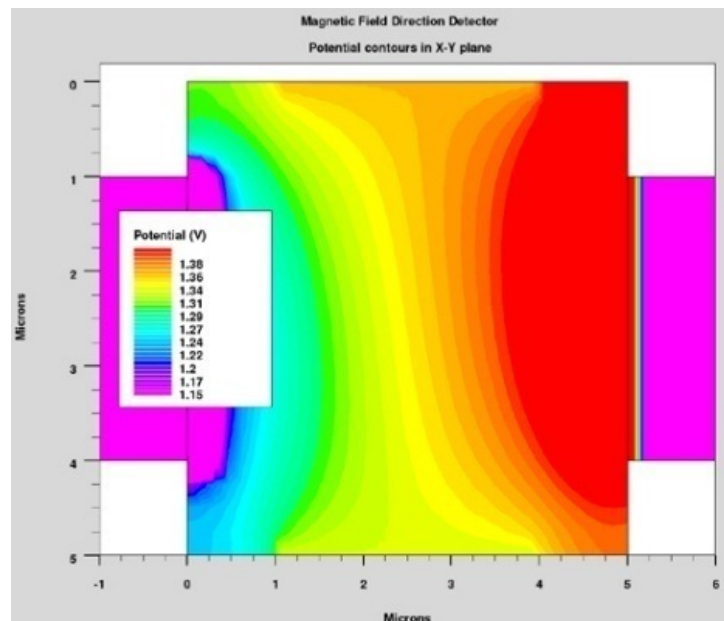


Figura 3.21: Rezultatele simulării unui senzor Hall semiconductor (http://www.silvaco.com/products/vwf/atlas/3D/magnetic3D/magnetic3D_br.html)

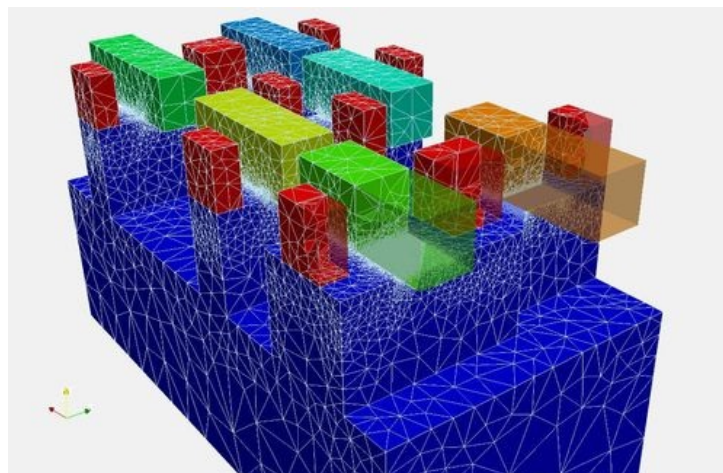


Figura 3.22: Retea de discretizare cu elemente finite a unui dispozitiv semiconductor [microport.com.tw]

3.5.1 Probleme cu caracteristica de magnetizare neliniară

Subiectul de interes este modelarea câmpului magnetic în medii cu caracteristica de magnetizare neliniară. Folosirea elementelor finite pentru modelarea mașinilor

electrice, considerând neliniaritatea magnetică a fost subiectul unei teze cu caracter de pionierat în acest domeniu, încă din anii 70 [66], dar și a unei serii de cărți și articole, dintre care menționăm [112], [106], [19], [11], [114]. Progresul este ilustrat de diferența dintre teza din 1970 și o teză de doctorat recentă [23], dar și de articole recente, din același domeniu [84], [117], [57], [42]. Acest progres ca și cel realizat în modelarea dispozitivelor semiconductoare are mai multe aspecte:

- cunoștințele de fizică, în special cele care se referă la modelarea materialelor neliniare, mergând până la modelele microscopice, semi-clasice sau cuantice (cum este descrierea dinamicii de magnetizare prin ecuația LLG);
- cunoștințe de matematici aplicate și metode numerice, care au pus bazele unor teorii complexe și consistente, ce stau la baza algoritmilor numerici și care evidențiază posibilitățile dar și limitele fiecărei abordări noi;
- dezvoltările tehnologiei informației, atât din punct de vedere hardware (legea lui Moore (http://en.wikipedia.org/wiki/Moore's_law) care, a dus la creșterea exponențială atât a capacității de memorare, cât și a vitezei de calcul, performanțele sistemelor de calcul crescând fenomenal, la un nivel de neimaginat), cât și din punct de vedere software, prin descoperirea unor algoritmi fundamentali de mare eficiență [34], care au dus la o creștere a vitezei de calcul mult mai mare decât cea descrisă de legea lui Moore (pana la de 25 de ori mai mult, conform [75] [129]).

Din punctul de vedere al materialelor feromagnetice moi sau dure, modelele lor computaționale neliniare se clasifică în:

- modele **izotrope neliniare**, la care $\mathbf{B}$ și $\mathbf{H}$ sunt coliniare, caracteristica de magnetizare fiind descrisă de o funcție definită pe semi-axa reală: $B = f(H)$, cu $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, care exprimă relația dintre modulele celor doi vectori $\mathbf{H}$ și $\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H}$, cu $\mu = 1/\nu = f(H)/H$;
- modele **neliniare anizotrope**, descrise de caracteristica vectorial de magnetizare $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$, cu $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$;
- modele **dinamice de magnetizare neliniară**, în care între $\mathbf{B}(t) : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ și $\mathbf{H}(t) : (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ intervine un operator integro-diferențial, consecință a ecuației diferențiale neliniare $d\mathbf{B}/dt = \mathbf{F}(\mathbf{B}, \mathbf{H})$;
- modele de **histerezis**, descrise de relația neliniară $B = F(H)$, în care de această dată $F : \mathbb{R}^3 \times (t_{\min}, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times (t_{\min}, t_{\max})$ este un operator,

care face să corespundă unui semnal ce descrie variația în timp a intensității câmpului magnetic un alt semnal de ieșire, ce descrie variația în timp a inducției magnetice.

Cel mai simplu model neliniar este cel afin: $\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) = \bar{\mu}\mathbf{H} + \mathbf{B}_r$, definit de tensorul permeabilităților $\bar{\mu}$ și de inducția remanentă (sau echivalent de magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p = \mathbf{B}_r/\mu_0$). Acest model util în caracterizarea materialelor magnetice dure (magneților permanenți) poate fi scos din această discuție, deoarece, așa după cum s-a văzut anterior, el generează ecuații liniare pentru câmpul magnetic, în care $\mathbf{B}_r$ este sursa de câmp.

Modelarea fenomenului de histerezis este un domeniu științific complex, care s-a dezvoltat mult în ultima perioadă (<http://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis>). Dintre modelele de histerezis, cel care oferă o precizie acceptabilă pentru multe dintre aplicațiile actuale este modelul Preisach (http://en.wikipedia.org/wiki/Preisach_model_of_hysteresis), dar există și modele mai simple, la care precizia totuși are de suferit.

Pentru început vom considera cazul mai simplu al problemei analizei câmpului. În condiții destul de largi pentru caracteristica de magnetizare $B = f(H)$, deci implicit pentru permeabilitatea statică $\mu(H) = B/H$ sau pentru reluctivitatea magnetică $\nu(B) = 1/\mu = H/B$, multe din ecuațiile și relațiile din cazul liniar se mențin valabile și în cazul neliniar, cu modificări minore.

Ecuațiile fundamentale ale regimului magneto-staționar au în acest caz forma locală:

- Teorema Gauss: $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \nabla\mathbf{B} = 0$;
- Teorema lui Ampere: $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$;
- Ecuația constitutivă: $\mathbf{B} = \mu(|\mathbf{H}|)\mathbf{H} \Leftrightarrow \mathbf{H} = \nu(|\mathbf{B}|)\mathbf{B}$.

Caracterul solenoidal al inducției magnetice permite definirea potențialului magnetic vector:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad (3.91)$$

care vom presupune că satisface condiția de etalonare a lui Coulomb:

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \quad (3.92)$$

În consecință ecuația de ordinul doi satisfăcută de acest potențial este:

$$\operatorname{rot}(\nu(|\mathbf{B}|)\operatorname{rot}\mathbf{A}) = \mathbf{J} \Leftrightarrow \nabla(\nu(|\nabla \times \mathbf{A}|)\nabla\mathbf{A}) = \mathbf{J}, \quad (3.93)$$

în care atât reluctivitatea $\nu = f(B, \mathbf{r})$ cât și densitatea de curent $\mathbf{J} = g(\mathbf{r})$ sunt descrise de funcții cunoscute, pentru orice punct din domeniul de calcul $\mathbf{r} \in \Omega$.

De regulă, domeniul Ω este alcătuit dintr-un număr finit de subdomenii omogene Ω_i , $i = 1 : n$, în fiecare dintre acestea, caracteristica de magnetizare deci implicit și reluctivitatea $\nu = f_i(\mathbf{B})$ sunt independente de punctul $\mathbf{r} \in \Omega_i$. La ecuațiile satisfăcute de câmp se adaugă următoarele condiții de frontieră nule:

- $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_B$;
- $\mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_H$,

dar care pot fi și două funcții nenule $b : S_B \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{h} : S_H \rightarrow \mathbb{R}^2$, definite pe cele două suprafețe S_B și S_H , care alcătuiesc o partiție disjunctă a frontierei $\Sigma = \partial\Omega = S_B \cup S_H$. Aceste condiții de frontieră se exprimă în termeni de potențial astfel:

- $(\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_B$;
- $\nabla A(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_H$.

Prima condiție se înlocuiește de regulă cu una aparent mai tare:

- $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in S_B$,

dar se demonstrează că în condiții destul de largi cele două condiții sunt echivalente [23].

Funcția care generează neliniaritatea este caracteristica de magnetizare $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ cu $B = f(H)$, o funcție care îndeplinește următoarele condiții:

- f este continuă și derivabilă cu $\mu_0 \leq f'(s) < \infty$ pe întregul domeniu de definiție $s > 0$;
- f are valoarea $f(0) = 0$;
- derivata sa $f'(s) \rightarrow \mu_0$, atunci când $s \rightarrow \infty$.

În consecință, această funcție are următoarele proprietăți [23]:

- este puternic monoton crescătoare:

$$(f(s) - f(t))(s - t) \leq \mu_0(s - t), \quad \forall s, t > 0; \quad (3.94)$$

- derivata sa f' este continuă și mărginită inferior și superior

$$\mu_0 \leq f'(s) < L < \infty, \quad \forall s > 0; \quad (3.95)$$

- f este lipschitziana cu constanta L ;

- f este bijectivă și deci $\exists f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, cu $H = f^{-1}(B)$;
- derivata inversei f^{-1} este continuă și marginită inferior și superior

$$m = 1/L \leq f^{-1'}(s) \leq \nu_0 = 1/\mu_0 < \infty, \forall s > 0; \quad (3.96)$$

- $\nu(s) = f^{-1}(s)/s$ este bine definită, este continuă și marginită

$$m \leq \nu(s) \leq \nu_0, \forall s > 0; \quad (3.97)$$

- $\nu(\cdot)$ este pe $\mathbb{R}^+$ o funcție puternic monoton crescătoare, cu constanta de monotonie m și lipschitziană, cu constanta ν_0 .

3.5.2 Probleme magnetostaționare plan-paralele

Să considerăm acum cazul particular al problemelor magnetostaționare plan-paralele 2D, cu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, în care densitatea de curent $\mathbf{J}$ este orientată axial, și în consecință, potențialul magnetic vector $\mathbf{A} = \mathbf{k}A(x, y)$ va avea și el componente trasversale nule, iar ecuațiile regimului capătă forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x, y) &= \mathbf{i}B_x(x, y) + \mathbf{j}B_y(x, y) = \text{rot}\mathbf{A}(x, y) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \mathbf{A} \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \frac{\partial A}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial A}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{k}J(x, y) = \text{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right). \quad (3.99)$$

Pentru a simplifica scrierea, am notat aici cu $A(x, y)$ și cu $J(x, y)$ componenta axială (după axa Oz) a potențialului vector și respectiv a densității de curent. Între aceste doua funcții scalare există relația:

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial(\nu B_y)}{\partial x} - \\ &- \frac{\partial(\nu B_x)}{\partial y} = -\frac{\partial(\nu \partial A / \partial x)}{\partial x} - \frac{\partial(\nu \partial A / \partial y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.100)$$

care este de fapt o ecuație Poisson generalizată scalară:

$$-\text{div} [\nu(|\text{grad } A|) \text{ grad } A] = J, \quad (3.101)$$

deoarece $B = |\mathbf{B}| = |\operatorname{rot} \mathbf{A}| = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2} = |\operatorname{grad} \mathbf{A}|$.

Condițiile pe frontiera pe $\Gamma = \partial\Omega = C_B \cup C_H$ capătă forma simplificată:

- $A(\mathbf{r}) = 0$ pentru $\mathbf{r} \in C_B$, adică o condiție Dirichlet nula și
- $\frac{dA(\mathbf{r})}{dn} = 0$ pentru $\mathbf{r} \in C_H$, adică o condiție Neumann nulă.

Pentru a aduce această problemă la o formă variațională, vom considera spațiul Sobolev $V_0 = \{u \in H^1(\Omega), u(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in C_B \text{ cu } C_B \text{ de măsură nenulă}\}$, cu produsul scalar $(u, v)_{V_0} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x}$ și cu norma energetică indusă de acesta: $|u|^2 = (u, u)_{V_0}$.

Multiplicând ecuația (3.101) cu o funcție arbitrară din V_0 și integrând pe Ω , rezultă:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla [\nu(|\nabla u|) \nabla u] v d\mathbf{x} = \\ = \int_{\Omega} \nabla \nu(|\nabla u|) \nabla u \nabla v d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \nabla \nu(|\nabla u|) (\nabla u \cdot \mathbf{n}) v ds_x, \end{aligned} \quad (3.102)$$

în care $d\mathbf{x} = dS$ este elementul de arie al domeniului plan Ω .

Deoarece $v = 0$ pe C_B și $du/dn = 0$ pe C_H , rezultă că integrala de pe frontieră se anulează și problema are următoarea formulare slabă, obținută prin anularea proiecției Galerkin a reziduului pe spațiul V_0 : caută $u \in V_0$: $a(u, v) = f(v)$, $\forall v \in V_0$,
,
cu

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nu(|\nabla u|) \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} \quad (3.103)$$

și

$$f(v) := \int_{\Omega} J v d\mathbf{x}. \quad (3.104)$$

Această problemă este bine formulată, adică are soluție, aceasta este unică și depinde continuu de J , conform *teoremei lui Zarantonello*, cunoscută și sub numele de *extensia neliniară a teoremei Lax-Millgram*, care are următorul enunț:

Fie V un spațiu Hilbert, $F \in V^*$, dualului său și $A : V \rightarrow V^*$ un operator neliniar care îndeplinește condițiile:

- A este *puternic monoton*: $\exists C > 0$ a.î. $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq C \|u - v\|_V$, $\forall u, v \in V$,
- A este *lipschitzian*: $\exists c > 0$ a.î. $\|A(u) - A(v)\|_{V^*} \leq c \|u - v\|_V$, $\forall u, v \in V$,
aunci ecuația operațională $A(u) = F$ are soluție unică $u^* \in V$.

În cazul nostru, operatorul $A : V \rightarrow V^*$ este definit de $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$ și funcționala F de $\langle F, v \rangle = f(v)$.

Demonstrația acestei teoreme este constructivă și se bazează pe teorema de punct fix a lui Banach [23]. Cele două condiții impuse operatorului A sunt îndeplinite, datorită proprietăților caracteristice de magnetizare ν (se demonstrează că cele două constante au valorile $C = m = 1/L$ și $c = 3\nu_0$).

S-a arătat în medii liniare, că orice problemă variațională eliptică, simetrică este echivalentă cu una de minimizare. Această afirmație se poate extinde și în cazul nostru neliniar, dacă vom considera funcționala de energie, ce trebuie minimizată ca fiind definită de relația:

$$J(v) = \int_{\Omega} \varphi(|\nabla v|) \, d\mathbf{x} - \langle F, v \rangle, \quad (3.105)$$

în care funcția $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ este definită de

$$\varphi(s) = \int_0^s \nu(t) \, dt. \quad (3.106)$$

Remarcăm că valoarea funcției φ pentru un câmp magnetic de inducție B este egală cu densitatea de volum a energiei sale magnetice:

$$\varphi(B) = \int_0^B \nu(b) \, db = \int_0^B f(b) \, db. \quad (3.107)$$

În aceste condiții, derivata Fréchet a funcționalei

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\int_0^{|\nabla v|} f(b) \, db - Jv \right) \, d\mathbf{r} \quad (3.108)$$

este $J'(v) = A(v) - F$ și se anulează pentru soluția ecuației $A(v) = F$. Mai mult, dubla derivată $J''(v) = A'(v)$ este un operator liniar pozitiv definit, pentru $\forall v \in V_0$, deci funcționala J este convexă și minimumul său este un minim global în V_0 .

Acum avem pregătite toate condițiile pentru a putea ataca rezolvarea numerică a problemei cu metoda elementului finit. Pentru aceasta vom utiliza un subspațiu finit dimensional $V_h \subset V_0$, subspațiu generat de funcțiile de bază nodale φ cu $i = 1 \dots N_h$, asociate unei triangulații $\mathcal{T}_h$ a domeniului Ω . Problema discretă se formulează astfel: caută u_h în V_h astfel încât: $a(u_h, v_h) = f(v_h)$, $\forall v_h \in V_h$.

În cazul elementelor finite conforme, buna formulare este moștenită de la problema continuă, în consecință și problema discretă are soluție și aceasta este unică. Ramâne să mai demonstrăm, în baza unei teoreme de convergență, că această soluție numerică tinde către soluția exactă, atunci când norma triangulației $h \rightarrow 0$.

În realitate, și de această dată funcționale $a(., .)$ și $f(.)$ nu se calculează exact, ci doar aproximativ, folosind formule de cuadratură numerică:

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h} \phi = \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{i=1}^{N_T} \omega_{T_i} \phi(z_{T_i}) \cong \int_{\Omega} \phi(x) dx, \quad (3.109)$$

în care ϕ este funcția de integrat, z_{T_i} sunt puncte din interiorul elementului T_i iar ω_{T_i} sunt ponderile specifice metodei de integrare numerică folosită, care indiferent de metodă satisfac condiția:

$$\sum_{i=1}^{N_T} \omega_{T_i} = \text{meas} T. \quad (3.110)$$

Formula de cuadratură este exactă nu numai pentru $\phi = 1$ ci și pentru polinoamele de grad $2k_T - 2$:

$$\int_{\Omega} \phi d\mathbf{x} = \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h}[\phi] \quad (3.111)$$

pentru

$$\phi|_T \in \mathcal{P}_{2k_T-2}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.112)$$

În realitate, datorită cuadraturii numerice, se rezolvă problema aproximativă: cauă

$$u_h \in V_h \text{ a.î. } a_h(u_h, v_h) = \langle F_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \quad (3.113)$$

în care

$$\langle F_h, v_h \rangle \cong \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h} [f \cdot v_h] \cong \int_{\Omega} f \cdot v_h d\mathbf{x} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &\cong \mathcal{Q}_{\mathcal{T}_h} [\tilde{\nu} (|\nabla u_h|) \nabla u_h \cdot \nabla v_h] \cong \\ &\cong \int_{\Omega} \tilde{\nu} (|\nabla u_h|) \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Conform lemei lui Strang pentru probleme neliniare, în condițiile teoremei lui Zarantonello, eroarea soluției problemei discrete aproximative are eroarea [23]:

$$\begin{aligned} \|u^* - u_h^*\|_V &\leq \inf_{v_h \in V_h} \left[\left(1 + \frac{L}{m} \right) \|u^* - v_h\|_{V_h} \right] + \\ &+ \frac{1}{m} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{V_h}} + \\ &+ \frac{1}{m} \sup_{w_h \in V_h} \frac{|\langle F - F_h, w_h \rangle|}{\|w_h\|_{V_h}}, \end{aligned} \quad (3.116)$$

care în cazul problemei magnetostaționare neliniare are expresia:

$$\begin{aligned} \|u^* - u_h^*\|_{V_0} &\leq \\ &\leq \inf_{v_h \in V_h} \left[\left(1 + \frac{3\nu_0}{\tilde{m}_\nu} \right) \|u^* - v_h\|_{V_h} + \frac{1}{\tilde{m}_\nu} \sup_{s \geq 0} |\nu(s) - \tilde{\nu}(s)| \|v_h\|_{V_h} \right], \end{aligned} \quad (3.117)$$

în care $\tilde{\nu}(s)$ este aproximarea numerică a lui $\nu(s)$.

Eroarea pe care o are proiecția soluției exacte pe spațiul V_h este

$$\left\| u^* - \prod_h u^* \right\|_1 \leq \tilde{C} h^\alpha \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |u^*|_{1+\alpha, T}^2 \right)^{1/2} \quad (3.118)$$

în care $1 + \alpha$ este gradul minim al polinoamelor funcții de bază pentru elementele finite. Această relație demonstrează convergența soluției numerice către cea exactă, atunci când $h \rightarrow 0$.

Teoria prezentată poate fi extinsă la cazul 3D, pentru rezolvarea problemelor tridimensionale de regim magnetic staționar în medii neliniare, numai că în acest caz trebuie folosite elementele de muchie pentru a disceriza operatorul de derivare spațială *rot-rot*.

Pentru a înțelege principiul rezolvării numerice a acestei probleme ar mai trebui dicutat modul în care se rezolvă **sistemul neliniar de ecuații algebrice**

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad (3.119)$$

în care u_h și $v_h = \sum_{i=1}^N N_i \phi_i(x)$, cu ϕ_i funcțiile de bază și N_i gradele de libertate ale problemei.

Doua sunt metodele cele mai des întâlnite în practică pentru rezolvare a acestui sistem algebric neliniar:

- metoda punctului fix, [78];
- metod Newton [66], [117].

Ambele sunt metode iterative, prima cere un efort mai mic de calcul la fiecare iterație, dar este în principiu mai lent convergentă, în timp ce a doua metodă este mai rapid convergentă, dar necesită la fiecare iterație calculul matricei jacobian a sistemului de ecuații neliniare ce este rezolvat. Din păcate, chiar dacă este mai rapid convergentă, metoda Newton nu este garantat convergentă, decat în condițiile în care inițializarea este suficient de aproape de soluția finală a sistemului neliniar. Metoda punctului fix, chiar dacă este lent convergentă, are avantajul că iterațiile ei sunt garantat convergente, în condiții destul de largi. Un alt avantaj major al

metodei punctului fix constă în faptul că se poate aplica materialelor cu histerezis magnetic, în timp ce metoda Newton nu este potrivită pentru astfel de materiale. În literatura se întâlnesc mai multe amendamente aplicate acestor metode sau combinației lor [78], de exemplu, se recomandă folosirea suprarelaxării pentru a accelera metoda punctului fix, folosirea subrelaxării pentru a obține convergența metodei Newton, evaluarea aproximativă sau sporadică (nu la toate iterațiile) a matricei jacobian, pentru a reduce efortul de calcul pe iterație, cerut de metoda Newton [66] și încă multe altele. Una dintre aceste tehnici de robustificare a soluționării problemelor puternic neliniare de mari dimensiuni este cea a abordării pseudo-tranzitorii, în care problemele staționare neliniare se rezolvă prin simulare tranzitorie fictivă, către starea finală staționară.

3.5.3 Metoda punctului fix al polarizației

Descompune ecuația constitutivă în doi termeni:

$$\mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H}) = \mu\mathbf{H} + \mathbf{I}(\mathbf{H}) \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{B} - \mu\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}) = f_B(\mathbf{B}) \quad (3.120)$$

unul liniar caracterizat de permeabilitatea "de calcul" μ și altul neliniar, descris de polarizația magnetică $\mathbf{I} = \mathbf{f}_B(\mathbf{B})$. Acesta este motivul pentru care această metodă de rezolvare iterativă se mai numește și metoda de punct fix a polarizației, sau pe scurt metoda polarizației. Metoda se bazează pe teorema punctului fix al lui Banach (http://en.wikipedia.org/wiki/Banach_fixed-point_theorem), conform căreia ecuația de punct fix $x = F(x)$ are soluție și aceasta este unică, în condițiile în care aplicația $F : X \rightarrow X$, definită pe spațiul Banach X cu distanța $d(.,.)$ este o contracție, adică îndeplinește condiția:

$$d(F(x), F(y)) \leq qd(x, y), \text{ cu } q < 1, \forall x, y \in X. \quad (3.121)$$

În spațiile normate condiția (3.121) devine $\|F(x) - F(y)\| \leq q\|x - y\|$, aplicația F trebuie să fie lifschitziană, cu constanta subunitară. Soluția ecuației de punct fix este limita șirului

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1), \dots, x_{k+1} = F(x_k), \dots \longrightarrow x^*, \quad (3.122)$$

în care distanța dintre doi termeni succesivi:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq qd(x_k, x_{k-1}) \leq q^{k+1}d(x_1, x_0), \quad (3.123)$$

ține către zero, iar limita x^* satisface ecuația $x^* = F(x^*)$. Rata de convergență a procedurii iterative este dată de relația: $d(F(x_k), F(x^*)) \leq d(x_1, x_0)q^k/(1 - q)$. Cu cât constanta q este mai mică, cu atât șirul de iterații este mai rapid convergent. Pentru a construi soluția problemei de câmp în acest fel, ar trebui ca ecuațiile

câmpului să fie aduse sub forma unor ecuații de punct fix, cu operatorul F o contracție. Procedul iterativ corespunde rezolvării succesive a unor probleme liniare, fictive de câmp, în care constanta de material nu se modifică și are valoarea μ "de calcul", iar sursele sunt, pe lângă cele reale și polarizația magnetică care are distribuția $\mathbf{I}_k(\mathbf{B}_k)$, calculată la fiecare iterație, în funcție de inducția magnetică generată de polarizația magnetică de la iterația anterioară. Metoda punctului fix al polarizației pornește de la o distribuție arbitrară a polarizației $\mathbf{I}_0$ și parcurge etapele:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0 &\rightarrow \mathbf{B}_1 = FEM(\mathbf{I}_0) \rightarrow \mathbf{I}_1 = \mathbf{f}_B(\mathbf{B}_1) = \\ &= \mathbf{B}_1 - \mu \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}_2 = FEM(\mathbf{I}_1) \rightarrow \mathbf{I}_2 \dots \end{aligned} \quad (3.124)$$

în care s-a notat cu $FEM(\mathbf{I})$ soluția problemei de câmp magnetic staționar calculată cu FEM sau cu orice altă metodă numerică sau analitică, iar cu $\mathbf{f}^{-1}(\cdot)$ caracteristica de magnetizare $\mathbf{H} - \mathbf{B}$ a mediului neliniar. Iterațiile se opresc, atunci când variația relativă a polarizației: $\varepsilon = \|\mathbf{I}_n - \mathbf{I}_{n+1}\| / \|\mathbf{I}_n + \mathbf{I}_{n+1}\|$ are valori acceptabil de mici.

În general, la iterația k : $\mathbf{I}_k = \mathbf{B}_k - \mu \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B}_k) = FEM(\mathbf{I}_{k-1}) - \mu \mathbf{f}^{-1}(FEM(\mathbf{I}_{k-1}))$, care la limită tinde către ecuația de punct fix: $\mathbf{I} = FEM(\mathbf{I}) - \mu \mathbf{f}^{-1}(FEM(\mathbf{I}))$, în care operatorul $F(\cdot) = FEM(\cdot) - \mu \mathbf{f}^{-1}(FEM(\cdot)) = \mathbf{F}_B(FEM(\cdot)) = \mathbf{F}_B(\cdot) \circ FEM(\cdot)$ este obținut prin compunerea a două aplicații, una neliniară $\mathbf{I} = \mathbf{F}_B(\mathbf{B}) = \mathbf{B} - \mu \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B})$, care presupune trecerea prin caracteristica inversă de magnetizare, în vederea calculării polarizației magnetice în funcție de inducția magnetică ("intrarea" se face prin B) și alta liniară $\mathbf{B} = FEM(\mathbf{I})$, care presupune rezolvarea ecuațiilor câmpului magnetic staționar, în mediul virtual cu permeabilitatea μ , și care are polarizația magnetică $\mathbf{I}$, sursa de câmp.

Aplicația $\mathbf{F}_B$ este o contracție: $\|\mathbf{F}_B(\mathbf{B}') - \mathbf{F}_B(\mathbf{B}'')\| \leq q \|\mathbf{B}' - \mathbf{B}''\|$, $\forall \mathbf{B}', \mathbf{B}'' \in (L^2(\Omega))^3$, cu $q = 1 - \mu_0 / \mu_{\max}$, dacă permeabilitatea de calcul este aleasă astfel încât $0 < \mu < 2\mu_{\max}$, în care $\mu_{\max}$ este permeabilitatea dinamică maximă, adică valoarea maximă a derivatei funcției $B = f(H)$, pentru $H > 0$

[56]. Valoarea optimă a permeabilității de calcul este $\mu_{\text{opt}} = 2\mu_{\min} \cdot \mu_{\max} / (\mu_{\min} + \mu_{\max})$, în care $\mu_{\min} = \mu_0$ este permeabilitatea dinamică minimă. Cum și aplicația $FEM(\cdot)$ este neexpansivă în spațiul $L^2(\Omega)$, rezultă că procedura de punct fix al polarizației este convergentă către soluția exactă a problemei de câmp [78].

Avantajele metodei punctului fix al polarizației sunt următoarele:

- metoda este robustă, deoarece ea este convergentă pentru orice caracteristică de magnetizare strict monotonă și lipschitziană, chiar și dacă aceasta are puncte de inflexiune;
- nu sunt necesare calcule preliminare pentru a alege punctul de start, deoarece metoda este convergentă, pentru orice inițializare;

- la fiecare iterație se rezolvă o problemă liniară de câmp, în care se modifică doar sursele, nu și caracteristica mediului, ceea ce face ca matricea de rigiditate, calculată inițial să rămână neschimbată pe parcursul iterațiilor;
- nu sunt impuse restricții sau condiții suplimentare caracteristicii de magnetizare, în consecință, aceasta poate fi aproximată liniar pe porțiuni.

Metoda trebuie aplicată cu grijă, pentru a îndeplini condițiile de convergență. De exemplu, aproximări nemonotone ale caracteristicii de magnetizare (cum sunt polinomiale cu efect Runge), sau intrarea în caracteristica de magnetizare prin $\mathbf{H}$ în loc de $\mathbf{B}$, respectiv rezolvarea problemei liniare de câmp cu erori, care fac algoritmul expansiv, pot duce la scăderea vitezei de convergență, sau și mai grav, la pierderea totală a convergenței.

Rezolvarea la fiecare iterație de punct fix a problemei de câmp cu metoda elementelor finite, nici măcar nu necesită dezvoltări teoretice pentru ecuații neliniare, deoarece, de fapt, se rezolvă o problema liniară, virtuală, cu permeabilitate "de calcul" constantă, cu valoarea optimă μ_{opt} . Singurul dezavantaj al acestei metode este convergența sa lentă. În compensație, efortul de calcul la fiecare iterație este relativ mic, astfel încât performanța metodei nu trebuie judecată după numărul de iterații ci după efortul de calcul necesar atingerii unei soluții acceptabile.

3.5.4 Metoda iterativă Newton

Metoda Newton urmărește realizarea unei rate de convergență sporită (pătratică în vecinătatea soluției). Pornind de la relațiile obținute prin proiecție:

$$\int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v_i dx = \int_{\Omega} f(u) v_i dx, \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.125)$$

în care $a(u) = \nu(|\nabla u|)$, iar

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N y_j v_j \quad (3.126)$$

se exprimă în funcție de componentele vectorului gradelor de libertate: $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ rezultă sistemul de ecuații neliniare:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0, \quad (3.127)$$

în care

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T \quad (3.128)$$

cu

$$f_i(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} a(u) \nabla u \cdot \nabla v_i - f(u) v_i d\mathbf{x}. \quad (3.129)$$

Matricea jacobian $\mathbf{J}$ a acestui sistem de funcții are elementele:

$$J_{ij}(\mathbf{y}) = \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial a}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y_j} \nabla u + a(u) \frac{\partial \nabla u}{\partial y_j} \right] \cdot \nabla v_i - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y_j} v_i d\mathbf{x} \quad (3.130)$$

în care

$$\frac{\partial u}{\partial y_j} = v_j; \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \nabla u}{\partial y_j} = \nabla v_j. \quad (3.132)$$

În consecință, matricea $\mathbf{J}$ are aceeași structură de raritate ca matricea de rigiditate din cazul liniar.

Să presupunem că au fost calculate elementele matricei jacobian, iterațiile specifice metodei Newton se fac după relațiile (http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_method), [117]:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{y}_n) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad (3.133)$$

În realitate, nu se inversează matricea jacobian, ci la fiecare iterație se rezolvă sistemul liniar:

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}_n) \delta \mathbf{y}_{n+1} = -\mathbf{f}(\mathbf{y}_n), \quad (3.134)$$

și se efectuează pasul $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \delta \mathbf{y}_{n+1}$. Iterațiile continuă până când vectorul rezidului $\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$ are norma suficient de mică. Principalele deosebiri care apar în implemmentarea metodei Newton, față de cazul liniar constau în:

- la asamblarea matricei de rigiditate, se ține cont de soluția de la iterația anterioară și de permeabilitatea dinamică a mediului magnetic neliniar din element;
- termenul liber ține cont și el de soluția de la iterația anterioară;
- calculele se reiau iterativ, până când corecția $\delta \mathbf{y}_{n+1}$ sau reziduul $\mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$ au norma neglijabilă.

În cazul liniar $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}(\mathbf{y})\mathbf{y} - \mathbf{b}$, cu $\mathbf{S} = \mathbf{J}(\mathbf{y})$ matricea constantă de rigiditate și $\mathbf{b}$ vectorul surselor. Sistemul rezolvat la iterațiile Newton devine: $\mathbf{S} \cdot \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{y}_n)\mathbf{y}_n - \mathbf{J}(\mathbf{y}_n)\mathbf{y}_n + \mathbf{b} = \mathbf{b}$, deci metoda Newton converge în cazul liniar într-o singură iterație.

Asamblarea matricei de rigiditate liniarizate poate fi simplificată, dacă se consideră că ν depinde de B^2 și nu de B [6]. În [23] se arată că operatorul Newton $A' : V_0 \rightarrow V^*$, definit de derivata Frechet a operatorului nelinar (reprezentat în cazul discretizat prin matricea jacobian):

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} \nu (|\nabla u|) \nabla u \cdot \nabla v dx \quad (3.135)$$

este coerciv și mărginit cu constantele:

$$\begin{aligned} \langle A'(u), v \rangle &\geq m_\nu \|v\|_{V_0}^2, \forall u, v, w \in V_0 \\ |\langle A'(u), v \rangle| &\leq 3\nu_0 \|v\|_{V_0} \|w\|_{V_0} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Cu aceste notații, iterațiile Newton pentru rezolvarea sistemului nelinar $A(u) = f$ au forma:

$$u^{k+1} = u^k [A'(u^k)]^{-1} (A(u^k) - f) \quad (3.137)$$

în care elementele matricei jacobian, de rigiditate dinamică se calculează cu:

$$\begin{aligned} a'(u; w, v) &= \langle A'(u) w, v \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \nu (|\nabla u|) \nabla w \cdot \nabla v + \frac{\nu' (|\nabla u|)}{|\nabla u|} (\nabla u \cdot \nabla w) (\nabla u \cdot \nabla v) dx, \quad (3.138) \\ u &\in V_0, \text{ pentru } \nabla u \neq 0, \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} a'(u; w, v) &= \langle A'(u) w, v \rangle = \int_{\Omega} \nu(0) \nabla w \cdot \nabla v dx, \quad (3.139) \\ u &\in V_0, \text{ pentru } \nabla u = 0. \end{aligned}$$

Condițiile de convergență ale metodei Newton sunt discutate în [23]. În vecinătatea soluției, metoda Newton are convergență pătratică. În Fig. 3.23 se reprezintă modul în care converg cele două metode în rezolvarea problemei de test TEAM Nr.10 (Fig. 3.24), 3D, neliniară de regim magneto-staționar, dar așa cum am precizat anterior astfel de comparații nu au relevanță prea mare, pentru că nu evidențiază timpul de calcul.

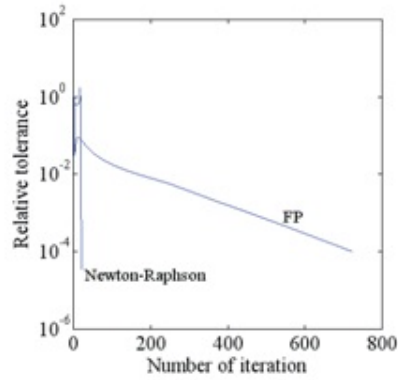


Figura 3.23: Convergența metodelor Newton și a punctului fix [78]

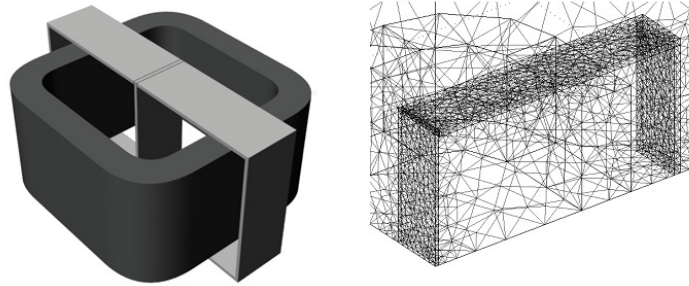


Figura 3.24: Problema de test TEAM 10 și rețeaua ei de discretizare cu MEF [78]

În această problemă s-au rezolvat ecuațiile de ordinul întâi ale regimului:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{H} = \nu \mathbf{B} + \mathbf{I}, \quad (3.140)$$

cu condițiile de frontieră:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \times \mathbf{n} &= 0, \quad \text{pe } S_H \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{pe } S_B \end{aligned} \quad (3.141)$$

Acestea au fost rescrise în funcție de potențialul magnetic vector astfel:

$$\nabla \times [\nu \nabla \times \mathbf{A}] = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{I} \quad (3.142)$$

cu condițiile de frontieră

$$\begin{aligned} [\nu \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{I}] \times \mathbf{n} &= 0, \quad \text{pe } S_H \\ \mathbf{n} \times \mathbf{A} &= 0, \quad \text{pe } S_B. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Adaugarea condiției de etalonare Coulomb pentru potențialul magnetic vector: $\nabla \mathbf{A} = 0$, în vederea unicității acestuia a condus la modificarea atât a ecuației:

$$\nabla \times [\nu \nabla \times \mathbf{A}] - \nabla [\nu \nabla \cdot \mathbf{A}] = \mathbf{J} - \nabla \times \mathbf{I}, \quad (3.144)$$

cât și la adăugarea unor noi condiții de frontieră:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} &= 0, \text{ pe } S_H, \\ \nu \nabla \mathbf{A} &= 0, \text{ pe } S_B. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Aceste ecuații conduc la următoarea formă slabă a problemei:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{W} [\nu \nabla \times \mathbf{A}] + \nabla \mathbf{W} [\nu \nabla \cdot \mathbf{A}]) \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Problema se poate rezolva și fără impunerea condiției de etalonare, dar atunci ea are următoarea formă slabă:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} [\nu \nabla \times \mathbf{A}] \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.147)$$

în care $\mathbf{T}$ este potențialul vector al densității de curent: $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$.

Următoarele funcționale de energie se minimizează în timpul iterațiilor neliniare:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nu |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \nu [\nabla \cdot \mathbf{A}]^2) \, d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.148)$$

pentru rezolvarea problemei etalonate, respectiv ne-etalonate:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nu |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \, d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Acestea sunt chiar ecuațiile rezolvate, în metoda punctului fix a magnetizației (duala metodei polarizației). În schimb, în metoda Newton se rezolvă la fiecare iterație sistemul liniarizat de ecuații generat de forma slabă:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} [\nu \nabla \times (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A})] \, d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \left[\mathbf{I} + \left(\frac{\partial H}{\partial B} - \nu \right) \nabla \times \Delta \mathbf{A} \right] \, d\Omega, \end{aligned} \quad (3.150)$$

în care $\Delta \mathbf{A}$ este corecția iterației anterioare, soluția sistemului liniar, $\partial H / \partial \mathbf{B}$ este reluctivitatea dinamică pentru câmpul corespunzător iterației anterioare. Vectorii $\mathbf{I}$ și $\mathbf{A}$ sunt soluția de la iterația anterioară. La prima iterație se presupune că $\mathbf{A} = \bar{0}$, $\mathbf{I} = \bar{0}$, deci $\partial H / \partial \mathbf{B}$ se calculează în origine și se notează cu ν , care rămâne constant pe toate iterațiile. În acest fel, prima iterație este de fapt o iterație de punct fix. În consecință, în metoda Newton îmbunătățită, pentru sporirea robusteții, la fiecare iterație se parcurg pașii:

- se generează sistemul de ecuații liniarizate și se rezolvă, calculându-se $\Delta \mathbf{A}$;
- dacă $F(\mathbf{A}_{k+1}) < F(\mathbf{A}_k)$, atunci se calculează noul potențial vector: $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + \alpha \Delta \mathbf{A}$, cu $\alpha = 1$, altfel se determină factorul de subrelaxare $\alpha \in (0, 1)$, care minimizează aproximarea parabolică a funcției de $\alpha : F(\mathbf{A}_k + \alpha \Delta \mathbf{A})$;
- se calculează în fiecare element $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{H} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{B})$, reluctivitatea dinamică $\partial H / \partial \mathbf{B}$ și polarizația magnetică $\mathbf{I} = \mathbf{H} - \nu \mathbf{B}$;
- se calculează funcționala de energie și dacă nu este îndeplinită condiția de oprire:

$$\frac{F(\mathbf{A}_{k+1}) - F(\mathbf{A}_k)}{F(\mathbf{A}_k)} \leq 10^{-4} \quad (3.151)$$

se reia procesul iterativ.

Procesul iterativ devine unul de punct fix, dacă reluctivitatea dinamică și implicit matricea jacobian se estimează doar la prima iterație.

Deoarece fenomenul de histerezis are prin excelență un caracter dinamic, modelarea lui va fi discutată în capitolul următor dedicat problemelor evolutive.

3.6 Rezolvarea problemelor de câmp variabil în timp

Variația în timp a câmpului electromagnetic intervine în mai multe regimuri, cum sunt MQS, EQS sau ED. Problemele întâlnite în aceste regimuri se clasifică în patru mari categorii:

- probleme de regim tranzitoriu, în care soluția variază în funcție de timpul t , care aparține intervalului de interes $(t_{\min}, t_{\max})$, și în care se alege de obicei, în mod convențional $t_{\min} = 0$;
- probleme liniare în regim armonic, în care mărimile variază sinusoidal în timp, cu frecvența comună, și care se rezolvă prin reprezentare în complex;

- probleme de regim periodic permanent nesinusoidal, în care soluția este funcție de periodica de timp, cu perioada T ;
- probleme de valori proprii, în care interesează determinarea frecvențelor de rezonanță și a modurilor proprii de rezonanță ale dispozitivelor de microunde (cavități rezonante).

Aceste categorii de probleme se deosebesc fundamental, deoarece formularea, dar și metodele de rezolvare sunt total diferite. Doar problemele periodice se reduc, fie la rezolvarea problemelor armonice, fie la probleme tranzitorii. Indiferent de tipul problemei, analiza poate fi făcută fie în domeniul timpului, fie în domeniul frecvenței.

3.6.1 Câmpuri reprezentate în complex

S-a constatat anterior că după reprezentarea în complex, sau în operațional, prin transformata Laplace, ecuațiile de ordinul doi satisfăcute de potențiale, dar și de componentele câmpului devin ecuații cu derivate parțiale de tip Helmholtz complex. Ele pot fi scalare (de tip *div-grad*) sau vectoriale (de tip *rot-rot*). Ecuațiile care inițial erau de tip parabolic sau hiperbolic, acum au devenit de tip eliptic, iar timpul a dispărut din ele ca variabilă independentă, și inclusiv toate derivatele parțiale față de el. Aceste ecuații liniare se rezolvă cu metoda elementului finit, la fel cum sunt rezolvate ecuațiile cu derivate parțiale de tip eliptic, Laplace, Poisson sau formele lor generalizate. În cazul ecuațiilor scalare se pot folosi elementele finite nodale, iar în cazul vectorial sunt recomandabile elementele de muchie. Singura deosebire este că acum soluția este complexă și nu reală, iar funcționala biliniară devine o formă sesquiliniară. Trebuie să remarcăm că această abordare se poate aplica nu numai câmpurilor cu variație armonică în timp ci și la modelarea dispozitivelor liniare, în care câmpul are o variație în timp de formă mai complicată. De exemplu, acesta poate avea o variație periodică față de timp. În acest caz se folosește descompunerea în serie Fourier, iar atât componentele soluției într-un punct cât și componentele surselor, în loc să fie numere reale, se reprezintă printr-un șir de numere complexe (coeficienții seriei Fourier). Pentru fiecare armonică se rezolvă o ecuație de tip Helmholtz, corespunzătoare frecvenței respective. Bineînțeles că se trunchiază seriile la un număr finit de termeni, urmând ca ceilalți termeni, cu frecvențe în afara zonei de interes să fie neglijăți. Reprezentările operaționale în complex se pot aplica și unor variații în timp mai generale. Aplicând transformata Fourier (mai ales în varianta ei discretă sau rapidă - FFT, care este foarte eficientă din punctul de vedere al costului de calcul) sau transformata Laplace (mai exact aproximarea ei discretă, obținută prin cuadraturi numerice ale relațiilor de definiție sau de transformată inversă) se pot rezolva probleme liniare

cu variație în timp tranzitorie, cu condiții inițiale nule sau respectiv nenule. La fiecare frecvență, din cele care alcătuiesc rețeaua de frecvențe discrete, ecuațiile se rezolvă exact la fel cum s-au rezolvat ele în cazul câmpului cu variație armonică în timp, reprezentat în complex [68].

În literatură se întâlnesc multe exemple de analiză cu elemente finite a câmpului variabil armonic în timp, reprezentat în complex, mai ales în regimul MQS și în cel general variabil ED [12], [13],

[14], [19], [114], [11], [39], [90], [132], [99], [104], [63] pentru rezolvarea problemelor de curenți turbionari și cele de propagare, împrăștiere, antene, dispozitive de microunde, etc.

În problemele de propagarea undelor electromagnetice se întâlnește deseori necesitatea modelării spațiului fizic deschis, nemărginit. Pentru aceasta se folosește o frontieră fictivă, care marginește domeniul de calcul, dar de care unda electromagnetică ar trebui să fie absorbită și nu reflectată. Impunerea unei **condiții absorbante de frontieră**, care să satisfacă teorema de unicitate a câmpului nu este deloc simplă din punct de vedere matematic

(http://www.dam.brown.edu/scicomp/media/report_files/BrownSC-2002-pdf, <http://www.csc.kth.se/~olofr/NumPDE/EngquistMajda.pdf>).

În aplicații, se întâlnesc cel mai frecvent următoarele abordări, pentru această problemă:

- o condiție de frontieră (de tip Robin), cu impedanta distribuită superficial, cum este de exemplu condiția absorbantă (ABC = Absorbing Boundary Condition) a lui Mur [92];
- un strat fictiv cu proprietăți de material absorbante, condiție numită PML = Perfect Matched layer [132];
- așa cum în problemele statice și staționare, cea mai precisă modelare a domeniilor nemărginite se realizează prin operatorul Poincare-Steklov, discretizat prin cuplajul FEM-BEM, și în cazul general variabil există o abordare principial similară, dar în care relația dintre $\mathbf{E}_t$ și $\mathbf{H}_t$ de pe frontieră este mai complicată fiind descrisă de un operator integral, care după discretizare cu elemente de frontieră-metoda momentelor (MOM - Method of Moments) generează o abordare FEM-MOM cunoscută și sub numele de FEM-EFIE sau FEM-MFIE, în care EFIE înseamnă Electric Field Integral Equation iar MFIE înseamnă Magnetic Field Integral Equation.[128].

În *regimul general variabil*, intensitatea câmpului electric satisface după reprezentarea în complex următoarea ecuație Helmholtz, la care pentru a asigura unicitatea

soluției au fost adăugate condiții de frontieră de tip Dirichlet pe o parte S_E a frontierei, pe care este cunoscută componenta tangențială a câmpului electric și de tip Robin, în rest pe S_H :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{J}^s \text{ în } \Omega; \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= \mathbf{P} \text{ pe } S_E; \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \gamma \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= \mathbf{Q} \text{ pe } S_H.\end{aligned}\quad (3.152)$$

Dacă în această ecuație se alege $\varepsilon = 0$, atunci se obține cazul regimului MQS, iar dacă $\sigma = 0$, atunci se obține ecuația regimului electrodinamic fără pierderi (EDFP), care iată este o ecuație Helmholtz cu coeficienți reali, deoarece $\mathbf{J}_s$ poate fi pur imaginar.

Dacă această ecuație este înmulțită în produs scalar cu funcțiile de test $\mathbf{W}_i$, și integrată apoi pe domeniul de calcul, rezultă după aplicarea relației lui Gauss, forma slabă a ecuației Helmholtz:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [\mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{W}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{E}] d\mathbf{x} + \\ + \int_{S_H} \mathbf{W}_i (\mathbf{Q} - \gamma \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) dS = -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{W}_i \cdot \mathbf{J}^s d\mathbf{x}.\end{aligned}\quad (3.153)$$

Diferența fundamentală față de cazul scalar este că acum se utilizează în locul funcțiilor de bază nodale, elementele de muchie $\mathbf{W}_i = \mathbf{N}_i(\mathbf{r})$ și soluția este combinația liniară a acestor elemente de muchie:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_e} E_j \mathbf{N}_j(\mathbf{r}) \quad (3.154)$$

în care E_j sunt gradele de libertate, egale cu tensiunea electrică de-a lungul celor N_e muchii ale rețelei de discretizare, cu excepția celor de pe S_E , pe care este specificată condiția esențială de frontieră. Forma slabă a ecuației este acum un sistem de ecuații algebrice liniare, complexe $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b}$, în care:

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \int_S [\mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j] d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{S_H} \gamma (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_i) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j) dS, \\ z_j &= E_j, \\ b_i &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}^s d\mathbf{x} - \int_{S_H} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{Q} dS.\end{aligned}\quad (3.155)$$

Concluzia acestei prezentări este că rezolvarea problemelor reprezentate în complex este similară cu rezolvarea problemelor de regim magnetic staționar, deosebirea constând în faptul că în loc să se rezolve un sistem liniar de ecuații reale se rezolva unul de ecuații complexe. Similitudinea dintre expresiile () și (3.25) pune în evidență faptul ca matricea de rigiditate are aceeași structura în ambele cazuri, fiind una rară și simetrică.

Ecuatiile satisfăcute de cele două potențiale în **regimul MQS** sunt:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} + \sigma (j\omega + \nabla \phi) &= \mathbf{J}^s, \\ \nabla \cdot \sigma (j\omega + \nabla \phi) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{J}^s &= 0.\end{aligned}\tag{3.156}$$

Acestea se rezolvă în mod natural, folosind elemente de muchie pentru potențialul vector $\mathbf{A}$ și elemente nodale scalare pentru potențialul electric scalar $V = \phi$. În ciuda dificultăților numerice întâmpinate, multe pachete comerciale de elemente finite au adoptat calea mai comodă, de a folosi elemente nodale și pentru reprezentarea celor trei componente ale potențialului vector $\mathbf{A}$.

După cum s-a văzut un artificiu pentru evitarea dificultăților constă în folosirea următorarei ecuații care întărește condiția de etalonare Coulomb:

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \phi) &= \mathbf{J}^s, \\ \nabla \cdot \sigma (j\omega \mathbf{A} + \nabla \phi) &= 0.\end{aligned}\tag{3.157}$$

Cu acest artificiu, operatorul augmentat are caracteristici care îl aproprie de operatorul Laplace (în sensul că se reduce dimensiunea spațiului nul). Dacă se aplică ∇ primei ecuații, se obține consecința

$$\nabla^2 \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,\tag{3.158}$$

deci $\nabla \mathbf{A}$ satisface ecuația lui Laplace, iar dacă $\nabla \mathbf{A}$ este nul pe frontieră, atunci $\nabla \mathbf{A}$ se anulează, și termenul adăugat la ecuație este și el nul. În consecință, adăugarea acestui termen nu afectează corectitudinea ecuației. De fapt el nu este nul pentru modurile fictive de oscilație, corespunzătoare unor valori proprii parazite mici, cărora li se forțează anularea prin adăugarea acestui termen. Un alt avantaj al eliminării valorilor proprii parazite constă în îmbunătățirea numărului de condiționare al matricei de rigiditate, ceea ce face ca rezolvarea iterativă a sistemului liniar să fie mult mai rapidă.

Celălalt dezavantaj, referitor la erorile din zonele în care μ are salturi dispare, doar prin folosirea elementelor de muchie. Adăugarea termenului penalizator,

care etaloanează potențialul vector funcționează bine la frecvențe mici, deci și în regim staționar, dar la frecvențe înalte, matricea devine tot mai slab condiționată. Soluția găsită pentru a elimina acest comportament nedorit este de-a dreptul paradoxală, și anume să se renunțe de tot la etalonare. Acesta face ca matricea să devină singulară, dar era cunoscut faptul că unele metode iterative rezolvă cu succes sisteme liniare nedeterminate, cu condiția ca termenul liber să fie compatibil (să nu aibă proiecție pe spațiul nul al matricei sistemului). Această condiție poate fi îndeplinită dacă $\mathbf{J}^s$ este perfect solenoidal, condiție verificată, dacă se folosește în locul sursei $\mathbf{J}^s$, potențialul său vector $\mathbf{J}^s = \nabla \times \mathbf{T}$, care face ca $\mathbf{J}^s$ să aibă $\nabla \mathbf{J}^s = 0$. *Problemele neetalonate* au condus la scăderea drastică a numărului de iterații efectuate de solvele iterative de tip Krylov [104], [14]. Prin îmbunătățirile pe care eliminarea etalonării le aduc spectrului matricei de rigiditate, putem spune că această abordare acționează ca o preconditionare eficientă a rezolvării iterative.

Pentru a ilustra diversitatea aplicațiilor și a rezultatelor, ce se pot obține cu metoda elementului finit, în Fig. 3.25 este reprezentată distribuția superficială de curent generată de o antenă plasată la suprafața unui avion. Acest rezultat a fost obținut cu pachetul ANSYS HFSS, bazat pe FEM în domeniul frecvenței, și care pentru rezolvarea problemei 3D, în regim ED armonic pe un sistem de calcul cu 16 procesoare a folosit descompunerea în sudomenii, metoda ce va fi prezentată în detaliu în subcapitolul următor.

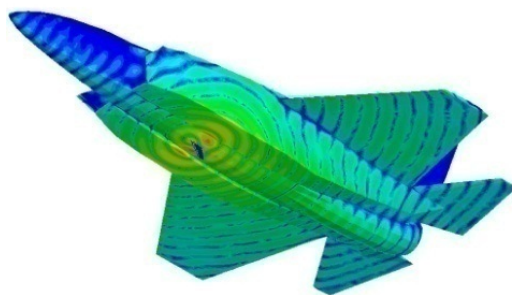


Figura 3.25: Aplicație aeronautică (<http://www.ansys.com/>)

În Fig. 3.26 este reprezentată distribuția câmpului electric în interiorul creierului unui pacient, modelată cu metoda elementelor finite, pornind de la datele geometrice extrase din datele culese de un tomograf MRI.

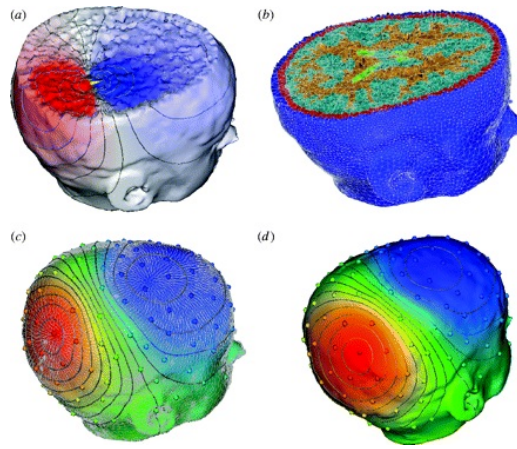


Figura 3.26: Aplicație bio-medicală
(<http://rsta.royalsocietypublishing.org/>)

3.6.2 Frecvențe și moduri proprii de rezonanță

O categorie de probleme de mare interes pentru aplicațiile electromagnetismului de înaltă frecvență este cea a determinării modului în care se distribuie câmpul electromagnetic, în cavitățile rezonante și a spectrului ce conține frecvențele la care are loc rezonanța. Din punct de vedere fizic, problema se referă la un domeniu mărginit, în interiorul căruia conductivitatea este nulă, permeabilitatea μ și permitivitatea ε sunt funcții pozitive de punct, iar frontiera este supraconductoare, deci pe ea câmpul electric tangențial este nul: $\mathbf{E}_t = 0$.

Într-un astfel de sistem, câmpul electromagnetic nu are soluție unică, pot exista o infinitate de distribuții de câmp armonic, fiecare corespunzătoare unei frecvențe de rezonanță, proprii cavității. Scopul analizei este de a determina cât mai multe dintre aceste frecvențe, începând de la cea mai mică.

Ecuatiile câmpului electromagnetic din interiorul cavității au forma:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} &= 0, \\
 \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} &= 0, \\
 \nabla(\mu\mathbf{H}) &= 0, \\
 \nabla(\varepsilon\mathbf{E}) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

iar problema formulată este să se determine pulsațiile ω , pentru care aceste ecuații au soluție nenulă, și modul în care câmpul electromagnetic, cu condiția de frontieră $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ pe $\partial\Omega$ este distribuit în domeniul Ω . Eliminând câmpul magnetic,

rezultă ecuațiile satisfăcute de câmpul electric:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} &= \omega^2 \varepsilon \mathbf{E}, \text{ în } \Omega \\ \nabla \varepsilon \mathbf{E} &= 0, \text{ în } \Omega \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} &= 0, \text{ pe } \partial\Omega.\end{aligned}\quad (3.160)$$

Forma variațională a acestei probleme se enunță astfel: găsiți $\lambda > 0$ și $\mathbf{u} \in H_0(\text{rot}, \Omega)$, astfel încât:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\text{rot}, \Omega). \quad (3.161)$$

Folosind spațiul $V_{h,p}(\mathcal{T}_h) \in H(\text{rot}, \Omega)$ al elementelor finite rot-conforme, problema capătă următoarea form discretă: Să se găsească $\lambda_h > 0$ și $\mathbf{u} \in V_{h,p}(\mathcal{T}_h)$ astfel încât:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{u}_h \cdot \nabla \times \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \lambda_h \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{u}_h \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_{h,p}(\mathcal{T}_h). \quad (3.162)$$

Folosind pentru soluție expresia

$$\mathbf{u} = \sum u_i \varphi_i \quad (3.163)$$

în care $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq N\}$ este o bază FEM pentru $V_{h,p}(\mathcal{T}_h)$, problema capătă următoarea formă algebrică: găsiți $\lambda > 0$ și $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, a.î. $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{u}$, în care $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ este o matrice simetrică pozitiv semidefinită (numită "de rigiditate") iar $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ este o matrice simetrică pozitiv definită. (numită "de masă"). Elementele matricelor $\mathbf{A}$ și $\mathbf{M}$ se calculează și se asamblază, așa cum s-a arătat în capitolele anterioare.

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \int_S [\mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j) - (\omega^2 \varepsilon - j\omega\sigma) \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j] \, d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{S_H} \gamma (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_i) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j) \, dS, \\ z_j &= E_j, \\ b_i &= -j\omega \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}^s \, d\mathbf{x} - \int_{S_H} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{Q} \, dS.\end{aligned}\quad (3.164)$$

Problemele electromagnetice de moduri de oscilație proprii se reduc deci prin MEF la rezolvarea unor probleme algebrice liniare, de valori și vectori proprii ale unor matrice simetrice și pozitiv definite. Matricea $\mathbf{A}$ are un spațiu nul relativ extins, fiind asociat câmpurilor gradient. Matricele generate de metoda elementului

finit pentru operatorii *rot-rot* sunt rare, de dimensiuni foarte mari și prost condiționate. Aceste caracteristici fac ca algoritmi clasici pentru determinarea valorilor și vectorilor proprii ale unei matrice să nu poată rezolva problema în mod robust. Nici algoritmi iterativi nu sunt potriviți, în acest caz, deoarece matricele sunt prost condiționate. Soluția găsită pentru rezolvarea problemei a fost folosirea unei metode iterative de tip Gradienti Conjugați, preconditionați cu multigrid. Pentru a obține precizia dorită, trebuie să se folosească rafinarea autoadaptivă *hp*, dar o mare importanță o are folosirea funcțiilor de bază conforme cu secvența de Rham [63], [133].

Importanța problemelor de valori proprii ale ecuațiilor lui Maxwell, este ilustrată în Fig. 3.27, în care se prezintă rezultatul modelării câmpului electromagnetic dintr-o cavitate rezonantă, folosită pentru acceleratoarele de particule. Alte rezultate similare sunt disponibile la (https://slacportal.slac.stanford.edu/sites/ard_public/bpd/acd/Pages/acmod.aspx).

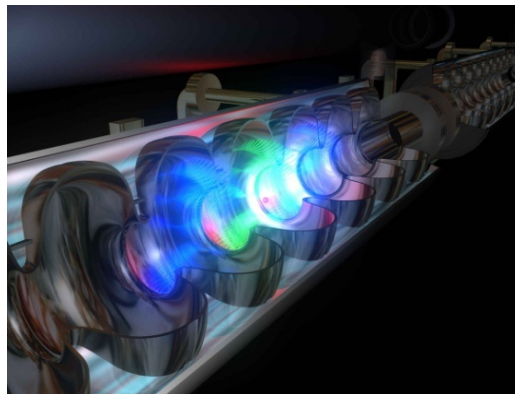


Figura 3.27: Rezultatul modelării unei cavități rezonante (dasy.de)

3.6.3 Câmpuri în regim tranzitoriu

Analiza câmpului electromagnetic în domeniul timpului se efectuează de obicei în cazul problemelor de regim MQS și ED. Dacă mediile sunt neliniare, în regim tranzitoriu, analiza în frecvență nu poate fi aplicată rămânând ca analiza în domeniul timpului să fie câmpului în cele două regimuri au deosebiri fundamentale, în regim MQS ele sunt de natură parabolică, iar în ED sunt de natură hiperbolică. Aceasta face ca în al doilea caz să apară *fenomene de propagare*, cu viteză finită, și cu posibilitatea definirii frontului de undă, în timp ce în primul caz apar *fenomene de difuzie*, câmpul distribuindu-se teoretic instantaneu în întreg spațiu. În cazul MQS nu se poate defini viteza de propagare sau lungimea de undă, în schimb se definesc: adâncimea de pătrundere și constanta de timp echivalentă de difuzie.

În **regim general variabil fără pierderi (EDFP)**, câmpul electromagnetic este descris de ecuații cu derivate parțiale de tip hiperbolic, de forma:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= 0, \text{ pe } S_E, ; \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} &= 0, \text{ pe } S_H, ; \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t=0) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \text{ in } \Omega, \\ \left. \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \mathbf{E}'_0(\mathbf{r}), \text{ in } \Omega.\end{aligned}\tag{3.165}$$

la care sunt adăugate condiții de frontieră (pentru $\mathbf{E}_t$ sau $\mathbf{H}_t$), dar și două condiții inițiale, una pentru intensitatea câmpului și alta pentru derivata ei față de timp, la momentul $t = 0$.

Dacă se presupune că soluția numerică se exprimă folosind elemente de muchie $\mathbf{N}_j$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_e} E_j(t) \mathbf{N}_j(\mathbf{r}), \tag{3.166}$$

gradele de libertate alcătuiesc un vector cu componentele $E_j, j = 1, \dots, N_e$, dependente de timp. Aplicând proiecția Galerkin a ecuației (3.165) pe spațiul elementelor de muchie se obține *sistemul de ecuații diferențiale ordinare*:

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(t) + c_0^{-2} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{z}(t)}{\partial t^2} = \mathbf{0} \tag{3.167}$$

în care $c_0^2 = 1/(\varepsilon\mu)$ este viteza de propagare, $\mathbf{S}$ este matricea de rigiditate, $\mathbf{M}$ este matricea de masă cu elementele având expresiile cunoscute pentru elementele de muchie, iar $\mathbf{z}$ este vectorul gradelor de libertate, ce identifică evoluția în timp a soluției problemei. Metoda numerică standard pentru rezolvarea unui astfel de sistem de ecuații se bazează pe discretizarea cu diferențe finite a derivatei față de timp. Folosind de exemplu, diferențe finite centrate, rezultă:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}) = -(c_0 \Delta t)^2 \mathbf{S}\mathbf{z}^n, \tag{3.168}$$

care este o metodă implicită, deoarece la fiecare pas de timp $n = 1, 2, 3, \dots$, trebuie rezolvat un sistem liniar cu matricea $\mathbf{M}$. La primul pas $\mathbf{z}^1$ și $\mathbf{z}^0$ sunt calculate pornind de la condițiile inițiale. Această metodă de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale ordinare este stabilă, doar în *condiția CFL* http://en.wikipedia.org/wiki/Courant-Friedrich-Lewy_condition, dacă

pasul de timp $\Delta t \leq 2/\omega_{\max}$, în care $\omega_{\max}$ este pulsația proprie maximă a sistemului: $-\mathbf{S}\mathbf{z} = (\omega_{c_0})^2 \mathbf{M}\mathbf{z}$. Deoarece metoda de referință pentru rezolvarea ecuațiilor Maxwell în domeniul timpului este metoda FDTD (Finite Difference Time Domain) (http://en.wikipedia.org/wiki/Finite-difference_time-domain_method), MEF ar trebui comparată cu aceasta. Cea mai importantă dificultate a aplicării MEF în rezolvarea problemeleor de regim tranzitoriu este cea referitoare la necesitatea "inversării" matricei de masă la fiecare iterație. Dificultatea poate fi eliminată, dacă se folosește o aproximare diagonală a matricei $\mathbf{M}$, tehnică numită a *concentrării masei*. Această abordare funcționează bine, mai ales în cazul rețelelor hexedrale sau dreptunghiulare, caz în care performanțele metodei se aproprie de cele ale FDTD. Totuși condiția CFL limitează mărimea pasului de timp și conduce la creșterea efortului de calcul necesar simulării. O soluție este să se folosească metode mai puternic implicate, cum este metoda Newmark, în care la fiecare pas de timp se rezolvă sistemul:

$$\mathbf{M}(\mathbf{z}^{n+1} - 2\mathbf{z}^n + \mathbf{z}^{n-1}) = -(c_0\Delta t)^2 \mathbf{S} [\theta\mathbf{z}^{n+1} + (1 - 2\theta)\mathbf{z}^n + \theta\mathbf{z}^{n-1}] \quad (3.169)$$

metoda stabilă pentru orice valoare a pasului de timp Δt , dacă parametrul $\theta \geq 1/4$ (acest parametru se alege de obicei $\theta = 1/2$). Evident că atunci când pasul de timp este prea mare, soluția numerică se abate mult de la soluția exactă. Este interesant de remarcat faptul că această schemă de cuadratură este rezultatul aplicării proiecției Galerkin și a MEF pentru variația față de timp

[14]. Putem spune deci că relația (3.169) reprezintă discretizarea cu FEM, atât din punct de vedere spațial cât și temporal a ecuațiilor câmpului electromagnetic.

O altă abordare posibilă este cea care folosește metoda Runge-Kutta

(http://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methods) pentru integrarea numerică, în domeniul timpului a sistemului de ecuații diferențiale ordinare, obținut prin discretizarea spațială cu MEF.

În **regim quasistaționar induciv (MQS)**, câmpul electromagnetic este descris de ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic, de forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) &= \mathbf{J}^s, \\ \nabla \cdot \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.170)$$

la care se adaugă condițiile de frontieră prezentate anterior și condiția inițială, referitoare la distribuția potențialului magnetic vector $\mathbf{A}$, în tot domeniul de calcul, la momentul inițial $t = 0$.

Dacă se presupune că potențialul magnetic vector se exprimă folosind elemente

de muchie $\mathbf{N}_j$, iar potențialul scalar prin elemente finite nodale:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_e} A_j(t) \mathbf{N}_j(r), \quad V(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N_n} V_j(t) \phi_j(\mathbf{r}), \quad (3.171)$$

și se aplică ecuației proiecția Galerkin pe spațiul elementelor finite, se obține sistemul de ecuații diferențiale ordinare:

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(t) + \mathbf{M} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} + \mathbf{G}\mathbf{v}(t) = \mathbf{b}(t); \quad \mathbf{A}\mathbf{v}(t) = \mathbf{B} \frac{d\mathbf{z}(t)}{dt}, \quad (3.172)$$

în care $\mathbf{S}$ și $\mathbf{A}$ sunt matrice de rigiditate, pentru elemente de muchie respectiv pentru cele nodale, $\mathbf{M}$ este matricea de masă, $\mathbf{G}$ și $\mathbf{B}$ sunt matrice ce ponderează derivatele spațiale, iar $\mathbf{z}(t)$ și $\mathbf{v}(t)$ sunt gradele de libertate corespunzătoare potențialului vector (tensiunile pe muchii) și respectiv ale celui scalar (valorile în noduri).

Și în acest caz se obține tot un sistem de ecuații diferențiale ordinare, care se rezolvă prin integrare numerică în timp, cu diferențe finite. De această dată însă, cele mai simple abordări sunt schema Euler progresivă, regresivă sau combinația lor:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n)/\Delta t + \mathbf{S}(\theta \mathbf{z}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{z}^n) + \mathbf{G}(\theta \mathbf{v}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{v}^n) &= \\ &= (\theta \mathbf{b}^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{b}^n), \end{aligned} \quad (3.173)$$

care pentru $\theta = 0$ este metoda progresivă, pentru $\theta = 1$ este metoda regresivă, iar pentru $\theta = 1/2$ este metoda Crank-Nicholson. Metoda de integrare în timp prezentată este necondiționat stabilă, pentru orice $\theta \in [1/2, 1]$ [120]. Pentru $\theta < 1/2$, deci inclusiv în cazul Euler progresiv, metoda de integrare este stabilă, doar dacă pasul de timp este suficient de mic:

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{6(1 - 2\theta)}(1 - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (3.174)$$

În **regimul general variabil cu pierderi (ED)**, câmpul electric satisface ecuația:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \sigma \cdot \mathbf{E} + \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}^{ext} - \nabla \times (\mu^{-1} \cdot \mathbf{K}^{ext}) \quad (3.175)$$

în care $\mathbf{J}^{ext}$ și $\mathbf{K}^{ext}$ sunt sursele de câmp, densitatea de curent electric (rotorul câmpului magnetic) și de "curent magnetic" (rotorul câmpului electric), de regulă nul. Se constată că ecuația are un termen de propagare (derivata dublă față de timp), unul de difuzie (derivata simplă față de timp) și un operator (de tip *rot-rot*) de derivare spațială. În [92] se propune ca soluția FEM să se exprime sub forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_j e_{i,j}(t) \mathbf{W}_{i,j}^{(C,E)}(\mathbf{x}) \quad (3.176)$$

în care $\mathbf{W}$ sunt funcțiile de bază nodale (C) utilizate în domeniile de omogenitate sau de muchie (E), utilizate pe interfețele între mediile omogene. După proiecția Galerkin, ecuația câmpului se transformă într-un sistem de ecuații diferențiale ordinare de forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e_{i,j} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{W}_{i,j} dV + \\
 & + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} e_{i,j} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot \sigma \cdot \mathbf{W}_{i,j} dV + \\
 & + \sum_{i,j} e_{i,j} \int_{\mathcal{D}} (\nabla \times \mathbf{W}_{p,q}) \cdot \mu^{-1} \cdot (\nabla \times \mathbf{W}_{i,j}) dV = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} - \\
 & - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{W}_{p,q} \cdot \mathbf{J}^{ext} dV - \\
 & - \int_{\mathcal{D}} (\nabla \times \mathbf{W}_{p,q}) \cdot \mu^{-1} \cdot \mathbf{K}^{ext} dV, \quad \forall p, q.
 \end{aligned} \tag{3.177}$$

Pentru a asigura caracterul solenoidal al inducției electrice, la aceste ecuații se mai adaugă și condiția:

$$\sum_{i,j} e_{i,j} \int_{\mathcal{T}} (\nabla \cdot \mathbf{W}_{p,q}) \cdot |\varepsilon \cdot \mu|^{-1} \cdot \nabla (\varepsilon \mathbf{W}_{i,j}) dV, \quad \forall p, q. \tag{3.178}$$

Este evident că sistemul de ecuații diferențiale ordinare obținut acum prin discretizarea cu FEM are forma:

$$\mathbf{M}_\varepsilon \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{e}(t) + \mathbf{M}_\sigma \frac{d}{dt} \mathbf{e}(t) + \mathbf{M}_\mu \mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t). \tag{3.179}$$

Cele trei matrice sunt: $\mathbf{M}_\mu$ - matrice de rigiditate, $\mathbf{M}_e$ - matrice de masă și $\mathbf{M}_\sigma$ - matrice de amortizare. În regimul MQS, $\mathbf{M}_e = 0$, deci ecuația nu conține termenul cu derivata dubă în timp, iar în regim EDFP, $\mathbf{M}_\sigma = 0$, deci ecuația nu conține termenul cu derivata de ordinul întâi în timp.

Un program MATLAB pentru rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell în regim tranzitoriu, folosind elemente nodale sau elemente de muchie este disponibil la

(http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=75).

Dintre pachetele de programe software pentru analiza cu MEF, menționăm GetDP ("General environment for the treatment of Discrete Problems"), care este un mediu general de tratare numerică a problemelor științifice, folosind elemente finite

mixte pentru a discretiza secvența de Rham în 1D, 2D sau 3D.

Caracteristica acestui mediu constă în posibilitatea de a defini simbolic (prin fișiere de text scrise în limbaj propriu) problema de rezolvat: forma slabă a ecuațiilor și spațiul finit dimensional al soluției numerice. Instrumentele numerice sunt tratate ca obiecte software. GetDP se poate aplica la rezolvarea numerică a ecuațiilor integro-diferențiale, inclusiv a problemelor fizice cuplate (electromagnetice, termice, etc.) în diferite regimuri (statice, staționare, tranzitorii, armonice) (<http://geuz.org/getdp/>). De altfel, utilizarea tehnicilor programării orientate pe obiecte este subiectul mai multor lucrări și proiecte (<http://www.lmc.ep.usp.br/pesquisas/bem/oop/mackerle.pdf>, <http://www.oofem.org/en/oofem.html>, <http://www.calpoly.edu/~garcher/archer.pdf>, http://oatao.univ-toulouse.fr/5378/1/Pantale_5378.pdf, <http://www.fetk.org/>, <http://fetk.org/codes/mc/>, <http://fetk.org/codes/mclite/>, <http://www.dealii.org/>, <http://www.ofeli.net/>).

3.6.4 Câmpuri variabile în medii nelinare și cu histerezis

În multe aplicații este necesară modelarea unor mașini și aparate electrice, care funcționează la frecvență industrială și care conțin piese feromagnetice. Chiar dacă sunt neliniare din punct de vedere magnetic, acestea sunt modelate de multe ori ca medii liniare, cu $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, în care μ este permeabilitatea dinamică inițială, pentru, $\mathbf{H} = 0$. Deoarece aceasta abordare nu ia în considerare saturația magnetică, ea este acceptabilă doar pentru câmpuri mici. Tehnica a fost extinsă pentru a considera și fenomenul de histerezis. Utilizând o permeabilitate complexă, se obține o modelare aproximativă a pierderilor prin histerezis, aproximând de fapt ciclul cu unul de forma eliptică (în regim armonic, atât $\mathbf{B}$ cât și $\mathbf{H}$ variază sinusoidal în timp, deci dacă sunt defazate dependența dintre ele se reprezintă în planul $B - H$ printr-o elipsă).

Abordarea liniară, chiar dacă este simplă, nu este satisfăcătoare la câmpuri mai mari, atunci când neliniaritățile materialelor feromagnetice devin importante. Datorită lor, mărimile nu mai au variație perfect sinusoidală în timp, dar rămân totuși cu variație în timp periodică, permanentă, deformată, nesinusoidală. De regulă abaterea de la sinusoidă nu este foarte mare, ceea ce face posibilă analiza folosind serii Fourier trunchiate la un număr relativ mic de armonici (maxim 5 – 10, și mai rar până la 100). Analiza câmpului magnetic MQS în domenii feromagnetice cu metoda analizei armonice reprezintă un instrument puternic pentru multe aplicații electrotehnice industriale. Fiind o problemă neliniară, abordarea este cunoscută și sub numele de metoda *balanței armonice*, deoarece se analizează fiecare armonică în parte, relația constitutivă, de material făcând legătura dintre armonici, asigură echilibrul armonic [35], (<http://en.wikipedia.org/wiki/>

Harmonic_balance. Câmpul electromagnetic satisface ecuațiile fundamentale ale acestui regim, care datorită caracteristicilor de magnetizare devin ecuații neliniare. Analiza numerică a acestui câmp se poate realiza cu MEF, urmând ca sistemul de ecuații diferențiale ordinare neliniare, generat de proiecția Galerkin să fie rezolvat printr-o metodă numerică, pentru a găsi o soluție periodică. Aceasta poate fi determinată, fie prin metoda balanței armonice, fie prin *metoda balistică* ("shooting method"), care constă în simularea iterativă a regimului tranzitoriu al sistemului, pe parcursul unei (semi)perioade, pornind de la condiții inițiale arbitrare și apoi folosind valoarea variabilelor de stare după o perioadă, se iterează condiția inițială, până când aceasta ajunge să fie egală cu valoarea sa după o perioadă

[97]. Indiferent de metoda folosită pentru determinarea câmpului (în domeniul timpului sau în domeniul frecvenței), această analiză este reluată într-un ciclu de iterații neliniare, până când este îndeplinit criteriul de oprire (referitor la abaterea de la periodicitate, care trebuie să fie suficient de mică). Iterațiile neliniare au la bază fie metoda punctului fix, fie metoda Newton sau variante ale acestora.

În [57] se prezintă o metodă eficientă pentru analiza curenților turbionari cu variație periodică în timp, în medii neliniare din punct de vedere magnetic. Abordarea este bazată pe metoda punctului fix al polarizației și pe descompunerea Fourier a variației periodice în timp a magnetizației. Ecuațiile câmpului se rezolvă independent pentru fiecare armonică, iar apoi se sumează seria Fourier a inducției magnetice, funcție care trecută prin caracteristica de magnetizare determină variația în timp a magnetizației. Aceasta este descompusă în serie Fourier trunchiată pentru a determina armonicile magnetizației, care devin surse de câmp în iterția următoare. Următorul procedeu iterativ de tip Picard-Banach:

$$\dots M^{(n-1)} \xrightarrow{S} M_a^{(n-1)} \xrightarrow{T} B^{(n)} \xrightarrow{G} M^{(n)} \dots \quad (3.180)$$

converge către soluția problemei, care este punctul fix al aplicației $W = S \circ T \circ G$, unde S este operatorul contractiv de trunchiere a seriei Fourier, T este operatorul neexpansiv care indică inducția B - soluție a problemei de câmp, obținută printr-o metodă numerică, pornind de la sursele câmpului, printre care și magnetizația M de la iterația anterioară, iar G este operatorul contractiv, care descrie caracteristica de magnetizare (magnetizația M în funcție de inducția B). Aici s-a folosit magnetizația $M = \nu I$, în locul polarizației magnetice $I = \mu M$, schimbare ce nu modifică esența procesului iterativ, cât timp "intrarea" în caracteristica de magnetizare se face prin B iar $\mu = 1/\nu$ este o constantă ce reprezintă permeabilitatea "de calcul".

Spre deosebire de metoda Newton, metoda punctului fix folosește o permeabilitate "de calcul", care este menținută constantă pe toată durata iterațiilor, neliniaritatea caracteristicii de magnetizare fiind transferată în neliniaritatea relației constitutive

B – M. Astfel, la fiecare iterație, neliniaritatea devine sursă de câmp într-o problemă virtuală, liniară, care se rezolvă în domeniul frecvenței.

Metoda punctului fix a polarizației sau cea a magnetizației are avantajul că poate fi extinsă pentru a fi aplicată și materialelor cu histerezis magnetic. Dintre modelele de histerezis magnetic, cel cu precizie acceptabilă pentru materialele feromagnetice este modelul Preisach, descris de o relație de forma:

$$y(t) = \iint_{\alpha \leq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma(\alpha, \beta, x(t)) d\alpha d\beta \quad (3.181)$$

în care, în modelul direct $x = H(t)$ este intensitatea câmpului magnetic iar $y = B(t)$ este inducția magnetică. Dacă $x = B$ și $y = H$, atunci modelul de histerezis se numește invers. În relația Preisach, variabilele α și β sunt câmpurile de comutație ale histeronului rectangular, iar $\mu(\alpha, \beta)$ este funcția de distribuție, caracteristica fiecărui material, în timp ce γ este caracteristica histeronului elementar (http://en.wikipedia.org/wiki/Preisach_model_of_hysteresis - Fig. 3.28. Relația (3.181) exprimă semnalul de ieșire $y(t)$ ca o medie ponderată a semnalelor de ieșire ale unei mulțimi de histeroni elementari cu diferiți parametri.

Un model mai simplu, care elimină necesitatea dublei integrale și o aproximează

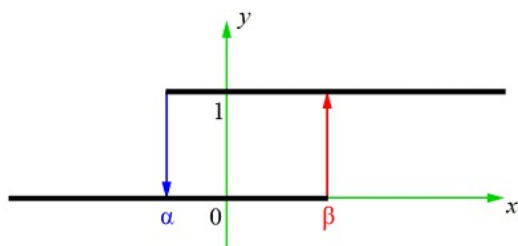


Figura 3.28: Caracteristica histeronului elementar

cu o sumă este cel descris de relația:

$$y(t) = -E(\alpha_0, \beta_0) + 2 \sum_{k=1}^K [E(\alpha_k, \beta_{k-1}) - E(\alpha_k, \beta_k)] \quad (3.182)$$

caracterizat de funcția Everett $E(\alpha, \beta)$. În [79] se prezintă o procedură de măsurare a acestei funcții și implicit de determinare experimentală a modelului de histerezis al materialelor anizotrope.

Modelul extras cu aceasta tehnică a fost apoi folosit, pentru a calcula distribuția câmpului magnetic din transformatorul reprezentat în Fig. 3.29. Rezultatele numerice obținute, comparate cu cele măsurate sunt prezentate în Fig. 3.30.

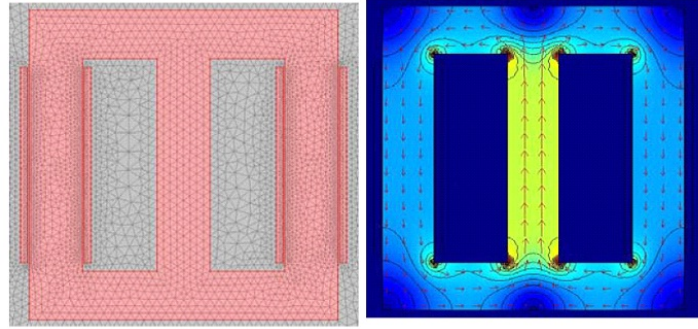


Figura 3.29: Vizualizarea rezultatelor unui dispozitiv analizat cu FEM [84]

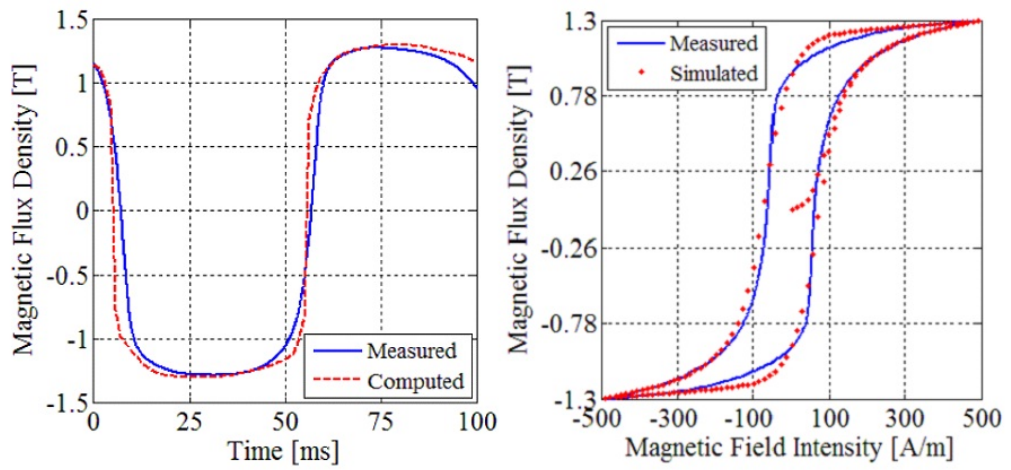


Figura 3.30: Ciclul de histerezis și variația în timp a inducției magnetice [84]

Problema a fost rezolvată cu MEF, pentru potențialul magnetic redus Φ al intensității câmpului magnetic:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \nabla \Phi, \quad (3.183)$$

care satisface ecuațiile:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu_0 \nabla \Phi) &= \nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{T}_0), \text{ in } \Omega_0 \text{ - cu material ne-magnetic} \\ \nabla \cdot (\mu_{FP} \nabla \Phi) &= \nabla \cdot (\mu_{FP} \mathbf{T}_0) + \nabla \cdot \mathbf{R}, \text{ in } \Omega_m \text{ - cu material magnetic;} \end{aligned} \quad (3.184)$$

în care $\mathbf{T}_0$ este potențialul vector al densității de curent $\nabla \times \mathbf{T}_0 = \mathbf{J}_0$, iar $\mathbf{R}$ este "reziduul" punctului fix, definit de

$$\mathbf{B}\{\mathbf{H}\} = \mu_{FP} \mathbf{H} + \mathbf{R}, \text{ in } \Omega_m, \quad (3.185)$$

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 197

unde s-a notat cu $\mathbf{B}\{\mathbf{H}\}$ relația de histerezis magnetic, iar cu $\mu_{FP} = (\mu_{\max} + \mu_{\min})/2$, permeabilitatea de calcul.

Iterațiile neliniare prin metoda punctului fix al magnetizației, folosind un model direct de histerezis au avut următorii pași:

- Se generează matricea $\mathbf{K}$ a sistemului liniar de ecuații, care nu se modifică pe parcursul iteratiilor;
- Folosind reziduul $\mathbf{R}$ se determină termenul liber $\mathbf{b}$ al sistemului de ecuații;
- Se rezolvă sistemul liniar $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, determinându-se vectorul $\mathbf{x}$ al potențialului magnetic redus din noduri;
- Se calculează intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{H} = \mathbf{T}_0 - \nabla\Phi$, din fiecare element, și apoi din operatorul Preisach, aplicat o singură dată pe fiecare element se determină inducția magnetică $\mathbf{B}$.
- Se actualizează reziduul $\mathbf{R}$ din fiecare element, plasat în domeniul feromagnetic.
- Se determină eroarea soluției numerice. Folosind reziduul $\mathbf{R}$ din ultimele două iterații se calculează $\|\mathbf{H}_n - \mathbf{H}_{n-1}\|$, iar dacă este mai mic decât o abatere acceptabilă, atunci calculele se opresc, altfel ele se reiau de la pasul al doilea.

Calcululele au fost efectuate în MATLAB, folosind funcții oferite de pachetul COM-SOL, pe un calculator cu un procesor dual AMD și 32 GB RAM. Perioada de timp a fost divizată în 72 pași, iar rețeaua de discretizare spațială 2D a avut cca. 10.000 elemente triunghiulare cu 50.000 grade de libertate.

3.7 Descompunerea în subdomenii. Rezolvări iterative în paralel

Dezvoltarea proiectării și ingineriei asistate de calculator face ca cerearea pentru modelări și simulări electromagnetice să fie tot mai consistentă și să se refere la probleme tot mai complicate. Acestea nu pot fi rezolvate decât pe sisteme de calcul tot mai performante, care în prezent, au de regulă mai multe procesoare. Trecerea de la sistemele monoprosesor, programate secvențial la cel multiprosesor cere o nouă paradigmă în dezvoltarea și utilizarea programelor și algoritmilor de calcul. Prin această schimbare în tehnologia informației, nu are loc doar un progres continuu, ci o adevărată revoluție informatică, care trebuie susținută științific și cu resurse financiare și umane corespunzătoare.

Principiul fundamental de abordare a problemelor în noua paradigmă: "*Divide et Impera*" (*Împarte și Stăpânește*) are ca principal corespondent în modelarea electromagnetică, tehnica numită a *Descompunerii în Subdomenii* (DD - *Domain Decomposition*) [98], [33], [133].

DD este o metodă scalabilă de rezolvare în paralel, prin metode iterative a ecuațiilor cu derivate parțiale, cu aplicații în rezolvarea unor probleme de mari dimensiuni, din inginerie, calculul științific, matematici aplicate și calculatoare. Ea include și abordările multigrid și multinivel, de rafinare auto-adaptivă. Resursele cele mai importante referitoare la aceasta metoda sunt disponibile pe net la:

- PETSc from Argonne Nat. Lab., USA, (<http://www.mcs.anl.gov/petsc/petsc.html>);
- INRIA, Franta, MODULEF- (<http://www-rocq.inria.fr/modulef/>);
- Universite Pierre et Marie Curie Laboratoire Jacques-Louis Lions - FreeFem++ - (<http://www.freefem.org/ff++/>);
- Organizatia DDM: (www.ddm.org).

Următoarele cărți sunt referințe în acest domeniu:

[115], [102],

[124], [86].

Ideile de bază ale metodei DD sunt următoarele:

- se descompune domeniul de calcul al problemei de rezolvat în subdomenii, care se suprapun sau nu;
- se rezolvă ecuațiile cu condiții de frontieră alese corespunzător, în fiecare domeniu, de regulă pe sisteme de calcul sau procesoare separate;
- se rezolvă problema și pe o rețea grosieră, care conține date de pe frontierele subdomeniilor;
- se evaluează soluția globală folosind rețelele locale și cea globală grosieră și dacă precizia ei nu este acceptabilă, atunci se reia rezolvarea iterativ.

Metoda DD este calea principală pentru a folosi eficient FEM pe sisteme multi-procesor, pentru rezolvarea unor probleme de mari dimensiuni. Preferința pentru abordările iterative din DD este justificată de faptul că metodele directe de rezolvare nu sunt competitive la dimensiuni foarte mari (limita fiind de ordinul sute de mii în 3D- și de un milion de necunoscute în 2D), chiar dacă aceste metode sunt preferate la dimensiuni mici (sub zece mii de necunoscute). Principalele implementări ale metodelor directe pentru rezolvarea în paralel a sistemelor de ecuații algebrice liniare sunt următoarele:

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 199

- PARDISO (<http://www.pardiso-project.org>);
- SUPERLU (<http://crd.lbl.gov/?xiaoye/SuperLU>);
- SPOOLES (www.netlib.org/linalg/spooles/spooles.2.2.html);
- MUMPS (<http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>);
- UMFPACK (<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack>).

Dar indiferent de implementare, factorizarea LU care stă la baza lor are un ordin mare de complexitate [33] Tabelul (3.2).

Matrice	$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
Dense	$O(n^3)$	$O(n^3)$	$O(n^3)$
Banda	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n^{7/3})$
Rare	$O(n)$	$O(n^{3/2})$	$O(n^2)$

Tabela 3.2: Ordinul de complexitate al factorizării LU [33]

3.7.1 Studiu de caz - doua subdomenii

Pentru simplitatea prezentării, se consideră ca problemă model ecuația cea mai simplă, de tip Pissou, cu condiții Dirichlet nule pe frontieră. Folosind proiecția Galerkin, se caută soluția slabă a acestei ecuații în spațiul Solbolev $H_0^1(\Omega)$. Aplicand MEF, pe o rețea de elemente finite conforme de pe Ω , se discretizează problema, căutând soluția în subspațiul $V \subset H_0^1(\Omega)$, generat de funcțiile de baza ϕ_j , care sunt polinoame definite pe fiecare element. Soluția numerică se obține rezolvând sistemul de ecuații liniare $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, în care

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{ij}^K &= \varepsilon^K \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx + \int_K k \varphi_i \varphi_j dx = \\
 &= \varepsilon^K \int_{\hat{K}} (\mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_i (\mathbf{F}_K)^{-T} \nabla \hat{\varphi}_j \mathbf{J} d\hat{x} + \int_{\hat{K}} k \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j \mathbf{J} d\hat{x} \\
 \mathbf{f}_i^K &= \int_K \mathbf{f} \varphi_i dx = \int_{\hat{K}} \mathbf{f} \hat{\varphi}_i \mathbf{J} d\hat{x}
 \end{aligned} \tag{3.186}$$

Dacă se descompune domeniul Ω al problemei în mai multe subdomenii, care se pot suprapune sau nu ca în (Fig. 3.31, în care s-a ales pentru simplitate, numărul

subdomeniilor egal cu doi), atunci ecuațiile capătă forma:

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f, & \text{in } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \\ u_i = 0, & \text{in } \partial\Omega_i \setminus \Gamma, \\ u_1 = u_2, & \text{pe } \Gamma, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \frac{\partial u_2}{\partial n_2}, & \text{pe } \Gamma, \end{cases} \quad (3.187)$$

care după discretizare devin:

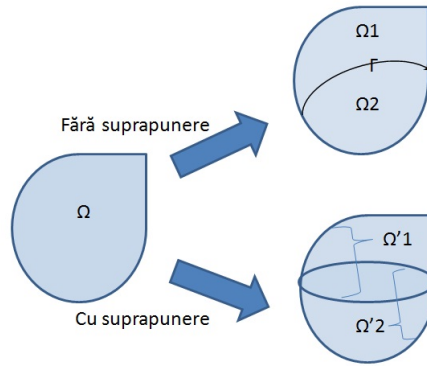


Figura 3.31: Descompunerea în subdomenii

$$\begin{cases} A_{II}^i u_I^i + A_{I\Gamma}^i u_\Gamma^i = f_I^i, & i = 1, 2 & (i) \\ u_\Gamma^1 = u_\Gamma^2 = u_\Gamma & & (D) \\ A_{\Gamma I}^1 u_I^1 + A_{\Gamma\Gamma}^1 u_\Gamma^1 - f_\Gamma^1 = -(A_{\Gamma I}^2 u_I^2 + A_{\Gamma\Gamma}^2 u_\Gamma^2 - f_\Gamma^2) = \lambda_\Gamma & & (N) \end{cases} \quad (3.188)$$

sau în forma bloc-matriceală:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_{II}^1 & 0 & A_{I\Gamma}^1 \\ 0 & A_{II}^2 & A_{I\Gamma}^2 \\ A_{\Gamma I}^1 & A_{\Gamma I}^2 & A_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^1 \\ u_I^2 \\ u_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^1 \\ f_I^2 \\ f_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

Dificultatea principală este că nu sunt cunoscute complet (pe interfața Γ) condițiile pe frontieră pentru fiecare subdomeniu. Folosind complementul Schur http://en.wikipedia.org/wiki/Schur_complement se poate determina u_Γ și folosind tehnica FETI <http://en.wikipedia.org/wiki/FETI> se poate determina λ_Γ , dar aceasta necesită efort mare de calcul. Soluția ar fi să se pornească de la o inițializare arbitrară pentru u_Γ sau λ_Γ și să se itereze, rezolvând succesiv problemele din subdomenii. Se identifică patru abordări posibile: D-D

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 201

(ambele subdomenii cu condiții Dirichlet), N-N (ambele subdomenii cu condiții Neumann), D-N, N-D (un subdomeniu cu condiții Dirichlet și altul cu condiții Neumann). Pentru a fi eficientă, rezolvarea iterativă se face cu metode moderne de tip Krylov (de exemplu gradienti conjugați preconditionați PCG sau GMRES, dacă matricea sistemului este nesimetrică). Pentru simplitatea prezentării, în continuare se folosește pentru ilustrare cea mai simplă metodă iterativă, Richardson (http://en.wikipedia.org/wiki/Richardson_iteration).

Dacă este determinat, complementul Schur S (Fig. 3.32) permite determinarea condițiilor Dirichlet de pe frontieră între subdomenii, prin rezolvarea sistemului liniar: $Su_\Gamma = q_\Gamma$, în care:

$$\begin{aligned} S &= A_{\Gamma\Gamma} - A_{\Gamma I}^1 (A_{II}^1)^{-1} A_{\Gamma I}^1 - A_{\Gamma I}^2 (A_{II}^2)^{-1} A_{\Gamma I}^2 = S^1 + S^2, \\ g_\Gamma &= g_\Gamma^1 + g_\Gamma^2, \\ g_\Gamma^i &= f_\Gamma^i - A_{\Gamma I}^i (A_{II}^i)^{-1} f_I^i, \end{aligned} \quad (3.190)$$

iar componentele interioare eliminate sunt soluția problemei Dirichlet în fiecare subdomeniu:

$$u_I^i = (A_{II}^i)^{-1} (f_I^i - A_{\Gamma I}^i u_\Gamma). \quad (3.191)$$

Necunoscutele interioare pot fi calculate și rezolvând problemele Neumann:

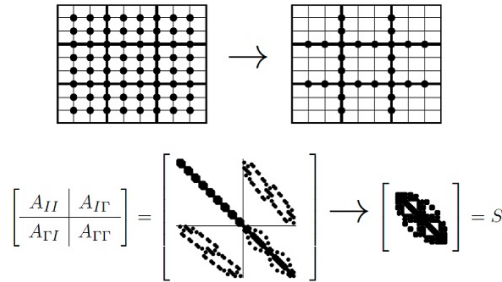


Figura 3.32: Complementul Schur [98]

$$\begin{pmatrix} A_{II}^i & A_{I\Gamma}^i \\ A_{\Gamma I}^i & A_{\Gamma\Gamma}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^i \\ u_\Gamma^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^i \\ f_\Gamma^i + \lambda_\Gamma^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (3.192)$$

în care condițiile de frontieră pot fi exprimate de relația:

$$(S^{1-1} + S^{2-1}) \lambda_\Gamma = d_\Gamma, \quad (3.193)$$

cu

$$d_\Gamma = -S^{1-1} g_\Gamma^1 + S^{2-1} g_\Gamma^2, \quad (3.194)$$

obținută prin eliminarea componentelor interioare ale soluției:

$$u_\Gamma^i = S^{i-1} (g_\Gamma^i + \lambda_\Gamma^i). \quad (3.195)$$

Algoritmul iterativ Schwarz D-N porneste pentru $n = 0$ de la o initializare pentru $u_{\Gamma 0}$ si are etapele:

- rezolvă problema Dirichlet pe domniul Ω_1 și determină $u_1^{n+1/2}$:

$$(D) \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1/2} = f, & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^{n+1/2} = 0, & \text{pe } \Omega_1 \setminus \Gamma, \\ u_1^{n+1/2} = u_\Gamma^n, & \text{pe } \Gamma, \end{cases} \Rightarrow A_{II}^1 u_I^{1,n+1/2} + A_{I\Gamma}^1 u_\Gamma^n = f_\Gamma^1 \quad (3.196)$$

- rezolvă problema Neumann pe domeniul Ω_2 și determină u_2^{n+1} :

$$(N) \begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f, & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^{n+1} = 0, & \text{pe } \Omega_2 \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial u_2^{n+1}}{\partial n_2} = -\frac{\partial u_1^{n+1/2}}{\partial n_1}, & \text{pe } \Gamma. \end{cases} \Rightarrow \quad (3.197)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_{II}^2 & A_{I\Gamma}^2 \\ A_{\Gamma I}^2 & A_{\Gamma\Gamma}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{2,n+1} \\ \tilde{u}_\Gamma^{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_I^2 \\ f_\Gamma - A_{\Gamma I}^1 u_I^{1,n+1/2} - A_{\Gamma\Gamma}^1 u_\Gamma^n \end{pmatrix}.$$

- actualizează valorile de pe frontiera: $u_\Gamma^{n+1} = \theta \tilde{u}_\Gamma^{n+1} + (1 - \theta) u_\Gamma^n$ și reite-rează până la îndeplinirea criteriului de oprire.

Metoda iterativă Richardson pentru rezolvarea sistemului $Su_\Gamma = g_\Gamma$ folosește ecuația preconditionată $S^{2^{-1}}S = I + S^{2^{-1}}S^1$ ce corespunde sistemului $S^2 (u_\Gamma^{n+1} - u_\Gamma^n) = \theta (g_\Gamma - Su_\Gamma^n)$, obținut prin eliminarea variabilelor interne $u_I^{1,n+1/2}$ și $u_I^{2,n+1}$.

Algoritmul iterativ Schwarz N-N porneste tot de la inițializarea pentru $u_{\Gamma 0}$, dar are etapele:

- rezolva problema Dirichlet pe subdomeniile Ω_i , $i = 1, 2$ cu condiția inițială de frontieră și determină $u_i^{n+1/2}$, pentru $n = 0$:

$$(D_i) \begin{cases} -\Delta u_i^{n+1/2} = f, & \text{in } \Omega_i, \\ u_i^{n+1/2} = 0, & \text{pe } \Omega_i \setminus \Gamma, \\ u_i^{n+1/2} = u_\Gamma^n, & \text{pe } \Gamma, \end{cases} \Rightarrow A_{II}^i u_I^{i,n+1/2} + A_{I\Gamma}^i u_\Gamma^n = f_\Gamma^i \quad (3.198)$$

- rezolvă problema Neumann pe domeniile Ω_i cu condiții de frontieră sumate

și determină u_i^{n+1} :

$$(N_i) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_i^{n+1} = 0, & \text{in } \Omega_i, \\ u_i^{n+1} = 0, & \text{pe } \partial\Omega_i \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial n_i} = \frac{\partial u_1^{n+1/2}}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2^{n+1/2}}{\partial n_2}, & \text{pe } \Gamma. \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (3.199)$$

$$\Rightarrow (N_i) \begin{pmatrix} A_{II}^i & A_{I\Gamma}^i \\ A_{\Gamma I}^i & A_{\Gamma\Gamma}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I^{i,n+1} \\ u_\Gamma^{i,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_\Gamma \end{pmatrix}.$$

cu

$$r_\Gamma = \left(A_{\Gamma I}^1 u_I^{1,n+1/2} + A_{\Gamma\Gamma}^1 u_\Gamma^n - f_\Gamma^1 \right) + \left(A_{\Gamma I}^2 u_I^{2,n+1/2} + A_{\Gamma\Gamma}^2 u_\Gamma^n - f_\Gamma^2 \right). \quad (3.200)$$

- actualizează valorile de pe frontieră: $u_\Gamma^{n+1} = u_\Gamma^n - \theta (u_\Gamma^{1,n+1} + u_\Gamma^{2,n+1})$ și reiterează până la îndeplinirea criteriului de oprire.

Din problema Dirichlet se obține $r_\Gamma = -(g_\Gamma - Su_\Gamma^n)$, iar din problema Neumann:

$u_\Gamma^{i,n+1} = S^{i-1} r_\Gamma$, deci $u_\Gamma^{n+1} - u_\Gamma^n = \theta (S^{1-1} + S^{2-1}) (g_\Gamma - Su_\Gamma^n)$, ceea ce face

ca metoda Richardson să fie aplicată acum cu preconditionarea $(S^{1-1} + S^{2-1})$.

Considerând media ponderată a surselor problemelor Neumann, rezultă $u_\Gamma^{i,n+1} = u_\Gamma^n - \theta (\delta_1^\dagger u_\Gamma^{1,n+1} + \delta_2^\dagger u_\Gamma^{2,n+1})$, care corespunde matricei de preconditionare $D^1 S^{1-1} D^1 + D^2 S^{2-1} D^2$.

Ne putem imagina că cele două subdomenii sunt două elemente multipolare de circuit cuplate pe la borne, cu ecuațiile $\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_1$ și $\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_2 \mathbf{i}_2 + \mathbf{e}_2$. Condițiile Dirichlet corespund potențialelor bornelor iar condițiile Neumann, corespund curenților. Pentru acest circuit algoritmul D-N pornește de la o inițializare pentru potențialele terminalelor de interconexiune și parcurge etapele iterative:

- calculează curenții primului element $\mathbf{i}_1 = \mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{e}_1)$;
- calculează potențialele $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{R}_2 \mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_2$, datorate acestor curenți;
- actualizează valorile potențialelor terminalelor ca mediile ponderate $\mathbf{v} = \theta \mathbf{v}_2 + (1 - \theta) \mathbf{v}_1$ și reiterează, până la îndeplinirea criteriului de oprire.

În consecință la fiecare iterație se calculează $\mathbf{v} = \theta \mathbf{v}_2 + (1 - \theta) \mathbf{v}_1 = -\theta (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2) + (1 - \theta) \mathbf{v}_1$, care în final corespunde ecuației de punct fix $\mathbf{v} = -\theta (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1} (\mathbf{v} - \mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_2) + (1 - \theta) \mathbf{v}$. Constanta Lipschitz este $L = \|(1 - \theta)I - \theta \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^{-1}\|$. O astfel de procedură este convergentă doar dacă $L < 1$, și este mai rapid convergentă cu cât L este mai mic. De exemplu, în cazul dipolar, cu $\theta = 1/2$, condiția

devine $L = |1 - R_2/R_1|/2 < 1$, procedura fiind mai rapid convergentă cu cât R_1 este mai apropiat de R_2 , și este divergentă pentru $R_2 > 3R_1$. Valoarea optimă a coeficientului de relaxare este $\theta = 1/(1 + R_2/R_1)$.

Algoritmul N-N aplicat la rezolvarea iterativă a acestui circuit pornește de la o inițializare pentru potențialele terminalelor de interconexiune și parcurge etapele iterative:

- calculează curenții ambelor elemente $\mathbf{i}_1 = \mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_1)$, $\mathbf{i}_2 = \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_2)$;
- calculează potențialele ambelor elemente, când sunt alimentate cu suma curenților determinați anterior: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}_1(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) + \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_2(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) + \mathbf{e}_2$;
- actualizează valorile potențialelor terminalelor ca medii ponderate $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \theta(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ și reiterează până la îndeplinirea criteriului de oprire.

De această dată, ecuația de punct fix are forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v} - \theta(\mathbf{R}_1(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) + \mathbf{e}_1 + \mathbf{R}_2(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) + \mathbf{e}_2) = \\ \mathbf{v} &- \theta(\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_1) + \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_2)) + \mathbf{e}_1 + \mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_1) + \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_2)) + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{v} &- \theta(2\mathbf{v} + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_2) + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_1)) \end{aligned} \quad (3.201)$$

care are constanta Lipschitz $L = \|I - \theta(2I + \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1})\|$. Pentru $\theta = 1/2$, rezultă în cazul dipolar condiția de convergență $L = |\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2^{-1} + \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1^{-1}|/2 < 1 \Rightarrow L = (R_1/R_2 + R_2/R_1)/2 < 1$, deci procedura este divergentă. Valoarea optimă a factorului $\theta = 1/(2 + R_1/R_2 + R_2/R_1) < 1/4$, pentru care procedura este convergentă.

Metoda iterativă Schwarz pentru subdomenii suprapuse are următoarele etape:

- rezolvă problema Dirichlet pe subdomeniul Ω_1

$$(1) \begin{cases} -\Delta u^{n+1/2} = f, & \text{în } \Omega'_1, \\ u^{n+1/2} = u^n, & \text{pe } \partial\Omega'_1 \text{ și pe restul domeniului } \Omega. \end{cases} \quad (3.202)$$

- rezolvă problema Dirichlet pe subdomeniul Ω_2 cu condiții de frontieră determinate de pasul anterior

$$(2) \begin{cases} -\Delta u^{n+1} = f, & \text{în } \Omega'_1, \\ u^{n+1} = u^{n+1/2}, & \text{pe } \partial\Omega'_2 \text{ și pe restul domeniului } \Omega. \end{cases} \quad (3.203)$$

- reiterează până la îndeplinirea criteriului de oprire.

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 205

Acest algoritm, particularizat în cazul unui circuit conține rezistențe longitudinale, care leagă terminalele elementelor multipolare între ele, și care aparțin ambelor subcircuite. Ecuțiile lor sunt $v_1 - v_2 = R \cdot i_1 = -R \cdot i_2$. Ecuțiile subcircuitelor devin $\mathbf{v}' = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R})\mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}'' = (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R})\mathbf{i}_2 + \mathbf{e}_2$. Metoda iterativă parcurge etapele:

- calculează curenții primului element $\mathbf{i}_1 = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{v}' - \mathbf{e}_1)$ și potențialele $\mathbf{v}_2 = \mathbf{R}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_1$;
- calculează curenții din al doilea element $\mathbf{i}_2 = (\mathbf{R}_2 + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{e}_2)$ și potențialele $\mathbf{v}' = \mathbf{R}_2\mathbf{i}_2$;
- reiterează până la îndeplinirea criteriului de oprire.

De această dată, ecuația de punct fix are forma: $\mathbf{v} = \mathbf{R}_2\mathbf{i}_2 = \mathbf{R}_2((\mathbf{R}_2 + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{e}_2)) = \mathbf{R}_2((\mathbf{R}_2 + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{R}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)) = \mathbf{R}_2((\mathbf{R}_2 + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{R}_1((\mathbf{R}_1 + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_1)) + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2))$, cu constanta Lipschitz $L = \|\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_2 + \mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R})^{-1}\|$. În cazul dipolar, condiția de convergență este îndeplinită necondiționat, dacă $R > 0$, deoarece $L = |R_1R_2/(R + R_1)/(R + R_2)| = |R_1/(R + R_1)||R_2/(R + R_2)| < 1$.

Revenind la formularea variațională, dacă notăm cu $\Pi : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega'_i)$ proiecția ortogonală definită de $a(\Pi u, v) = a(u, v)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega'_i)$, atunci eroarea la iterația n se exprimă în funcție de cea de la pasul anterior astfel: $u^n - u = (I - P_2)(I - P_1)(u^{n-1} - u)$, cu operatorul de propagare a ei $P = (I - P_2)(I - P_1) = I - (P_1 + P_2 - P_1P_2)$, motiv pentru care algoritmul se numește Schwarz multiplicativ. Soluția satisface ecuația $P_mu = g$, în care $P_m = (P_1 + P_2 - P_1P_2)$. O alternativă este algoritmul Schwarz aditiv, în care soluția satisface ecuația $P_a u = g$, cu $P_a = (P_1 + P_2)$. Avantajul este că cele două etape ale fiecărei iterații se pot executa în paralel, și nu secvențial. Chiar dacă în varianta Richardson prezentată aici nu este garantată convergența, totuși convergența este obținută prin folosirea procedeelor iterative de tip Krylov (CG, în cazul matricelor simetrice și pozitiv definite) în locul iterațiilor Richardson.

3.7.2 Metoda Schwarz aditiva

Pot fi generalizate în cazul descompunerii domeniului Ω în $N > 2$ subdomenii următoarele variante:

- Neumann - Neumann (N-N): $S_{NN}^{-1}S = \sum_{i=1}^N D_i^T S^{i\dagger} D_i S$;
- Schwarz Multiplicativ: $P_{ms} = I - (I - P_N) \cdots (I - P_1)$;
- Schwarz Aditiv: $P_{as} = \sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N R_i^T A^{i-1} R_i A$.

Trebuie totuși să observăm că în abordarea cu un singur nivel, eroarea de metodă crește pe măsură ce numărul de subdomenii crește. După cum se va vedea mai jos, soluția găsită a fost să se utilizeze un al doilea nivel de discretizare. În acest fel se obțin pentru problemele eliptice algoritmi scalabili, care au o eroare independentă de N , lucru foarte important pentru robustețea abordării, mai ales în procesarea paralelă cu multe procesoare. În abordarea cu două nivele, pe lângă problemele fiecărui subdomeniu, rezolvate cu rețele fine de discretizare, se mai rezolvă problema globală, în care rețelele locale conțin foarte puține grade de libertate (nivelul doi - grosier de discretizare). Dacă se notează cu S_0 matricea de rigiditate a problemei globale și cu P_0 proiecția pe rețeaua grosieră, metodele multilevel au operatorii:

- Neumann - Neumann ponderat: $S_{NN}^{-1}S = S_0 + (I - S_0S) \left(\sum_{i=1}^N D_i^T S_i^\dagger D_i \right) (I - S_0S)$;
- Schwarz Multiplicativ: $P_{ms} = I - (I - P_N) \cdots (I - P_1)(I - P_0)$;
- Schwarz Aditiv: $P_{as} = \sum_{i=1}^N P_i = R_0^T A_0^{-1} R_0 A + \sum_{i=1}^N R_i^T A_i^{-1} R_i A$.

Pentru astfel de abordări s-a construit o teorie abstractă generală, numită ASM (*Additive Schwarz Method*), folosind spațiul finit dimensional global $V = V_0 + V_1 + \cdots + V_N$, al elementelor finite din Ω , descompus în subspațiile asociate celor N subdomenii. Pe lângă forma slabă a problemei din spațiul finit dimensional V : $a(u, v) = f(v) \forall v \in V$ se mai definesc operatorii de proiecție Π și funcționalele biliniare simetrice și pozitiv definite pe $V_i \times V_i \rightarrow \mathbb{R}$: $b_i(\Pi u, v) = a(u, v)$, cu $v \in V_i$. **Teorema fundamentală** a acestei teorii [125], [98], [133] are ipotezele:

- (Stabilitatea descompunerii): $\exists C_0$ a.î. $\forall v \in V$ admite descompunerea $u = \sum u_i$, $u_i \in V_i$, cu

$$\sum_{i=1}^N b_i(u_i, u_i) \leq C_0^2 a(u, u). \quad (3.204)$$

- (Forma întărită a inegalității Cauchy-Schwartz): $\exists \varepsilon_{ij} \in [0, 1]$, $i, j = 1, N$

$$a(u_i, u_j) \leq \varepsilon_{ij} a(u_i, u_i)^{1/2} a(u_j, u_j)^{1/2}, \quad u_i \in V_i, u_j \in V_j \quad (3.205)$$

- (Stabilitatea locală): $\exists \omega \geq 1$ a.î. pentru $i = 0, 1, \dots, N$

$$a(u_i, u_i) \leq \omega b_i(u_i, u_i), \quad u_i \in \text{Range}(P_i) \subset V_i. \quad (3.206)$$

și următoarea consecință:

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 207

- pentru varianta aditivă:

$$C_0^{-2} a(u, u) \leq a(P_{as} u, u) \leq \omega(\rho(E) + 1) a(u, u) \quad (3.207)$$

unde $\rho(E)$ este raza spectrală a matricei $E = (\varepsilon_{ij})$

- pentru varianta multiplicativă:

$$\|I - P_{ms}\|_a^2 \leq 1 - \frac{2 - \omega}{C_0^2 (2\hat{\omega}^2 \rho(E)^2 + 1)} \leq 1 \quad (3.208)$$

cu $\hat{\omega} = \max(1, \omega)$, consecință care garantează convergența procedurii iterative Schwarz.

Rata de convergență a procedurii iterative este direct corelată cu numărul de condiționare al matricii sistemului liniar. În procedura Schwarz aditivă, în care spațiul V_0 corespunzător rețelei grosiere a fost ales corespunzător, numărul de condiționare este

- $\text{cond}(P_{as}) \leq C \left(1 + \log \frac{H}{h}\right)^2$. pentru descompunerea disjunctă;
- $\text{cond}(P_{as}) \leq C \left(1 + \frac{H}{\delta}\right)$. pentru subdomenii suprapuse pe distanța δ .

S-a notat cu H diametrul maxim al subdomeniilor și cu h diametrul maxim al elementelor, iar cu δ lățimea benzii de suprapunere a subdomeniilor. Se constată că procedurile iterative de tip Schwarz sunt cu atât mai rapid convergente cu cât zona de suprapunere a subdomeniilor este mai amplă.

În [48] se prezintă aplicația metodei descompunerii în subdomenii, atât în varianta directă, cât și în cea iterativă, pentru modelarea unor dispozitive semiconductoare.

3.7.3 Algoritmul metodei Schwarz

Pentru a evidenția mai clar aspectele algoritmice ale metodei Schwarz, introducem:

- *operatorul de extensie* $u = E_i(\omega)$, care asociază funcției $\omega : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$, funcția $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, egală cu $\omega \in \Omega_i$ și nulă în rest;
- *operatorul de restricție* $\omega = R_i(u)$, care asociază funcției $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, funcția $\omega : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$, egală cu u pe Ω_i ;
- *partiția unității*, care este un set de funcții $h_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, a căror sumă este egală cu unu oriunde în Ω și h_i se anulează în afara domeniului Ω_i , iar în punctul $\mathbf{x} \in \Omega_i$, $h_i(\mathbf{x}) = 1/n$, unde n este numărul de subdomenii cărora aparține $\mathbf{x}$.

Următoarele două metode sunt folosite pentru a lega între ele, soluțiile u_i de pe cele N subdomenii într-o soluție globală:

- **ASM - Additive Schwarz Method:** $u := \sum_{i=1}^N E_i(u_i)$;
- **RAS - Restricted Additive Schwarz :** $u := \sum_{i=1}^N E_i(h_i u_i)$.

Prezentarea și înțelegerea ei se simplifică, dacă observăm că metoda Schwarz se poate reprezenta sub forma metodei bloc-Jacobi. În forma sa clasică, această metodă rezolvă sistemul de ecuații lineare $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, prin șirul de iterații:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{D}\mathbf{u}_k + (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}_k) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{u}_k) = \mathbf{u}_k + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.209)$$

unde $\mathbf{D}$ este diagonală matricei $\mathbf{A}$ iar $\mathbf{r}_k$ este reziduul de la iterația k . În forma bloc, se partiționează atât necunoscutele, cât și termenul liber în două grupuri $\mathcal{N}_1 : i = 1, \dots, n$ și $\mathcal{N}_2 = i = n + 1, \dots, m$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \quad (3.210)$$

care face ca matricea $\mathbf{A}$ și sistemul să capete forma bloc:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}; \quad (3.211)$$

pentru care metoda bloc-Jacobi este definită înlocuind matricea diagonală $\mathbf{D}$ cu matricea bloc diagonală

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{r}^k \end{aligned}$$

Relațiile pot fi aduse la o formă compactă, folosind matricele $\mathbf{R}_1$ de dimensiune $n \times m$ și $\mathbf{R}_2$ de dimensiune $(m - n) \times m$, restricționând indicile $i = 1 : n$, și respectiv $i = n + 1 : m$. $\mathbf{R}_1$ și $\mathbf{R}_2$ se obțin reținând n linii și respectiv restul liniilor din matricea unitate de dimensiune $m \times m$, care în cazul particular al indexării secvențiale este

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.212)$$

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 209

Transpusele acestor matrice sunt matricele de extensie de la (mulțimile de noduri) $\mathcal{N}_1$ la $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ și respectiv de la $\mathcal{N}_2$ la $\mathcal{N}$, astfel încât $\mathbf{A}_{ii} = \mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T$, iar iterațiile bloc Jacobi capătă forma compactă:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + (\mathbf{R}_1^T (\mathbf{R}_1 \mathbf{A} \mathbf{R}_1^T) \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2^T (\mathbf{R}_2 \mathbf{A} \mathbf{R}_2^T) \mathbf{R}_2)^{-1} \mathbf{r}_k, \quad (3.213)$$

cu $\mathbf{r}_k = \mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}_k$, care se poate extinde natural, în cazul mai multor partiții $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_N$ ale secvenței $1, \dots, m$.

Matricele $\mathbf{R}_i$ și $\mathbf{R}_i^T$ reprezintă forma discretă a operatorilor continui de restricție R și respectiv extensie E . Partiția unității se reprezintă prin N matrice diagonale $\mathbf{D}_i$, cu proprietatea că $\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{R}_i = \mathbf{I}$ - matricea identitate de dimensiune $m \times m$.

De exemplu, în cazul a doua domenii care se suprapun, reprezentat în Fig. 3.33, în care $N_1 = 1, 2, 3, 4$, $N_2 = 3, 4, 5$, aceste matrice sunt:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.214)$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.215)$$

Ele descriu complet felul în care a fost descompus setul de noduri în submulțimi cu noduri suprapuse.

Împărțirea în subdomenii, descrisă de partiția setului de indici $\mathcal{N}$, poate fi făcută

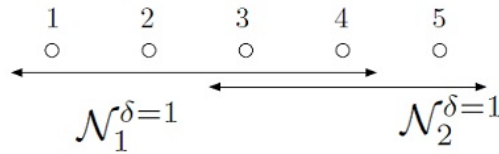


Figura 3.33: Indicii necunoscutelor, pentru doua domenii suprapuse [33]

folosind proceduri automate de *partiționarea grafurilor* (http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_partition), cum sunt METIS (<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>), (http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/c_src/metis/metis.html) sau SCOTCH (<http://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/>).

Acestea se pot aplica și unor grafuri puternic nestructurate, obiectivul lor este de a împărți graful de structură al matricei globale $\mathbf{A}$ într-un număr dorit de părți, urmărind:

- echilibrul între părți, încercând ca părțile să aibă un număr cât mai apropiat de noduri;
- numărul de legături pe care fiecare grup îl are cu celelalte să fie cât mai mic.

Deoarece fiecare parte va fi repartizată unui procesor, primul deziderat realizează echilibrul sarcinilor repartizate fiecărui procesor ("*load balancing*") iar al doilea deziderat minimizează comunicarea între procesoare ("*communication overhead*"). În Fig. (3.34 *a*) se reprezintă un exemplu de părți generate automat prin procedura de partiționare a grafurilor, părți care sunt disjuncte. Este evident că performanțele paralelizării rezolvării problemei cu derivate parțiale vor depinde în mod direct de performanțele partajării grafului de structură a matricei FEM. Dacă se dorește să se obțină o descompunere în domenii suprapuse, primul pas (pentru o suprapunere pe o bandă cu lățimea $\delta = 1$) se face pornind de la o descompunere nesuprapusă, extinzând apoi fiecare parte cu nodurile aflate în directă vecinătate a nodurilor inițiale (Fig. 3.34 *b*). Deoarece ecuațiile $\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i$ se

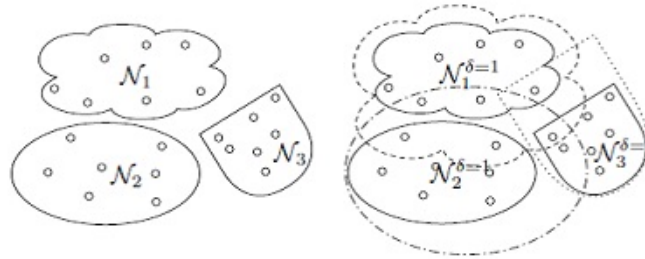


Figura 3.34: Descompunerea automată în subdomenii: *a.* nesuprapuse, *b.* suprapuse [33]

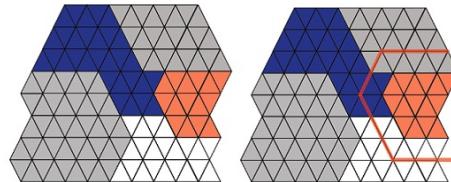


Figura 3.35: Descompunerea automata a unei rețele de elemente finite în subdomenii: *a.* nesuprapuse, *b.* suprapuse cu o banda unitara [33]

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 211

scriu:

$$\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i^T \mathbf{i}_i + \sum_{j \neq i} \mathbf{R}_i \mathbf{A} (\mathbf{I}_d - \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_i) \mathbf{R}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_i, \quad (3.216)$$

matricile bloc-diagonale inversate au expresiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ASM}^{-1} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T (\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i)^{-1} \mathbf{R}_i; \\ \mathbf{M}_{RAS}^{-1} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{D}_i^T (\mathbf{R}_i \mathbf{A} \mathbf{R}_i)^{-1} \mathbf{R}_i; \end{aligned} \quad (3.217)$$

iar iterațiile bloc-Jacobi se scriu: $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{M}_{RAS}^{-1} \mathbf{r}^n$, care sunt chiar iterațiile Schwarz, motiv pentru care procedura iteraivă de descompunere în subdomenii se mai numește și *metoda Jacobi-Schwarz* (JSM). Remarcăm că matricile bloc-diagonale pot fi "inversate" de fiecare procesor cu metode directe pentru matrice rare, ca de exemplu UMFPACK. Dacă se plasează variabilele interne ale fiecărui subdomeniu pe primele poziții iar pe ultimele poziții se plasează variabilele de pe interfață, atunci factorizarea LU incompletă (a părții din matrice corespunzătoare variabilelor interne), generează în partea nefactorizată chiar complementul Schur. În consecință, pentru a obține matricea de preconditionare, factorizarea incompletă trebuie efectuată doar la prima iterație, urmând ca la iterațiile următoare să se modifice doar termenul liber (reziduul) nu și matricea factorizată a sistemului. În final factori LU sunt folosiți la determinarea soluției în fiecare subdomeniu. Pentru soluționarea iterativă a fiecărui subdomeniu, cea mai eficientă metoda este preconditionarea multigrid [54].

În Fig. 3.36 este prezentat, printr-un exemplu, modul în care are loc convergența iterațiilor RAS, pentru diferite valori ale benzii de suprapunere, într-o problemă concretă. În schimb, așa cum s-a constatat anterior, iterațiile ASM nu sunt mereu convergente (pentru orice procedură iterativă), motiv pentru care metoda JSM este utilizată doar ca preconditionare a metodelor iterative de tip Krylov, de exemplu: CG, caz în care matricea bloc-Jacobi simetrică, este aplicată rezolvării sistemului $\mathbf{M}_{ASM}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{M}_{ASM}^{-1} \mathbf{f}$, în loc să fie aplicată sistemului $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}$. În Fig. 3.37 se prezintă algoritmul CG cu și fără preconditionare. GMRES se preconditionează de regulă cu RAS, care are matricea bloc-Jacobi asimetrică.

Chiar și așa, rezultatele nu sunt pe deplin satisfăcătoare, în primul rând pentru că nu sunt scalabile, pe măsura ce numărul de subdomenii/procesoare crește, efortul de calcul nu crește proporțional. Mai mult convergența nu este uniformă, la început are loc un palier cu viteză mică de convergență (Fig. 3.38). Stagnarea are ca motiv un număr de valori foarte mici în spectrul problemei preconditionate.

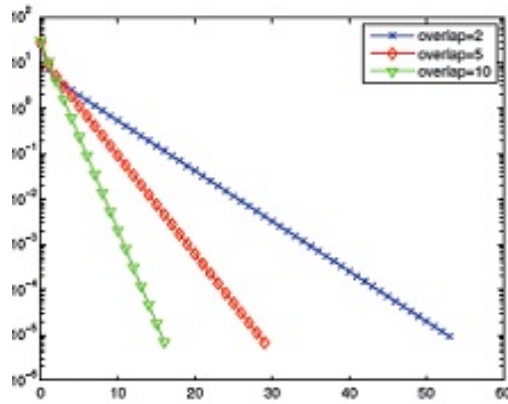


Figura 3.36: Convergența RAS pentru diferite suprapuneri [33]

<pre> for i = 1, 2, ... do $\rho_{i-1} = (r_{i-1}, r_{i-1})_2$ if i = 1 then $\rho_1 = r_0$ else $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ $\rho_i = r_{i-1} + \beta_{i-1} \rho_{i-1}$ end if $q_i = A p_{i-1}$ $\alpha_i = \frac{\rho_{i-1}}{(p_i, q_i)_2}$ $x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$ $r_i = r_{i-1} - \alpha_i q_i$ check convergence; continue if necessary end for </pre>	<pre> for i = 1, 2, ... do $\rho_{i-1} = (r_{i-1}, M_{ASM}^{-1} r_{i-1})_2$ if i = 1 then $\rho_1 = M_{ASM}^{-1} r_0$ else $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ $\rho_i = M_{ASM}^{-1} r_{i-1} + \beta_{i-1} \rho_{i-1}$ end if $q_i = A p_{i-1}$ $\alpha_i = \frac{\rho_{i-1}}{(p_i, q_i)_2}$ $x_i = x_{i-1} + \alpha_i p_i$ $r_i = r_{i-1} - \alpha_i q_i$ check convergence; continue end for </pre>
--	--

Figura 3.37: Algoritmul CG, fără și cu preconditionare

Acestea apar datorită schimbului incomplet de informații între subdomeniile problemei globale. În schimb, soluția unui subdomeniu depinde de termenii liberi ai celorlalte subdomenii, dar acest lucru nu este descris deloc, în mod corect de AMS, care separă total subdomeniile. Remediul constă în introducerea unei rețele globale, grosiere de discretizare, care leagă soluțiile din subdomenii de termenii liberi din toate subdomeniile, cuplând astfel toate subproblemele între ele. Lucrul cu două nivele de rețele este reprezentat algebric de matricea de iterație bloc-Jacobi "pe două nivele":

$$M_{ASM,2}^{-1} = R_0^T (R_0 A R_0^T)^{-1} R_0 + \sum_{i=1}^N R_i^T A_i^{-1} R_i; \quad (3.218)$$

3.7. DESCOMPUNEREA ÎN SUBDOMENII. REZOLVĂRI ITERATIVE ÎN PARALEL 213

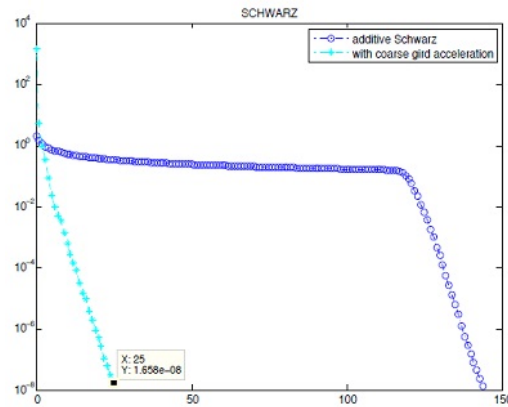


Figura 3.38: Convergența ASM cu și fără rețea grosieră [33]

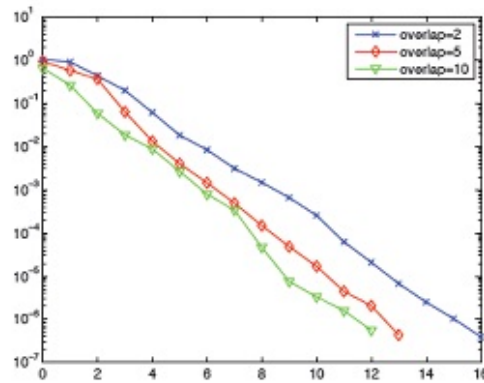


Figura 3.39: Convergența iteratiilor CG preconditionat ASM cu rețea grosieră [33]

în care $\mathbf{R}_0 = \mathbf{Z}^T$, cu $\mathbf{Z}$ baza spațiului grosier. O metodă de generare automată a rețelei grosiere este prezentată în [33].

Efectul acestei abordări este surprinzător de bun, deoarece conform Fig. 3.38 dispăre palierul, convergența devenind rapidă și uniformă, iar în plus, ca un bonus surprinzător, ea nu mai este sensibilă la gardul de suprapunere al subdomeniilor (Fig. 3.39). Se obțin rezultate bune, chiar dacă rețeaua grosieră conține doar 2-3 noduri în interiorul fiecărui subdomeniu. Performanța metodei cu două nivele este demonstrată atât practic, cât și teoretic [33], [75], cum rezultă din Tabelul

Precondiționare	$\kappa(B^{-1}A)$	2D iter.	3D iter.
Jacobi punctual	$O(h^{-2})$	$O(n^{1/2})$	$O(n^{1/3})$
Jacobi pe domenii	$O((hH)^{-1})$	$O((nP)^{1/4})$	$O((nP)^{1/6})$
Schwarz aditiv cu un nivel	$O((H)^{-2})$	$O(n^{3/2})$	$O(n^2)$
Schwarz aditiv cu două nivele	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$

Tabela 3.3: Complexitatea metodelor iterative [33]

3.3 în care s-a notat cu h diametrul maxim al elementelor finite, cu H diametrul maxim al subdomeniilor, cu n numărul de grade de libertate și cu P numărul de procesoare. Se constată progresul extraordinar făcut față de metodele directe de rezolvarea aceluiași sistem, Tabelul 3.2.

Un program de elemente finite, bazat pe descompunerea în subdomenii este FreeFem++ (<http://www.freefem.org/ff++/>), (<http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>). Un mediu de programare paralelă dedicat problemelor de descompunere în domenii este PETSc (<http://www.mcs.anl.gov/petsc/petsc.html>), descris în [116]. Proiecte referitoare la metoda Schwarz, dezvoltate în MATLAB sunt disponibile la: (http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=73) (http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=235).

Concluziile referitoare la diferitele tehnici de rezolvare a problemelor de mari dimensiuni sunt prezentate în Tabelul (3.4). În [46] se prezintă paralelizarea cal-

Tehnica	Avantaje	Dezavantaje
Rezolvarea directă	Robustețe	Paralelizare dificilă, necesar mare de memorie
Rezolvare iterativă	Paralelizare facilă, memorie necesară redusă	Lipsa de robustețe (convergența nesigură sau lentă)
Descompunerea în domenii DD	Paralelizare naturală	Puține implementări, puține biblioteci și rutine disponibile
Multigrid [54]	Rapiditate	Dificil de paralelizat, lipsa de robustețe (nu se aplică la ecuații Helmholtz complexe)

Tabela 3.4: Tehnici pentru rezolvarea problemelor de mari dimensiuni [33]

culelor în rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell, folosind descompunerea în subdomenii cu precondiționări multigrid. Deoarece problemele ingineresti reale sunt complexe, de mari dimensiuni, evolutive, multi-nivel, neliniare, rezolvarea lor cu metode adecvate impune folosirea tehnicilor *Newton-Krylov-Schwarz* (NKS), care din acest motiv sunt pe drumul principal al dezvoltării cercetării științifice actuale în modelarea electromagnetică și multifizică [76] [75]. În problemele de mari dimensiuni se folosesc metode de tip pseudo-Newton, în care matricea jacobian nu este calculat la fiecare iterație. Dacă jacobianul se calculează doar la prima itera-

ție, metoda devine una de punct fix. În final, algoritmul de rezolvare NKS are trei cicluri principale incluse unul în altul: cel exterior al iterațiilor neliniare (Newton), unul de rezolvare iterativă a problemei globale (Krylov) și altul pentru rezolvarea iterativă a fiecărei probleme din subdomenii (Schwarz). Dacă problema este de regim tranzitoriu, atunci un al patrulea ciclu de integrare numerică în timp le cuprinde pe toate celelalte trei.

3.8 Intrebari privind modelarea numerica FEM

1. Care formă a ecuațiilor câmpului este discretizată în metoda elementelor finite: locală, globală, integrală, slabă? Care soluție se află într-un spațiu finit/infinit dimensional, cea exactă/numerică? Care este parametrul de care depinde dimensiunea spațiului soluției numerice? Care este expresia generală a soluției numerice? Cum se numesc funcțiile variabile în spațiu din această expresie? Dar coeficienții lor? Care sunt principalele caracteristici ale metodei elementului finit? Care sunt cele trei componente ale unui element finit? Ce fel de sistem de ecuații rezultă prin substituția formei generale a soluției numerice în forma slabă a ecuației care se rezolvă? De ce este rară matricea acestui sistem? Dar de ce este simetrică și pozitiv definită? Ce înseamnă că este pozitiv definită și ce implicații are acest lucru.
2. Ce proprietate definitorie are o rețea conformă? Ce condiții îndeplinește o rețea conformă? Care este principalul avantaj al elementelor finite conforme? De ce problema formulată după discretizarea cu elemente finite este bine formulată? În afara de buna formulare, ce condiție esențială trebuie să îndeplinească o soluție numerică, pentru a fi utilă? Ce importanță are lema lui Céa pentru soluția FEM? Care sunt ipotezele ei? De ce spunem că soluția FEM este pseudo-optimală? Când ar fi optimală? Ce este norma energetică? De ce spunem că soluția FEM este optimală în norma energetică? Cum se exprimă condiția fundamentală, de proiecție Galerkin? Ce înțelegem prin elemente finite liniare? Cum este câmpul, în FEM liniar? Cum depinde eroarea soluției numerice de parametrul h al triangulației în cazul liniar? Dar în cazul unor polinoame de grad mai înalt? Ce caracter are măsura erorii, local sau global? Ce spune teorema energiei erorii? Ce înseamnă DG? Care sunt dezavantajele și avantajele MEF Galerkin discontinue?
3. Cum se modelează cu FEM problemele din întreg spațiul fizic? Ce este o frontieră deschisă și ce formă are ea? Ce este BEM? Cum se cuplează FEM cu BEM? Ce înțelegem printr-o condiție de frontieră de tip Robin? Ce

înțelegem prin strat de frontieră? Care este principiul metodei elementelor finite înfinite?

4. Ce este elementul de referință și ce forme are acesta? Ce proprietăți are transformarea care duce elementul de referință în cel fizic? Care este avantajul major al transformării affine a elementului de referință, din punctul de vedere al expresiei soluției numerice? Câte transformări conforme sunt definite într-o problemă cu N elemente finite? Câte elemente de referință are o astfel de problemă? Cum se definește parametrul h în funcție de transformarea conformă? Ce înțelegem prin triangulație: uniformă, qvasi-uniformă, nedegenerată, regulată?
5. Cum se definesc coordonatele baricentrice ale unui triunghi? Dar ale unui tetraedru? Care este numărul lor? Ce valoare are suma coordonatelor baricentrice? Cum se exprimă coordonatele baricentrice ale triunghiului/tetraedrului de referință față de coordonatele carteziane? Care este expresia transformării conforme affine în cazul elementelor triunghiulare/tetraedrale? În ce condiții matricea jacobian a acestei transformări este nesingulară?
6. Cum se numesc, în mod traditional, matricele sistemelor liniare obținute cu FEM și termenii liberi ai acestor sisteme? Care este cea mai simplă expresie a funcțiilor de bază, în funcție de coordonatele baricentrice? Cum arată graficele funcțiilor de forma definite astfel, în cazul 2D? Care este suportul lor? Sunt ele funcții continue? Dar gradientul lor (intensitatea câmpului) este continuu? Care este contribuția elementului K la matricea de rigiditate, de masă și la vectorul sarcinilor (surselor)? Cum se exprimă aceste contribuții în cazul elementelor finite triunghiulare liniare (folosind sau nu elementul de referință)? Dar în rețelele tetraedrale 3D? Cum se assemblează contribuțiile elementelor la matricea globală? Cum intervin condițiile de frontieră de tip Neumann nule/nenule și Dirichlet nule/nenule în sistemul liniar generat de FEM? Explicați de ce matricea sistemului este rară. Care este numărul de elemente nenule din matricea sistemului? Cum sunt acestea distribuite? Câte instrucțiuni MATLAB are un program minimal FEM pentru ecuația Poisson 2D? Câte programe FEM scrise de alții ați citi și înțeles? Cum se assemblează cel mai eficient în MATLAB matricea de rigiditate, ținând cont de raritatea ei? Ați scris vre-un program FEM, oricât de simplu ar fi acesta? Ce funcții îndeplinea?
7. În ce regimuri ale câmpului electromagnetic, forma slabă a ecuațiilor conține produsul *grad-grad* și în ce regimuri intervine produsul *rot-rot*? Ce efecte nedorite apar dacă ecuațiile vectoriale (*rot-rot*) sunt rezolvate cu elemente finite nodale? Ce înseamnă poluare spectrală, moduri parazite, "spu-

rious modes"? Ce soluție cunoașteți pentru a le elimina? Ce înțelegem prin elemente de muchie? Cum se exprimă soluția numerică vectorială, folosind elementele de muchie? Care sunt gradele de libertate în acest caz? De ce sunt elementele de muchie rot-conforme? Care este expresia, elementelor de muchie Whitney, în funcție de coordonatele baricentrice? Cum arată spectrul câmpului acestor elemente? Ce știți despre rotorul lor? Dar despre divergența lor? Ce proprietăți au funcțiile de formă globale definite cu aceste elemente? Care este suportul lor în 2D? Dar în 3D?

8. Cum se definesc elementele de muchie Nédélec (N) de prima și a doua speță? Câte astfel de elemente independente sunt în 2D? Dar în 3D? Cum se definesc elementele de față Raviart-Thomas (RT)? Dar elementele de față Brezzi-Douglas-Marini (BDM)? Câte elemente de față independente are fiecare trunchi/tetraedru? Care sunt gradele de libertate în cazul elementelor de față? Care din aceste funcții de forma nodale, de muchie, de față sunt rot-conforme și care sunt div-conforme? Cum arată secvența de Rham a spațiilor discrete (de dimensiune finită) din FEM? Ce înseamnă că această secvență este exactă? Dar în cazul unui element tetraedral, cu funcții de bază de grad minim? Câte grade de libertate are fiecare element și care sunt acestea? Cum arată secvențele de Rham în cazul 2D? De ce sunt două astfel de secvențe? Cum arată secvențele de Rham în cazul elementelor de ordin doi în 2D și 3D?
9. Cum arată contribuțiile elementelor (fizice și în funcție de cel de referință) vectoriale la matricele de rigiditate, de masă și la termenul liber? Cum se assemblează aceste contribuții pentru a obține matricea globală? Care este deosebirea față de cazul scalar? Sunt aceste matrice simetrice? Dar pozitiv definite? Ce este o matrice pozitiv semidefinită? Cum se simplifică expresia acestor contribuții în cazul 2D: triunghiuri cu elemente de muchie de grad minim? Ce semnificație are determinantul matricei jacobian a transformării conforme (afine)? De ce problemele de câmp magnetic staționar 2D se pot rezolva cu metoda FEM "scalară", folosind elemente nodale? Ce înseamnă soluții complementare pentru o problemă de câmp 2D în regim staționar? Cum le puteți calcula?
10. Care sunt principalii parametri de performanță ai unei metode numerice cum este FEM? Cum se măsoară acuratețea unei soluții numerice FEM, și care sunt dificultățile acestei măsurători? Ce înțelegem prin estimarea apriori și aposteriori a erorii? Care este diferența dintre un indicator și un estimator de eroare? Cum se măsoară costul necesar obținerii soluției numerice? Care este cel mai important parametru al FEM, pentru a indica nivelul costului? Cunoașteți și alți parametri de performanță? De ce este

important gradul de raritate al matricei de rigiditate? De ce este important numărul de condiționare al acestei matrice? Depinde oare numărul de condiționare de forma elementelor? Dar de alegerea funcțiilor de formă? Ce înțelegem prin calitatea unei rețele de discretizare? Cum se definește rata de convergență a FEM și de ce este important acest parametru? Ce înseamnă ordinul de convergență al FEM? Cât sunt ordinul de convergență și rata de convergență ideale, în cazul elementelor liniare 2D și 3D? Dar în cazul elementelor de grad p ? Ce limitează folosirea elementelor de grad înalt?

11. Ce înseamnă un algoritm FEM auto-adaptiv (AMR, AFEM)? Care este importanța indicatorilor de eroare în acești algoritmi? Descrieți o metodă de estimare a erorii, care poate fi baza unui indicator de eroare. Ce efect are folosirea algoritmilor auto-adaptivi asupra ratei de convergență? Dați exemple de probleme a căror soluție se îmbunătățește radical prin folosirea rețelelor auto-adaptive. Ce este metoda multigrid? Ce înțelegeți prin netezirea soluției? Care sunt operatorii de transfer? De ce metoda multigrid nu este eficientă în cazul ecuațiilor Helmholtz complexe? Ce este o metoda iterativă de tip Krylov? Ce înseamnă CG? Cum se preconditionează o metodă iterativă și ce efect are aceasta operație?
12. Cum se construiesc funcțiile de bază, cu polinoame de grad superior în 2D și în 3D? Cum se exprimă aceste funcții față de coordonatele baricentrice? Ce sunt polinoamele Lagrange? Ce este o familie ierarhică de funcții de bază scalare, nodale? Care sunt gradele de libertate în cazul funcțiilor de bază de grad superior? Unde sunt plasate nodurile în triunghi/tetraedru? Câte grade de libertate și câte noduri are o funcție de bază de grad înalt? Ce putem spune despre continuitatea funcțiilor de formă scalare de grad înalt? Cum se construiesc bazele vectoriale ale elementelor de muchie (rot-conforme) de ordin înalt, prin similitudine cu cele scalare? Câte funcții de bază are o familie ierarhică pe nivelul de ordin p ? Care sunt gradele corespunzătoare de libertate? Cum se construiește sistematic familia ierarhică de bazele vectoriale ale elementelor 2D patrulate, de ordin înalt, folosind secvența de Rham? Cum se transformă această familie pentru cazul elementelor triunghiulare, folosind transformarea Duffy? Cum se extinde această construcție în cazul 3D? Cum se transformă funcțiile de bază de pe elementul de referință pentru a genera funcțiile de formă, definite pe întreaga rețea de elemente fizice? Ce importanță are comutativitatea complexului de Rham, a diagramei construită cu secvențele de Rham continue și discrete? Cum definim operatorii de proiecție de la spațiile continue la cele FEM discrete? Ce estimări cunoașteți pentru eroarea de interpolare? Ce este o "crimă variațională"? Când se comit în FEM crime variaționale, și cât de grave sunt

acestea?

13. Ce este rafinarea hp ? Ce fel de convergență au abordările hp ? Ce sunt algoritmi super-convergenți? Care sunt dificultățile algoritmilor hp ? Ce ar trebui să urmărească o strategie de rafinare hp ? Indicați câteva proiecte de hp -FEM.
14. De unde provine neliniaritatea în ecuațiile câmpului electromagnetic? Dați exemple de materiale neliniare din punct de vedere dielectric, magnetic și conductiv. Care sunt neliniaritățile, care intervin cel mai frecvent în practica modelării electromagnetice? Ce neliniarități intervin în modelarea dispozitivelor semiconductoare? Ce este modelul de transport, folosit în modelarea dispozitivelor semiconductoare și de câte feluri este acesta? Enumerați modelele folosite în calculul câmpului pentru materialele feromagnetice. Pentru ce este folosit modelul afin de magnetizare? Care este modelul precis cel mai des folosit pentru fenomenul de histerezis magnetic? Descrieți cel mai simplu model de histerezis magnetic. Care sunt ecuațiile regimului magnetic staționar, pentru probleme cu domenii feromagnetice moi, izotrope? Cum se formulează problema fundamentală de analiză a câmpului magnetic în acest regim, cu și fără etalonare? Care sunt condițiile de frontieră pentru a asigura unicitatea soluției? Care este forma slabă a acestei probleme? Cum se simplifică lucrurile în cazul 2D? Cum se extinde teorema Lax-Millgram în cazul neliniar (teorema Zarantonello)? Care din condițiile puternic-monoton/lipschitzian din cazul neliniar corespund condițiilor marginit/coerciv din cazul liniar? În ce condiții pentru caracteristica de magnetizare $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$, problema de analiză câmpului magnetic staționar este corect formulată? Care este expresia funcționalei de energie, care este minimizată de soluția probleme fundamentale, de analiză a câmpului din regimului magnetic staționar 2D/3D, în medii neliniare? Care este expresia contribuției fiecărui element finit la sistemul de ecuații FEM? Ce natură au aceste ecuații? Ce puteți spune despre convergența soluției FEM către soluția exactă, în cazul neliniar? Ce efect au erorile integrării numerice pe element asupra erorii soluției numerice?
15. Care sunt cele mai importante metode de rezolvare iterativă a sistemului de ecuații neliniare, generat de discretizarea cu FEM? Ce știți despre convergența celor două metode? Dar despre viteza lor de convergență? Cum poate fi sporită performanța metodelor iterative de rezolvare: robustețea (convergența în condiții cat mai largi, pentru inițializare) și sporirea vitezei de convergență? Care este principiul metodei punctului fix al polarizației? Care este condiția de convergență a metodei Picard-Banch a punctului fix, în cazul general, abstract, conform teoremei de punct fix a lui Banach? Cum

arată ecuația de punct fix satisfăcută de polarizația magnetică, în cazul metodei punctului fix? Ce surse și ce constante de material are problema de câmp liniară, care trebuie rezolvată la fiecare iterație? Cum se modifică matricea sistemului FEM de la o iterație la alta? Cum se calculează polarizația magnetică pentru iterația următoare? În ce condiții impuse caracteristicii de magnetizare metoda punctului fix al polarizației este convergentă? Care este valoarea optimă a permeabilității de calcul? De ce este neexpansivă aplicația care dă inducția magnetică din domeniul de calcul, în funcție de polarizația magnetică, sursă de câmp? Ce criteriu se poate folosi pentru oprirea iterațiilor? Care sunt avantajele metodei punctului fix al polarizației? Ce erori pot duce la pierderea convergenței acestui algoritm iterativ? Care este principiul metodei duale, a punctului fix al magnetizației? Prin ce se deosebesc cele două metode de punct fix?

16. Care este principiul metodei Newton de rezolvare iterativă a sistemului neliniar obținut prin discretizare FEM? Ce structură are matricea jacobian, a sistemului liniar, care se rezolvă la fiecare iterație? Cum se calculează contribuția elementelor la matricea de rigiditate dinamică, a sistemului liniarizat? Care este cea mai bună variabilă în care este bine să fie exprimată caracteristica de magnetizare? Cum se calculează termenul liber? Ce semnificație are soluția sistemului liniar rezolvat la fiecare iterație? Care este criteriul de oprire a iterațiilor? Cum se exprimă constantele de mărginire și coercitivitate ale problemei FEM discrete, în funcție de parametrii caracteristicii de magnetizare? Ce relevanță au acestea pentru soluționarea numerică? Cât este rata de convergență a metodei Newton în apropierea soluției?
17. Care sunt regimurile câmpului electromagnetic, în care intervin ecuații evolutive? Care sunt categoriile de probleme de analiză a câmpului electromagnetic variabil în timp? Comparați analiza în domeniul timpului cu analiza în domeniul frecvenței. Ce este regimul armonic în timp al câmpului? Poate exista regim armonic în medii neliniare? Cum se modifică ecuațiile câmpului, în urma reprezentării lor în complex? Sunt ecuațiile reprezentate în complex evolutive sau sunt permanente? De ce tip sunt ecuațiile de ordinul doi reprezentate în complex? Se poate aplica analiza în domeniul frecvenței la analiza regimului tranzitoriu al câmpului electromagnetic? Dar la analiza în regim periodic permanent, nesinusoidal? Cum se realizează aceste analize? Ce se întâmplă cu condițiile inițiale în aceste cazuri? Cum se rezolvă problemele din domenii nemărginite cu FEM? Ce înseamnă condiții absorbante de frontieră? Dar condiții de tip PML (cu strat absorbant adaptat)? Cum se cuplează metoda FEM cu metoda momentelor MOM? Ce înseamnă

EFIE? Cum arată forma slabă a ecuației Helmholtz în complex, pentru intensitatea câmpului electric în regim general variabil? Care sunt condițiile de frontieră naturale și cele esențiale în acest caz? Cum arată ecuația Helmholtz, după discretizarea FEM? Cum arată ecuațiile regimului MQS cu potențialele A-V, după reprezentarea în complex? Cum se modifică aceste ecuații prin adăugarea termenului penalizator, pentru a impune potențialului magnetic vector condiția de etalonare Coulomb? Care este avantajul acestei formulări? Care este forma ei slabă și cea discretă? Cum se rezolvă problemele MQS, fără etalonarea potențialului vector? Ce formă trebuie să aibă sursa de câmp (curentul impus)? Care este forma ei slabă și cea discretă? Care este avantajul acestei formulări?

18. Cum se formulează problema frecvențelor și modurilor proprii de rezonanță pentru ecuațiile lui Maxwell în domenii marginite fără pierderi? Care sunt condițiile de frontieră? Care este forma slabă, variațională a ecuațiilor satisfăcute de câmpul electric? Dar forma discretă obținută cu FEM? Cum se assemblează matricele de rigiditate și de masă? De ce, în acest caz, matricea de rigiditate este pozitiv semidefinită? Ce dificultăți întâmpină metodele clasice, algebrice la determinarea valorilor și vectorilor proprii? Cum pot fi depășite aceste dificultăți? Prin ce metodă se poate spori precizia rezolvării problemei?
19. În ce regimuri ale câmpului electromagnetic intervin probleme tranzitorii? Cum se formulează corect aceste probleme? Ce condiții suplimentare, față de cazul staționar intervin în aceste formulări, pentru a asigura unicitatea? De ce natură sunt ecuațiile de ordinul doi ale regimului MQS și respectiv ED? Care sunt deosebirile dintre difuzia și propagarea câmpului electromagnetic? Care este forma slabă și cea discretă a ecuațiilor câmpului în regim tranzitoriu? În ce fel de ecuații se transformă forma slabă în urma discretizării FEM? Cum se discretizează în timp ecuațiile diferențiale ordinare obținute în urma discretizării spațiale cu FEM? Care sunt metodele de aproximare numerică a derivatelor față de timp, în cazul regimurilor ED și respectiv MQS? Câte condiții inițiale avem în primul caz, și câte în al doilea? Ce condiții trebuie să îndeplinească pasul de timp pentru ca metoda de integrare numerică în timp să fie stabilă? Ce modificări introduc metodele Newmark și Crank-Nicholson, pentru a genera scheme necondiționat stabile? Cum sunt metodele Euler, implicite sau explicite? Ce nume poartă cele trei matrice care intervin în forma discretă a ecuațiilor câmpului, în regim general variabil cu pierderi? Care din aceste motive se anulează în regimurile MQS și respectiv EDP?
20. Care sunt metodele de analiză a câmpului electromagnetic în medii nelini-

are, în regim periodic permanent nesinusoidal? Comparați rezolvarea acestei probleme în domeniul timpului, cu cea în domeniul frecvenței. Care abordare cere un efort de calcul mai mare? Ce metode iterative de analiză a neliniarității se pot aplica în cele două cazuri? Care este principiul metodei punctului fix, aplicată la rezolvarea problemei magneto-staționare neliniare în domeniul frecvenței? Cum arată caracteristica histeronului elementar? Câți parametri are un astfel de histeron? Care este expresia relație intrare-ieșire în modelul Preisch? Cum arată relația intrare-ieșire în modelul Everett? Care sunt etapele rezolvării unei probleme de câmp magneto-staționar, în medii cu histerezis, în care curentul variază periodic în timp, prin metoda punctului fix al magnetizației/polarizației? Ce fel de model de histerezis direct/invers se folosește în fiecare caz? De câte ori se rezolvă problema liniară de câmp? De câte ori se factorizează matricea sistemului liniar, generat de FEM? Câte sferturi de perioadă trebuie simulate pentru a parcurge ciclul major de histerezis? De câte ori se trece prin modelul de histerezis, pe parcursul unei iterații neliniare, în fiecare element? Ce criteriu de oprire se poate folosi pentru iterațiile neliniare de punct fix, care au loc la fiecare pas de timp? Realizați un sumar al cunoștințelor despre MEF aplicată la câmpul electromagnetic în diferite regimuri, indicând: Forma tare a ecuațiilor, Condițiile de frontieră, Forma slabă a ecuațiilor, Spațiul soluției, Forma discretă a ecuațiilor, Funcțiile de formă, Gradele de libertate, Matricele de rigiditate, masa, atenuare, Vectorul sarcinilor și Funcționala energetică.

21. Ce este metoda DD (descompunerea în subdomenii) și care este principiul informatic, care stă la baza ei? Pentru ce este utilă aceasta metodă? Unde se află pe net cele mai importante resurse referitoare la DD? Care sunt ideile de bază ale metodei DD? Care sunt performanțele și limitările metodelor directe de rezolvare a sistemelor de ecuații algebrice liniare cu matrice rare? Care este structura bloc a matricei de rigiditate, după descompunerea domeniului de calcul în două subdomenii? Cum se poate rezolva problema prin metode directe, calculând cei doi compelenți Schur, apoi valorile soluției de pe interfață, și în final soluțiile în subdomenii? Cum se poate generaliza această abordare pentru un număr mai mare de subdomenii, alocate fiecare câte unui procesor? Ce calcule efectuează fiecare procesor? Cum se determină valorile de pe interfețele dintre subdomenii, prin metode directe și respectiv iterative? Câte feluri de abordări iterative Schwarz se pot identifica, în cazul descompunerii în două subdomenii, care nu se suprapun? Care dintre acestea se poate generaliza în mod natural, pentru mai multe subdomenii? Descrieți etapele abordărilor iterative D-D, D-N, N-D și N-N. Cum arată ecuațiile unei iterații Richardson, în forma lor continuă, și în forma lor discretă-matriceală? Ce formă capătă aceste relații în cazul similitudinii

electrocinetice, în care fiecare subdomeniu este un multipol liniar și activ? Care sunt condițiile de convergență, în cazul în care elementele multipolare degenerază în elemente dipolare? Care sunt etapele iterative ale metodei Schwartz-Richardson pentru cazul descompunerii în două subdomenii, care se suprapun? Care este forma acestor iterații în similitudinea electrocinețică, în care subdomeniile sunt elemente multipolare de circuit, cu un număr de terminale egal cu numărul de noduri de pe interfață? Dar în cazul degenerat, al elementelor dipolare de circuit electric? Ce înțelegem prin metoda Schwarz multiplicativă și prin cea aditivă? Cum se generalizează metodele Neuman-Neuman, Schwarz multiplicativ și aditiv în cazul unui număr mai mare de subdomenii? Care este avantajul metodei Schwarz aditive față de varianta multiplicativă? Care sunt condițiile de convergență ale iterațiilor metodei Schwarz abstracte? De cine depinde numărul de condiționare al matricelor acestor metode, în cazul subdomeniilor disjuncte și respectiv suprapuse? Cum se definesc operatorii de restricție, extindere și funcțiile pentru partiția unității? Dar formele lor discrete - matriceale? Care este relația dintre metoda Schwarz și metoda iterativă bloc- Jacobi? Ce înseamnă ASM? Dar RAS? Care sunt relațiile de asamblare a soluției globale în cele două cazuri? Ce este o procedură automată de partiționare a unui graf? Dați exemple de astfel de proceduri. Care sunt cele două obiective ale unei proceduri eficiente de partiționare a grafurilor, și care sunt justificările lor? Cum se obțin descompunerile în domenii suprapuse cu o bandă de lățime δ ? Cum se scriu matricele de preconditionare în metodele ASM și RAS? Cum se modifică algoritmul GC, când se aplică preconditionarea ASM? Care este remediul pentru a îmbunătăți convergența metodelor iterative de tip Krylov cu preconditionare Schwarz? Care este expresia matricei de iterație bloc-Jacobi "pe două nivele"? Care este avantajul folosirii unei rețele suplimentare grosieră, globală? Care este ordinul de complexitate al metodei ASM iterative, cu un nivel, și cu două nivele? Cât de mare este câștigul metodelor iterative Krylov-Schwarz, față de metodele directe de rezolvare? Care sunt avantajele și dezavantajele diferitelor tehnici de rezolvare: directe, iterative, descompunere în subdomenii, multigrid? Ce înseamnă NKS? La ce fel de metode se aplică tehnicile Newton-Krylov-Schwarz? Dați exemple de medii software, biblioteci și programe utile pentru dezvoltarea aplicațiilor și tehnicilor proprii de modelare electromagnetică, bazate pe FEM. Dezvoltați și apoi implementați algoritmul NKS pentru rezolvarea unei probleme de câmp electromagnetic, refolosind cât mai multe funcții disponibile în domeniul public. Scrieți o lucrare despre experiența câpătată în rezolvarea acestei probleme.

Bibliografie

- [1]
- [2] Jochen Albrety, Carsten Carstensen, and Stefan A. Funken. Remarks around 50 lines of matlab: short finite element implementation. *Numerical Algorithms*, 20(2):117–137, 1999.
- [3] Neculai Andrei. *Modele matematice în mecanică*. Research Institute for Informatics, Center for Advanced Modeling and Optimization, <http://camo.ici.ro/neculai/n29a09.pdf>.
- [4] I. Babuska. The finite element method for infinite domains. " *Mathematics of Computation* ", 26(117):1–11, Jan. 1972.
- [5] C. Bahriawati and C. Carstensen. Three matlab implementations of the lowest-order raviart-thomas mfem with a posteriori error control, computational methods in applied mathematics. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 5(4):333–361, 2005.
- [6] Ramon Bargallo. Finite elements for electrical engineering. *UPC Spain*, 2006.
- [7] Larisa Beilina. *The Lax-Milgram Theorem*. <http://jones.math.unibas.ch/~beilina/CDE/Lectures/Lecture5.pdf><http://jones.math.unibas.ch/~beilina/CDE/Lectures/Lecture5.pdf>.
- [8] Larisa Beilina. *The Lax-Milgram Theorem*. <http://jones.math.unibas.ch/~beilina/CDE/Lectures><http://jones.math.unibas.ch/~beilina/CDE/Lectures>.
- [9] Larisa Beilina. *The Lax-Milgram Theorem*. <http://jones.math.unibas.ch/~beilina/CDE/Lectures/Lecture4.pdf><http://jones.math.unibas.ch/~beilina/CDE/Lectures/Lecture4.pdf>.
- [10] Michele Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems: A survey. " *Journal of Computational Physics* 182, 418–477 (2002)", 2002.

- [11] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, and C. W. Trowbridge. *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields* Wiley. 1994.
- [12] O. Biro and K. Preis. On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents. *"Trans on MAG"*, VOL 25. NO 4. JULY 1984, p 3145, 1989.
- [13] O. Biro and K. Preis. On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents. *"Trans on MAG"*, vol. 26, no. 2, pp. 418-423, 1990.
- [14] Anders Bondeson, Thomas Rylander, and Par Ingelström. *Computational Electromagnetics*. Springer, <http://read.pudn.com/downloads163/sourcecode/math/740254/ComputationalElectromagnetics.pdf>, 2005.
- [15] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism. (4): 'maxwell's house'. 1998.
- [16] A. Bossavit. Virtual power principle and maxwell's tensor: Which comes first? 2011.
- [17] Alain Bossavit. *Computational Electromagnetism. Variational Formulations, Complementarity Edge elements*. AP, 1998.
- [18] Alain Bossavit. *Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity Edge elements*. AP, 1998.
- [19] O. Bíró and K. Richter. *CAD in Electromagnetism, in series Advances in Electronics and Electron Physics*,. Academic Press, New York,, 1991.
- [20] F. Brezzi and M. fortin. *Mixed and hybrid finite elements methods*. Springer, <http://dmvn.mexmat.net/content/books/brezzi-fortin-mixed-and-hybrid-finite-elements-methods.pdf>, 1991.
- [21] F. Brezzi, L.D. Marini, I. Perugia, D. Di Barba, and A. Savini. A novel field-based mixed formulation of magnetostatics. *"Magnetics, IEEE Transactions on"*, 1996.
- [22] William L. Briggs. A multigrid tutorial.
- [23] Pechstein C. *Multigrid-Newton method for problems Nonlinear MS*. Univ. Linz, 2004.

- [24] Chen and Zhang. *AFEM@matlab*. Univ. of Maryland, http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=3&MP_ID=447.
- [25] LONG CHEN. ifem: An innovative finite element method package in matlab. 2008.
- [26] Gabriel CHEREGI, Florea HANTILA, Lucian OCHEANA, Mircea ARION, and Gabriel BARBU. *Qualitative aspects of the quasistationary electromagnetic field*.
- [27] A. Chernov and K. Schmidt. *p- and hp- Finite Element Methods*.
- [28] Jack Chessa. Programing the finite element method with matlab. 3rd October 2002.
- [29] Gabriela Cone. *Electricitate și magnetism - note de curs*. 2006.
- [30] Z. Csendes, J. Weiss, and S. Hoole. Alternative vector potential formulations of 3-d magnetostatic field problems. *"IEEE Trans. on MAG-18"*, 1982.
- [31] Leszek Demkowicz. *Computing With Hp-adaptive Finite Elements: One and two dimensional elliptic and Maxwell problems*. Chapman and Hall, 2006.
- [32] Willy Doerfler. *VisFem*. University of Karlsruhe.
- [33] Victorita Dolean. *Two-Level Domain Decomposition Methods*. 2012.
- [34] Dongarra and Sullivan. Top ten algorithms of the century. *"Computing in Science and Engineering"*, January/February, 2000.
- [35] J. Driesen, G. Deliége, T. Van Craenenbroeck, and K. Hameyer. *Implementation of the Harmonic Balance FEM method for large-scale saturated electromagnetic devices*.
- [36] T. Eibner and J.M. Melenk. *An adaptive strategy for hp-FEM based on testing for analyticity*.
- [37] Abdolreza Esmaeli. Electromagnetic field computation method in electromagnetic detection by using finite elements and boundary elements methods. 2012.

- [38] Joachim Fetzner, Stefan Kurz, Gunther Lehner, and Wolfgang M. Rucker. Transient bem-fem coupled analysis of 3-d electromechanical systems: A watch stepping motor driven by a thin wire coil. SEPTEMBER 1998.
- [39] F.Hantila and D.Ioan. Voltage-current relation of circuit elements with field effects. 1994.
- [40] Bernd Flemisch. *FE Error*. Univ. Stuttgart, http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=134.
- [41] Bernd Flemisch. *P2 finite elements*. Univ. Stuttgart, http://m2matlabdb.ma.tum.de/download.jsp?MC_ID=1&SC_ID=1&MP_ID=238.
- [42] MIHAI MARICARU BOGDAN VĂRĂTICEANU1 LIVIA BANDICI FLOREA IOAN HĂNȚILĂ, IOAN R. CIRIC. A dynamic overrelaxation procedure for solving nonlinear periodic field problems. *"Rev. Roum. Sci. Techn. - Électrotechn. et Énerg."*, 56, 2, p. 169-178, Bucarest, 2011.
- [43] S. Funken, D. Praetorius, and P. Wissgott. Efficient implementation of adaptive p1-fem in matlab. *"Computational Methods in Applied Mathematics"*, 2012.
- [44] Martin J. Gander. *Euler, Ritz, Galerkin, Courant: On the Road to the Finite Element Method*. University of Geneva, <http://www.unige.ch/~gander/Preprints/RitzTalk.pdf><http://www.unige.ch/gander/Preprints/RitzTalk.pdf>, 2010.
- [45] Pascal Getreuer. *Writing Fast MATLAB Code*. 11 Aug 2004 (Updated 10 Feb 2009).
- [46] G.Haase, M.Kuhn, and U. Langer. Parallel3d maxwell solver based on domain decomposition data distribution.
- [47] George J. Fix Gilbert Strang. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press, http://books.google.ro/books/about/An_Analysis_of_the_Finite_Element_Method.html?id=K5MAOWAACAAJ&redir_esc=y, 2008.
- [48] L. Giraud, J. Koster, A. Marrocco, and J.C. Rioual. Domain decomposition methods in semiconductor device modeling. *"Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods"*, DDM.org, 2001.

- [49] Matthias K. Gobbert and Shiming Yang. *Numerical Demonstration of Finite Element Convergence for Lagrange Elements in COMSOL Multiphysics*. COMSOL Conf., 2008.
- [50] R. D. Graglia, A. F. Peterson, and F. P. Andriulli. Curl-conforming hierarchical vector bases for triangles and tetrahedra.
- [51] Paul Gross and Robert Kotiuga. *Electromagnetic Theory and Computation: A Topological Approach*. CUP, 2004.
- [52] Alexander H.-D., Cheng Daisy, and T. Cheng. Heritage and early history of the boundary element method. 2005.
- [53] Wolfgang Hackbusch. *Multi-Grid Methods for FEM and BEM Applications*. Preprint no.: 72, 2003.
- [54] Wolfgang Hackbusch. Multi-grid methods for fem and bem applications. 2003.
- [55] M. K. Haldar. Introducing the finite element method in electromagnetics to undergraduates using matlab. *International Journal of Electrical Engineering Education*, (43/3).
- [56] F.I. Hantila, G. Preda, and M. Vasiliu. Polarization method for static fields. 2000.
- [57] I.F. Hantila, M. VASILIU, A. MORARU, and M. MARICARU. Utilizing the polarization method for solving a nonlinear magnetic shielding problem. *"Rev. Roum. Sci. Techn. Ū Electrotechn. et Énerg.*, ", 55, 2, p. 123Ū131,, Bucarest, 2010.
- [58] Jan S Hesthaven. *Discontinuous Galerkin methods*. RMMS, 2008.
- [59] R. HIPTMAIR. Canonical construction of finite elements, mathematics of computation. 1999.
- [60] R. Hiptmair. Higher order whitney forms. *"Progress In Electromagnetics Research"*, PIER 32, 271-299, 2001.
- [61] R. Hiptmair. Finite elements in computational electromagnetism. *"Acta Numerica"*, pages 237-339, 2002.
- [62] R. Hiptmair. *Finite elements in computational electromagnetism*. Acta Numerica, pages 237-339, 2002.

- [63] R. Hiptmair. *Multigrid Computation of Maxwell Eigenvalues, Seminar for Applied Mathematics*. ETH Z 2008.
- [64] Ronald H.W. Hoppe. *Finite Element Methods*. http://www.math.uh.edu/~rohop/spring_05/index.html.
- [65] Peter Hunter and Andrew Pullan. *FEM/BEM NOTES*. The University of Auckland New Zealand, <http://www.cs.rutgers.edu/~suejung/fembemnotes.pdf><http://www.cs.rutgers.edu/~suejung/fembemnotes.pdf>, 2001.
- [66] Chari H.V.K. *FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF NONLINEAR MAGNETIC FIELDS IN ELECTRIC MASHINES*. PhD thesis, 1970.
- [67] Chellamuthu Ida. A posteriori error estimators and indicators for adaptive mesh refinement. "*COMPEL* ", 1995.
- [68] D. Ioan. *Modelarea Dispozitiveleor Elctromagnetice*. <http://www.lmn.pub.ro/~daniel/cursmde.pdf><http://www.lmn.pub.ro/~daniel/cursmde.pdf>, 2000.
- [69] D. Ioan. *Bazele Electrotehnicii*. <http://www.lmn.pub.ro/~daniel/><http://www.lmn.pub.ro/~daniel/>, București, România, 2012.
- [70] D. Ioan, G. Ciuprina, and M. Radulescu. Absorbing boundary conditions for compact modeling of on-chip passive structures. 2006.
- [71] Ilse C.F. Ipsen and Carl D. Meyer. The idea behind krylov methods.
- [72] Per Jacobsson. *Nedelec elements for computational electromagnetics*. 2007.
- [73] Jianming Jin. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley-IEEE Press - 2nd Edition, 2002.
- [74] C. W. Trowbridge K. J. Binns, P. J. Lawrenson. *The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields*. Wiley, 1994.
- [75] David E. Keyes. *Domain Decomposition in the Mainstream of Computational science, LLNL*.
- [76] D.A. Knoll and D.E. Keyes. Jacobian-free newton-krylov methods: a survey of approaches and applications. 2004.
- [77] Patrick M. Knupp. Remarks on mesh quality. "*45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV*", 7-10 January, 2007.

- [78] MIKLOS KUCZMANN. *POTENTIAL FORMULATIONS IN MAGNETICS APPLYING THE FINITE ELEMENT METHOD*. University Gyor, Hungary, <http://maxwell.sze.hu/docs/C4.pdf>, 2009.
- [79] Miklos Kuczmann. Dynamic preisach hysteresis model. *"Journal of Advanced Research in Physics"*, 1(1), 011003, 2010.
- [80] J. F. Lee, D. K. Sun, and Z. J. Cendes. Tangential vector finite elements for electromagnetic field computation. *"IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS"*, VOL. 27, NO. 5, p. 4032, 1991.
- [81] Seung-Cheol Lee, Jin-Fa Lee, and Robert Lee. Hierarchical vector finite elements for analyzing waveguiding structures. AUGUST 2003.
- [82] Gang Li and N. R. Aluru. A lagrangian approach for electrostatic analysis of deformable conductors. *"JOURNAL OF MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS, VOL. 11, NO. 3, J"*, 1982.
- [83] Niall Madden. Numerical solution to differential equations using matlab: Part 3: a finite element implementation for a 2d elliptic problem. 2012.
- [84] Dániel Marcsa and Miklós Kuczmann. Analysis of ferromagnetic core combining preisach hysteresis modeling and finite element techniques. *"Journal of Advanced Research in Physics"*, 1(1), 011004, (2010).
- [85] ROBERT C. KIRBY MARIE E. ROGNES and ANDERS LOGG. Efficient assembly of $h(\text{div})$ and $h(\text{curl})$ conforming finite elements. 2009.
- [86] T. Mathew. *Domain decomposition methods for the numerical solution of partial differential equations*. Springer, 2008.
- [87] William F. Mitchell and Marjorie A. McClain. A survey of hp-adaptive strategies for elliptic partial differential equations. 2009.
- [88] C. I. Mocanu. *Teoria câmpului electromagnetic*. Editura Didactică și Pedagogică, București, România, 1981.
- [89] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2003.
- [90] P. Monk. *Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Numerical Mathematics and Scientific Computation*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2003.

- [91] I. Munteanu, G. Ciuprina, and F.M.G. Tomescu. *Modelarea numerică a câmpului electromagnetic prin programe scilab*. Printech, București, România, 2000.
- [92] Gerrit Mur. The finite-element modeling of three-dimensional electromagnetic fields using edge and nodal elements. JULY 1993.
- [93] Gerrit Mur. Edge elements, their advantages and their disadvantages. SEPTEMBER 1994.
- [94] Gerrit Mur. The fallacy of edge elements. SEPTEMBER 1998.
- [95] Gerrit Mur and Ioan E. Lager. On the causes of spurious solutions in electromagnetics. 2002.
- [96] J. Tinsley Oden and Yusheng Fe. Local and pollution error estimation for finite element approximations of elliptic boundary value problems. " *Journal of Computational and Applied Mathematics* 74 ", 245-293, 1996.
- [97] B.P. Patel, S.M. Ibrahim, and Y. Nath. Periodic response of nonlinear dynamical system with large number of degrees of freedom. *Sadhana - Indian Academy of Sciences*, 34(Part 6), December 2009.
- [98] Luca F. Pavarino. *Introduction to Domain Decomposition Methods for Finite Element Discretizations of PDEs - Corso di Metodi Numerici per EDP3*. Dipartimento di Matematica, Universita di Milano, http://www.mat.unimi.it/users/pavarino/DD_luca1.pdf, January 24, 2011.
- [99] S. Perepelitsa, R. Dyczij-Edlinger, and Jin-Fa Lee. Efficient analysis of arbitrarily shaped cavity resonators using h1(e arl) elements 1116. MARCH 1997.
- [100] Sergey Polstyanko and Jin-Fa Lee. Adaptive finite element electrostatic solver. SEPTEMBER 2001.
- [101] M. Preda, P. Cristea, and F. Spinei. *Bazele Electrotehnicii, vol. I și vol II*. Editura Didactică și Pedagogică, București, România, 1980.
- [102] Quarteroni and A. Valli. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Univ. Press, 1999.
- [103] Z. Ren and N. Ida. Computation of magnetostatic field using second order edge elements in 3d. " *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* ", Vol. 18 No. 3, pp. 361-371, 1999.

- [104] Jin-fa Lee Romanus Dyczij-Edlinger Guanghua, Guanghua Peng. *Efficient Finite Element Solvers for the Maxwell Equations in the Frequency Domain*.
- [105] R. Răduleț. *Bazele Electrotehnicii - Probleme I*. Editura Didactică și Pedagogică, București, România, 1970.
- [106] Sarma and Mulukutla S. Magnetostatic field computation by finite element formulation. *"Electrical and Computer Engineering Faculty Publications"*, 1976.
- [107] Michael A. Saum. *The Discontinuous Galerkin Finite Element Method*. University of Tennessee, Knoxville, USA, 2006.
- [108] JOACHIM SCHOBERL. *A POSTERIORI ERROR ESTIMATES FOR MAXWELL EQUATIONS*. 1991.
- [109] Joachim Schoberl. *Numerical Methods for Maxwell Equations*. <http://www.asc.tuwien.ac.at/~schoeberl/wiki/lva/notes/maxwell.pdf>, 2009.
- [110] Joel Shapiro. *Lagrange's and Hamilton's Equations*. <http://www.physics.rutgers.edu/~shapiro/507/book3.pdf><http://www.physics.rutgers.edu/shapiro/507/book3.pdf>.
- [111] Loren Shure. *Creating sparse finite-element matrices in matlab*. 2007.
- [112] P. Silvester and H.V.K. Chari. Finite element solution of saturable magnetic field problems. *"IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems"*, Vol. PAS-89, pp. 1642-1651, Oct. 1970.
- [113] P.P. Silvester and R.L. Ferrari. *Finite Elements for Electrical Engineers*. CUP, 1996.
- [114] P.P. Silvester and R.L. Ferrari. *Finite Elements for Electrical Engineers*. CUP, 1996.
- [115] B. Smith, P. Bjorstad, and W. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [116] B. Smith, P. Bjorstad, and W. Gropp. *Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. Cambridge Univ. Press, 1996.

- [117] Pavel Solin. *Newton's Method in Hermes*. 2008.
- [118] Pavel Solin. New volumetric weak forms for fast product quadrature. 2009.
- [119] GILBERT STRANG. Piecewise polynomials and the finite element method. November 1973.
- [120] Endre Suli. *Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. 2012.
- [121] G. Wimmer M. Clemens S. Kurz T. Steinmetz, N. Gödel and M. Bebendorf. Efficient symmetric fem-bem coupled simulations of electro-quasistatic fields. JUNE 2008.
- [122] A. Timotin, V. Hortoman, A. Ifrim, and M. Preda. *Lecții de Bazele Electrotehnicii*. Editura Didactică și Pedagogică, București, România, 1970.
- [123] Enzo Tonti. *A Classification Diagram for Physical Variables*. 2003.
- [124] Toselli and O. Widlund. *Domain Decomposition Methods: Theory and Algorithms*. Springer, 2005.
- [125] Andrea Toselli. *Domain decomposition methods for vector field problems - PhD thesis*. New York University, 1999.
- [126] Igor Tsukerman. Spurious numerical solutions in electromagnetic resonance problems. 2003.
- [127] Igor Tsukerman. Symbolic algebra as a tool for understanding edge elements. "IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS", VOL. 39, NO. 3, p. 1111, MAY 2003.
- [128] Menno Ewout Verbeek. *Iterative solvers and preconditioning for electromagnetic boundary integral equations*. PhD thesis, 2001.
- [129] J. Rommes Eds. W.H.A. Schilders, H.A. van der Vorst. Model order reduction: Theory, research aspects and applications. 2008.
- [130] Wikipedia. *Finite element method*. http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, June 2012.
- [131] Ivan F Wilde. *DISTRIBUTION THEORY (GENERALIZED FUNCTIONS) - NOTES*. <http://homepage.ntlworld.com/ivan.wilde/notes/gf/gf.pdf>, 2009.

- [132] J. Wu, D.M. Kingsland, J. Lee, and Robert Lee. A comparison of anisotropic pml to berenger's pml and its application to the finite-element method for em scattering. JANUARY 1997.
- [133] Sabine Zaglmayr. *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. Thesis - Linz Univ, <http://www.numerik.math.tugraz.at/~zaglmayr/pub/szthesis.pdf> <http://www.numerik.math.tugraz.at/zaglmayr/pub/szthesis.pdf>, 2006.
- [134] O.C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Engineering Science*. Mcgraw-Hill, New York, 1971.