

ToMeMS - Raport intern - Contribuție la D1.1a "Modelarea cuplata electrostatica si mecanica a microcomutatoarelor de RF - Formularea problemei"

Regimul electrodinamic - ED

Daniel Ioan,



Abstract – Documentul se referă la principalele aspecte fizice ale regimului electrodinamic. Sunt prezentate într-o manieră sistematică: ipotezele, ecuațiile și teoremele fundamentale ale acestui regim. Aspectele matematice sunt prezentate doar minimal. Documentul nu are ca obiect prezentarea aspectelor algoritmice (metodele analitice și numeirce de determinare a câmpurilor electrostatice). El poate alcătui baza teoretică a metodelor de modelare a comportarii in radiofrecvență a microcomutatoarelor, metode ce vor fi dezvoltate în cadrul proiectului ToMEMS

Conținut

1. Ipotezele regimului electrodinamic.....	2
2. Ecuațiile fundamentale ale electrodinamicii.....	3
3. Potențialele electrodinamice. Ecuațiile de ordinul doi.....	5
4. Problema fundamentală a electrodinamicii.....	7
5. Teorema energiei electrodinamice, teorema lui Tellegen.....	9
6. Teorema impulsului electromagnetic. Presiunea undelor.....	10
7. Teorema de unicitate a regimului electrodinamic.....	11
8. Condiții absorbante de frontieră.....	13
9. Teoremele liniarității și superpoziției în electrodinamică.....	16
10. Elementul multipolar de circuit electric cu parametri distribuiți.....	17
11. Analiza în domeniul frecvenței.....	21
12. Ecuațiile complexe ale electrodinamicii.....	25
13. Teoremele reciprocității și pasivității.....	30
14. Forma variațională, slabă a ecuațiilor electrodinamicii.....	34
15. Teorema câmpului adjunct. Sensitivități.....	39
16. Potențialele retardate. Ecuațiile integrale în domeniul timpului.....	42
17. Funcțiile Green ale ecuației Helmholtz.....	45
18. Analiza modală a câmpului electromagnetic.....	48
19. Metodele electrodinamicii.....	49
20. Propagarea unidimensională. Linii de transmisie.....	50
21. Bibliografie.....	64
ANEXA: Prezentarea inductivă a electrodinamicii. Istoria ideilor.....	68

1. Ipotezele regimului electrodinamic

Regimurile general variabile ale câmpului electromagnetic au în comun o singură ipoteză: caracterul imobil al corpurilor. În domeniul timpului, ecuațiilor acestor regimuri sunt ecuații cu derivate parțiale hiperbolice, de tip d'Alambert. Principalul fenomen fizic descris de acestea este cel de propagare. Motiv pentru care, câmpul are în acest regim forma unei unde electromagnetice. Deosebim următoarele regimuri particulare:

- Electrodinamic ED (full-wave - FW), este regimul general, în medii care pot fi și conductoare;
- General variabil fără pierderi FP (lossless - LL), este regimul general variabil al câmpului electromagnetic în vid sau în corpuri perfect izolante.

Analiza acestor regimuri se face și în domeniul frecvenței, prin reprezentare în complex atunci când mărimile variază sinusoidal în timp, sau prin transformată Fourier sau Laplace, în cazul regimului tranzitoriu. Aceste reprezentări operaționale transformă derivatele față de timp în operații algebrice de înmulțire cu $j\omega$, respectiv cu variabila (frecvența) complexă s . După dispariția derivatelor față de timp, ecuațiile hiperbolice (cu derivate de ordinul doi față de timp și care pot conține și termeni cu derivate de ordinul întâi, de amortizare, difuzivi) se transformă în ecuații de tip Helmholtz complexe, asemănătoare cu cel eliptice. În regimul fără pierderi, pentru care ecuațiile nu conțin termenul difuziv se formulează și **problema analizei modale**, în care se caută modurile de rezonanță și frecvențele proprii.

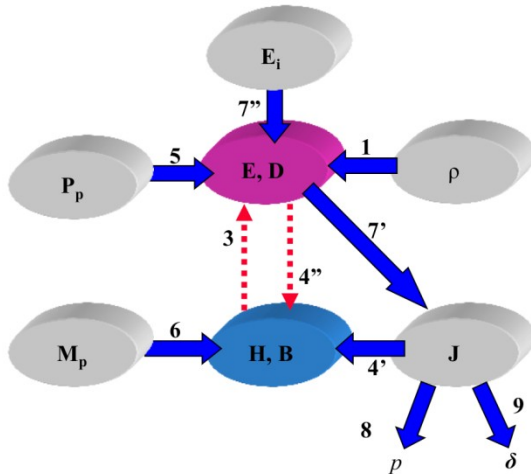


Fig. 1. Diagrama relațiilor cauzale ale regimului ED [9]

2. Ecuațiile fundamentale ale electrodinamicii

Ecuațiile electrodinamicii sunt de fapt ecuațiile lui Maxwell, în regim general variabil [1-5].

- **Legea fluxului electric:**

$$\psi_{\Sigma} = q_{D_{\Sigma}} \Leftrightarrow \oint_{\Sigma} D dA = \int_{D_{\Sigma}} \rho dv \Rightarrow \operatorname{div} D = \rho;$$

- **Legea fluxului magnetic:**

$$\phi_{\Sigma} = 0 \Leftrightarrow \oint_{\Sigma} B dA = 0 \Rightarrow \operatorname{div} B = 0; \quad n_{12} \cdot (B_2 - B_1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}_s B = 0$$

- **Legea inducției electromagnetice în medii imobile:**

$$u_r = \frac{d\phi_{s_r}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \oint_r E dr = \frac{d}{dt} \int_{s_r} B \cdot dA \Rightarrow \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}; n_{12} \times (E_2 - E_1) = 0, \Leftrightarrow E_{t2} = E_{t1}$$

- **Legea circuitului magnetic în medii imobile:**

$$u_{m_r} = i_{s_r} + \frac{d\psi_{s_r}}{dt} \Leftrightarrow \oint_r H dr = \int_{s_r} J \cdot dA + \frac{d}{dt} \int_{s_r} D \cdot dA \Rightarrow \text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}; n_{12} \cdot (H_2 - H_1) = 0, \Leftrightarrow H_{t2} = H_{t1}$$

O consecință a acestei legi și a legii fluxului electric este teorema conservării sarcinii electrice

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} \Leftrightarrow \int_\Sigma J \cdot dA = -\frac{d}{dt} \int_{D_\Sigma} \rho dv \Rightarrow \text{div } J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}; n_{12} \cdot (J_2 - J_1) = \rho_s, \Leftrightarrow J_{n2} = J_{n1}$$

În formă locală toate aceste relații sunt ecuații diferențiale de ordinul întâi.

- **Relațiile constitutivă, de material,** sunt legile legăturii dintre D-E, B-H și J-E:

$$\begin{aligned} D &= f'(E) \Leftrightarrow D = \epsilon_0 E + P, P = P_t(E) + P_p \Rightarrow D = \bar{\epsilon} E + P_p \\ B &= f''(H) \Leftrightarrow B = \mu_0 (H + M), M = M_t(H) + M_p \Rightarrow B = \bar{\mu} H + B_r, B_r = \mu_0 M_p \\ J &= f'''(E) \Leftrightarrow J = J_t(E) + J_i \Rightarrow J = \bar{\sigma} E + J_i \end{aligned}$$

Câmpul electrodinamic este descris de câmpurile vectoriale E, D, B, H , cu sursele de câmp ρ, P_p, B_r (echivalent cu M_p) și J_i (echivalent cu E_i) și constantele de material ϵ, μ și σ , cu caracter scalar sau tensorial. Diagrama relațiilor cauzale ale regimului ED este reprezentată în Fig.1.

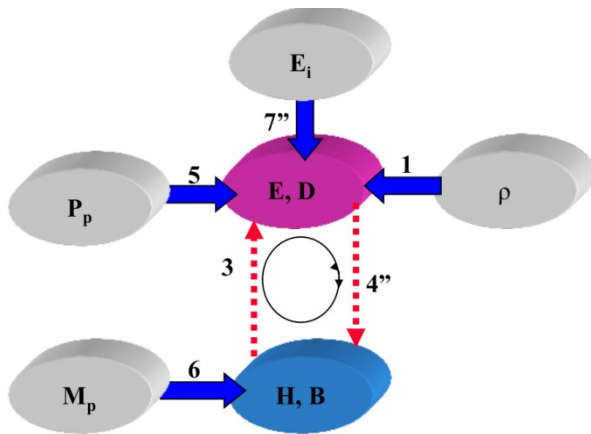


Fig. 2. Diagrama relațiilor cauzale în regimul FP [9]

În regimul fără pierderi (FP), conductivitatea $\sigma = 0$, iar ecuațiile locale au forma din vid:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot H &= 0 \\ \nabla \times E &= -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla \times H &= \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}$$

câmpul electromagnetic fiind complet descris doar de o singură pereche de vectori: E și H . În acest caz intervin doar două constante de material: ε , și μ , iar în mediile liniare, sursele de câmp sunt ρ și J_i (sarcinile injectate și curentul electric impus). Diagrama relațiilor cauzale ale acestui regim este cea din Fig. 2. În consecință, ipotezele regimului electrodinamic fără pierderi (FP) sunt următoarele:

- Corpurile sunt imobile;
- Nu există nici un fel de pierderi, nici prin conducție ($\sigma = 0$, $J=0$), nici prin histerezis dielectric sau magnetic.

3. Potențialele electrodinamice. Ecuațiile de ordinul doi.

În regimurile general variabile, câmpul electromagnetic este descris de două potențiale, unul scalar V și altul vectorial A . Acestea se definesc pe baza:

- legii fluxului magnetic: $\text{div } B=0 \Rightarrow B=\text{rot } A$ și a
- legii inducției electromagnetice:

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \text{rot } E = -\text{rot } \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow \text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\text{grad } V$$

Ele generalizează potențialul magnetic vector și potențialul electric scalar, dar spre deosebire de acestea sunt funcții de timp, iar câmpul electric depinde de nu numai de gradientul a potențialului scalar ci și de derivata față de timp a potențialului vector. Odată calculate, cele două potențiale determină atât inducția magnetică cât și intensitatea câmpului magnetic, iar apoi din legile de material celelalte componente ale soluției.

Ecuațiile de ordinul doi satisfăcute de aceste potențiale se obțin din legea circuitului magnetic și din teorema conservării sarcinii, iar în medii liniare au formele:

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} A) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sigma \operatorname{grad} V + \varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div} J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div} \left(\sigma \operatorname{grad} V + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\operatorname{div}(\sigma A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} A = -\operatorname{grad} \sigma$$

Ultima relație fiind valabilă în condiția de etalonare: , de tip Coulomb (nulă în conductoare omogene) impune divergenței potențialului vector (care poate fi liber aleasă, fără să se modifice câmpul).

$$D = \varepsilon E + P_p; B = \mu H + B_r, B_r = \mu_0 M_p \Leftrightarrow H = \nu B + I_p, I_p = -\nu B_r; J = \sigma E + J_i$$

În medii în care

cu caracteristici afine, ecuațiile de ordinul doi au formele:

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} A) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sigma \operatorname{grad} V + \varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = J_i + \frac{\partial P_p}{\partial t} - \operatorname{rot}(I_p)$$

$$\operatorname{div} J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div} \left(\sigma \operatorname{grad} V + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V) = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Curentul impus poate încorpora și celelalte două surse de câmp, polarizația și magnetizația permanentă, folosind distribuții de curent fictive (de magnetizare și de deplasare-polarizare), echivalente acestor surse de câmp. O simplificare importantă se obține în domeniile în care potențialul scalar este nul (de exemplu, domeniile sunt izolante și nu se electrizează, iar condițiile de frontieră pentru potențial sunt nule).

În regim fără pierderi, deci inclusiv în vid, ecuațiile de ordinul doi au o formă mai simplă:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = \mu_0 J_i \Rightarrow \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \Delta A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = \mu_0 J_i \Rightarrow$$

$$-\Delta A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J_i$$

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

în care s-a notat ; iar

$$\operatorname{div} D = \rho \Rightarrow \Delta V + \operatorname{div} \frac{\partial A}{\partial t} = -\rho/\varepsilon_0 \Rightarrow -\Delta V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \rho/\varepsilon_0$$

,

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

dacă se adoptă condiția de etalonare a lui Lorenz: (atribuită de multe ori, din greșeală, lui Lorentz!). Se constată că în aceste condiții, în regimul FP, în medii liniare, omogene, fără pierderi, ambele potențiale electrodinamice, atât potențialul vector cât și cel scalar satisfac ecuații hiperbolice de tip d'Alambert, vectoriale respectiv scalare cu același operator.

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

Viteza de propagare a undei electromagnetice în vid este viteza luminii în vid, ceea ce demonstrează natura electromagnetică a luminii. Sursele celor două potențiale sunt: curentul impus și respectiv sarcina electrică (cum este de exemplu, curentul injectat în antene). În regimul electrodinamic, general variabil, potențialul vector satisface o ecuație de tip d'Alambert vectorială generalizată, în care operatorul de derivare spațială este de tip rot-rot, și în care pe lângă termenul cu dublă derivată față de timp mai apare un termen cu derivată simplă față de timp, ce descrie fenomenele de amortizare (pierderi prin conducție), precum și termeni care conțin potențialul scalar. Ecuația potențialului scalar este de tip Poisson generalizată, similară cu ecuația potențialului scalar electrocinetic staționar

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} (v \operatorname{rot} A) + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \sigma \operatorname{grad} V + \epsilon \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = J_i \\ \operatorname{div} J &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div} \left(\sigma \operatorname{grad} V + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{div} (\sigma \operatorname{grad} V) = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pe suprafețele de interfață între două corpuri cu proprietăți dielectrice diferite, potențialul satisface următoarele condiții de trecere:

$$\begin{cases} n_{12} \times (H_{t2} - H_{t1}) = J_s \\ n_{12} \cdot (B_2 - B_1) = 0; n_{12} \cdot (A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{12} \times (v_2 \nabla \times A_2 - v_1 \nabla \times A_1) = J_s \\ A_2 = A_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{t1} = E_{t2} \\ n_{12} \cdot (D_2 - D_1) = \rho_s \\ n_{12} \cdot (J_2 - J_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 \\ \epsilon_1 \frac{dV_1}{dn_{12}} - \epsilon_2 \frac{dV_2}{dn_{12}} = \rho_s \\ \sigma_1 \frac{dV_1}{dn_{12}} - \sigma_2 \frac{dV_2}{dn_{12}} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \end{cases}$$

asemănătoare cu condițiile de trecere pentru potențialul magnetic vector și potențialul electric scalar din regimurile magneto-staționar, electrocinetic și electrostatic.

4. Problema fundamentală a electrodinamicii

Problema fundamentală a electrodinamicii consta în determinarea câmpului, pornind de la sursele lui [7-10]. **Datele acestei probleme** sunt:

- Forma și dimensiunile domeniului de calcul D .
- Caracteristica dielectrică, magnetică și de conducție din orice punct al domeniului de calcul, descrisă în medii liniare de permitivitatea ϵ , permeabilitatea μ și conductanța σ .
- Sursele interne de câmp din orice punct al domeniului de calcul și în orice moment al duratei analizate, sunt descrise, în cazul mediilor cu caracteristică afină de câmpurile vectoriale: polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$, magnetizația permanentă $\mathbf{M}_p$, și curentul electric impus $\mathbf{J}_i$
- Sursele externe de câmp, descrise de condițiile de frontieră, de exemplu $\mathbf{E}_t$ sau $\mathbf{H}_t$ în orice punct de pe frontiera domeniului de calcul. Cel mai adesea aceste sunt nule, de exemplu $\mathbf{E}_t = 0$, notată cu PEC (Perfect Electric Conductor), corespunde unui conductor perfect (supraconductor cu $1/\sigma = 0$) plasat pe frontieră iar $\mathbf{H}_t = 0$, notată cu PMC (Perfect Magnetic Conductor), corespunde unui material feromagnetic perfect (cu $1/\mu = 0$) plasat pe frontieră. Dar acestea nu sunt singurele condiții de frontieră corecte posibile.
- Sursele anterioare ale câmpului, descrise de condițiile inițiale: câmpurile vectoriale $\mathbf{D}$ și $\mathbf{B}$, definite în toate punctele domeniului de calcul, la momentul inițial de timp $t = 0$.

Necunoscutele principale ale problemei sunt câmpul vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ și cel scalar $V(\mathbf{r}, t)$, definite pe domeniul D și pe intervalul de timp de analiză $(0, T)$. Acestea trebuie să satisfacă ecuația de ordinul doi și condițiile inițiale și de frontieră. După ce au fost determinate potențialele electrodinamice, inducția magnetică și intensitatea câmpului electric se determină din definițiile lor, iar celelalte mărimi ale câmpului, aplicând relațiile de material. Există însă și alte metodologii de calcul, în care câmpul se calculează direct, rezolvând ecuațiile de ordinul întâi sau consecințe ale acestora, fără să fie calculate potențialele electrodinamice. În aceste proceduri ca și în cea bazată pe potențiale, densitatea de sarcină adevărată (indusă în conductoare și în dielectricii slab conductori) este necunoscută a problemei, deoarece rezultă din inducția electrică, folosind legea fluxului electric. Condiția inițială pentru inducția electrică, atrage după sine cunoașterea distribuției inițiale a sarcinii electrice, care determină distribuția ulterioară a acesteia. La fel rezultă și densitatea curentului electric (indus în conductoare), din intensitatea câmpului magnetic, folosind legea circuitului magnetic. Ca o consecință a legii inducției electromagnetice, legea fluxului magnetic este satisfăcută în orice moment de timp, dacă ea este satisfăcută la momentul inițial (de condiția inițială). **Problema de câmp este corect formulată**, dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiții [12]:

- Problema **are** soluție;

- Aceasta soluție este **unică**;
- Și depinde **continuu** de sursele de câmp, date ale problemei.

Dacă soluția problemei nu depinde continuu de datele ei, atunci mici variații ale datelor pot determina salturi ale valorii soluției, făcând ca aceasta să nu aibă relevanță, deoarece în practică, datele sunt mereu afectate de erori de măsurare sau de reprezentare.

5. Teorema energiei electrodinamice, teorema lui Tellegen

Aceasta este o consecință pătratică, integrală a ecuațiilor lui Maxwell, forma globală a **teoremei energiei electromagnetice**. Pentru început vom considera un domeniu D , mărginit de frontiera Σ , în interiorul căruia se afla un mediu liniar caracterizat de constantele de material $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ și $\sigma \geq 0$, dar în care se poate afla local și un curent impus cu densitate J_i . Dacă integrăm pe acest domeniu forma locală a teoremei energiei electromagnetice (consecință a legilor inducției și circuitului magnetic) și apoi o integrăm pe intervalul de timp $(0, T)$, rezultă

$$-\int_D \operatorname{div}(E \times H) dv = \int_D J \cdot E dv + \frac{d}{dt} \int_D \left(\frac{D \cdot E}{2} + \frac{B \cdot H}{2} \right) dv \Rightarrow$$

$$W_{em} = \frac{1}{2} \int_D (\varepsilon E^2 + \mu H^2) dv = \int_D (D(0)^2 / \varepsilon + B(0)^2 / \mu) dv - \int_0^T \left(\int_D \sigma E^2 dv + \int_D J_i \cdot E dv + \int_{\partial D} (E_t \times H_t) \cdot dA \right) dt > 0$$

Constatam deci ca energia câmpului electromagnetică, determină prin integrarea densității de energie pe întreg domeniul ocupat de câmp, are o creștere egală cu integrala în timp a puterii transferată de câmp prin frontiera domeniului (de la exterior spre interior), din care se scade puterea transferată corpurilor.

În cazul **materialelor cu caracteristică dielectrică și magnetică afină**, la care

$$D = \varepsilon E + P_p; B = \mu H + B_p$$

densitatea de coenergie/energie are expresia

$$D = f(E) = \bar{\varepsilon} E + P_p \Rightarrow w_e^i = \int_0^E D' dE' = \int_0^E f(E') dE' = \int_0^E (\bar{\varepsilon} E' + P_p) dE' = E \cdot \bar{\varepsilon} E / 2 + P_p E = DE / 2 + P_p E / 2$$

$$w_e = DE - w_e^i = DE / 2 - P_p E / 2 = E \bar{\varepsilon} E / 2; w_m = BH - w_m^i = BH / 2 - B_r H / 2 = H \bar{\mu} H / 2$$

iar **teorema energiei electromagnetice** capătă forma:

$$W_{em}(t) = \frac{1}{2} \int_D (E \bar{\epsilon} E + H \bar{\mu} H) dv = \frac{1}{2} \int_D (E \bar{\epsilon} E + H \bar{\mu} H) \Big|_{t=0} dv - \int_0^T \left(\int_D \sigma E^2 dv + \int_D J_i \cdot E dv + \int_D \left(\mu_0 H \cdot \frac{\partial M_p}{\partial t} + E \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} \right) dv + \int_{\partial D} (E_t \times H_t) \cdot dA \right) dt > 0.$$

În cazul elementului multipolar de circuit electric (concept care se va defini ulterior, în paragraful 9), puterea electromagnetică transferată prin frontieră are (așa cum se va demonstra acolo) expresia:

$$- \int_{\partial D} (E_t \times H_t) \cdot dA = \sum_{k=1}^m v_k i_k = v^T \cdot i \Rightarrow v^T \cdot i = (J, E) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(D, E) + (B, H)]$$

Iar în cazul a două câmpuri ce pot fi diferite, într-un domeniu identic, cu materiale diferite, rezultă:

$$\begin{aligned} \int_D \left(\frac{\partial D}{\partial t} \cdot E + \frac{\partial B}{\partial t} \cdot H \right) dv &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (E \cdot D + H \cdot B) \right) dv \\ &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (E \cdot D + H \cdot B) \right) dv = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (E \cdot D + H \cdot B) \right) dv \\ &= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (E \cdot D + H \cdot B) \right) dv = \int_D \left(\frac{\partial}{\partial t} (E \cdot D + H \cdot B) \right) dv \end{aligned}$$

relație numită teorema lui Tellegen pentru câmp electromagnetic, în special în cazul în care domeniul D este unul de interconexiune și are volumul nul - Leopold B. Felsen, Peter. Russer, Mauro. Mongiardo, [*Electromagnetic Field*](#) Computation by Network Methods, Springer – 2009. :

6. Teorema impulsului electromagnetic. Presiunea undelor

Teorema conservării impulsului este o altă consecință pătratică, integrală a ecuațiilor lui Maxwell. Forma sa locală este:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{em}}{\partial t} &= \text{div}(\bar{T}_{em}) - f_{em}, \quad g_{em} = D \times B, \quad \bar{T}_{em} = \bar{T}_e + \bar{T}_m, \quad \bar{T}_e = E \widehat{D}^T - w_e \bar{I}; \quad \bar{T}_m = H \widehat{B}^T - w_m \bar{I} \Rightarrow \\ \frac{\partial (D \times B)}{\partial t} &= \frac{E^2}{2} \text{grad } \epsilon - \text{grad} \left(\frac{D \cdot E}{2} \right) + (D \cdot \text{grad}) E + \frac{H^2}{2} \text{grad } \mu - \text{grad} \left(\frac{B \cdot H}{2} \right) + (B \cdot \text{grad}) H + B \times J \end{aligned}$$

$$\frac{dG_{mec}}{dt} = F$$

Pornim de la principiul fundamental al mecanicii , conform căruia forța este egală

$$G_{mec} = \int_{D_\Sigma} g_{mec} dV = \int_{D_\Sigma} v dm$$

cu viteza de variație a impulsului mecanic . Deoarece impulsul mecanic al unui corp rigid este masa multiplicată cu viteza sa, rezultă că forța asupra corpului este masa înmulțită cu accelerația pe care o capătă sub acțiunea forței. Impulsul electromagnetic

$$G_{em} = \int_{D_\Sigma} g_{em} dv$$

al unui domeniu se obține prin integrarea densității de impuls: , rezultând forma globală a teoremei impulsului

$$\frac{dG_{em}}{dt} = \oint_{\Sigma} \bar{T}_{em} \cdot n dS - F_{em} \Rightarrow \frac{d(G_{mec} + G_{em})}{dt} = F_{non-em} + F_{em} = F_{non-em} + \oint_{\Sigma} \bar{T}_{em} \cdot n dS$$

care permite determinarea acțiunilor mecanice ale câmpului electromagnetic, la interacțiunea lui cu corpurile. Undele electromagnetice au densitatea de volum a impulsului

$$g_{em} = D \times B = \epsilon \mu (E \times H) = \frac{S}{c^2}$$

orientată în direcția și sensul propagării, dată de vectorul lui Poynting, fiind proporțional cu acesta. Ele se comportă ca și cum ar avea o densitate de masă

$$\rho = g_{em}/c \Rightarrow m = \rho V = \frac{S}{c^3} V = \frac{w_{em} V}{c^2} = \frac{W_{em}}{c^2} \Rightarrow E = mc^2$$

, de unde rezultă celebra formulă a

$$E = W_{em} = w_{em} V$$

$$S = cw_{em}$$

energiei în care s-a notat cu energia electromagnetică (faptul că se va demonstra ulterior).

O undă electromagnetică absorbită de un corp transferă acestuia impulsul său, deci va exercita pe suprafața corpului o presiune medie egală cu densitatea medie de energie electromagnetică:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{fV}{A} = \frac{f}{\lambda} = \frac{1}{\lambda T} \int_0^T \frac{\partial g_{em}}{\partial t} dt = \frac{\tilde{g}_{em}}{\lambda T} = \frac{\tilde{S}}{\lambda T c^2} = \frac{\tilde{S}}{c} = \tilde{w}_{em}$$

.

Dacă în schimb, suprafața reflectă undele, atunci impulsul are o variație dublă (de la S/c la -S/c),

$$p = 2\tilde{w}_{em}$$

deci presiunea exercitată de undă va fi de două ori mai mare . Lumina exercită deci o presiune dublă asupra corpurilor albe decât asupra celor negre!

$$h_{em} = r \times g_{em} = r \times (D \times B);$$

Impulsul electromagnetic unghiular

este o altă mărime conservativă.

Formele locale și globale ale teoremei de conservare:

$$\frac{\partial h_{em}}{\partial t} = \text{div} (r \times \bar{T}_{em}) - m_{em}, \quad m_{em} = r \times f_{em} \Rightarrow$$

$$\frac{dH_{em}}{dt} = \oint_{\Sigma} (r \times \bar{T}_{em}) \cdot n \, dS - M_{em}, \quad H_{em} = \int_{D_{\Sigma}} h_{em} \, dV; \quad M_{em} = r \times F_{em}$$

permit exprimarea momentelor pe care câmpul le exercită asupra corpurilor. După cum se va vedea ulterior, undele polarizate au impuls unghiular de valoare medie nenulă, orientat în direcția propagării.

În consecință, lumina și în general undele electromagnetice polarizate circular tind să rotească corpurile pe care acesta cad.

2. Teorema de unicitate a regimului electrodinamic

Teoremele de unicitate ale soluției problemei fundamentale a electrodinamicii (ED sau FP) sunt cele care dau condițiile corecte de frontieră ale acestor probleme. Demonstrația ei se bazează pe teorema energiei electromagnetice:

$$\int_{D_{\Sigma}} \sigma E \cdot E \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_{\Sigma}} \left(\frac{\mu H \cdot H}{2} + \frac{\epsilon E \cdot E}{2} \right) dv = \int_{D_{\Sigma}} E \cdot J_i \, dv - \int_{D_{\Sigma}} \left(E \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} + \mu_0 H \cdot \frac{\partial M_p}{\partial t} \right) dv$$

$$- \oint_{\Sigma} (E_t \times H_t) \cdot dA \Rightarrow$$

$$\int_0^t \int_{D_{\Sigma}} \sigma E \cdot E \, dv \, dt' + \int_{D_{\Sigma}} \left(\frac{\mu H \cdot H}{2} + \frac{\epsilon E \cdot E}{2} \right) dv = \int_{D_{\Sigma}} \left(\frac{\mu H \cdot H}{2} \Big|_{t=0} + \frac{\epsilon E \cdot E}{2} \Big|_{t=0} \right) dv +$$

$$\int_0^t \left(\int_{D_{\Sigma}} E \cdot J_i \, dv - \int_{D_{\Sigma}} \left(E \cdot \frac{\partial P_p}{\partial t} + \mu_0 H \cdot \frac{\partial M_p}{\partial t} \right) dv - \oint_{\Sigma} (E_t \times H_t) \cdot dA \right) dt'$$

Condițiile de unicitate se pot identifica din această relație, ca fiind:

- Densitatea curentului impus J_i în toate punctele domeniului de calcul, pe durata intervalului de analiză;

- Polarizația permanentă P_p în toate punctele domeniului de calcul, pe durata intervalului de analiză;
- Magnetizația permanentă M_p în toate punctele domeniului de calcul, pe durata intervalului de analiză;
- Componenta tangențială a intensității câmpului magnetic H_t sau a intensității câmpului electric din orice punct al frontierei, pe durata intervalului de analiză E_t ;
- Distribuția inițială a intensității câmpului electric E în toate punctele domeniului de calcul;
- Distribuția inițială a intensității câmpului magnetic H în toate punctele domeniului de calcul.

Pentru valori nule ale acestor condiții, membrul drept se anulează și rezultă:

$$0 \leq \int_{D_x} (\mu H^2 + \varepsilon E^2) dv = -2 \int_0^t \int_{D_x} \sigma E^2 dv dt \leq 0$$

Dacă $\sigma > 0$ în toate punctele domeniului de calcul, atunci energia disipată în domeniu, prin conducție este pozitiv definită, iar această egalitate cu restricțiile ei poate fi satisfăcută doar pentru câmp electric nul $E=0$. Dacă permeabilitatea este strict pozitivă, atunci rezultă ca și intensitatea câmpului magnetic $H=0$, chiar și în condițiile în care $\varepsilon=0$ (adică în regim MQS). Condiția de disipativitate $\sigma > 0$ impusă tuturor punctelor din domeniul de calcul este extrem de restrictivă pentru multe din problemele practice, în special cele din regimul FP.

Constatăm ca ea poate fi eliminată, mai exact înlocuită cu condiția $\varepsilon > 0$, pentru anularea câmpului electric. În consecință, și celelalte componente ale câmpului electromagnetic se anulează: $J = \sigma E = 0$, $B = \mu H = 0$, $D = \varepsilon E = 0$ și $\rho = \text{div } D = 0$. Conform lemei soluției nule, rezultă unicitatea tuturor componentelor câmpului ED și FP, în condițiile menționate anterior.

Constatăm că atât sarcina cât și curentul au un dublu statut: sursă și soluție. Mai exact curentul impus (cum este curentul cunoscut, injectat în antene) sau curentul amperian – virtual, echivalent de magnetizare este sursă de câmp; în schimb densitatea curentului de conducție, care depinde de intensitatea câmpului electric este o componentă a soluției. În mod similar, sarcina impusă, cum este cea cunoscută, injectată în antene, sau sarcina coulombiană – virtuală, echivalentă de polarizare este sursă de câmp, în schimb densitatea de sarcină adevărată, care depinde de intensitatea câmpului electric este o componentă a soluției.

În această teoremă de unicitate, condițiile de unicitate impune cunoașterea componentei tangențiale a intensității câmpului electric sau a câmpului magnetic (nu ambele, ci doar una dintre ele!) de pe frontieră. Aceste date se referă fie la un sistem de electrozi de potențiale impuse plasați pe frontieră fie la un sistem de curenți superficiali distribuiți peste un corp feromagnetic perfect, sau de multe ori la cunoașterea câmpului transversal din apertura (portul) unui ghid de unde, care alimentează domeniul de calcul (cel mai adesea cu o undă plană, incidentă, cunoscută). Condițiile nule de frontieră corespund carcaselor realizate din conductoare perfecte, respectiv folii feromagnetice perfecte. În multe situații practice, condițiile de frontieră nule sunt îndeplinite pe planuri de simetrie, pe care câmpul electric sau cel magnetic pică ortogonal, adică are este orientat transversal, având componentă tangențială nulă.

3. Condiții absorbante de frontieră

Undele electromagnetice, soluții ale ecuațiilor regimurilor ED sau FP au proprietatea remarcabilă de a avea un front de undă bine definit, care se propagă cu o viteză finită, ce nu depășește viteza luminii în vid. Atunci când întâlnesc un perete conductor (PEC sau PMC) ele se reflectă și se întorc în domeniul de calcul, perturbând câmpul existent aici. Dacă în schimb întâlnesc o fereastră spre spațiul vid, infinit extins, atunci se propagă în acesta și nu se mai întorc în domeniul de calcul. Această caracteristică impune tratare cu tehnici speciale a frontierei domeniului de calcul, care au frontiere deschise spre spațiul nemărginit. Numim aceste frontiere ca fiind deschise și trebuie să impunem pe ele condiții de frontieră absorbante, care absorb undele electromagnetice și nu le reflectă.

Găsirea unor condiții de frontieră de formă cât mai simplă, dar și de acuratețe cât mai bună (care să aibă reflecții cât mai mici, indiferent care este unghiul sub care cade unda incidentă față de suprafață) este una din problemele dificile ale acestui regim. S-au identificat mai multe soluții ale acestei probleme.

- Condiția de frontieră absorbantă a lui Mur, de ordinul întâi:

$$\frac{\partial E_k}{\partial n} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_k}{\partial t} = 0$$

,

în care E_k , $k = 1, 2, 3$ sunt componentele câmpului.

(Mur, Gerrit. "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations." *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on* 4 (1981): 377-382.)

- Condiția de frontieră absorbantă Enquist-Majda de ordinul doi:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_k}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_k}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2} = 0$$

scrisă aici pentru frontiera $x=0$, a unei probleme 2D. În cazul câmpului electric orientat după Oz , această relație capătă forma mai simplă

$$-\frac{\mu_0}{2c} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

O abordare diferită este cea a lui Beranger, care propune folosirea unui strat de frontieră, PML (Perfect Matched Layer - strat perfect adaptat), cu proprietăți de material alese astfel încât să nu reflecte undele incidente (Fig. 3)

JEAN-PIERRE BERENGER, Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS* 127, 363–379 (1996)

JEAN-PIERRE BERENGER, Perfect Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics (Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics), Morgan & Claypool Publishers, 2007

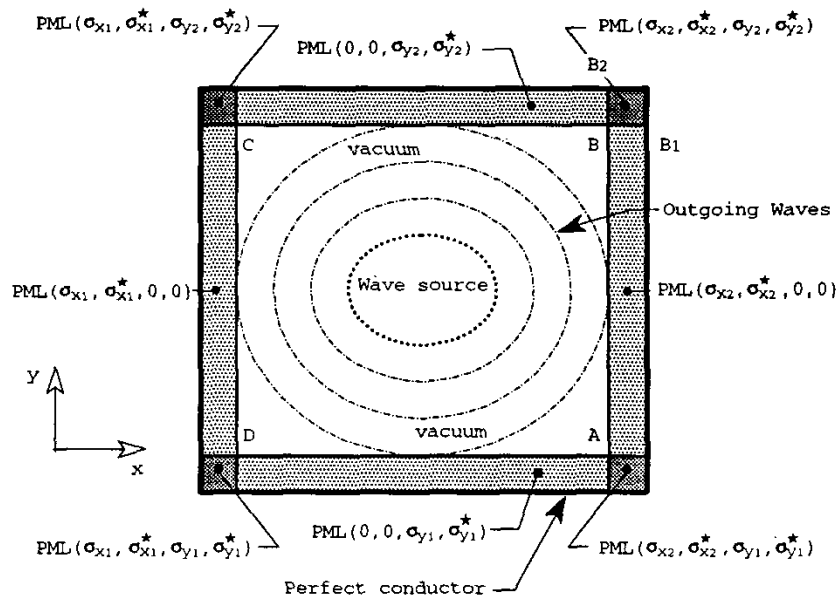


Fig. 3. Condiția de frontieră PML (cu strat perfect adaptat) (Beranger94)

Fiind un material fictiv, putem alege comportări neuzuale pentru substanțele reale. Ele sunt anizotrope, caracterizate de doi tensori, unul al conductivității electrice σ_E și altul σ_H , numit al conductivității magnetice (care este de fapt o permeabilitate integratoare ce determină un „curent magnetic”, proporțional cu H), și care fac ca în interiorul PML, ecuațiile lui Maxwell să aibă forma:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot } E + \sigma_H H = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \text{rot } H + \sigma_E E = 0$$

Deoarece stratul perfect adaptat se termină pe o folie perfect conductoare, pe care $E_t = 0$, unicitatea soluției este garantată de teorema de unicitate clasică pentru câmpul electrodinamic.

Toate aceste abordări sunt aproximări ale modelului exact, în care domeniul de calcul mărginit este înconjurat de domeniul problemei exterioare. Condiția de frontieră exactă a problemei interioare este dată de soluția ecuației integrale de frontieră a câmpului din problema exterioară.

Condițiile absorbante de frontieră sunt folosite intensiv pentru rezolvarea problemei de împrăștiere a undelor electromagnetice, ce trebuie rezolvată pentru determinarea semnăturii radar a unui obiect de formă arbitrară (RCS – Radar Cross Section). O astfel de problemă este diferită de problema fundamentală a electrodinamicii, deoarece sursa de câmp este o undă incidentă cunoscută (de obicei o undă plană cu direcție de propagare dată), în domeniul de calcul se află un obiect de formă cunoscută considerat de obicei perfect conductor (dar se întâlnesc și alte condiții de frontieră pe el, cum sunt folii dielectrice sau magnetice). Unda incidentă este reflectată și împrăștiată de acest obiect în întreg spațiul. Domeniul de calcul se alege unul care cuprinde obiectul analizat, obiect ce este eliminat din domeniu. Pe frontiera exterioară se impune o condiție absorbantă de frontieră iar pe frontiera obiectului se impune condiția PEC pentru suma dintre câmpul incident E_i și cel împrăștiat E_s : $\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s) = 0$, care este de fapt o condiție nenulă pentru componenta tangențială E_t a câmpului necunoscut (cel împrăștiat) – Fig. 4.

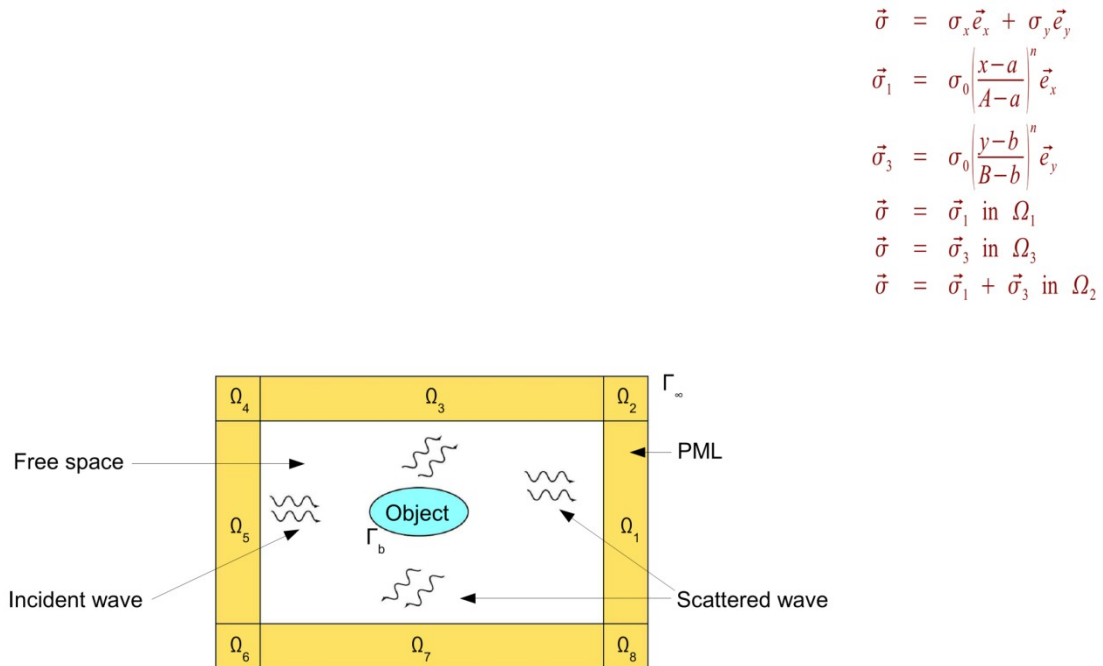


Fig. 4. Împrăștierea unei incidente cu condiții de frontieră PML (Sankaran05)

4. Teoremele liniarității si superpoziției în electrodinamică

$$D = \epsilon E; B = \mu H; J = \sigma E$$

În acest paragraf vom considera doar probleme în medii liniare, în care

. Rezultatele se pot extinde și în cazul mediilor cu caracteristică afină, în care

$$D = \bar{\epsilon} E + P_p; B = \bar{\mu} H + B_r, B_r = \mu_0 M_p; J = \bar{\sigma} E + J_i$$

, dacă vom considera componentele intrinseci

(permanente) ca surse de câmp.

Teorema liniarității demonstrează faptul că liniaritatea de la scara locală se extinde și la scară globală, asigurând liniaritatea relației între sursele de câmp și câmpul electrostatic generat de acestea. În condițiile teoremei de unicitate, problema fundamentală a electrodinamicii este bine formulată. În consecință, ea definește un operator care aplicat surselor de câmp determină soluția problemei. Domeniul de definiție al acestui operator conține următoarea secvență de obiecte, care descriu cauzele câmpului : $C = [P_p, M_p, J_i, H_b, E_b, H(0), E(0)]$, iar codomeniul lui conține obiectele, care descriu câmpurile soluție: $F = [E, H, D, B, \rho, J, V, A]$. Vom nota acest operator de soluționare a problemei de câmp cu $S: \{C\} \rightarrow \{F\}$.

Teorema liniarității afirmă că dacă dielectricul este liniar, atunci și operatorul de soluționare este unul liniar, deci: $S\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k C_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k S(C_k); \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Demonstrația acestei proprietăți se bazează pe liniaritatea ecuațiilor satisfăcute de soluție. În consecință în problemele electrostatice liniare se poate aplica **principiul superpoziției**, conform căruia, suma cauzelor determină suma efectelor. Soluția unei probleme cu mai multe surse se poate determina adunând soluțiile problemelor, care au pe rând o singură sursă, iar celelalte surse sunt nule. Câmpul produs de diferite distribuții de sarcină sau curent se suprapune peste cel produs de polarizația/magnetizația permanentă (respectiv de sarcinile de polarizație sau și curenții de magnetizație) și apoi se suprapune peste câmpul determinat de diferitele condiții de frontieră, care se pot referi la componenta tangențială a intensității câmpului electric sau magnetic de pe frontieră, iar în final se suprapune peste câmpul determinat de diferitele condiții inițiale, pentru câmpul electric sau pentru cel magnetic.

Trebuie notat faptul că aceste teoreme nu se pot aplica în cazul dielectricilor neliniari, chiar dacă $S: \{C\} \rightarrow \{F\}$ este bine definit, dar el nu este un operator liniar. Mai menționăm faptul că superpoziția se poate aplica doar surselor de câmp și nu celorlalte date ale problemei, de exemplu, ea nu se aplică domeniilor de calcul sau constantelor de material. Rezultă că pentru a putea suprapune soluțiile a două probleme, cele două probleme trebuie să aibă domenii de calcul identice, constante de material repartizate la fel precum și aceeași partiție E-H a frontierei.

5. Elementul multipolar de circuit electric cu parametri distribuiți

În acest paragraf vom considera cazul unui domeniu mărginit de o suprafață pe care vom impune condiții care să permită cuplarea problemei de câmp electromagnetic din interiorul domeniului cu un circuit electric exterior (Fig. 5). Pentru a realiza acest deziderat vom identifica pe suprafața domeniului un număr finit de suprafețe disjuncte numite terminale (porturi sau borne), care vor putea fi conectate la nodurile circuitului electric exterior. Pentru aceasta, este necesar ca fiecare din aceste terminale să fie echipotențial (adică să aibă același potențial în toate punctele sale). O a doua condiție este ca intrarea și ieșirea curentului electric (atât de conducție cât și de deplasare să se facă exclusiv prin terminale). Ultima restricție se referă la imposibilitatea cuplajului magnetic dintre interiorul și exteriorul elementului. Această condiție impune ca elementele cu cuplaj magnetic, cum sunt bobinele cuplate mutual să fie modelate ca elemente cuadripolare, și incluse ambele în interiorul domeniului de calcul. Restricția aceasta este eliminată prin definirea unui concept mai general, cel de element multipolar de circuit electro-magnetic, care pe lângă terminalele electrice are și terminale magnetice, prin intermediul cărora se realizează cuplajul magnetic. Aceste terminale magnetice sunt fiecare, echipotențiale, din punct de vedere magnetic.

Deoarece condițiile de frontieră nu se referă la ecuațiile câmpului din interior (care pot fi în regim EQS, MQS, ED, FP), spunem despre elementul astfel definit că are parametri distribuiți. El este cu parametri concentrați doar atunci când câmpul din interior este în regim staționar. Definirea elementului electromagnetic de circuit este un pas important în procesul de modelare. Prin acesta, este definit un sistem dinamic intrare-ieșire, descris de un număr finit de semnale de

intrare și de ieșire. Fiecare terminal definește o pereche de astfel de semnale. În funcție de tipul terminalului (controlat în curent sau în tensiune), cele doua semnale asociate terminalului: curentul terminalului și potențialul terminalului sunt semnale de intrare, respectiv de ieșire sau invers. În cazul terminalelor magnetice, locul curenților și potențialelor este luat de fluxurile magnetice și de potențialele magnetice.

Prin **definiție**, un element multipolar de circuit este un domeniu simplu conex, mărginit de

frontiera Σ pe care se află suprafețele disjuncte $S_k \subset \Sigma, k=1,2,\dots,n$ numite terminale și pe care sunt îndeplinite următoarele condiții de frontieră:

$$(A) \quad n \cdot \frac{\partial B(M,t)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow n \cdot \nabla \times E = 0; \quad M \in \Sigma$$

$$(B) \quad n \cdot \nabla \times H = 0, \quad \dot{M} \in S_D = \bigcup_{k=1}^n S_k$$

$$(C) \quad n \times E(M,t) = 0, \quad M \in S_k, \quad k=1,2,\dots,n$$

iar pentru fiecare terminal $k = 1, 2, \dots, n-1$, este dată fie valoarea curentului, fie valoarea potențialului:

$$i_k = - \int_{S_k} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot n \, dA \quad \text{sau} \quad v_k(t) = \int_{C_{kn} \in \Sigma} E \cdot dr$$

$$v(t) = [v_1; v_2; \dots; v_{n-1}], i(t) = [i_1; i_2; \dots; i_{n-1}]$$

Vectorii $v(t)$ și $i(t)$ reprezintă semnale de excitație sau răspuns, în funcție de modul în care sunt controlate terminalele, în potențial sau în curent. Dacă unele sunt controlate în curent și restul în tensiune, atunci avem un control hibrid. Ultimul terminal se consideră de referință și are deci potențialul convențional nul, dar poate avea și altă valoare cunoscută.

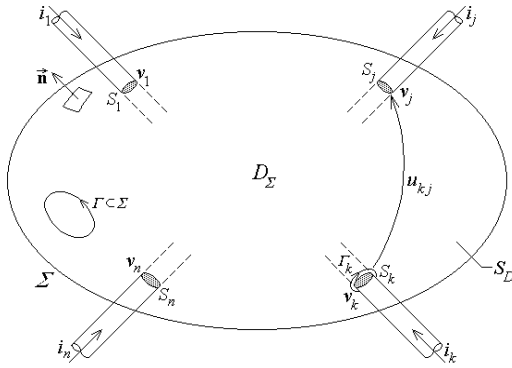


Fig. 5. Elementul multipolar de circuit electric [22]

Condiția de frontieră (A) interzice cuplajul magnetic interior-exterior, condiția (B) obligă curenții să treacă exclusiv prin terminale, iar condiția (C) impune caracterul echipotențial al fiecărui terminal.

Din aceste condiții rezultă următoarele consecințe:

- Curentul total prin frontieră este nul

$$i_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot n \, dA = \oint_{\Sigma} (\mathbf{rot} \, H) \cdot n \, dA = \int_{D_{\Sigma}} [\operatorname{div} (\mathbf{rot} \, H)] \cdot n \, dA = 0$$

- Tensiunea electromotoare pe orice curbă închisă aparținând frontierei este nulă

$$u_{\Gamma} = \oint_{\Gamma \subset \Sigma} E \cdot dr = \int_{S_{\Gamma}} (\mathbf{rot} \, E) \cdot n \, dA = - \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot n \, dA = 0$$

- Curentul terminalului este suma dintre curentul de conducție și cel de deplasare

$$i_k =_{\text{def}} \oint_{\Gamma_k} H \cdot dr = - \int_{S_k} (\mathbf{rot} \, H) \cdot n \, dA = - \int_{S_k} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot n \, dA$$

- Tensiunea între două terminale este diferența potențialelor acestora

$$u_{kj}(t) =_{\text{def}} \int_{C_{kj} \in \Sigma} E \cdot dr = \int_{C_{kj} \in \Sigma} E_t \cdot dr = v_k(t) - v_j(t)$$

- Terminalele sunt echipotențiale

$$\int_{MN \subset S_k} E \cdot dr = \int_{MN \subset S_k} E_t \cdot dr = v(M, t) - v(N, t) = 0$$

- Vom înțelege prin circuit electric cu parametri concentrați o mulțime de elemente multipolare, cu terminalele puse în contact. Un astfel de sistem este un element multipolar, dar cu domeniul multiplu conex. El satisface toate relațiile anterioare, dacă în

$$u_\Gamma = \oint_{\Gamma \subset \Sigma} E \cdot dr = 0$$

locul condiției locale de frontieră (A), considerăm forma sa globală:

, condiție îndeplinită, dacă spațiul complementar circuitului are câmp magnetic nul. Vom considera numai circuite magnetice cu spațiul complementar perfect izolat, și fără surse de câmp, deci cu câmp electromagnetic nul.

- Prima relație a lui Kirchhoff:** suma algebrică a curenților unui nod (terminalul comun al mai multor elemente interconectate) este nulă pentru orice circuit electric

$$0 = \int_{S_D} \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot n \, dA = \int_{S_D} (\text{rot } H) \cdot n \, dA + \sum_{k=1}^n \int_{S_k} (\text{rot } H) \cdot n \, dA = 0 + \sum_{k=1}^n (-i_k) \Rightarrow \sum_{b \in \Sigma} i_b = 0$$

În consecință, curentul terminalului de referință este opusul sumei curenților din celelalte terminale.

- A doua relație a lui Kirchhoff:** suma algebrică a tensiunilor unei bucle (curbă închisă de pe suprafețele mai multor elemente interconectate) este nulă pentru orice circuit electric

$$u_\Gamma = \oint_{\Gamma \subset \Sigma} E \cdot dr = 0 \Rightarrow \sum_{b \in \Gamma} u_b = 0$$

În consecință, pentru orice circuit electric putem defini în mod univoc potențialele nodurilor sale, dacă unul din terminale, cel de referință are potențial convențional nul.

- Teorema puterii transferată pe la borne:** puterea transferată de un element multipolar de circuit este produsul scalar dintre vectorii curentului și potențialele terminalelor

$$\begin{aligned} p(t) &= P_\Sigma = \oint_\Sigma (E \times H) \cdot (-n) \, dA = - \oint_\Sigma [(-\text{grad } v) \times H] \cdot (-n) \, dA = \\ &= \oint_\Sigma [\text{rot } (v H)] \cdot n \, dA - \oint_\Sigma [v (\text{rot } H)] \cdot n \, dA = 0 + \sum_{k=1}^n \int_{S_k} [v (\text{rot } H)] \cdot n \, dA = \\ &= \sum_{k=1}^n v_k \int_{S_k} (\text{rot } H) \cdot n \, dA = \sum_{k=1}^n v_k \int_{S_k} (\text{rot } H) \cdot n \, dA = \sum_{k=1}^n v_k i_k \end{aligned}$$

$$\text{rot}(\nabla H) = (\text{grad } v) \times H + v(\text{rot } H)$$

în care s-a folosit identitatea , cu potențialul $v(\mathbf{r})$ definit ca tensiunea de la punctul $\mathbf{r}$ la terminalul n , determinată pe o curbă ce aparține frontierei. Sensul de referință al puterii coincide cu sensul de referință al curenților. Dacă aceștia sunt orientați spre exterior, atunci puterea p este convențional generată. Puterea este invariantă la etalonarea potențialului

$$p(t) = \sum_{k=1}^n v_k i_k = \sum_{k=1}^n (v_k + C) i_k = \sum_{k=1}^n v_k i_k + C \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^{n-1} v_k i_k \Big|_{v_n=0}$$

- **Teorema de unicitate:** soluția ecuațiilor lui Maxwell din interiorul unui domeniu alcătuit din materiale dielectrice și magnetice strict pasive și conductoare pasive, cu condiții de frontieră de tip element multipolar excitat hibrid este unică.

$$\int_D \sigma E^2 dv + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{D_\Sigma} (\mu H^2 + \epsilon E^2) dv = \oint_\Sigma (E \times H) \cdot (-n) dA = \sum_{k=1}^n v_k i_k = 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq \int_{D_\Sigma} (\mu H^2 + \epsilon E^2) dv = -2 \int_0^t \int_D \sigma E^2 dv \leq 0 \Rightarrow E=0, H=0 \Rightarrow v_k=0; i_k=0$$

Unicitatea fiind asigurată de lema soluției nule. Dacă elementul este excitat cu potențiale arbitrare, atunci curenții din terminale au o variație în timp unic determinată și reciproc.

- **Teorema liniarității:** dacă elementul multipolar este alcătuit din materiale liniare, atunci operatorul intrare-ieșire, care leagă semnalele de excitație de semnalele de răspuns este un operator liniar, în condiții inițiale nule.

În cazul elementului controlat în curent, operatorul intrare-ieșire este un operator de impedanță $\mathbf{v} = \mathbf{Z}\mathbf{i}$, iar în cazul elementului controlat în tensiune, operatorul intrare-ieșire este un operator de admitanță $\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v}$. Acești operatori sunt corect definiți, conform teoremei de unicitate.

- **Teorema pasivității:** dacă elementul multipolar de circuit electric este alcătuit din materiale (strict) pasive, atunci sistemul definit de operatorii intrare-ieșire de impedanță, admitanță sau hibridi este unul pasiv (și stabil).

Trebuie să remarcăm că starea acestui sistem este descrisă de condițiile inițiale $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, elemente ale spațiului infinit dimensional al funcțiilor vectoriale definite pe D . În consecință, sistemul dinamic, liniar și invariant în timp definit de operatorii de intrare-ieșire este un sistem de tip MIMO (Multiple Input Multiple Output), cu un număr finit de intrări și de ieșiri (mai exact n intrări și tot atâtea ieșiri), dar cu un număr infinit de stări. În condițiile în care domeniul problemei D este suficient de neted, atunci spațiul stărilor este numărabil și poate fi aproximat oricât de bine cu un spațiu finit dimensional. Această operație poartă numele de discretizarea

problemei și conduce la un model discret, finit dimensional atât din punctul de vedere al numărului de intrări, ieșiri cât și de stări. Lucrurile nu se opresc aici, pentru că în practică este solicitat de cele mai multe ori un model redus, adică se caută un sistem LTI de cel mai mic ordin (sistem cu parametri concentrați cu cât mai puține stări), dar care să aproximeze cu o eroare acceptabilă relația intrare-ieșire a sistemului original cu parametri distribuiți. Cel mai adesea acest sistem de ordin redus se reprezintă ca un circuit cu parametri concentrați, cu n terminale, sintetizat pe baza operatorilor reduși de intrare-ieșire. Numărul de elemente acumulatorie de energie (LC) din acest circuit dă ordinul de complexitate al modelului redus, care se dorește a fi cât mai mic.

Modelarea structurilor de RF și microunde s-a bazat încă de la începuturi, dar continuă și în prezent cu reprezentarea lor prin circuite compuse din ele elemente cu parametri concentrați și din linii de transmisie. Această reprezentare reflectă comportarea fizică a sistemelor reale și este foarte eficientă atât din punctul de vedere al necesarului de memorie cât și al timpului de simulare.

6. Analiza în domeniul frecvenței

Ecuatiile și problemele formulate anterior se referă la analiza regimului tranzitoriu, în domeniul timpului. Cel mai adesea, în aplicațiile practice ale regimului electrodinamic, mărimile fizice

$$f(t) = F\sqrt{2}\sin(\omega t + \phi)$$

variază sinusoidal în timp: , în care F este valoarea efectivă a mărimii,

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$$

este pulsația, ν este frecvența, T – perioada iar ϕ este faza inițială. Acest mod particular de variație în timp permite simplificarea ecuațiilor prin reprezentarea lor în complex.

Fiecărui element din mulțimea S a funcțiilor sinusoidale de frecvență dată i se asociază un

$$E = Fe^{j\phi} = F(\cos\phi + j\sin\phi)$$

număr complex definit astfel: , al cărui modul este chiar

valoarea efectivă a mărimii sinusoidale și al cărui argument este faza sa inițială. Mulțimea S este un spațiu vectorial bidimensional cu produs scalar, definit de integrala produsului celor două funcții (una complex conjugată), pe o perioadă (proporțional cu puterea activă, dacă un semnal este tensiunea și celălalt este curentul). Operatorul de reprezentare complexă este bijectiv și are următoarele două proprietăți caracteristice:

- Este liniar, adică transformă orice combinație liniară de funcții sinusoidale într-o combinație liniară de numere complexe cu aceiași coeficienți;

- Transformă operațiile diferențiale, de derivare și integrare față de timp în operații algebrice de înmulțire., respectiv de împărțire la $j\omega$:

$$\begin{aligned} f(t) &= F\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \in S \leftrightarrow E = C[f(t)] = Fe^{j\varphi} \in C \Rightarrow \\ f(t) &= C^{-1}[E] = \sqrt{2}\operatorname{Im}(Ee^{j\omega t}) = \sqrt{2}\operatorname{Im}(Fe^{j\varphi}e^{j\omega t}) = \sqrt{2}\operatorname{Im}(Fe^{j(\omega t + \varphi)}) \\ f'(t) &= F\sqrt{2}\omega\cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow E' = j\omega E = Fe^{j(\varphi + \pi/2)} \\ f(t) &= \sum_{k=1, n} \lambda_k f_k(t) \leftrightarrow E = \sum_{k=1, n} \lambda_k E_k \end{aligned}$$

Această ultima proprietate, numită de operaționalitate este foarte utilă în practică, deoarece pe baza ei se simplifică ecuațiile diferențiale față de timp, variabila timp și derivatele față de timp fiind eliminate din ecuații, prin reprezentare în complex. În urma aplicării acestui operator, câmpurile vectoriale devin vectoriale complexe:

$$E(t) = iE_x(t) + jE_y(t) + kE_z(t), E_x, E_y, E_z \in S \Rightarrow \underline{E} = i\underline{E}_x + j\underline{E}_y + k\underline{E}_z \in C^3 \Rightarrow G = \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \in S^3 \Rightarrow G = j\omega \underline{E}$$

O altă clasă de probleme care beneficiază de reprezentarea în complex este cea a problemelor periodice, în care mărimile fizice au o variație temporală periodică, dar nesinusoidală. Astfel de mărimi se pot descompune în serii Fourier, formate din armonici cu frecvențe crescătoare, proporțional cu indexul:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t+T) \in P \Rightarrow f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt; \quad a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt; \end{aligned}$$

Expresiile coeficienților Fourier sunt o consecință a ortogonalității armonicilor în sin și cos, de diferite ordine. Dezvoltarea în astfel de serii, realizată de Fourier pentru prima dată în 1800 a fost una din cele mai mari descoperiri matematice ale tuturor timpurilor. Considerând coeficienții în cos și sin ca părțile reale și imaginare ale unor coeficienți complecși, seria Fourier capătă forma mai elegantă:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t}; \quad c_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt \\ c_k &= \begin{cases} (a_k - jb_k)/2; & k > 0 \\ a_0; & k = 0 \\ (a_k + jb_k)/2; & k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_k = c_k + c_{-k}; b_k = c_k - c_{-k} \end{aligned}$$

complexă cu armonici virtuale negative. Orice semnal periodic se reprezintă în domeniul frecvenței ca un șir de numere complexe, care poartă numele de spectrul semnalului. Corespondența dintre mulțimea funcțiilor periodice și spectrele lor este realizată de transformata

Fourier F . Trunchierea spectrului la un număr finit de armonici definește transformata

Fourier discretă F_d (Discrete Fourier Transform – DFT):

$$E = F[f(t)] = [c_k]_{k=0:\infty} \in C^\infty \Rightarrow E = F_d[f(t)] = [c_k]_{k=0:n} \in C^n$$

$$f(t) = F^{-1}[E] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{jk\omega t} + c_k^* e^{-jk\omega t})$$

Orice funcție periodică de pătrat integrabil se poate aproxima oricât de bine (în norma din L^2) cu un polinom trigonometric (serie Fourier trunchiată), în consecință funcțiile exponențiale $e^{jk\omega t}$ sunt dense în $L^2(0, T)$. Trunchierea seriei introduce în mod evident o eroare, dar care scade pe măsură ce numărul de termeni considerat este mai mare și scade cu cât funcția este mai netedă.

De exemplu, dacă funcția este derivabilă până la ordinul p , iar derivata de ordinul p satisface condiția lui Lipschitz, atunci trunchierea de ordinul n $(S_n f)$ a seriei Fourier are eroarea

$$|f(x) - (S_n f)(x)| \leq K \frac{\ln n}{n^{p+1}}$$

(http://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_of_Fourier_series)

iar în cazul funcțiilor derivabile

$$|f(x) - (S_n f)(x)| \leq \frac{2\|f'\|}{\sqrt{nT}}$$

(<http://www.math.utk.edu/~freire/m435f07/m435f07fourierconvergence.pdf>)

Seria Fourier reprezintă funcțiile continue, elemente ale unui spațiu infinit dimensional, printr-un spectru discret, caracterizat de o mulțime numărabilă de numere complexe, iar prin trunchierea seriei și aproximarea ei cu o sumă se obține o reprezentare finită a semnalului, descrisă de un vector complex, finit dimensional.

Transformata Fourier și forma sa discretă sunt liniare și operaționale:

$$F\left[\sum_{k=1,n} \lambda_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1,n} \lambda_k F[f_k(t)]; \quad F' = F\left[\frac{df}{dt}\right] = j\omega [kc_k]_{k=0:\infty}$$

În consecință, aplicarea transformatei Fourier unei ecuații diferențiale față de timp, cu soluție care variază periodic în timp, elimină variabila timp din ecuație și automat și derivatele față de timp.

Dacă perioada T a funcției tinde către infinit, atunci funcția tinde către o funcție neperiodică, definită pe întreaga axă reală, iar seria Fourier tinde către integrala Fourier:

$$c_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jk\omega t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-jk\omega t) dt =_{def} F[f(t)] = F(\omega); (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} f(t) = F^{-1}[F(\omega)] =_{def} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(jk\omega t) d\omega; F^{-1}[F[f(t)]] = f(t)$$

$$F\left[\sum_{k=1, n} \lambda_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1, n} \lambda_k F[f_k(t)]; \quad F\left[\frac{df}{dt}\right] = j\omega F[f(t)]$$

ceea ce evidențiază caracterul liniar și operațional al transformatei Fourier definită pe baza integralei Fourier. O funcție neperiodică este reprezentată de spectrul ei $F(\omega)$, care este o funcție complexă (continuă) definită pe axa reală a pulsațiilor (http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform).

În cazul particular al funcțiilor periodice, spectrul se reduce la o secvență discretă de impulsuri Dirac, echidistante, ponderate cu coeficienții Fourier. În practică, se folosește frecvent o versiune a transformatei Fourier discrete, numită FFT (Fast Fourier Transform), care are algoritmi de estimare foarte rapizi. Transformatele Fourier directe și inverse se exprimă față de FFT astfel:

$$FFT: F(k) = \sum_{i=1}^N f(i) \omega_N^{(i-1)(k-1)}; \omega_N = \exp(-2\pi j/N) \Rightarrow F(\omega) = F[f(t)] \simeq (T/N) FFT(f)$$

$$IFFT: f(i) = (1/N) \sum_{k=1}^N F(k) \omega_N^{-(i-1)(k-1)} \Rightarrow f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = (N/T) IFFT(F)$$

Pentru a putea aplica transformatele discrete, semnalele continue se eșantionează, atât în domeniul timpului cât și în cel al frecvenței, folosind N eșantioane, de obicei putere a lui 2.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform)

Pentru a studia regimul tranzitoriu în condiții inițiale nenule este preferabilă folosirea în locul transformatei Fourier a transformate integrale Laplace, definită printr-o integrală pe semiaxa pozitivă a timpului (http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform):

$$L[f(t)] =_{\text{def}} \int_{-0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s): C \rightarrow C;$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} e^{st} F(s) ds$$

Această transformă semnalele reale definite pe semi-axa pozitivă a timpului în semnale complexe definite în întreg planul complex, numit aici planul frecvenței complexe. Transformata Laplace inversă se determină prin integrare pe o dreaptă, paralelă cu axa imaginară, din planul complex. Și această transformată este liniară și operațională:

$$L\left[\sum_{k=1,n} \lambda_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1,n} \lambda_k L[f_k(t)];$$

$$L\left[\frac{df}{dt}\right] = sL[f(t)] - f(0_-)$$

Constatăm de această dată că derivarea față de timp se transformă în înmulțire cu frecvența complexă s , dar că apoi se adaugă și valoarea inițială a funcției, luată cu semn schimbat. În acest fel, condițiile inițiale ale ecuațiilor diferențiale se reprezintă în mod explicit după aplicarea transformatei Laplace și trecerea în domeniul operațional, al frecvenței.

7. Ecuațiile complexe ale electrodinamicii

Vom presupune pentru început un domeniu liniar, în care există un câmp electrodinamic cu variație temporală armonică (sinusoidală). Dacă aplicăm tuturor componentelor câmpului

$$E = C[E(t)]; \quad H = C[H(t)]; \dots$$

reprezentarea în complex, ecuațiile lui Maxwell capătă următoarea formă complexă:

$$\begin{array}{lll}
\nabla \cdot \underline{D} = \rho & \nabla \cdot \underline{D} = \rho & \nabla \cdot \underline{E} = \rho \\
\nabla \cdot \underline{B} = 0 & \nabla \times \underline{E} = -j\omega \underline{B} & \nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu \underline{H} \\
\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} & \nabla \times \underline{H} = \underline{J} + j\omega \underline{D} \Rightarrow & \nabla \times \underline{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \underline{E} + \underline{J}_i \Rightarrow \\
\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \Rightarrow & \underline{D} = \epsilon \underline{E} & \\
\underline{D} = \epsilon \underline{E} & \underline{B} = \mu \underline{H} & \\
\underline{B} = \mu \underline{H} & \underline{J} = \sigma \underline{E} + \underline{J}_i &
\end{array}$$

Se constată că în acest regim, forma complexă a legii fluxului magnetic este o consecință a legii inducției electromagnetice și nu mai este o relație independentă. În regim tranzitoriu, după aplicarea transformatei Laplace, ecuațiile lui Maxwell devin:

$$\begin{array}{l}
\nabla \cdot \epsilon \underline{E}(s) = \rho \\
\nabla \times \underline{E}(s) = -s\mu \underline{H}(s) + \mu \underline{H}_0 \\
\nabla \times \underline{H}(s) = (\sigma + s\epsilon) \underline{E}(s) + \underline{J}_i(s) - \epsilon \underline{E}_0
\end{array}$$

$$\underline{H}_0 = \underline{H}(t)|_{t=0}; \underline{E}_0 = \underline{E}(t)|_{t=0}$$

în care

Putem considera această formă generală, urmând ca reprezentările complexă și Fourier să se obțină, considerând condițiile inițiale nule și $s \rightarrow j\omega$. Dacă inducția magnetică este inițial solenoidală, Atunci ea își menține această proprietate pe tot parcursul regimului tranzitoriu, ca o consecință a legii inducției electromagnetice.

Constatăm că ecuațiile regimului MQS respectiv EDP se obțin prin particularizările:

$$\begin{array}{l}
\epsilon = 0 \Rightarrow \nabla \times \underline{H}(s) = \sigma \underline{E}(s) + \underline{J}_i(s) \\
\sigma = 0 \Rightarrow \nabla \times \underline{H}(s) = s\epsilon \underline{E}(s) + \underline{J}_i(s) - \epsilon \underline{E}_0
\end{array}$$

O condiție necesară pentru aplicarea acestor relații este ca mediile să fie liniare atât dielectric, magnetic cât și din punctul de vedere conductiv. Excepție aici face relația constitutivă a conducției, care este afină, lucru acceptabil, atunci când curentul impus este o sursă cunoscută (cu variație sinusoidală în timp, în cazul regimului armonic). După trecerea în domeniul frecvenței, datorită caracterului operațional al transformatei Fourier sau Laplace, din ecuații dispăre timpul precum și derivata față de acesta. Din ecuațiile de ordinul întâi putem elimina intensitatea câmpului magnetic și obținem ecuația de ordinul doi a câmpului electric:

$$\nabla \times E(s) = -s\mu H(s) + \mu H_0 \Rightarrow v \nabla \times E(s) = -sH(s) + H_0 \Rightarrow \nabla \times (v \nabla \times E(s)) = -s \nabla \times H(s) + \nabla \times H_0 \Rightarrow \\ \nabla \times (v \nabla \times E(s)) + s(\sigma + s\varepsilon)E(s) = -sJ_i(s) + s\varepsilon E_0 + \nabla \times H_0$$

$$v = 1/\mu \quad \nabla \times H_0 = \sigma E_0 + J_{i0} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

în care este reluctivitatea magnetică iar , deci condițiile inițiale se exprimă în funcție de soluție și derivata ei temporală, la momentul inițial. După rezolvarea acestei ecuații, cu condiții de frontieră adecvate, se determină câmpul magnetic și

$$H(s) = sv(\mu H_0 - \nabla \times E(s)); \quad \rho = \nabla \cdot \varepsilon E(s)$$

densitatea de sarcină folosind relațiile: . În mod asemănător se determină și ecuația de ordinul doi pentru câmpul magnetic, care are o formă mai complicată:

$$\nabla \times H(s) = (\sigma + s\varepsilon)E(s) + J_i(s) - \varepsilon E_0 \Rightarrow (\sigma + s\varepsilon)^{-1} \nabla \times H(s) = E(s) + (\sigma + s\varepsilon)^{-1} (J_i(s) - \varepsilon E_0) \Rightarrow \\ \nabla \times ((\sigma + s\varepsilon)^{-1} \nabla \times H(s)) + s\mu H(s) = \nabla \times ((\sigma + s\varepsilon)^{-1} (J_i(s) - \varepsilon E_0)) + \mu H_0.$$

În regim armonic, ecuațiile au următoarea formă complexă, obținută prin anularea condițiilor inițiale și înlocuirea variabilei complexe s cu $j\omega$:

$$\nabla \times (v \nabla \times E) + j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)E = -j\omega J_i \\ \nabla \times ((\sigma + j\omega\varepsilon)^{-1} \nabla \times H) + j\omega\mu H = \nabla \times ((\sigma + j\omega\varepsilon)^{-1} J_i).$$

Coeficientul Helmholtz al ecuației câmpului electric este pur imaginar în regim MQS, real și negativ în regim EDFP și complex în regimul ED general. În analiza acestui regim apar și situații, în care acest coeficient este real pozitiv (de exemplu, în cazul integrării numerice a ecuațiilor de propagare, din domeniul timpului). Pentru simplificarea notațiilor, aici mărimile complexe nu au mai fost subliniate.

Potențialele electrodinamice complexe au următoarele definiții

$$\bullet \quad B(t) = \nabla \times A(t) \Rightarrow B(s) = \nabla \times A(s) \\ \bullet \quad E(t) + \frac{\partial A(t)}{\partial t} = -\nabla V(t) \Rightarrow E(s) = -sA(s) + A_0 - \nabla V(s),$$

A_0

în care pentru a simplifica notațiile s-a renunțat la scrierea explicită a variabilei spațiale iar este condiția inițială pentru potențialul vector. Ecuațiile de ordinul doi satisfăcute de aceste potențiale au forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla \operatorname{rot} A(t)) + \sigma \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} + \sigma \nabla V(t) + \varepsilon \nabla \frac{\partial V(t)}{\partial t} &= J_i(t) \Rightarrow \\ \operatorname{rot}(\nabla \operatorname{rot} A(s)) + (\sigma + \varepsilon s)(sA(s) + \nabla V(s)) &= (\sigma + \varepsilon s)A_0 + \varepsilon A_0' + \varepsilon \nabla V_0 + J_i(s) \\ \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} V(t)) = \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &\Rightarrow \nabla \cdot (\sigma \nabla V(s)) = s\rho - \varepsilon \nabla \cdot E_0, \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\sigma A) = 0$$

în condiția de etalonare .

În regimul fără pierderi, deci inclusiv în vid, ecuațiile de ordinul doi au o formă mai simplă:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} A) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} &= \mu_0 J_i \Rightarrow \operatorname{grad}(\operatorname{div} A) - \Delta A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \frac{\partial V}{\partial t} = \mu_0 J_i \Rightarrow \\ -\Delta A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= \mu_0 J_i \Rightarrow -\Delta A(s) + \frac{s^2}{c^2} A(s) = \mu_0 J_i(s) + \frac{sA_0 + A_0'}{c^2} \\ -\Delta V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow -\Delta V(s) + \frac{s^2}{c^2} V(s) = \rho(s)/\varepsilon_0 + \frac{sV_0 + V_0'}{c^2} \end{aligned}$$

în care s-a notat

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

,

$$\operatorname{div} A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot A(s) = -\frac{sV(s) - V_0}{c^2}$$

dacă se adoptă condiția de etalonare a lui Lorenz: .

Se constată că în regimul ED temporal armonic, câmpurile și potențialele satisfac ecuații Helmholtz complexe (eliptice), cu operatori rot-rot, de tipul:

$$\nabla \times (\eta \nabla \times \circ) + \gamma \circ = G(s)$$

$$\eta = 1/\mu$$

$$\gamma = s(\sigma + s\varepsilon)$$

în care, de regulă este o constantă de material, este coeficientul Helmholtz iar G reprezintă sursa de câmp. Spre deosebire de domeniul timpului, unde ecuațiile regimurilor MQS și ED se deosebesc fundamental (fiind parabolice și respectiv hiperbolice), aici deosebirea nu mai este atât de evidentă, fiind toate eliptice (deosebirea fiind că în regim armonic

$$\gamma = j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

coeficientul este pur imaginar și respectiv real). O altă deosebire constă în faptul că ecuația include condiția inițială, în membrul său drept, care descrie sursele de câmp. Doar condițiile de frontieră trebuie impuse în mod explicit, așa cum se făcea și în domeniul

timpului. Aceste condiții sunt indicate de teorema de unicitate a soluției ecuației complexe, care se bazează pe forma complexă a teorema energiei electromagnetice:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -sB + B_0 \Rightarrow H \cdot \nabla \times E = -sB \cdot H + B_0 \cdot H; \\ \nabla \times H &= J + sD - D_0 \Rightarrow E \cdot \nabla \times H = E \cdot J + s E \cdot D - E \cdot D_0; \Rightarrow \\ -\nabla \cdot (E \times H) &= E \cdot J + s E \cdot D + sB \cdot H - E \cdot D_0 - B_0 \cdot H \Rightarrow \\ -\int_{\partial D} (E_t \times H_t) \cdot dA &= (E, J) + s(E, D) + s(B, H) - (E, D_0) - (B_0, H) \\ D_0 &= 0; B_0 = 0; s \rightarrow j\omega \Rightarrow -\int_{\partial D} (E_t \times H_t) \cdot dA = \int_D (\sigma E \cdot E + j\omega (\mu H \cdot H - \epsilon E \cdot E)) dv = P + jQ\end{aligned}$$

În care s-a notat cu $(\cdot, \cdot)$ produsul scalar din $L^2(D)^3$. Conjugarea celui de al doilea factor face ca acest produs să ia valori reale, pentru cazul factorilor normal (adică să devină pătratul normei, a cărei semnificație energetică este evidentă). În consecință, puterea complexă $\underline{S}$ pe care câmpul electromagnetic o transferă de la exteriorul către interiorul unui domeniu este egală cu puterea activă P , transferată corpurilor din domeniu prin conducție plus puterea reactivă Q , transferată câmpului electromagnetic din domeniu. Trebuie să remarcăm că această consecință integrală cu caracter pătratic nu este reprezentarea în complex a teoremei energiei electromagnetice, deoarece energia fiind o mărime pătratică nu are variație sinusoidală în funcție de timp, deci nu poate fi reprezentată în complex.

În cazul unui element multipolar de circuit electric, puterea transferată prin suprafața de borne este

$$-\int_{\partial D} (E_t \times H_t) \cdot dA = \sum_{k=1}^m v_k i_k = v^T \cdot i \Rightarrow \underline{S} = v^T \cdot i = (E, J) - j\omega (E, D) + j\omega (B, H)$$

în care s-a folosit regula de sens de la receptoare. Folosind lema soluției nule, identificăm condițiile de frontieră pentru problema de regim armonic ca fiind componenta tangențială a intensității câmpului electric sau magnetic din orice punct de pe frontieră. În cazul elementului multipolar de circuit electric, aceste condiții se înlocuiesc cu potențialul sau curentul fiecărui terminal. În condiții de frontieră (sau de excitație a terminalelor) nule, rezultă că puterea complexă este nulă deci se anulează și puterea activă și cea reactivă, transferate domeniului D :

$$P = \int_D \sigma E \cdot E dv = 0; \sigma > 0 \Rightarrow E = 0; \quad Q = \omega \int_D (\mu H \cdot H - \epsilon E \cdot E) dv = 0; \mu > 0 \Rightarrow H = 0$$

iar odată cu acestea se anulează și câmpul electromagnetic. Rezultă deci în aceste condiții pentru $\sigma > 0$

constantele de material unicitatea câmpului. Condiția , conform căreia tot domeniul de calcul trebuie să fie conductor pare prea restrictivă în practică, totuși dacă renunțăm la ea pentru

un subdomeniu, atunci în acea regiune fără pierderi pot să apară rezonanțe electromagnetice, care duc la pierderea unicității câmpului. Constatăm că în cazul câmpului armonic nu mai sunt necesare condiții inițiale. Lucru normal, dacă ne gândim că acest regim începe de la timpul minus infinit. Iată că în acest regim, condițiile de unicatitate sunt puțin diferite față de cele ale regimului tranzitoriu.

Un ultim aspect care trebuie menționat este caracterul liniar al ecuațiilor, pentru că altfel nu s-ar fi putut aplica transformata Laplace, Fourier sau reprezentarea în complex. În consecință, relația între excitații (care sunt date ale problemei) și răspunsuri (care sunt soluția problemei) este una liniară, deci sunt îndeplinite condițiile teoremelor liniarității și superpoziției. De exemplu, în cazul elementului multipolar de circuit, controlat în curent asta înseamnă că răspunsurile, adică potențialele terminalelor depind liniar de excitații, adică de curenți, iar relația intrare-ieșire a unui astfel de element este una liniară, descrisă deci de matricea admitanțelor complexe Y (cu $I = YV$), care este funcția de transfer (circuit) a elementului, bine definită, datorită teoremei de unicatitate și a celei de liniaritate. În cazul în care elementul este controlat hibrid

$$\begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & A_{ab} \\ B_{ba} & Y_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix},$$

în care primele terminale (din grupul a) sunt controlate în curent iar restul (din grupul b) sunt controlate în tensiune. Funcția de circuit este acum matricea hibridă conține blocurile: impedanțele complexe Z_{aa} , admitanțele Y_{bb} , factorii de transfer în potențial A_{ab} și factorii de transfer în curent B_{ba} . Toate aceste matrice sunt funcție de pulsația ω . Condițiile de frontieră sunt cele trei omogene (nule) de la elementul de circuit, la care se adaugă excitațiile nenule, date de vectorii cu componente complexe I_a și V_b . Simularea unui element multipolar în domeniul frecvenței înseamnă determinarea caracteristicilor lui de frecvență, adică modul în care funcțiile de circuit depind de pulsație. Pentru a extrage această dependență trebuie rezolvate o serie de

$$Z_{kj} = \frac{V_k}{I_j} \Big|_{I_i = \delta_{ij}, V_b = 0}$$

probleme de câmp electromagnetic la diferite frecvențe. De exemplu, . Aceste funcții sunt de regulă transcendente față de variabila s (și implicit ω), dar pot fi approximate cu funcții raționale de ordin finit, operație care duce la un model de ordin redus (adică un sistem cu un număr finit de stări).

Această caracterizare nu este singura, în aplicațiile de radiofrecvență și de microunde se preferă folosirea parametrilor de transmisie (numiți și de împrăștiere, sau parametri S). Aceștia se exprimă în funcție de impedanțe sau admitanțe

(http://en.wikipedia.org/wiki/Scattering_parameter,

<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

Dar să revenim acum la condițiile de frontieră, care în sinteză, pot fi de următoarele tipuri:

- PEC – Perfect Electric Conductor, la suprafața căruia $\mathbf{E}_t=0$;
- PMC – Perfect Magnetic Conductor, la suprafața căruia $\mathbf{H}_t=0$;
- S_E , suprafață pe care $\mathbf{E}_t$ este cunoscut (sau în termeni de potențiale electrodinamice sunt date componenta tangențială a potențialului vector $\mathbf{A}$ și potențialul scalar V pe suprafață);
- S_H , suprafață pe care $\mathbf{H}_t$ este cunoscut (sau în termeni de potențial magnetic este dată componenta tangențială a vectorului $\nabla \text{rot } \mathbf{A}$);
- EMCE – Elementul Multipolar de Circuit Electric, la care sunt îndeplinite condițiile

$$\begin{aligned} n \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0; \quad M \in \Sigma; \quad n \cdot \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad M \in S_D = \bigcup_{k=1}^n S_k; \quad n \times \mathbf{E}(M, t) = 0, \quad M \in S_k \\ \int_{S_k} (\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\partial S_k} \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = -I_k; \quad \int_{C_k \in \Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V_k, \quad k=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

sau

În funcție de tipul de excitație: în curent, tensiune sau hibrid;

- SIBC – Surface Impedance Boundary Condition, este dată (de obicei nulă) valoarea unei combinații liniare dintre $\mathbf{E}_t$ și $\mathbf{H}_t$, coeficienții având semnificația unor impedanțe superficiale. O astfel de condiție corespunde condiției de tip Robin din electrostatică (<http://facta.junis.ni.ac.rs/eae/fu2k112as/1ida.pdf>):

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{H} \times \mathbf{n} = (1/Z_s) [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} = (1/Z_s) [\mathbf{n} \times (j\omega \mathbf{A} + \nabla V)] \times \mathbf{n},$$

în care Z_s este impedanța superficială. De exemplu în cazul în care domeniul de calcul este mărginit de un corp conductor în care câmpul electromagnetic pătrunde și se atenuează exponențial, ca la semispațiul conductor, expresia acestei impedanțe cunoscută sub numele de condiția de frontieră SIBC Leontovich este

$$Z_s = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma\delta}$$

În general, condiția SIBC neomogenă are expresia $\mathbf{n} \times \mathbf{H} + (1/Z_s) [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} = -\mathbf{J}_s$.

- Condiția ABC - absorbantă de frontieră de tip Mur

$$\frac{\partial E_k}{\partial n} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_k}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial n} - \frac{j\omega}{c} E = 0$$

care se constată că este o condiție de tip Robin pentru intensitatea câmpului electric.

- Condiția PML – Perfect Matched Layer care se termină cu un conductor perfect este de fapt o condiție de frontieră de tip PEC, doar că în stratul superficial de frontieră se modifică valorile constantelor de material.

Teorema energiei în formă complexă stă la baza demonstrația teoremei de unicitate pentru aceste condiții de frontieră.

8. Teoremele reciprocității și pasivității

Ca multe teoreme ale electromagnetismului, și acestea au rădăcinile în forma lor primară în teoria circuitelor electrice. Mai mult, la fel ca majoritatea teoremelor fundamentale ale câmpului, și acestea reflectă la scară globală proprietățile locale de material.

Spunem despre un material că este reciproc, dacă tensorii proprietăților sale (dielectrice $[\epsilon] = [\epsilon]^T$, magnetice $[\mu] = [\mu]^T$ și de conducție $[\sigma] = [\sigma]^T$) sunt simetrici. Considerente termodinamice garantează această proprietate în cazul materialelor pasive, care au acești tensori simetrici și pozitiv definiți (http://w0.rz-berlin.mpg.de/imprs-cs/download/sy04_8.pdf).

Teorema reciprocității are următorul enunț: în medii liniare și reciproce, relația dintre sursele câmpului (curenții electrici impuși) și soluție (câmpul electric generat) este una simetrică. Mai exact, operatorul de ordinul doi, al problemei fundamentale a electrodinamicii, cel care leagă distribuția câmpului electric de distribuția curentului impus

$$A: \vec{j}_{def} - (1/s) \nabla \times (\nabla \times \vec{j}) - \gamma' \cdot \vec{j} = \sigma + s\epsilon; AE = J_i$$

este în condiții de frontieră nule un operator complex-simetric, fără să fie hermitian (autoadjunct http://en.wikipedia.org/wiki/Hermitian_adjoint). Doua câmpuri determinate de distribuțiile

$$J_{i1} = AE_1, J_{i2} = AE_2$$

arbitrare de curent au în același domeniu D, în condiții de frontieră

$$(J_{i1}, E_2) = (J_{i2}, E_1) \Leftrightarrow (AE_1, E_2) = (E_1, AE_2)$$

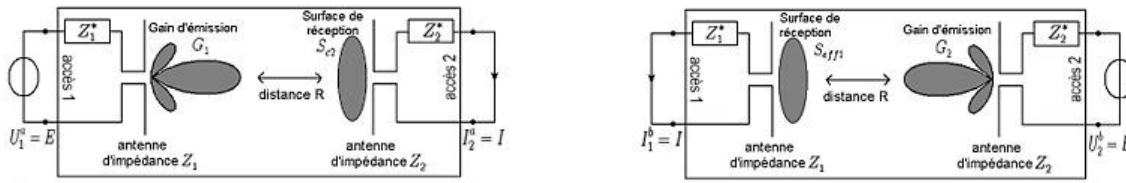
identice nule produsele încrucișate din $L^2(D)^3$ egale.

Reciprocitatea nu se referă numai la sursele interne, ci și la condițiile de frontieră, cum se întâmplă de exemplu în cazul elementului multipolar de circuit electric, care are în consecință, matricea impedanțelor (ca și cea a admitanțelor sau a parametrilor S) simetrică (Fig.). Trebuie să remarcăm că aici produsele încrucișate nu sunt produse scalare (deoarece ce nu au un factor conjugat, el nu sunt reale când factorii sunt egali), dar acest lucru nu are relevanță aici.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se folosește un raționament asemănător cu cel de la teorema energiei electromagnetice, doar că se consideră două stări distincte 1 și 2 ale aceluiași sistem și se operează cu produse încrucișate (care nu sunt produse scalare) – un fel de pseudo-puteri:

$$\begin{aligned}
-(E_2, sJ_{i1}) &= (E_2, \text{rot}(\bar{v} \text{rot} E_1) + \bar{y} E_1) = \int_D (\text{rot}(\bar{v} \text{rot} E_1) \cdot E_2 + \bar{y} E_1 \cdot E_2) dv = \int_D (\bar{v} \text{rot} E_1 \cdot \text{rot} E_2 + \bar{y} E_1 \cdot E_2) dv \\
-(E_1, sJ_{i2}) &= -(sJ_{i2}, E_1) = (\text{rot}(\bar{v}^T \text{rot} E_2) + \bar{y}^T E_2, E_1) = \int_D (\bar{v}^T \text{rot} E_2 \cdot \text{rot} E_1 + \bar{y}^T E_2 \cdot E_1) dv \\
\bar{v} &= \bar{v}^T; \bar{y} = \bar{y}^T \Rightarrow (E_2, J_{i1}) = (E_1, J_{i2})
\end{aligned}$$

În particular dacă un curent $i_1=i$, plasat în punctul P1 (ca impuls Dirac vectorial) produce în punctul P2 un câmp $E_2=E$, atunci curentul $i_2=i$, plasat în punctul P2 va produce în punctul P1 câmpul $E_1=E$, egal cu E_2 , din cazul anterior.



a) Prima antenă emite

b) Prima antenă recepționează

Fig. Reciprocitatea unui sistem electromagnetic cu două antene

În condiții de frontieră nenule:

$$\begin{aligned}
&\int_D (\bar{v} (\nabla \times E_1) \cdot (\nabla \times E_2) + \bar{y} E_1 \cdot E_2) dv = \int_D (\nabla \times (\bar{v} \nabla \times E_1) \cdot E_2 + \bar{y} E_1 \cdot E_2) dv - \int_D \nabla \cdot ((\bar{v} \nabla \times E_1) \times E_2) dv = \\
&\int_D (\nabla \times (\bar{v} \nabla \times E_1) + \bar{y} E_1) \cdot E_2 dv - \int_{\partial D} (\bar{v} \nabla \times E_1) \times E_2 \cdot dA = -s \int_D J_{i1} \cdot E_2 dv + s \int_{\partial D} (H_1 \times E_2) \cdot dA \Rightarrow \\
&\int_D J_{i1} \cdot E_2 dv + \int_{\partial D} (E_2 \times H_1) \cdot dA = \int_D J_{i2} \cdot E_1 dv + \int_{\partial D} (E_1 \times H_2) \cdot dA \Leftrightarrow \\
&\int_D (J_{i1} \cdot E_2 - J_{i2} \cdot E_1) dv = \int_{\partial D} (E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1) \cdot dA
\end{aligned}$$

în

Ultima identitate este forma matematică generală a teoremei reciprocității. Aplicând teorema

$$(J_{i1} \cdot E_2 - J_{i2} \cdot E_1) = \text{div}(E_1 \times H_2 - E_2 \times H_1)$$

Gauss-Ostrogradski, rezulta și forma sa locală:

Această relație nu conține explicit pulsația, ceea ce sugerează că ar fi valabilă și în domeniul timpului (W.J. Welch, Reciprocity theorems for EM fields whose time dependence is arbitrary, Trans. AP, 1959).

În cazul condițiilor de frontieră nule (sau ale domeniilor extinse în întreg spațiul, pentru care câmpul scade asimptotic către zero suficient de repede), rezultă relația particulară:

$$\int_D (J_{i1} \cdot E_2 - J_{i2} \cdot E_1) dv = 0 \Leftrightarrow (J_{i1}, E_2) = (J_{i2}, E_1)$$

cunoscută sub numele de relația de reciprocitate **Rayleigh-Carson**, iar în cazul în care sursele interne sunt nule (nu există curenți impuși J_i), rezultă relația

$$\int_{\partial D} (E_1 \times H_2) \cdot dA = \int_{\partial D} (E_2 \times H_1) \cdot dA$$

cunoscută sub numele de relația de reciprocitate **Lorentz**. În cazul elementului multipolar de

$$\int_{\partial D} (E_1 \times H_2) \cdot dA = v_1^T \cdot i_2; \int_{\partial D} (E_2 \times H_1) \cdot dA = v_2^T \cdot i_1 \Rightarrow v_1^T \cdot i_2 = v_2^T \cdot i_1$$

circuit

În consecință, matricea impedanțelor unui element multipolar constituit din materiale reciproce (izotrope sau anizotrope cu tensori caracteristici de material simetrici) este o matrice simetrică:

$$v_1^T \cdot i_2 - v_2^T \cdot i_1 = 0 \Rightarrow v_1^T \cdot i_2 - i_1^T \cdot v_2 = 0 \Rightarrow (\mathbf{Zi}_1)^T i_2 - i_1^T \mathbf{Zi}_2 = i_1^T Z^T i_2 - i_1^T \mathbf{Zi}_2 = i_1^T (Z^T - Z) i_2 \Rightarrow Z = Z^T$$

Reciprocitatea sursă-efect se referă atât la semnalele armonice, reprezentate în complex, cât și la spectrele semnalelor din domeniul frecvenței, deci și la semnalele tranzitorii în condiții inițiale nule. Dacă ne referim în schimb la forma pătratică a teoremei (cea cu produse încrucișate – pseudoputeri), atunci, în domeniul timpului avem o operație de convoluție, deoarece aceasta corespunde produsului din domeniul frecvenței

(http://www.atdehoop.com/Papers/DeHoopAT_paper_1987_01.pdf).

Teorema are mai multe aplicații practice, întâlnite de exemplu în studiul antenelor. Prin profilul de radiație al unei antene înțelegem o suprafață în închisă, care are în centru antena și care indică prin distanța până la centru, puterea electromagnetică radiată în direcția respectivă. Antenele puternic direcționate au acest profil de forma unui lob orientat în direcția de radiație preferențială. Teorema reciprocității garantează faptul că o antenă are același profil atât la emisie cât și la recepție, caz în care lungimea segmentului indică sensibilitatea antenei pentru o undă electromagnetică venită din direcția segmentului respectiv

([http://en.wikipedia.org/wiki/Reciprocity_\(electromagnetism\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Reciprocity_(electromagnetism)),
http://en.wikipedia.org/wiki/Radiation_pattern).

O altă consecință importantă a teoremei reciprocității este, așa cum se va vedea ulterior faptul că funcția Green a regimului electrodinamic este simetrică.

Relația de reciprocitate între curenții impuși și intensitatea câmpului magnetic este cunoscută sub numele de **relația Feld-Tai**, care este valabilă în condiții mai restrictive decât reciprocitatea

Lorentz

(<http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/21036/r10869.0001.001.pdf;jsessionid=7293769A2303AB1959016D6CD42FC6A7?sequence=2>). Mai exact, se presupune că mediul este omogen din punctul de vedere al impedanței de undă, de exemplu raportul μ/ϵ este o constantă scalară.

Teorema pasivității ne garantează că proprietatea de pasivitate se transferă de la nivel local la nivel global. Ea are următorul enunț: puterea activă consumată de un domeniu disipativ (cu conductivitate strict pozitivă) este pozitivă, pentru orice excitație:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = -\operatorname{Re}\left(\int_{\partial D} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{A}\right) = \operatorname{Re}(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{i}) = \operatorname{Re}(\mathbf{i}^T \cdot \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{i}) = (\mathbf{E}, \mathbf{J}) = \int_D \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dv = \int_D \sigma |\mathbf{E}|^2 dv > 0$$

deci elementele de circuit local disipative sunt și global pasive, având matricea impedanță real real-pozitivă (http://www.stanford.edu/~boyd/papers/pdf/LTI_N_port.pdf, http://en.wikipedia.org/wiki/Positive-real_function, <https://ccrma.stanford.edu/~jos/prf/>).

Constatăm că de această dată în demonstrație s-a folosit teorema energiei electromagnetice (cu produsul scalar adevărat din $\mathbb{R}^n$ și respectiv din $L^2(D)^3$, care are un factor complex conjugat).

Atât teorema energiei, cât și implicit teoremele pasivității și reciprocității au fundamentul pe relații mai generale, cum sunt relațiile lui Tellegen. Pentru a modela inclusiv straturi PML, vom considera câmpul electromagnetic în regim armonic produs de distribuțiile de curent electric $\mathbf{J}_e$ și de „curent magnetic” $\mathbf{J}_m$, în două situații, eventual distincte:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_e; & \nabla \times \mathbf{H}' &= j\omega \mathbf{D}' + \mathbf{J}'_e; \\ -\nabla \times \mathbf{E} &= j\omega \mathbf{B} + \mathbf{J}_m & -\nabla \times \mathbf{E}' &= j\omega \mathbf{B}' + \mathbf{J}'_m \end{aligned}$$

Integrând (ca la demonstrația teoremei energiei electromagnetice) pe domeniul mărginit de calcul, suma celor două ecuații, amplificate în produs scalar cu câmpul din cealaltă situație, se obțin următoarele consecințe integrale și diferența lor:

$$\begin{aligned} -\int_{\partial D} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} &= \int_D [(j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_e) \cdot \mathbf{E}' + (j\omega \mathbf{B}' + \mathbf{J}'_m) \cdot \mathbf{H}] dv \\ -\int_{\partial D} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}') \cdot d\mathbf{A} &= \int_D [(j\omega \mathbf{D}' + \mathbf{J}'_e) \cdot \mathbf{E} + (j\omega \mathbf{B} + \mathbf{J}_m) \cdot \mathbf{H}'] dv \\ -\int_{\partial D} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \mathbf{H}') \cdot d\mathbf{A} &= \int_D (\mathbf{J}_e^t \cdot \mathbf{E}' - \mathbf{J}_e'^t \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_m'^t \cdot \mathbf{H} - \mathbf{J}_m^t \cdot \mathbf{H}') dv; \\ \text{cu } \mathbf{J}_e^t &= j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_e, \mathbf{J}_e'^t = j\omega \mathbf{D}' + \mathbf{J}'_e, \mathbf{J}_m'^t = j\omega \mathbf{B}' + \mathbf{J}'_m, \mathbf{J}_m^t = j\omega \mathbf{B} + \mathbf{J}_m \end{aligned}$$

Iar dacă perturbăm relațiile constitutive ale problemei originale, atunci variația câmpului, în condițiile în care sursele nu se modifică va satisface relația integrală, cunoscută sub numele de **teorema lui Tellegen pentru diferența variațiilor** (<http://117.55.241.6/ieee/2004/Microwave%20theory%20and%20techniques%20IEEE%20Trans%20on/vol.52%20issue.1/adjoint%20techniques%20for%20sensitivity%20analysis%20in%20high%20frequency%20structure%20CAD.pdf>):

$$-\int_{\partial D} (E' \times \Delta H - \Delta E \times H') \cdot dA = \int_D (J_m'^t \cdot \Delta H - J_e'^t \cdot \Delta E + j\omega \Delta D \cdot E' - j\omega \Delta B \cdot H') dv.$$

9. Forma variațională, slabă a ecuațiilor electrodinamicii

Deoarece ecuațiile electrodinamicii în domeniul timpului sunt de tip hiperbolic, ele nu au o funcțională de energie, convexă, care să aibă valoare minimă, pentru soluție, așa cum se întâmplă în cazul regimurilor statice și staționare descrise de ecuații eliptice. La fel ca în ED stau lucrurile și în regimul MQS, în care ecuațiile sunt de tip parabolic. Chiar și în aceste condiții, există mai multe variante în care se scriu formele slabe ale ecuațiilor electrodinamicii.

De exemplu, în cazul regimului EDPF, intensitatea câmpului electric satisface în domeniul timpului ecuația, cu operator diferențial auto-adjunct (conform teoremei de reciprocitate):

$$\nabla \times (\nu \nabla \times E) + \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{\partial J_i}{\partial t},$$

care în condiții de frontieră nule, integrată în spațiu și timp conduce la funcționala pătratică:

$$F = \int_0^T \int_D \left(\frac{\nu}{2} |\nabla \times E|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right|^2 + E \cdot \frac{\partial J_i}{\partial t} \right) dv dt.$$

$$E \rightarrow E + \delta E$$

Pentru mici variații ale câmpului electric

aceasta are variația

$$\delta F = \int_0^T \int_D \left(\nu (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times \delta E) - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta E}{\partial t} + \delta E \cdot \frac{\partial J_i}{\partial t} \right) dv dt$$

Care integrată prin părți, în condiții de frontieră nule, dă

$$\delta F = \int_0^T \int_D \left(\nabla \times (v \nabla \times E) + \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\partial J_i}{\partial t} \right) \cdot \delta E \, dv dt$$

care este chiar reziduul ecuației inițiale, proiectat pe o variație arbitrară a câmpului electric. În consecință, variația funcționalei F se anulează în cazul soluției. Punctul în care funcționala F este staționară $\delta F = 0$ corespunde deci soluției ecuației regimului EDFP. Deoarece componentele tangențiale sunt nule pe frontieră, atât pentru E cât și pentru δF , rezulta că PEC este condiție esențială de frontieră. Deoarece curentul impus intervine în expresia funcționale, este de așteptat ca densitatea sa superficială, atunci când este cunoscută componenta sa tangențială la frontieră să fie o condiție naturală.

Într-o manieră asemănătoare se obține forma slabă a ecuațiilor satisfăcute de potențialele electrodinamice. De această dată funcționala pătratică de energie are în condiții nule expresia:

$$F = \int_0^T \int_D \left(\frac{B^2}{2\mu} - \frac{\varepsilon E^2}{2} - A \cdot J_i + \rho V \right) dv dt$$

obținută prin integrarea în spațiu și timp a densității de energie electromagnetică, din care se scad termenii corespunzători surselor. Vom impune ca prima variație a acestei funcționale, față de

$$V \rightarrow V + \delta V$$

variațiile celor două potențiale să fie nulă. Pentru variația potențialului scalar , după integrare prin părți se obține chiar reziduul ecuației Poisson pentru potențial (echivalentă cu legea fluxului electric), proiectat pe variația arbitrară a potențialului

$$\delta F = \int_0^T \int_D (\varepsilon \nabla(\delta V) + \rho \delta V) dv dt = \int_0^T \int_D (\rho - \nabla \cdot (\varepsilon E)) \delta V dv dt = 0$$

$$A \rightarrow A + \delta A$$

Pentru variația potențialului vector , după integrare prin părți se obține chiar legea circuitului magnetic, proiectată pe variația arbitrară a acestui potențial

$$\delta F = \int_0^T \int_D \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \delta A \cdot B + \frac{\partial \delta A}{\partial t} \cdot (\varepsilon E) - \delta A \cdot J_i \right) dv dt = \int_0^T \int_D \left(\nabla \times \frac{B}{\mu} - \frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t} - J_i \right) \cdot \delta A dv dt = 0$$

Legea inducției ca și legea fluxului magnetic sunt automat satisfăcute, prin faptul că se operează cu cele două potențiale electrodinamice, definite pe baza acestor legi. Punctul în care funcționala F este staționară $\delta F = 0$ corespunde deci soluției ecuațiilor lui Maxwell, exprimate în funcție de potențialele regimului EDFP.

În continuare vom considera ecuațiile de tip Helmholtz pentru intensitatea câmpului electric și pentru potențialul vector, de forma:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nu \nabla \times E(s)) + s(\sigma + s\varepsilon)E(s) &= -sJ_i(s) + s\varepsilon E_0 + \nabla \times H_0 \Leftrightarrow \\ \nabla \times (\nu \nabla \times E(t)) + \sigma \frac{\partial E(t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial J_i(t)}{\partial t}; \quad E = -\frac{\partial A}{\partial t}; \Rightarrow \\ \nabla \times (\nu \nabla \times A(t)) + \sigma \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2} &= J_i(t)\end{aligned}$$

Aici, potențialul scalar este nul, iar ecuațiile Helmholtz pentru E și A în regim armonic:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times E) + \gamma E = -sJ_i \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times (\nu \nabla \times A) + \gamma A = J_i; \quad \gamma = s(\sigma + s\varepsilon); \quad s = j\omega; \quad A = -E/s$$

au coeficientul comun

$$\gamma = \frac{\sigma}{h} + \frac{\varepsilon}{h^2}$$

- este real și pozitiv în integrarea numerică implicită (cu pasul de timp h) a ecuațiilor cu derivate parțiale din domeniul timpului;
- $\gamma = j\omega\sigma$ este pur imaginar în regim MQS armonic;
- $\gamma = -\varepsilon\omega^2$ este real și negativ în regim EDFP armonic;
- $\gamma = 0$ este nul în ecuația pentru potențialul vector din regimul magnetic staționar MG;
- $\gamma = \sigma + j\omega\varepsilon$ este complex în regim ED armonic cu pierderi și în urma transformatei Laplace.

Forma slabă a ecuației Helmholtz pentru potențialul vector A se obține prin proiecție Galerkin:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nu \nabla \times A) + \gamma A &= J_i \Rightarrow \\ \int_D \left(\nabla \times (\nu \nabla \times A) + \gamma A - J_i \right) \cdot U \, dv &= \int_D \left(\nu (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times U) + \gamma A \cdot U - J_i \cdot U \right) dv - \int_{\partial D} \left(\nu (\nabla \times A) \times n \right) \cdot U \, dS = 0\end{aligned}$$

Considerăm frontiera domeniului de calcul partajată în două părți disjuncte:

- S_E , pe care atât A cât și funcția de test U au componentele tangențiale nule:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{U} = 0$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

și deoarece câmpul electric este , rezultă că și acesta are componenta tangențială nulă pe această suprafață. Mai mult, inducția magnetică are pe această

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

suprafață, componenta normală nulă . Acestea sunt condiții esențiale de frontieră, motiv pentru care, prin abuz de limbaj le putem numi de tip Dirichlet vectoriale.

- S_H , pe care este cunoscut:

$$\nu(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \Rightarrow \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s$$

care este deci componenta tangențială a intensității câmpului magnetic, rotită cu 90 de grade în plan tangențial. Semnificația sa fizică este o densitate de curent distribuită superficial la suprafața unui corp feromagnetic perfect aflat la frontieră (orientată tangențial). Deoarece intervine în expresia funcționalei, aceasta este o condiție naturală de frontieră, motiv pentru care, prin abuz de limbaj o numim de tip Neumann vectorială. Această ultimă condiție s-ar putea înlocui, cel puțin pe o parte a suprafeței S_H cu o condiție de tip Robin, în care densitatea superficială de curent este proporțională cu componenta tangențială a câmpului electric (SIBC): $\mathbf{J}_s = \mathbf{H} \times \mathbf{n} = (1/Z_s)[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} = -(j\omega/Z_s)[\mathbf{n} \times \mathbf{A}] \times \mathbf{n}$ dar pentru moment nu o să procedăm așa.

Impunând condițiile de frontieră, rezultă forma variațională finală a ecuației potențialului ED vector în domeniul frecvenței:

$$\int_D (\nu(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) + \gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}) dv = \int_D \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{U} dv + \int_{S_H} \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{U} dS$$

$$a(\mathbf{A}, \mathbf{U}) = f(\mathbf{U}), \forall \mathbf{U} \in H$$

Aceasta are forma , în care

$$a(\mathbf{A}, \mathbf{U}) = \int_D (\nu(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) + \gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}) dv$$

$$f(\mathbf{U}) = \int_D \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{U} dv + \int_{S_H} \mathbf{J}_{st} \cdot \mathbf{U}_t dS$$

sunt o funcțională biliniară și una liniară definite pe $H \times H$ și respectiv H , care este un spațiu Hilbert complex (spațiul în care se caută soluția A , izomorf cu spațiul funcțiilor test U , deci se află funcții care satisfac condițiile esențiale de frontieră).

Dacă pe partea de frontieră S_z este îndeplinită condiția

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} + (1/Z_s) [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \Leftrightarrow \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s + (j\omega/Z_s) [\mathbf{n} \times \mathbf{A}] \times \mathbf{n}$$

atunci, funcționalele din formularea variațională capătă formele

$$a(\mathbf{A}, \mathbf{U}) = \int_D (\mathbf{v}(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{U}) + \gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}) dv + \int_{S_z} ((j\omega/Z_s)(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_t dS$$

$$f(\mathbf{U}) = \int_D \mathbf{J}_i \cdot \mathbf{U} dv + \int_{S_H \cup S_z} \mathbf{J}_{st} \cdot \mathbf{U}_t dS$$

Formularea variațională a problemei fundamentale a electrodinamicii, în matematică este cunoscută sub numele de forma slabă a ecuației de ordinul doi, satisfăcută de potențialul vector. Această formulare stă la baza metodei elementelor finite. Pentru formularea riguroasă din punct de vedere matematic este necesară stabilirea cu precizie a cadrului funcțional, prin definirea

$$H = H_{S_E}(\text{rot}, D) = \left\{ A \in [L^2(D)]^3 \mid \nabla \times A \in [L^2(D)]^3, \text{Tr}(\mathbf{n} \times A, S_E) = 0 \right\}$$

exactă a spațiului Hilbert

, care este de fapt spațiul Sobolev al funcțiilor vectoriale, rot-conforme definite pe D , cu condiții de frontieră esențiale nule (cu urmă nulă pe S_E), înzestrat cu produsul scalar (http://en.wikipedia.org/wiki/Sobolev_space)

$$(\mathbf{A}, \mathbf{U})_H = (\mathbf{A}, \mathbf{U})_{L^2(D)^3} + (\nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{U})_{L^2(D)^3} = \int_D (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{U})) dv$$

Formularea corectă a problemei variaționale cu coeficient Helmholtz real și pozitiv se demonstrează pe baza **teoremei Lax-Milgram**, care afirmă că dacă funcționala biliniară

$$a(.,.): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

este

$$|a(u, v)| < C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in X$$

- mărginită și

$$|a(u, u)| > c \|u\|^2, \quad \forall u \in X$$

- coercivă

atunci problema determinării elementului v , astfel încât $a(u, v) = f(u)$, în care $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, este o funcțională liniară este o problemă bine formulată, are soluție în X , aceasta este unică și depinde continuu de f .

(http://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Milgram_theorem,
http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation).

În (http://www.hpfem.jku.at/publications/ln_maxwell.pdf) se demonstrează că cele două condiții sunt îndeplinite, în cazul coeficientului $\gamma \in \mathbb{R}_+$ cu $c = \min\{\inf(v), \inf(\gamma)\}; C = \max\{\sup(v), \sup(\gamma)\}$. În consecință, problema numerică, de integrare implicită a ecuațiilor potențialului electrodinamic vector este una bine formulată, are soluție, aceasta este unică și depinde continuu de sursele de câmp.

Teorema Lax-Milgram a fost extinsă pentru cazul funcționalelor complexe de Babuska-Aziz. Prezența părții imaginare nenule a coeficientului Helmholtz, stabilizează problema, chiar și în cazul în care partea reală este negativă. În consecință, problema fundamentală pentru potențialul electrodinamic vector din regimurile MQS și ED cu pierderi prin conducție este una bine formulată, are soluție, aceasta este unică și depinde continuu de sursele de câmp. Pentru a demonstra buna formulare a problemei fundamentale a regimului MG, pentru care $\gamma = 0$ se folosește teorema lui Brezzi pentru probleme mixte (de tip $\gamma < 0$ și $\gamma > 0$). În regimul EDFP în care este real și negativ, se demonstrează folosind teorema lui Fredholm că problema este bine formulată, cu excepția unor valori discrete ale coeficientului Helmholtz, corespunzătoare valorilor și modurilor proprii de oscilație a câmpului electromagnetic din domeniul studiat (http://www.hpfem.jku.at/publications/ln_maxwell.pdf).

10. Teorema câmpului adjunct. Sensitivități

De multe ori în proiectare nu este suficient să se simuleze o singură configurație, ci se dorește analiza variațiilor, respectiv să se studieze efectul pe care îl are modificarea diferiților parametri geometrici sau de material asupra caracteristicilor obiectului proiectat. Folosirea pachetelor generale de programe CAD, dedicate simulării electromagnetice nu dă rezultate prea bune, în cazul dispozitivelor complexe, deoarece necesită resurse importante de calcul, analiza variațiilor fiind prea lentă, chiar și pe sistemele actuale, tot mai performante. Metoda cea mai potrivită pentru analiza sensibilităților este metoda câmpului adjunct care oferă atât acuratețe cât și viteză de execuție. Ea se poate utiliza pentru optimizări eficiente, bazate pe gradienti și la analiza

toleranțelor. Si această metodă își are originea în teoria circuitelor electrice iar ulterior ea a fost aplicată la analiza variabilității circuitelor de microunde. Metoda se bazează pe teorema lui Tellegen pentru diferența variațiilor. Aplicată unui element multipolar de circuit, această teoremă are forma:

$$-\int_{\partial D} (E' \times \Delta H - \Delta E \times H') \cdot dA = \int_D (J_m'^t \cdot \Delta H - J_e'^t \cdot \Delta E + j\omega \Delta D \cdot E' - j\omega \Delta B \cdot H') dv.$$

$$\Delta G = \Delta I^T \cdot V' - \Delta V^T \cdot I' = \int_D (J_m'^t \cdot \Delta H - J_e'^t \cdot \Delta E + j\omega \Delta D \cdot E' - j\omega \Delta B \cdot H') dv;$$

Iar pentru întregul circuit de microunde, în care elementele multipolare sunt înlocuite cu modele

$$\Delta I^T \cdot V' - \Delta V^T \cdot I' = 0$$

lor , unde vectorii curenților și tensiunilor au dimensiunea egală cu numărul de laturi. Aici ne referim la doua circuite echivalente topologic, primul este cel original (în care interesează variațiile mărimilor) iar al doilea este cel adjunct (la care mărimile sunt marcate cu prim).

Dacă elementul multipolar are primele n_a terminale controlate în curent, iar restul de n_b sunt controlate în tensiune, ecuația lui constitutivă are forma

$$\begin{bmatrix} I' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} \\ Y_{ba} & Y_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \end{bmatrix}$$

Iar contribuția sa la diferența variațiilor (numită indice de senzitivitate a componentei) este

$$\frac{\Delta G}{\Delta Y_{ij}} = \frac{1}{Y_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{n_a} I'_k \frac{\partial Y_{ij}}{\partial Y_{ij}} + \sum_{k=1}^{n_b} V'_k \frac{\partial Y_{ij}}{\partial Y_{ij}} \right)$$

Suma acestor contribuții pe întreg circuitul este nulă.

Dacă alegem

$$Y_{ij} = \frac{I'_i}{V'_j}$$

adică vom avea matricea hibridă a circuitului adjunct, transpusa matricei circuitului original și cu elementele nediagonale opuse (cu semn schimbat față de matricea originală), atunci

$$[H] = \begin{bmatrix} [H] & [G] \\ [G]^T & -[H] \end{bmatrix}$$

Schimbând sensurile curenților și tensiunilor primelor a terminale ale circuitului adjunct, relațiile capătă formă mai simplă:

$$[H] = \begin{bmatrix} [H] & [G] \\ [G]^T & -[H] \end{bmatrix}$$

în care p_k , $k = 1, 2, \dots, N$ sunt parametrii variabili, de proiectare, iar N este numărul lor.

Acestea relații arată că matricele hibride ale elementelor din circuitul adjunct sunt transpusele matricelor din circuitul original. Dacă elementele circuitului original sunt reciproce (cum se întâmplă în cazul elementelor dipolare și în cazul liniilor de transmisie), atunci circuitul adjunct este identic cu cel original.

Să ne imaginăm acum că atât circuitul original cât și circuitul adjunct au laturi active, pe lângă componenta pasivă se află și o sursă ideală de curent și una de tensiune, independente de schimbările elementelor pasive. Dacă notăm cu I_J și cu V_E vectorii parametrilor acestor surse din

$$\Delta I_J = 0, \Delta V_E = 0$$

întregul circuit, atunci, deoarece , rezultă

$$\Delta I_E^T \cdot V_E' - \Delta V_J^T \cdot I_J' = \Delta G = X'^T \cdot \Delta H X \Rightarrow \Delta G = \sum_{m=1}^M X_m'^T \cdot \Delta H_m X_m$$

în care M este numărul total de elemente din circuit. Sursele din circuitul adjunct sunt arbitrare. Dacă alegem toate sursele nule, cu excepția sursei de curent din latura k pe care o alegem unitară, atunci indicele de sensibilitate este opusul variației tensiunii din sursele de curent din

$$\Delta G = -\Delta V_{jk} = X'^T \cdot \Delta H X$$

latura k a circuitului original: . Acesta variație este chiar sensibilitatea

impedanței de intrare a portului k:

$$\Delta Z_k = -\Delta V_{jk} = -\Delta G = -\sum_{m=1}^M \Delta G_m \Rightarrow \frac{\partial Z_k}{\partial p_n} = -\sum_{m=1}^M X_m^T \cdot \frac{\partial H_m}{\partial p_n} X_m, \quad n=1, \dots, N$$

Cel mai adesea parametrul de proiectare pn influențează doar un singur element m, caz în care suma se reduce la un singur termen. Dacă alegem unitară t.e.m. a sursei ideale de tensiune din latura k, atunci rezulta în mod asemănător (dar cu semnul plus) expresia derivatei parțiale a admitanței portului k, față de parametrul arbitrar de proiectare. Constatăm că pentru a calcula orice sensibilitatea unei funcții de circuit, este necesară cunoașterea modului în care parametrul de proiectare influențează local componentele din circuit și în plus soluția analizei circuitului original și a celui adjunct (identice în cazul circuitelor reciproce). Odată analizate aceste circuite, putem calcula sensibilitățile față de oricâți parametri variabili, fără un efort de calcul semnificativ. Analiza se poate face cu orice metodă numerică sau simbolică, și ea reia, doar dacă interesează sensibilitatea altei funcții de circuit, altfel este suficientă o singură analiză de circuit.

Dacă ne referim în schimb la un singur element multipolar de circuit, și ne interesează sensibilitatea uneia din funcțiile sale caracteristice, de exemplu Z_{11} , impedanța primului terminal, față de un parametru intern elementului, de exemplu o constantă de material a unui subdomeniu interior, atunci trebuie aplicată teorema câmpului adjunct, formă particulară a teoremei lui Tellegen pentru diferența variațiilor, aplicată în acest caz:

$$\Delta G = \Delta I^T \cdot V' - \Delta V^T \cdot I' = \int_D \left(J_m^T \cdot \Delta H - J_e^T \cdot \Delta E + j\omega \Delta D \cdot E' - j\omega \Delta B \cdot H' \right) dv;$$

Vom excita problema adjunctă doar cu un curent unitar injectat în terminalul k, astfel încât să fie filtrat din produsul scalar al pseudoputerilor transferate pe la borne doar variația de potențial a terminalului 1:

$$\begin{aligned} \Delta G &= \Delta I^T \cdot V' - \Delta V^T \cdot I' = -\Delta V_1 \Rightarrow \Delta Z_{11} = -\Delta G = -j\omega \int_D (\Delta D \cdot E' - \Delta B \cdot H') dv \Rightarrow \\ \frac{\partial Z_{11}}{\partial p_n} &= -j\omega \int_D \left(\frac{\partial D}{\partial p_n} \cdot E' - \frac{\partial B}{\partial p_n} \cdot H' \right) dv = -j\omega \int_D \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p_n} E \cdot E' - \frac{\partial \mu}{\partial p_n} H \cdot H' \right) dv \Rightarrow \\ \frac{\partial Z_{11}}{\partial \epsilon_n} &= -j\omega \int_{D_n} E^2 dv; \quad \frac{\partial Z_{11}}{\partial \mu_n} = -j\omega \int_{D_n} H^2 dv; \end{aligned}$$

Dacă este realizat cu materiale reciproce, elementul multipolar este reciproc și problema adjunctă este identică cu cea originală. Pentru calculul sensibilității impedanței de intrare a unui terminal, este suficientă soluția de problemei de câmp din problema originală. După cum parametrul variabil este o permitivitate sau o permeabilitate, se integrează pătratul intensității câmpului electric respectiv magnetic pe subdomeniu acelei constante de material. Pentru a

determina sensibilitatea impedanței de transfer Z_{12} se excită ambele terminale, 1 și 2. Conform relațiilor anterioare pentru ca variația lui G să fie chiar variația impedanței Z_{12} , cele două surse trebuie plasate diferit în circuitul original și cel adjunct, care iată, nu mai sunt identice. Aceste relații se pot aplica și pentru a determina efectul modificărilor de geometrie, care pot fi privite ca modificări ale constantelor de material. Atunci integrarea se face doar pe suprafața care este supusă modificării. (Ioan, Daniel; Ciuprina, Gabriela; Schilders, W. H. A., Parametric models based on the adjoint field technique for RF passive integrated components, IEEE Transactions on Magnetics Volume: 44 Issue: 6 Pages: 1658-1661, 2008; Ioan, D; Munteanu, I; Ciuprina, G, Adjoint field technique applied in optimal design of a nonlinear inductor, IEEE Transactions on Magnetics Volume: 34 Issue: 5 Pages: 2849-2852, 1998).

11. Potețialele retardate. Ecuatiile integrale în domeniul timpului

În aplicațiile practice ale electrodinamicii intervin două feluri de probleme, unele de propagarea undelor în spațiul deschis, nemărginit și altele referitoare la domenii mărginite, cel mai adesea de pereți metalici cu o conductivitate foarte bună. În prima categorie sunt studiate antenele, dar și împrăștierea câmpului electromagnetic pe obiecte de diferite forme. Cel mai adesea aceste probleme sunt reformulate ca probleme în domenii mărginite, cu condiții artificiale, absorbante de frontieră, care modelează spațiul deschis. A doua categorie de probleme se referă la dispozitivele și circuitele de microunde. Acestea conțin elemente multipolare de circuit pasive sau active și cavitățile rezonante. Pentru primele interesează modelele cu parametri concentrați iar pentru cavități interesează modurile și frecvențele proprii de rezonanță. Există și categoria intermediară, a ghidurilor de undă, în care propagarea are loc pe o singură direcție, dar câmpul are o moduri proprii de repartizare 2D în secțiunea transversală, care poate fi mărginită sau nemărginită (cum se întâmplă la microstripuri). Acest paragraf se referă la propagarea câmpului electromagnetic în întregul spațiu vid.

Cele două potențiale electrodinamice sunt soluția ecuațiilor lui d'Alambert:

$$-\Delta A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu_0 J_i \Rightarrow A(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{J_i(r', t_r)}{|r - r'|} dv'; t_r = t - |r - r'|/c, c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$-\Delta V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r', t_r)}{|r - r'|} dv'$$

Expresiile lor (http://en.wikipedia.org/wiki/Retarded_potential) sunt cunoscute sub numele de potențiale întârziate (sau retardate). Constatăm că potențialul din punctul de observație depinde de sursa din punctul sursă, dar la un moment anterior, cu o întârziere fiind exact timpul necesar unei electromagnetice (luminii) să parcurgă drumul de la punctul sursă la punctul de observație.

Ca și în cazul static, datorită liniarității problemei, putem considera că aceste relații exprimă superpoziția potențialelor produse de sarcini punctiforme sau curenți dipolari. Expresia acestor potențiale elementare este soluția fundamentală a ecuației d’Alambert, cu termen liber un impuls Dirac. Este de fapt funcția Green a ecuației undelor electromagnetice pentru întregul spațiu 3D:

$$G(r, r', t) = \frac{\delta(t - \|r - r'\|/c)}{4\pi \|r - r'\|}$$

funcție care este nulă în afara “conului de lumină” din trecut. Orice eveniment petrecut în afara acestui con, adică mai recent decât timpul necesar luminii să ajungă de la locul evenimentului până la noi nu ne poate influența prezentul în nici un fel. (<http://www.physics.sfsu.edu/~lea/courses/grad/wavemks.PDF>)

Constatăm că în regimurile statice, condiția de etalonare Lorenz degenerază în condiția de etalonare Coulomb, iar expresiile potențialelor retardate tind către integralele Biot-Savar-Lapalce și ale integralele coulombiene. Aceasta deoarece timpul de întârziere tinde către zero, una din cele două constante universale având valoare formal nulă (atât în electrostatică dar și în regimul magnetostatic), ceea ce face ca c să tindă spre infinit:

$$-\Delta A = \mu_0 J \Rightarrow A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{J(r')}{|r - r'|} dv'; \quad -\Delta V = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dv'$$

Este interesant de observat, că dacă s-ar folosi condiția de etalonare Coulomb pentru potențialul electrodinamic vector, în condițiile în care acesta este variabil în timp, soluția ecuațiilor de ordinul doi ar avea forma:

$$\begin{aligned} -\Delta A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) &= \mu_0 J \Rightarrow A(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \times B(r', t)}{|r - r'|} dv'; \\ -\Delta V &= \rho/\epsilon_0 \Rightarrow V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r', t)}{|r - r'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla \cdot E(r', t)}{|r - r'|} dv' \end{aligned}$$

în care efectul de retardare nu mai este explicit. Asta nu înseamnă că el nu există, din moment ce valorile obținute determină același câmp electromagnetic ca și potențialele retardate.

Aceste relații nu pot fi aplicate, dacă domeniul de interes conține corpuri conductoare, polarizabile sau magnetizabile. Pentru a modela efectul acestor corpuri se folosesc distribuții fictive de curenți și sarcini repartizate în domeniul corpului care se asimilează apoi cu unul vid. Deoarece aceste distribuții sunt necunoscute, relațiile care exprimă potențialele devin ecuații integrale.

Pentru a deduce aceste ecuații integrale, vom exprima mai întâi potențialul scalar în funcție de densitatea de curent, folosind teorema conservării sarcinii:

$$\operatorname{div} J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \rho = -\int_0^{t'} \nabla \cdot J dt; \Rightarrow V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(r', t_r)}{|r-r'|} dv' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{t_r} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\nabla' \cdot J(r', t_r)}{|r-r'|} dt dv'$$

Deoarece intensitatea câmpului electric împrăștiat este

$$E_s(r, t) = -\frac{\partial A(r, t)}{\partial t} - \nabla V(r, t)$$

iar la suprafața S a conductoarelor perfecte, intensitatea câmpului total (cel incident H_i plus cel împrăștiat H_s) este determinat de curentul superficial al acestora:

$$n \times (E_i(r, t) + E_s(r, t)) \times n = 0 \Rightarrow n \times \left(\frac{\partial A(r, t)}{\partial t} + \nabla V(r, t) \right) \times n = n \times (E_i(r, t)) \times n, \quad r \in S$$

$$n \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{J_t(r', t_r)}{|r-r'|} dS' - \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{t_r} \int_S \frac{\nabla' \cdot J_t(r', t_r)}{|r-r'|} dt dS' \right) \times n = n \times (E_i(r, t)) \times n$$

Aceasta este ecuația integrală a câmpului electric în domeniul timpului (EFIE – Electric Field Integral Equation), care are de fapt ca necunoscută componenta tangențială a densității de curent indus de câmpul incident cunoscut la suprafața conductoarelor.

În mod asemănător se determină și ecuația integrală a câmpului magnetic. Deoarece intensitatea câmpului magnetic împrăștiat este

$$H_s(r, t) = \nabla \times A(r, t) / \mu_0$$

iar la suprafața S a conductoarelor perfecte, intensitatea câmpului total (cel incident H_i plus cel împrăștiat H_s) este determinată de densitatea superficială de curent:

$$n \times (H_i(r, t) + H_s(r, t)) = \frac{1}{2} J_t(r, t) \Rightarrow n \times (\nabla \times A(r, t)) / \mu_0 - \frac{1}{2} J_t(r, t) = -n \times H_i(r, t), \quad r \in S$$

$$\frac{\nabla \times \hat{z}}{4\pi} \int_S \frac{J_t(r', t_r)}{|r-r'|} dS' - \hat{z} n \times H_i(r, t) = \frac{1}{2} J_t(r, t) - n \times \hat{z}$$

Aceasta este ecuația integrală a câmpului magnetic în domeniul timpului (MFIE – Magnetic Field Integral Equation), care are de fapt ca necunoscută componenta tangențială a densității de curent indus de câmpul incident cunoscut la suprafața conductoarelor. MFIE se poate aplica doar domeniilor mărginite (problemelor interioare), în timp ce EFIE se poate aplica și domeniilor

nemărginite (problemelor exterioare). Deoarece fiecare dintre cele două ecuații integrale pune în evidență alte moduri interne de rezonanță a câmpului electromagnetic, în practică se folosește o combinație liniară a lor, numită ecuația integrală a câmpurilor combinate (CFIE- Combined

$$CFIE = Z(1-\alpha)MFIE + \alpha EFIE$$

Field Integral Equation): , în care Z este impedanța de undă a vidului (Bondeson- Computational Electromagnetics.pdf).

12. Funcțiile Green ale ecuației Helmholtz

Vom continua analiza ecuațiilor integrale ale electrodinamicii, considerând de astă dată forma lor în domeniul frecvenței. Ecuațiile de ordinul doi satisfăcute de transformatele Laplace ale câmpului electric, magnetic și ale celor două potențiale electrodinamice în condiții de etalonare

$$\text{div}(\sigma A) = 0$$

de tip Coulomb sunt ecuații Helmholtz complexe de formele:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times E(s)) + s(\sigma + s\varepsilon)E(s) &= -sJ_i(s) + s\varepsilon E_0 + \nabla \times H_0; \\ \nabla \times ((\sigma + s\varepsilon)^{-1} \nabla \times H(s)) + s\mu H(s) &= \nabla \times ((\sigma + s\varepsilon)^{-1} (J_i(s) - \varepsilon E_0)) + \mu H_0; \\ \nabla \times (\nu \nabla \times A(s)) + (\sigma + s\varepsilon)(sA(s) + \nabla V(s)) &= (\sigma + s\varepsilon)A_0 + \varepsilon A'_0 + \varepsilon \nabla V_0 + J_i(s); \\ \nabla \cdot (\sigma \nabla V(s)) &= s\rho - \varepsilon \nabla \cdot E_0; \\ \text{cu } E(s) &= -sA(s) + A_0 - \nabla V(s), \quad B(s) = \nabla \times A(s). \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot A(s) = (V_0 - sV(s))/c^2$$

În vid, cu etalonare Lorentz , ultimele ecuații devin similare și separate:

$$\begin{aligned} -\Delta A(s) + \frac{s^2}{c^2} A(s) &= \mu_0 J_i(s) + \frac{sA_0 + A'_0}{c^2} \\ -\Delta V(s) + \frac{s^2}{c^2} V(s) &= \rho(s)/\varepsilon_0 + \frac{sV_0 + V'_0}{c^2} \end{aligned}$$

$$\rho = \text{div}(J_i)/s = 0$$

În regim armonic, când curentul impus este solenoidal, și potențialul scalar se anulează, iar ecuațiile capătă forma mai simplă

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times E) + j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)E &= -j\omega J_i \\ \nabla \times ((\sigma + j\omega\varepsilon)^{-1} \nabla \times H) + j\omega\mu H &= \nabla \times ((\sigma + j\omega\varepsilon)^{-1} J_i). \\ \nabla \times (\nu \nabla \times A) + j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)A &= J_i \end{aligned}$$

Constatăm că intensitatea câmpului electric și potențialul vector satisfac ecuații Helmholtz cu

$$\gamma = j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)$$

același operator, de tip rot-rot și cu coeficientul Helmholtz . Pentru a avea soluție unică în domenii mărginite, acestor ecuații li se adaugă condiții de frontieră, referitoare la componenta tangențială a câmpului electric sau magnetic, dar sunt admise și combinații liniare ale acestor vectori.

Permeabilitatea intervine în operatorul de derivare spațială, iar dacă mediul este omogen din punct de vedere magnetic, acest operator se transformă, în condiții de etalonare Coulomb, în operatorul Laplace vectorial:

$$\nabla \times (\nabla \times A) + j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)A = J_i \Rightarrow -\Delta A + j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)A = \mu J_i$$

Așa cum s-a văzut, atunci când s-a studiat forma slabă a acestei ecuații, condițiile de frontieră

impuse pentru a avea unicitatea soluției acestei ecuații sunt fie referitoare la $A \times n$, la $\nabla(\nabla \times A) \times n$, la $\nabla(\nabla \times A) \times n + j\omega(A \times n)/Z_s$, fie la $\nabla(A \times n)$.

Potențialul magnetic vector determină câmpul magnetic, iar prin intermediul condiției de etalonare Lorenz, se exprimă și câmpul electric, eliminându-se necesitate cunoașterii potențialului scalar:

$$H = \nabla \times A; E = -j\omega A - \nabla V, \nabla \cdot A = -j\omega V/c^2 \Rightarrow E = -j\omega A + \nabla(\nabla \cdot A)/(j\omega\epsilon\mu) \Rightarrow E = \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \left(\nabla(\nabla \cdot A) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 A \right).$$

Folosind legea circuitului magnetic, această expresie se poate rescrie ca

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} (\nabla \times (\nabla \times A) - \mu J), \text{ care în zonele fără curent de conducție are forma mai simplă}$$

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} \nabla \times (\nabla \times A); H = \nabla \times A$$

Dacă mediul este omogen și în punct de vedere dielectric și al conducției, atunci și câmpul magnetic armonic satisface o ecuație Helmholtz mai simplă, cu același operator

$$-\Delta H + j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)H = \nabla \times J_i$$

Fiind în condiții de frontieră nule, ecuații liniare, soluția acestora se poate exprima prin superpoziția soluțiilor ecuației cu termen liber de forma unui impuls Dirac:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times A(r)) + j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)A(r) = J(r')\delta(r-r') \Rightarrow A(r) = \bar{\bar{G}}(r, r')J(r')$$

Operatorul care face legătura între vectorul termenului liber (densitatea de curent) și vectorul soluție este un tensor reprezentat de o matrice 3x3, numit funcție Green diadică a ecuației Helmholtz. Teorema reciprocității garantează simetria acestui tensor:

$$\bar{\bar{G}}(r, r') = \bar{\bar{G}}(r', r); \bar{\bar{G}}(r, r') = \bar{\bar{G}}^T(r, r')$$

. Soluția ecuației Helmholtz se exprimă în condiții nule de frontieră prin integrala de convoluție:

$$A(r) = \int_D \bar{\bar{G}}(r, r')J(r')dv'$$

Dacă domeniul D este vid și se extinde la întreg spațiul, atunci această integrală tinde către

$$A(r) = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\bar{G}}(r, r')J(r')dv' = \int_{\mathbb{R}^3} \mu G(r-r')J(r')dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-jk\|r-r'\|}}{\|r-r'\|} J(r')dv', \quad k = \sqrt{-\gamma} = \omega/c$$

$$\bar{\bar{G}}(r, r') = \mu_0 \bar{\bar{I}} G(r-r'); G(r-r') = F[G(r-r', t)] = F\left[\frac{\delta(t - \|r-r'\|/c)}{4\pi\|r-r'\|}\right] = \frac{e^{-jk\|r-r'\|}}{4\pi\|r-r'\|}$$

în care este funcția Green complexă, a ecuației Helmholtz, transformata Fourier a funcției Green pentru ecuația undelor, din domeniul timpului (<http://www.phy.duke.edu/~rgb/Class/phy319/phy319.a4.pdf>).

Constatăm că funcția Green a ecuației de tip Poisson vectoriale, din cazul regimului magnetic staționar este un caz degenerat al acestei funcții Green, obținut pentru valoare formal nulă a permitivității (care corespunde unei valori infinite pentru viteza c a undelor). Ca și în cazul staționar, și în cazul ecuației Helmholtz cu condiții de frontieră nenule, soluția se obține aplicând o transformată integrală a cărei nucleu este funcția Green anterior definită, atât surselor din interiorul domeniului de calcul cât și celor de pe frontieră:

$$A(r) = \int_D \bar{\bar{G}}(r, r')J(r')dv' - \int_{S_E} \nu \frac{d\bar{\bar{G}}(r, r')}{dn'} A(r') \times dS' - \int_{S_H} \nu \bar{\bar{G}}(r, r') \nabla \times A(r') \times dS' \Rightarrow$$

$$E(r) = -j\omega A(r), \quad H(r) = \nu \nabla \times A(r).$$

Constatăm că această expresie a potențialului da soluțiile ecuațiilor integrale EFIE pentru câmpul electric și respectiv MFIE pentru câmpul magnetic. În domeniul frecvenței acestea au formele

$$n \times \left(\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} J_t(r') dS' - \frac{\nabla}{4\pi\epsilon_0 j\omega} \int_S \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} \nabla' \cdot J_t(r') dS' \right) \times n = n \times (E_i \times n) \\ \frac{\nabla \times \hat{e}}{4\pi} \int_S \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} J_t(r') dS' \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ \hat{e} \\ n \times H_i(r, t) \\ \frac{1}{2} J_t(r) - n \times \hat{e}$$

Ea generalizează deci expresia potențialului vector retardat din întreg spațiul vid, care în domeniul frecvenței are expresia:

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} J_i(r') dv'$$

la cazul unui domeniu neomogen, mărginit și cu condiții de frontieră nenule.

Mai remarcăm că în baza teoremei superpoziției, funcția Green are o singularitate de tipul soluției fundamentale din întreg spațiul, deci se poate scrie sub forma

$$\bar{G}(r, r') = \mu \bar{I} G(r - r') + F(r, r') = \mu \bar{I} \frac{e^{-jk\|r-r'\|}}{4\pi\|r-r'\|} + F(r, r')$$

unde $F(r, r')$ este o funcție vectorială netedă, soluția ecuației Helmholtz omogene cu condiții de frontieră nenule, alese astfel încât funcția Green să aibă condiții de frontieră nule:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times F) + j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)F = 0; \\ n \times F(r, r') = -n \times \mu \bar{I} \frac{e^{-jk\|r-r'\|}}{4\pi\|r-r'\|}, \quad r \in S_E; \\ \nabla \times F(r, r') \times n = -\nabla \times \mu \bar{I} \frac{e^{-jk\|r-r'\|}}{4\pi\|r-r'\|} \times n, \quad r \in S_H.$$

Exprimând câmpurile în funcție de potențialul vector, rezultă:

$$A(r) = \int_D \mu G(r-r') J(r') dv'; H = v(\nabla \times A); E = \frac{1}{j\omega\epsilon\mu} (\nabla(\nabla \cdot A) + k^2 A) \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_D \left((J(r) \cdot \nabla') \nabla' G(r-r') + k^2 J(r) G(r-r') \right) dv'$$

$$H(r) = \int_D J(r) \times \nabla' G(r-r') dv'$$

Deoarece funcția Green se exprima doar față de diferența dintre $r - r' \Rightarrow \nabla G(r - r') = -\nabla' G(r - r')$

. Dar aceste integrale sunt singulare, atunci când punctul de observație se află în domeniul D al sursei, iar expresia corectă a câmpului electric este:

$$E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\int_D \left((J \cdot \nabla') \nabla' G + k^2 J G \right) dv' - \frac{1}{3} J \right]$$

, în care s-a notat cu VP valoarea principală a integralei (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>).

13. Analiza modală a câmpului electromagnetic

O problemă specifică regimului EDFP este cea a analizei modale a dispozitivelor de microunde. Aceasta constă în determinarea modurilor și frecvențelor proprii de rezonanță a câmpului electromagnetic în domenii mărginite de obicei de pereți foarte buni conductori. Se caută soluțiile armonice ale ecuațiilor lui Maxwell fără surse interne sau externe:

$$\begin{cases} \nabla \times E + j\omega\mu H = 0; \\ \nabla \times H - j\omega\epsilon E = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times E) = \omega^2 \epsilon E & \text{în } \Omega \\ \nabla \cdot \epsilon E = 0 & \text{în } \Omega \\ E \times n = 0, & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

Această problemă are următoarea formă slabă: găsiți $\lambda > 0, u \in H_0(\text{rot}, \Omega)$, astfel încât

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} (\nabla \times u) \cdot (\nabla \times v) dx = \lambda \int_{\Omega} \epsilon u \cdot v dx; \quad \forall v \in H_0(\text{rot}, \Omega)$$

în care $H_0(\text{rot}, \Omega)$ este spațiul funcțiilor rot-conforme definite pe domeniul Ω și cu condiții esențiale nule, pe frontiera acestui domeniu. O astfel de problemă liniară este nedeterminată și are o infinitate de soluții, dar interesează acele soluții (cu câmpul normat, adică de energie

$\lambda = \omega^2$
unitară), pentru care valorile proprii (deci pulsațiile proprii de rezonanță) au valori minime.

(S. Zaglmayr, *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, Johannes Kepler University, Linz Austria, August 2006.)

14. Metodele electrodinamicii

Prezentul document nu urmărește prezentarea modului în care se pot rezolva problemele de electrostatică ci doar formularea lor corectă, în vederea modelării electromagnetice [11-13]. Vom enumera doar cele mai frecvente metode de analiza, care se împart în abordări analitice și numerice.

Principalele metode analitice [3], [4], [7], [8], [10] pentru calculul câmpului electrostatic sunt:

- Metoda superpoziției, integralele potențialelor retardate;
- Metoda separării variabilelor;
- Metoda funcției Green.

Metodele numerice [6], [8], [9], [12] cel mai frecvent folosite pentru calculul câmpului electrostatic sunt:

- Metoda diferențelor finite (FDM - Finite Difference Method), care este foarte frecvent folosită mai ales în domeniul timpului, când se numește FDTD (Finite Difference in Time Domain). Ea se bazează pe forma diferențială locală a ecuațiilor câmpului electrodinamic ;
- Metoda integralelor finite (FIT - Finite Integration Technique - finite volumes) se bazează pe forma globală a ecuațiilor câmpului;
- Metoda elementelor finite (FEM - Finite Element Method) se bazează pe forma variațională, slabă a ecuațiilor câmpului;
- Metoda elementelor de frontieră (BEM - Boundary Element Method) se bazează pe ecuațiile integrale de suprafață pentru câmpul electric, magnetic sau cel combinat (EFIE, MFIE, CFIE);
- Metoda ecuațiilor integrale (IEM - Integral Equations Method), cunoscută și sub numele de metoda momentelor (MoM – Method of Moments) se aplică în analiza

problemelor cu neomogenități de structură volumetrică și se bazează pe ecuațiile integrale scrise cu funcții Green.

Studiul metodelor de rezolvare nu poate fi făcut fără înțelegerea formulării corecte a problemei, care a fost prezentată în acest document.

15. Propagarea unidimensională. Linii de transmisie

Acest document nu este dedicat studiului metodelor de analiză a câmpului electromagnetic, ci doar formulării problemelor. Cu toate acestea, cunoașterea soluției lor în cazurile cele mai simple, de referință este de mare folos la înțelegerea caracteristicilor câmpului din cele mai diverse cazuri.

Cea mai simplă situație este cea a **undei electromagnetice plane**, care se propagă în vid, de-a lungul axei Oz, fără variații ale câmpului în planul xOy. Ea este determinată de câmpul electric sau de cel magnetic de pe planul z=0. Să presupunem pentru început că E este orientat de-a lungul axei Ox:

$$\begin{aligned}
 E(z,t)|_{z=0} &= f(t)i; \\
 -\Delta E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow E(z,t) = f(t-z/c)i = g(z-ct)i \\
 \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow B(z,t) = B(z,0) - j \int_0^t \frac{\partial E_x(z,t')}{\partial z} dt' = -j \int_0^t \frac{dg(z-ct')}{dz} dt' = \frac{j}{c} g(z-ct') \Rightarrow \\
 H(z,t) &= \frac{B(z,t)}{\mu} = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\mu} jg(z-ct') = j\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} g(z-ct') \Rightarrow \\
 H &= k \times E / \eta, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}
 \end{aligned}$$

În medii omogene fără surse, aceeași ecuație d'Alambert omogenă este satisfăcută de toate câmpurile și potențialele. Soluția sa se verifică imediat prin substituție în ecuație. Aici s-a notat

cu η impedanța de undă a vidului. În medii fără pierderi, câmpul electric se propagă fără perturbații cu viteza c, cu orientare transversală pe direcția de propagare. Câmpul magnetic are

aceeași formă de variație în timp ca și câmpul electric, dar câmpul electric este de η mai mic decât cel electric. Lucrurile stau la fel, în condiții referitoare la câmp magnetic (este cunoscută

densitatea de curent din planul z=0), doar că acum intensitatea câmpul electric este de η ori

mai mare decât câmpul magnetic. Raportul dintre E și H este η , cei doi vectori fiind orientați

la 90 de grade unul față de celalalt, într-un plan transversal pe direcția de propagare, astfel încât produsul vectorial Poynting $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ să dea sensul propagării. Puterea transferată pe unitatea de arie de unda plană este

$$S=|\mathbf{E}\times\mathbf{H}|=EH=E^2/\eta=cw_{em}, \quad w_{em}=w_e+w_m=\frac{\epsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}=\frac{E^2}{2\eta c}+\frac{\eta H^2}{2c}=\frac{E^2}{\eta c}$$

densitatea de volum a energiei electromagnetice amplificată cu viteza de propagare. Condiția de frontieră cu orientare arbitrară în planul xOy poate fi tratată prin superpoziție. Pentru a descrie unda care se propagă invers în semispațiul $z<0$, se înlocuiește c cu $-c$ (Fig.).

În cazul câmpului armonic, $f(t)$ este o funcție sinusoidală, iar unda **plană monocromatică** (Fig.) are în propagarea directă următoarele expresii ale câmpului, reprezentate în complex

$$E(z,t)|_{z=0}=tE\sin(\omega t+\phi)\xrightarrow{C}E(z,\omega)|_{z=0}=tEe^{j\phi}=E_{t0}\Rightarrow$$

$$E(z,t)=tE\sin(\omega(t-z/c)+\phi)\xrightarrow{C}E=E_{t0}e^{-j\omega z/c}=E_{t0}e^{-jkz}; H=k\times E/\eta$$

$$\lambda=cT=c/v=2\pi c/\omega=2\pi/k; \quad k=\omega/c=2\pi/\lambda$$

în care s-a notat cu

lungimea de undă și

$$E=E_{t0}e^{jkz}, H=-k\times E/\eta$$

respectiv numărul de undă. Undele inverse au expresia , argumentul (faza inițială) crescând proporțional cu distanța parcursă de undă (în timp ce la undele directe, această fază este negativă). Deoarece se schimbă și semnul în expresia câmpului magnetic, se spune că impedanța undelor directe este pozitivă iar cea a undelor inverse este negativă (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>).

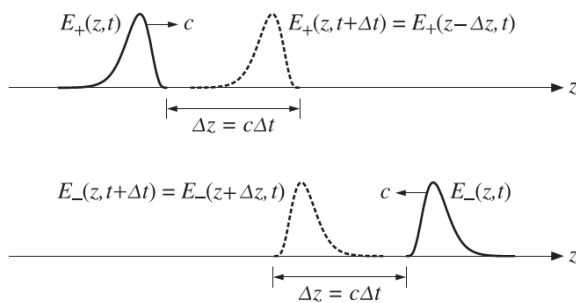


Fig. Propagarea undelor directe și inverse (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

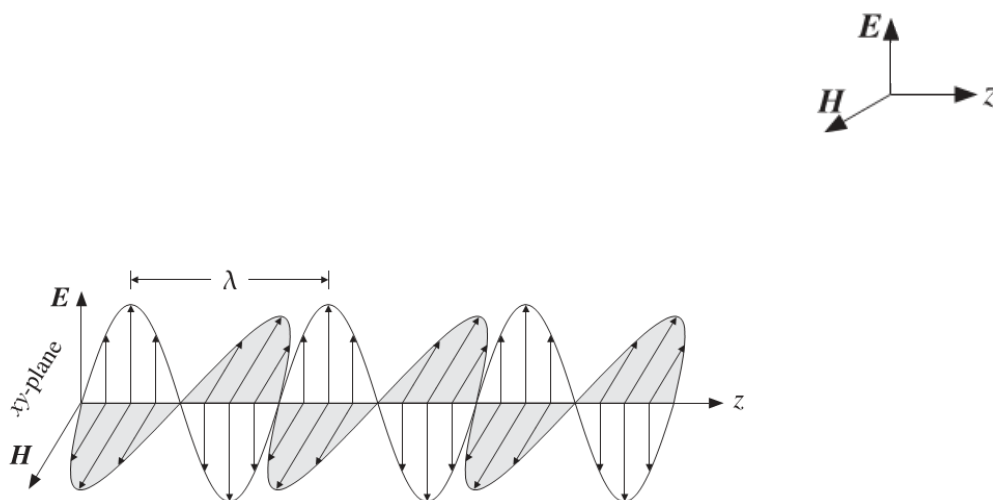


Fig. Unda monocromatică plană directă (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

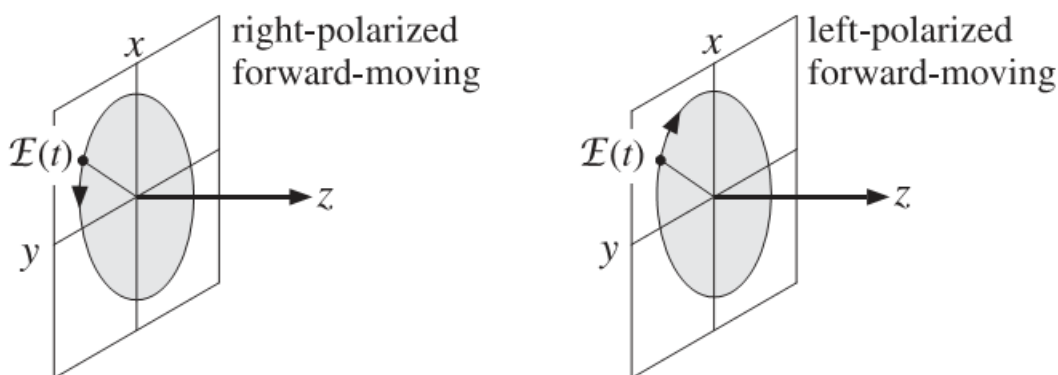


Fig. Undă directă, polarizată dreapta și stanga (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

În planul $z=0$, câmpul electric poate avea două componente sinusoidale orientate după axele Ox și Oy . Dacă cele două componente sunt în fază, atunci rezultatul este un vector care oscilează de-a lungul unei drepte orientate în funcție de amplitudinile lor. Dacă în schimb sunt defazate, atunci vectorul rezultat este unul rotitor, cu vârful în mișcare periodică pe o elipsa din acel plan. Dacă amplitudinile componentelor sunt egale și defazajul este de 90 de grade, atunci elipsa devine cerc. În această situație spunem că **unda este polarizată** circular, altfel ea este polarizată eliptic. Deosebim două cazuri, polarizarea dreaptă, când vectorul câmp se rotește conform regulii burghiului drept față de sensul de propagare a undei (sau echivalent regula mâinii drepte) și în caz contrar polarizarea stângă (Fig.). Polarizările orizontală și verticală sunt cazurile particulare, în care elipsa este strivită la un segment de dreaptă orizontal sau vertical.

$$J_t = J + J_d = \sigma E + j\omega D = (\sigma + j\omega\epsilon)E$$

. Această situație poate fi modelată cu relațiile din cazul regimului fără pierderi, dacă folosim în locul permeabilității reale o mărime complexă

$$J_d = j \omega \varepsilon_c E = (\sigma + j \omega \varepsilon) E \Rightarrow \varepsilon_c = \sigma / (j \omega) + \varepsilon = \varepsilon - j \sigma / \omega = \varepsilon' - j \varepsilon'' \quad \{ \}$$

echivalentă:

echivalentă: $\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C_0} + \frac{1}{\omega C_1}$. Prezența unei părți imaginare în permeabilitate poate descrie nu numai conducția ci și postefectul sau pierderile prin histerezis dielectric (cu ciclul echivalent în regim armonic de formă eliptică). Coeficientul folosit în practică pentru a descrie pierderile dielectrice este tangenta unghiului de pierderi

$$\tan \delta = \epsilon / \epsilon' r_{\text{sub}} \{ \text{size } 8\{d\} \} \{ \}$$

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_c$$

Dacă înlocuim $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, atunci parametrii care descriu propagarea devin numere complexe:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rightarrow \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \quad (1) \quad \# c = 1 \text{ spr}(\text{ital } q) \quad \text{rightarrow} c \text{ sub}(\text{size } 0(c)) = 1 \text{ spr}(\epsilon \text{ sub}(\text{size } 0(c))) \mu = c^+ \text{ ital } j_c$$

$$\lambda = c(\lambda) \rightarrow \lambda_c = c(\lambda) = 1 \left(\left\{ \left(\varepsilon, \mu = 1 + \frac{1}{\lambda} \right) \right\} \right) \# \text{size}[2] \text{size}[0] \left[\lambda = \omega(c) \text{rightarrow} \text{left}(\text{size}(6(c)) - \omega(c) \text{sub}(\text{size}(6(c))) = \omega(\text{sort}(\varepsilon \text{sub}(\text{size}(6(c))) \mu) - k + \text{tail}(\lambda)) = \theta - j \right]$$

$$\begin{aligned} E &= E_{t_0} e^{\mp j k z} \rightarrow E = E_{t_0} e^{\mp j k_c z} = E_{t_0} e^{\mp j y z} E_{t_0} e^{\mp (\alpha + j \beta) z} = E_{t_0} e^{\mp \alpha z} e^{\mp j \beta z} \\ H &= \pm k \times E / \eta \rightarrow H = \pm k \times E / \eta_c \end{aligned}$$

$$\gamma = jk_c = \alpha + j\beta$$

În care s-a notat cu α constanta de propagare a undei. Constatăm că datorită pierderilor, amplitudinea undei se atenuează exponențial în sensul propagării (Fig.). Factorul α de atenuare măsurat în Np/m este chiar inversul adâncimii de pătrundere a undei $\delta = 1/\alpha$.

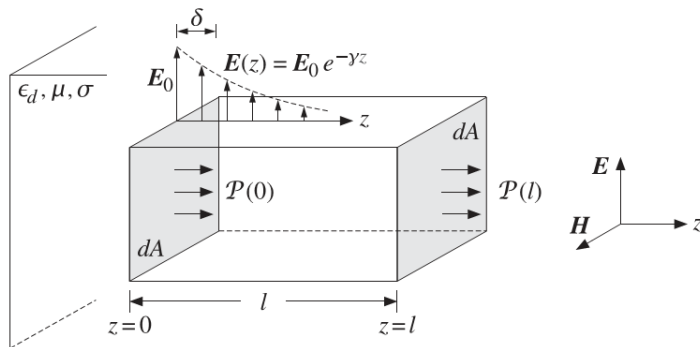


Fig. Atenuarea unei plane în medii cu pierderi (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

Unda plană prezentată anterior descrie modul în care se propagă câmpul electromagnetic în vecinătatea oricărui punct regulat din spațiu. Cu toate acestea, la distanță mare față de sursă (antena sau alt corp care radiază) unda electromagnetică are frontul de undă mai degrabă sferic decât plan. Din acest motiv vom studia în continuare **undele sferice**, care se propagă tot unidirecțional, dar în direcție radială, într-un sistem de coordonate sferice. În acest sistem ecuația d'Alambert și soluția sa au expresiile:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E(r, t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow E(r, t) = E_+ \frac{f(r-ct)}{r}; E(r, t) = E_- \frac{f(r+ct)}{r};$$

Și de această dată, câmpul magnetic este perpendicular pe cel electric, astfel încât E , H și direcția radială de propagare formează un sistem tri-ortogonal drept:

$$E = \eta H \times \hat{r}; \quad H = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times E; \quad \frac{|E|}{|H|} = \eta$$

Spre deosebire de cazul plan, în care amplitudinea undei se păstrează constantă de-a lungul direcției de propagare, aici aceasta scade invers proporțional cu raza, lucru datorat extinderii undei în spații tot mai ample, lucru ce implică diminuarea densității de putere, invers proporțional cu pătratul razei, astfel încât puterea transferată prin sfere tot mai mare să se conserve.

În **regim armonic**, la mare distanță de sursa de câmp, potențialele retardate au expresiile:

$$V(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\epsilon r} \int_{\Omega} \rho(r') e^{jk \cdot r'} dv'; \quad A(r) = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{\Omega} J(r') e^{jk \cdot r'} dv'; \quad \mathbf{k} = \hat{r} k = \hat{r} \omega/c \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi\epsilon r} Q(k); \quad A(r) = \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} F(k)$$

în care $\mathbf{k}$ este vectorul numărului de unda orientat după versorul radial $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, iar

$$Q(k) = \int_{\Omega} \rho(r') e^{jk \cdot r'} dv'; \quad F(k) = \int_{\Omega} J(r') e^{jk \cdot r'} dv';$$

sunt factorul de formă al distribuției de sarcină și respectiv vectorul de radiație. Din acestea rezultă expresiile câmpurilor radiante:

$$E = -jk\eta \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F}) \times \hat{\mathbf{r}}; \quad H = -jk \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{F})$$

care depind exclusiv de componenta transversală a vectorului de propagare. Distribuția de curent din sursă (antena) determină distribuția câmpului radiant la suprafața frontului sferic de undă. Astfel antenele care au structură geometrică diferită vor avea caracteristici de directivitate spațială diferită. Proiectarea antenelor presupune rezolvarea unei probleme inverse, în care pornind de la o formă impusă a lobilor de directivitate se urmărește determinarea structurii antenei.

Cel mai simplu caz îl reprezintă cel al **dipolului radiant** (care modelează o antenă rectilinie, cu două brațe conductoare coliniare). Dacă presupunem momentul dipolar $\mathbf{p}$, oscilant sinusoidal, plasat în origine și orientat vertical, de-a lungul axei Oz, polarizatia, densitatea de sarcină și de curent echivalente au expresiile complexe:

$$\begin{aligned} p(t) &= kp \sqrt{2} \sin \omega t \xrightarrow{C} p = kp \Rightarrow P(r) = p \delta(r) \\ \rho(r) &= -\nabla \cdot \mathbf{P} \Rightarrow \rho(r) = -p \nabla \delta(r) \\ J(r, t) &= \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} \xrightarrow{C} J(r) = j\omega P(r) = j\omega p \delta(r) \end{aligned}$$

Din care rezultă

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_D \bar{G}(r, r') J(r') dv' = \mu \int_D G(r - r') J(r') dv' = j\omega \mu \int_D G(r - r') p \delta(r') dv' = j\omega \mu p G(r) \\ V(r) &= \frac{1}{\epsilon} \int_D G(r - r') \rho(r') dv' = -\frac{1}{\epsilon} \int_D G(r - r') p \cdot \nabla' \delta(r') dv' = -\frac{1}{\epsilon} p \cdot \nabla G(r) = p \cdot \hat{\mathbf{r}} (jk + 1/r) G(r) / \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(r) &= \frac{1}{j\omega \epsilon \mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{\epsilon} (k^2 \mathbf{p} + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \nabla) G(r) = \frac{jk + 1/r}{\epsilon} \left(\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r} \right) G(r) + \frac{k^2}{\epsilon} \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}}) G(r); \\ H(r) &= \nabla \times \mathbf{A} = j\omega \nabla G(r) \times \mathbf{p} = j\omega (jk + 1/r) (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}}) G(r) \end{aligned}$$

$$G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \Rightarrow \nabla G(r) = -\hat{\mathbf{r}} (jk + 1/r) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = -\hat{\mathbf{r}} (jk + 1/r) G(r), \quad \{\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r\}$$

deoarece

Aceste relații evidențiază comportarea câmpului la joasă frecvență cât și la radiofrecvență (Fig.).

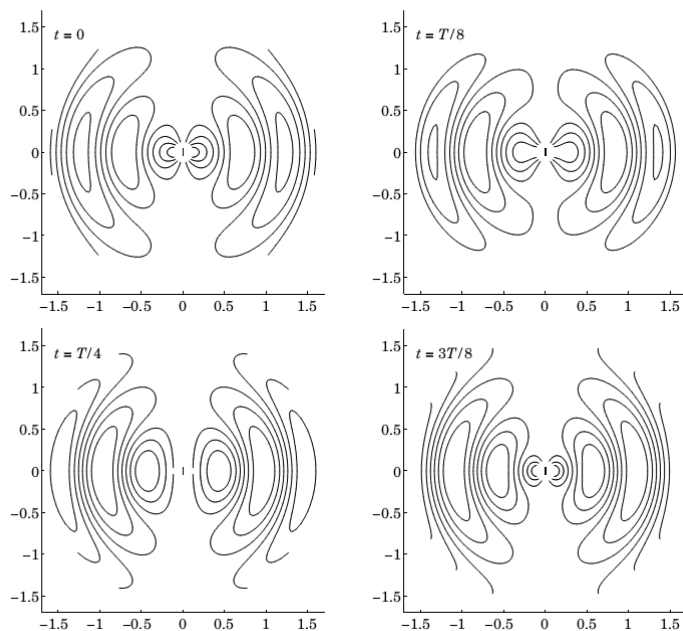


Fig. Liniile câmpului elctric ale unui dipol radiant la diferite momente de timp

(<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

Regimul electorstatic se obține pentru pulsația (și implicit pentru numărul de undă) de valoare nulă. Constatăm că în acest caz câmpul electric are comportarea de la dipol, scăzând invers proporțional cu cubul distanței, în timp ce câmpul radiat scade invers proporțional cu distanța:

$$E_{rad}(r) = \frac{k^2}{\epsilon} \hat{r} \times (p \times \hat{r}) G(r) = \frac{k^2}{\epsilon} \hat{r} \times (p \times \hat{r}) \frac{e^{-kjr}}{4\pi r};$$

$$H_{rad}(r) = j\omega k (p \times \hat{r}) G(r) = \omega k (\hat{r} \times p) G(r) = \omega k (\hat{r} \times p) \frac{e^{-kjr}}{4\pi r} = \frac{k^2}{\eta\epsilon} (\hat{r} \times p) \frac{e^{-kjr}}{4\pi r}$$

Relații în acord cu cele obținute la undele sferice. Această comportare explică de ce undele radio se propaga la distanțe mult mai mari decât se distribuie câmpul staționar sau cel quasistaționar.

Puterea totală radiată de dipol se calculează integrând vectorul Poynting pe suprafața unei sfere:

$$P = \int_S (E \times H) \cdot dA = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \right) \frac{ck^4 p^2}{3}$$

Faptul că puterea crește cu puterea a patra a frecvenței explică printre altele și de ce este cerul albastru! Această putere permite determinarea rezistenței echivalente de radiație, pe care antena o vede la bornele sale. Stabilirea funcției de circuit ce leagă curentul de tensiunea dintre aceste borne (de conexiune la receptor sau emițător), deci a circuitului echivalent antenei este esențială pentru a determina eficiența sa energetică. Ea nu poate fi făcută fără analiza câmpului electromagnetic al antenei.

Un alt caz frecvent întâlnit în practică este **dipolul magnetic radiant**. Acesta modelază o buclă de curent, deci o antenă circulară. Campul radiat de acesta este asemănător cu cel al dipolului electric, din care se obține, prin dualitate ($E \rightarrow H; H \rightarrow -E; \epsilon \rightarrow \mu; \mu \rightarrow \epsilon; \eta \rightarrow 1/\eta; p \rightarrow \mu m; P \rightarrow \mu M$):

$$E_{rad}(r) = j\omega\mu jk(m \times \hat{r} \times m)G(r) = \eta k^2(m \times \hat{r}) \frac{e^{-kjr}}{4\pi r};$$

$$H_{rad}(r) = k^2 \hat{r} \times (m \times \hat{r}) G(r) = k^2 \hat{r} \times (m \times \hat{r}) \frac{e^{-kjr}}{4\pi r}$$

(<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>).

Așa cum am prezentat anterior, pe lângă problemele de radiație în întreg spațiul (întâlnite la studiul antenelor și al împrăștierei undelor electromagnetice), trebuie rezolvate și probleme de **unde electromagnetice ghidate** (întâlnite în studiul și proiectarea circuitelor de microunde). Astfel de structuri cu o geometrie plan-paralelă cuprind ghidurile de unde și liniile de transmisie. În ambele, propagarea are loc după o direcție longitudinală, deosebirea între ele constând în faptul că pe liniile de transmisie transferul de putere are loc la orice frecvență, pe când în cazul ghidurilor de undă, transferul de putere are loc doar de la o frecvență în sus. La frecvențe înalte, liniile de transmisie funcționează și ele ca ghiduri de undă. Deosebirea de comportare este explicată de structura secțiunii transversale. În cazul liniilor de transmisie există cel puțin două conductoare paralele, iar dielectricul are domeniul transversal multiplu conex (cum este, de exemplu, cablul coaxial), în schimb ghidurile de undă pot avea un domeniu dielectric simplu conex (cum sunt, de exemplu, cablurile optice).

Vom studia pentru început propagarea de-a lungul **ghidurilor de undă** (Fig. în care primele trei sunt și linii de transmisie). Abordarea caracteristică a acestor structuri constă în descompunerea problemei de câmp cu variație spațială 3D în una transversală (2D) și alta longitudinală (1D). Se procedează oarecum similar ca la studiul problemelor de câmp plan-paralele, doar că aici câmpul are variație spațială și după direcția de propagare:

$$E(x, y, z) = E(x, y) e^{-j\beta z}; \quad H(x, y, z) = H(x, y) e^{-j\beta z}$$

. Aici s-a notat cu $\beta = 2\pi/\lambda$ numărul de undă de-a lungul ghidului, mărime care depinde de pulsație, după cum se va vedea imediat, într-un mod mai complicat.

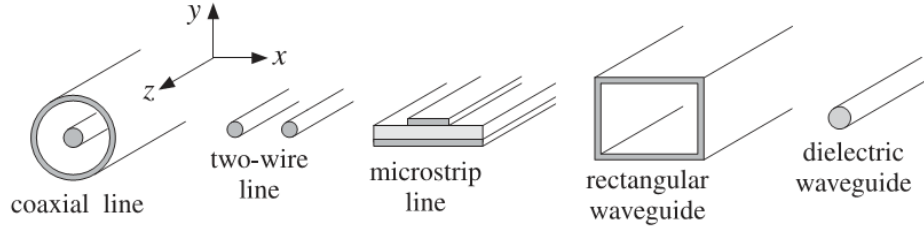


Fig. Structuri tipice de ghiduri de undă. (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

Prin descompunerea câmpului și a operatorului de derivare spațială în componentele sale transversale și longitudinale:

$$E(x, y) = E_T(x, y) + E_z(x, y), \text{ cu } E_z(x, y) = kE_z(x, y); \quad H(x, y) = H_T(x, y) + H_z(x, y);$$

$$\nabla_{\circ} = i \frac{\partial_{\circ}}{\partial x} + j \frac{\partial_{\circ}}{\partial y} + k \frac{\partial_{\circ}}{\partial z} = \nabla_T - kj\beta, \text{ cu } \nabla_T = i \frac{\partial_{\circ}}{\partial x} + j \frac{\partial_{\circ}}{\partial y}; \quad k \frac{\partial_{\circ}}{\partial z} = -kj\beta$$

ecuațiile lui Maxwell iau forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -j\omega\mu H \Rightarrow (\nabla_T - j\beta k) \times (E_T + kE_z) = -j\omega\mu (H_T + kH_z) \\ \nabla \times H &= j\omega\epsilon E \Rightarrow (\nabla_T - j\beta k) \times (H_T + kH_z) = j\omega\epsilon (E_T + kE_z) \\ \nabla \cdot E &= 0 \Rightarrow (\nabla_T - j\beta k) \cdot (E_T + kE_z) = 0 \\ \nabla \cdot H &= 0 \Rightarrow (\nabla_T - j\beta k) \cdot (H_T + kH_z) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \nabla \times E = -j\omega\mu H \\ \nabla \times H = j\omega\epsilon E \\ \nabla \cdot E = 0 \\ \nabla \cdot H = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\nabla_T - j\beta k) \times (E_T + kE_z) = -j\omega\mu (H_T + kH_z) \\ (\nabla_T - j\beta k) \times (H_T + kH_z) = j\omega\epsilon (E_T + kE_z) \\ (\nabla_T - j\beta k) \cdot (E_T + kE_z) = 0 \\ (\nabla_T - j\beta k) \cdot (H_T + kH_z) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \nabla_T E_z \times k - j\beta k \times E_T &= -j\omega\mu H_T \\ \nabla_T H_z \times k - j\beta k \times H_T &= j\omega\epsilon E_T \\ \nabla_T \times E_T + j\omega\mu k H_z &= 0 \\ \nabla_T \times H_T - j\omega\epsilon k E_z &= 0 \\ \nabla_T \cdot E_T - j\beta k E_z &= 0 \\ \nabla_T \cdot H_T - j\beta k H_z &= 0 \end{aligned}$$

După cum se anulează sau nu unele componente ale câmpului, deosebim următoarele **moduri de propagare**:

$$E_z=0, H_z=0$$

- TEM – transversal electric și magnetic

$$E_z=0, H_z \neq 0$$

- TE – transversal electric

$$E_z \neq 0, H_z=0$$

- TM – transversal magnetic

$$E_z \neq 0, H_z \neq 0$$

- EH – hibrid electric și magnetic

Din ecuațiile lui Maxwell, rezultă cum componentele longitudinale ale câmpurilor satisfac

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0; \quad \nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0$$

ecuațiile Helmholtz 2D:

. Soluțiile acestor ecuații de

moduri și valori proprii se determină în condițiile de frontieră impuse la suprafața ghidului (de

$$k_c^2 = \omega^2 / c^2 - \beta^2$$

regulă PEC sau PMC). Rezultă deci și valorile posibile ale factorului

numit

$$\lambda_c = 2\pi / k_c$$

numărul de undă de tăiere, care determină o lungime de undă de tăiere

, care nu

$$\lambda_g = 2\pi / \beta$$

trebuie confundată cu cea longitudinală

. Din acest număr rezultă și modul în care

$$\beta = \sqrt{\omega^2 / c^2 - k_c^2} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_c^2}$$

depinde de pulsație numărul de undă longitudinal

. Dacă

spectrul operatorului Helmholtz are valori discrete, atunci modurile de propagare în ghidul de

undă sunt la rândul lor discrete. Pornind de la câmpul longitudinal se poate calcula folosind

ecuațiile Maxwell, repartitia câmpului transversal

$$E_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} (\nabla_T E_z - \eta_{TE} k \times \nabla_T H_z); \quad H_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} \left(\nabla_T H_z + \frac{1}{\eta_{TM}} k \times \nabla_T E_z \right);$$

$$\eta_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta}; \quad \eta_{TM} = \frac{\beta}{\omega \epsilon}$$

în care impedanțele TE și respectiv TM sunt notate cu

. În cazul undelor

TEM, TE sau TM, relația dintre câmpul magnetic și cel electric transversal este similară cu cea

$$H_T = \frac{1}{\eta_T} k \times E_T, \quad \eta_T = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}; \quad \eta_T = \eta_{TE}; \quad \eta_T = \eta_{TM}$$

de la unda plană:

în care expresia impedanței

transversale de undă depinde de modul de propagare.

Deoarece în cazul TEM componentele longitudinale ale câmpurilor sunt nule, rezultă că numărul de undă de tăiere este nul, iar câmpul electric transversal fiind solenoidal și irotațional are o distribuție similară cu cea a câmpului electrostatic, care o determină și pe cea a câmpului magnetic, care este perpendicular pe el, iar raportul modulelor lor este impedanța de undă. În oricare din modurile TEM, TE sau TM, puterea activă, transferată superficial prin ghid are

$$P_z = \text{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot k = \frac{|E_T|^2}{\eta_T} = \eta_T |H_T|^2$$

expresia

În modul TE:

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \Rightarrow H_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_T H_z; \quad E_T = \eta_{TE} H_T \times k; \quad P_z = \text{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot k = \eta_{TE} |H_T|^2$$

Iar în modul TM:

$$\nabla_T^2 E_z + k_c^2 E_z = 0 \Rightarrow E_T = -\frac{j\beta}{k_c^2} \nabla_T E_z; \quad H_T = \frac{1}{\eta_{TM}} k \times E_T; \quad P_z = \text{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot k = \frac{1}{\eta_{TM}} |E_T|^2$$

Vom exemplifica aceste rezultate în cazul ghidului dreptunghiular, mărginit de un perete perfect conductor, la care $a > b$ (Fig.). Modul dominant al acestui ghid este modul TE_{10} , în care câmpul electric este orientat transversal de-a lungul axei Oy și pentru a îndeplini condițiile de frontieră se anulează la $x=0$, $x=a$. El nu variază după y, ci doar după x, astfel încât ecuația Helmholtz satisfăcută de câmpul magnetic longitudinal are forma:

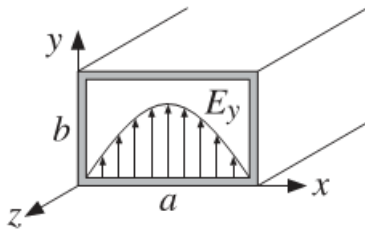


Fig. Ghidul de undă dreptunghiular (<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

$$\nabla_T^2 H_z + k_c^2 H_z = 0 \Rightarrow \frac{d^2 H_z(x)}{dx^2} + k_c^2 H_z(x) = 0 \Rightarrow H_z(x) = H_0 \cos k_c x$$

$$H_x(x) = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{dH_z(x)}{dx} = \frac{j\beta}{k_c} H_0 \sin k_c x;$$

$$E_y(x) = -\eta_{TE} H_x(x) = -\eta_{TE} \frac{j\beta}{k_c} H_0 \sin k_c x = E_0 \sin k_c x;$$

$$P_z = \operatorname{Re}(E_T \times H_T^*) \cdot k = \eta_{TE} |H_x(x)|^2$$

Constanta complexă H_0 poate fi arbitrară, iar dintre variațiile posibile ale câmpului longitudinal s-a ales cea care poate satisface condițiile de frontieră. Pentru aceasta trebuie ca

$$E_y(a) = E_0 \sin k_c a = 0 \Rightarrow k_c a = n\pi \Rightarrow k_c = n\pi/a$$

, care este ecuația care dă valorile proprii. Există deci mai multe moduri proprii de propagare, notate TE_{n0} , pentru $n = 1, 2, 3, \dots$. Cel dominant (care are pulsația proprie cea mai mică) este TE_{10} , la care $k_c = \pi/a$; $\omega_c = c\pi/a$; $f_c = c/(2a)$; $\lambda_c = 2a$

. Modurile TE_{nm} , în care apar variații ale câmpului electric și după y sunt și ele moduri minore. Concluzia este că un ghid dreptunghiular transmite doar acele unde electromagnetice care au pulsații adaptate dimensiunii lui. Sub frecvența de tăiere nu are loc propagarea ghidată a câmpului electromagnetic. Dacă ne imaginăm ghidurile de undă începute și sfârșite cu pereți perfect conductori pe care unda electromagnetică se reflectă, atunci undele reflectate suprapuse peste cel incidente pot produce unde staționare. Este cazul cavităților rezonante, care pot avea în interior câmp armonic permanent. Frecvențele de rezonanță și modul în care se repartizează acest câmp se determină prin rezolvarea problemei de moduri și valori proprii ale cavității.

Liniile de transmisie sunt ghiduri de undă care funcționează de regulă în modul TEM. Cel mai simplu caz îl reprezintă linia cu două conductoare (Fig.). Câmpul electric are distribuția similară cu cea a câmpului electrostatic, fiind determinat de potențialele conductoarelor, cu liniile de câmp perpendiculare pe suprafețele echipotențiale, deci și pe suprafețele conductoarelor. Câmpul magnetic este perpendicular pe cel electric, deci are liniile de câmp cuprinse în suprafețele echipotențiale electric. Deoarece curentul $I(z)$, care străbate cele două conductoare în sens opus și tensiunea $V(z)$ dintre cele două conductoare descriu complet distribuția câmpului electromagnetic din orice secțiune transversală a liniei, ele sunt funcțiile alese pentru a caracteriza transmisia semnalelor pe linie.

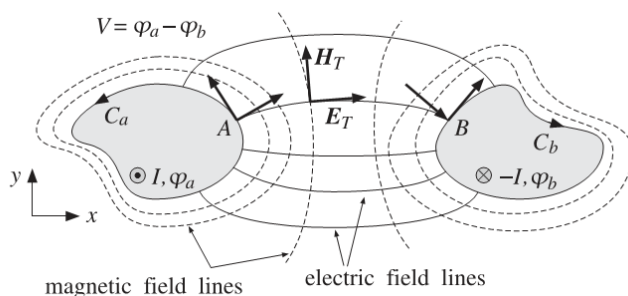


Fig. Campul electric și magnetic dintr-o linie de transmisie bifilară

(<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>)

Ecuatiile liniilor de transmisie satisfăcute de aceste funcții se obțin, fie pornind de la relațiile lui Maxwell, descompuse transversal-longitudinal, fie folosind abordarea unui circuit cu parametri distribuiți. Față de terminalele lor, liniile de transmisie sunt elemente multipolare de circuit electric. Modelarea lor corectă (precisă și eficientă) este esențială în foarte multe aplicații de radiofrecvență.

Dacă se descompun câmpurile vectoriale în componentele lor transversale și longitudinale:

$$E = E_T + kE_z; J = J_T + kJ_z; H = H_T + kH_z$$

, ecuațiile lui Maxwell din medii liniare, în domeniul timpului pot fi, la rândul lor separate în două grupuri, cel transversal:

$$\begin{aligned} \nabla_T \times H_T &= k \left(J_z + \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \right); & \nabla_T \times E_T &= -k\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ \nabla_T \cdot (\mu H_T) &= -\frac{\partial (\mu H_z)}{\partial t}; & \nabla_T \cdot (\epsilon E_T) &= \rho - \frac{\partial (\epsilon E_z)}{\partial t} \end{aligned}$$

și cel longitudinal:

$$\frac{\partial E_T}{\partial z} - \nabla_T E_z = -\mu \frac{\partial (H_T \times k)}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_T}{\partial z} - \nabla_T H_z = J_T \times k + \epsilon \frac{\partial (E_T \times k)}{\partial t}$$

Pentru modelarea unei linii multifilare de transmisie plasată deasupra unui substrat semiconductor vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- Densitatea de volum a sarcinii și a curentului de deplasare sunt neglijate atât în conductoarele linii cât și în substratul semiconductor;
- Este neglijat câmpul generat de curenții turbionari induși, deci se consideră $E_z=0$ și $H_z=0$ în ecuațiile transversale;

- Curentul longitudinal de conducție $J_z=0$ este neglijat în dielectrici, dar nu și în conductoare;
- Deoarece conductivitatea dielectricului este mult mai mare decât cea a conductoarelor, componenta transversală a câmpului electric este neglijată în conductoarele liniei și în substrat ($E_T=0$, $J_T = 0$).

G. Ciuprina, D. Ioan, A. Stefanescu, S. Kula, D. Ioan, Robust Procedures for Model Order Reduction of High Speed Interconnects, COMSON Handbook, Springer.

În aceste condiții, ecuațiile transversale au exact forma din regimul staționar:

$$\begin{aligned} \nabla_T \times H_T &= \begin{cases} kJ_z, & \text{în } (k), (s) \\ 0, & \text{în } (d) \end{cases}; \quad \nabla_T \times E_T = 0; \\ \nabla_T \cdot (\mu H_T) &= 0; \quad \nabla_T \cdot (\epsilon E_T) = 0 \end{aligned}$$

Aici s-a notat cu (s), (d) și (k) domeniul substratului, dielectricului și respectiv conductorului $k = 1, 2, \dots, n$. Din acest motiv câmpul electric fiind irotațional admite un potențial scalar $V(x, y, z, t)$, iar cel magnetic fiind solenoidal, admite un potențial vector $A = kA(x, y, z, t)$, astfel încât:

$$E_T = -\nabla_T V; \quad H_T = \frac{1}{\mu} (k \times (\nabla \times A)) = -k \times \frac{1}{\mu} (\nabla_T A) \times k$$

Ecuațiile longitudinale descriu propagarea:

$$\nabla_T \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} + E_z \right) = 0; \quad -\nabla_T H_z = k \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla_T \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) + \sigma \nabla_T V + \epsilon \nabla_T \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right)$$

Impunând condiții asimptotice pentru potențiale la infinit, prin integrarea lor, rezultă:

$$E_z = \frac{1}{\sigma} J_z = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial t}; \quad H_z = -\int_C \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) + \sigma \frac{\partial V}{\partial n} + \epsilon \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right) ds,$$

în care C este o curbă din planul $z=ct$, ce unește punctul de la infinit cu punctul curent, iar n este versorul normal la curbă, orientat astfel încât versorul tangent $ds = ds k \times n$.

Conform teoremei de unicitate din electrostatică, distribuția potențialului scalar este determinată univoc de potențialele conductoarelor, iar sarcinile conductoarelor și curenții lor de pierderi au în problemele plan-paralele expresiile:

$$q_k(z,t) = - \int_{\partial S_k} \epsilon_d \frac{\partial V}{\partial n} ds = \sum_{m=1}^n c_{km} V_m(z,t)$$

$$i_{gk}(z,t) = - \int_{\partial S_k} \sigma_d \frac{\partial V}{\partial n} ds = \sum_{m=1}^n g_{km} V_m(z,t)$$

în care c_{km} sunt capacitățile nodale pe unitatea de lungime dintre conductorul k și m, iar g_{km} sunt conductanțele de pierderi pe unitatea de lungime dintre aceleași conductoare. Integrând E_z pe suprafața transversală a conductoarelor, iar H_z pe frontiera acestei suprafețe, se obțin următoarele ecuații de propagare pentru potențiale:

$$-\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial z} = r_k^0 i_k + \frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i_k}{\partial z} = i_{gk} + \frac{\partial q_k}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{a}_k}{\partial t};$$

$$r_k^0 = \frac{1}{\sigma_k A_{S_k}}$$

în care este rezistența lineică, de curent continuu a conductorului k iar

$$\tilde{v}_k(z,t) = \frac{1}{A_{S_k}} \int_{S_k} V(x,y,z,t) dx dy = v_k(z,t); \quad \tilde{a}_k(z,t) = \frac{1}{A_{S_k}} \int_{S_k} A(x,y,z,t) dx dy;$$

sunt valorile medii ale celor două potențiale pe suprafața conductorului k. În consecință, ecuațiile de propagare capătă forma:

$$-\frac{\partial v_k}{\partial z} = r_k^0 i_k + \sum_{m=1}^n l_{km}^0 \frac{\partial i_m}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left(\frac{dl_{km}}{dt} \right)_{t-\tau} i_m(\tau,t) d\tau; \quad -\frac{\partial i_k}{\partial z} = \sum_{m=1}^n \left(g_{km} v_m + c_{km} \frac{\partial v_m}{\partial t} \right)$$

în care l_{km}^0 sunt inductanțele lineice externe proprii și mutuale ale conductoarelor (k) și (m),

atunci când curenții se întorc pe la suprafața substratului, iar l_{km} sunt inductanțele lineice tranzitorii definite ca valoarea medie a potențialului vector pe suprafața S_k , generată în condiții inițiale nule de un curent treaptă unitate injectat în conductorul (m). În cazul liniei monofilare fără pierderi, aceste ecuații sunt chiar ecuațiile d'Alambert 1D:

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t} ; \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0, \quad c = 1/\sqrt{LC}$$

În condiții inițiale nule pentru curenți, tensiuni și câmp magnetic, transformata Laplace a ecuațiilor generale de propagare are forma

$$-\frac{dv_k(z,s)}{dz} = \sum_{m=1}^n Z_{km}(s) i_m(z,s); \quad -\frac{di_k}{dz} = \sum_{m=1}^n Y_{km}(s) v_m(z,s) \Rightarrow$$

$$-\frac{dv(z,s)}{dz} = Z(s) i(z,s); \quad -\frac{di(z,s)}{dz} = Y(s) v(z,s) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 v(z,s)}{dz^2} = Z(s) Y(s) v(z,s); \quad \frac{d^2 i(z,s)}{dz^2} = Y(s) Z(s) i(z,s)$$

care este similară cu forma în domeniul frecvenței a ecuațiilor liniilor de transmisie (telegrafiștilor) obținute din ecuațiile Kirchhoff pentru linii RLCG cu parametri distribuiți. Singura deosebire constă în faptul că aici inductanțele lineice sunt dependente de frecvența complexă s , pentru a modela efectul pelicular din conductoarele liniei și pierderile prin curenți turbionari în substrat. Pentru a extrage această dependență de frecvență a inductanțelor este necesară rezolvarea unei probleme de câmp în regim MQS. În lucrarea citată se prezintă metoda celor două câmpuri folosită pentru extragerea parametrilor lineici dependenți de frecvență și apoi o metodă de extragere a modelelor parametrice de ordin redus pentru liniile de transmisie multifilare cu acești parametri.

Soluția ecuațiilor de propagare este

$$-\frac{dv(z,s)}{dz} = Z(s) i(z,s); \quad -\frac{di(z,s)}{dz} = Y(s) v(z,s) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Z(s) \\ -Y(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{du}{dz} = \mathbf{A} \mathbf{u} \Rightarrow u(z,s) = \exp(Az) u(0,s) \Rightarrow$$

$$u_+ = u(l,s) = \exp(Al) u(0,s) \Rightarrow u_+ = \mathbf{T} \mathbf{u}_-,$$

$$\mathbf{u}_- = \begin{bmatrix} v(0,s) \\ i(0,s) \end{bmatrix}; \mathbf{u}_+ = \begin{bmatrix} v(l,s) \\ i(l,s) \end{bmatrix}; T = \exp \left(l \begin{bmatrix} 0 & -Z(s) \\ -Y(s) & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$i = \mathbf{Y} \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} i_- \\ i_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_- \\ v_+ \end{bmatrix} \Leftrightarrow i = \begin{bmatrix} i_- \\ i_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(0,s) \\ i(l,s) \end{bmatrix}; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_- \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(0,s) \\ v(l,s) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{12}^{-1} T_{11} & T_{12}^{-1} \\ T_{22} T_{12}^{-1} T_{11} - T_{21} & -T_{22} T_{12}^{-1} \end{bmatrix}$$

În particular, admitanța globală a liniei monofilare are expresia:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cosh \gamma l}{Z_c \sinh \gamma} & -\frac{1}{Z_c \sinh \gamma} \\ -\frac{1}{Z_c \sinh \gamma} & \frac{\cosh \gamma l}{Z_c \sinh \gamma} \end{bmatrix} = Y^T$$

$$Z_c = \sqrt{(R + j\omega L) / (G + j\omega C)}; \gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

în care sunt impedența caracteristică și respectiv constanta complexă de propagare, funcție de parametrii lineici R, L, C și G. Felul în care depind funcțiile de circuit (admitanțele) de frecvență caracterizează complet comportarea liniei de transmisie ca element de circuit electric. Ele permit analiza, inclusiv cea energetică, a liniilor de diferite lungimi, cu diferite impedențe de sarcină, interconectate între ele și/sau cu alte elemente. Chiar și în cazul cel mai simplu al liniei monofilare aceste funcții sunt transcendente față de s, cu o infinitate de poli și zerouri. Reducerea ordinului presupune găsirea unei aproximări raționale de ordin finit, deci a unui circuit echivalent cu parametri concentrați pentru acest model cu parametri distribuiți.

16. Bibliografie

- [1] A. Timotin, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, "Lección de Bazele Electrotehnicii", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.
- [2] M. Preda, P. Cristea, "Bazele electrotehnicii", vol. I și vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [3] C. I. Mocanu, "Teoria câmpului electromagnetic", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [4] ANCA TOMESCU, I.B.L. TOMESCU, F.M.G. TOMESCU, ELECTROTEHNICĂ SISTEME ELECTROMAGNETICE CALCULUL CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC MATRIX, ROM, BUCUREȘTI, 2007
- [5] Hermann A. Haus and James R. Melcher, Electromagnetic Fields and Energy (Prentice-Hall, 1989) <http://ocw.unam.na/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/Readings/index.htm#textbooks>
- [6] Alain Bossavit Computational Electromagnetism, Academic Press Inc 1998

- [7] Daniel Ioan. Metode pentru calculul campului electromagnetic. Separarea variabilelor, Institutul Politehnic Bucuresti, Editura IPB, Bucutesti, 1988
- [8] D. Ioan. Modelarea Dispozitiveleor Electromagnetice:
<http://www.lmn.pub.ro/~daniel/cursmde.pdf>
- [9] Daniel Ioan. Metoda elementului finit pentru modelarea electromagnetica, UPB, 2012
- [10] Daniel Ioan. Modelarea multifizica, raport intern al proiectului TOMEMS, UPB, 2012
- [11] Ioan, D; Ciuprina, G; Radulescu, M; et al. Theorems of parameter variations applied for the extraction of compact models of on-chip passive structures, ISSCS 2005: Signals, Circuits and Systems, Proceedings Pages: 147-150, IEEE, 2005
- [12] Ioan, D; Munteanu, I; Ciuprina, G, Adjoint field technique applied in optimal design of a nonlinear inductor, IEEE Transactions on Magnetics Volume: 34 Issue: 5 Pages: 2849-2852, 1998
- [13] G. Ciuprina, D. Ioan, A. Stefanescu, S. Kula, D. Ioan, Robust Procedures for Model Order Reduction of High Speed Interconnects, COMSON Handbook, Springer.
- [14] Leopold B. Felsen, Peter. Russer, Mauro. Mongiardo, ***Electromagnetic Field*** Computation by Network Methods, Springer – 2009.
- [15] Mur, Gerrit. "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations." *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on* 4 (1981): 377-382.
- [16] JEAN-PIERRE BERENGER , Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS **127**, 363–379 (1996)
- [17] JEAN-PIERRE BERENGER , Perfect Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics (Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics), Morgan & Claypool Publishers, 2007
- [18] W.J. Welch, Reciprocity theorems for EM fields whose time dependence is arbitrary, Trans. AP, 1959
- [19] Sophocles J. Orfanidis , Electromagnetic , Waves and Antennas
<http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>
- [20] S. Zaglmayr. *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, Johannes Kepler University, Linz Austria, August 2006

- [21] Joachim Schoberl, Numerical Methods for Maxwell Equations, 2005,
http://www.hpfem.jku.at/publications/ln_maxwell.pdf
- [22] R. Radulet, Al. Timotin, A. Tugulea. Introducerea parametrilor tranzitorii în studiul circuitelor electrice lineare având elemente nefiliforme și pierderi suplimentare. St. cerc. energ. electr., 16(4):857-929, 1966.
- [23] Al. Timotin. Elementul electromagnetic pasiv de circuit. St. cerc. energ. electr., 21(2):347{362, 1971.
- [24] Al. Timotin, A. Tugulea. Parametrii tranzitorii longitudinali ai liniei coaxiale. St. cerc. energ. electr., 17(3):577-602, 1967.
- [25] Al. Timotin. Wave propagation on unilar line with ground return. Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ., 15(2):175{194, 1970.
- [26] R. Radulet, Al. Timotin, A. Tugulea. The propagation equations with transient parameters for long lines with losses. Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ., 15(4):585{599, 1970.
- [27] Al. Timotin, M. Vasiliu. Longitudinal transient parameters of the overhead multiwire transmission line with losses. Rev. Roum. Sci. Techn. - Electrotechn. et Energ., 16(4):655{677, 1971.
- [28] Anders Bondeson, Thomas Rylander, and Par Ingelström. Computational Electromagnetics. Springer, <http://read.pudn.com/downloads163/sourcecode/math/740254/ComputationalElectromagnetics.pdf>, 2005.
- [29] Miklos Kuczmann. Potential Formulations In Magnetism Applying The Finite Element Method. University Győr, Hungary,
<http://maxwell.sze.hu/docs/C4.pdf> <http://maxwell.sze.hu/docs/C4.pdf>, 2009.

Carti de referință pentru Electromagnetism la nivel de licență:

- [30] Dugdale, Essentials of Electromagnetism (1993) - pornește de la legi (Maxwell)
<http://www.amazon.com/Essentials-Electromagnetism-MacMillan-Physical-Science/dp/1563962535>
- [31] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 3rd Ed (1999) - mai avansată, pornește istoric <http://www.amazon.com/Introduction-Electrodynamics-Edition-David-Griffiths/dp/013805326X>

Carti de referinta pentru Electromagnetism la nivel de master/doctorat:

[32] J D Jackson, Classical Electrodynamics - traducere: Electrocinamica clasică (ET 1991)

http://www.amazon.com/Classical-Electrodynamics-Third-Edition-Jackson/dp/047130932X#_

[33] K. Simony, Electrotehnica teoretică, traducere în Editura Tehnică, 1974

[34] Smythe, Static and Dynamic Electricity <http://www.amazon.com/Static-Dynamic-Electricity-William-Smythe/dp/0891169172>

[35] Stratton, Electromagnetic theory <http://www.amazon.com/Electromagnetic-Theory-Stratton-Julius-Adams/dp/1406765473>

[36] Van Bladel, Electromagnetic fields

Lista bibliografică: <http://www.emie.ugal.ro/curstce/10%20-%20Bibliografie.pdf>

ANEXA: Prezentarea inductivă a electrodinamicii. Istoria ideilor

În acest document, electrodinamica a fost prezentată în mod deductiv, pornind de la legile electromagnetismului, da ea poate fi prezentată și în manieră inductivă, așa cum s-au dezvoltat cunoștințele și ideile despre acest domeniu, de-a lungul timpului. O astfel de prezentare are o bază empirică; se pornește de la observațiile experimentale, urmate apoi de generalizări (inducții incomplete) și raționamente, care în final au dus în final la legile electromagnetismului. Vom presupune că electrostatica, electrocinetica și regimul magneto-staționar au fost fundamentate succesiv, pe baze experimentale. S-au stabilit fenomenele fundamentale ale acestor regimuri, care pun în evidență principalele cauze ale câmpului electric, magnetic și ale curentului electric, precum și cele trei legi de material, dar și cele două legi de transfer, care descriu efectele curentului electric.

Prima relație fundamentală, specifică regimului variabil este legea conservării sarcinii, enunțată pentru prima oară de [Benjamin Franklin](#) în 1747. Acesta a fost cel care a dat numele de sarcina pozitivă și negativă sarcinilor, care până atunci se numeau sticloasă și respectiv rășinoasă, consfințind astfel convenția conform căreia spunem astăzi că electronul are sarcină negativă. Aceasta nu este doar o simplă schimbare de notație. Ci, privită acum ca un singur fluid electric, sarcina se conserva la fel ca masa fluidelor. În 1752, prin celebrul și periculosul său experiment cu zmeul a încărcat cu sarcină de natură atmosferică o butelie de Leyda, demonstrând astfel natura electrică a trăsnetului.

Sarcina electrică, la fel ca alte mărimi conservative cum sunt masa, energia sau impulsul satisface o ecuație de continuitate spațio-temporală, numită principiul continuității. Global, curentul (fluxul sau debitul) ce părăsește un domeniu este egal cu scăderea mărimii (în cazul nostru sarcina) din întregul domeniu, în timp ce local, divergența curentului este egală cu viteza de scădere a densității de volum a mărimii respective. Forma diferențială a acestui principiu a fost enunțată pentru prima dată de Euler în 1757 [http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_equations_\(fluid_dynamics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_equations_(fluid_dynamics)) pentru conservarea masei, motiv pentru care este cunoscută în dinamica fluidelor ca ecuația lui Euler. După acest model, legea conservării sarcinii se scrie astfel:

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{D_{\Sigma}}}{dt} \Rightarrow \oint_{\Sigma} J \cdot dA = -\frac{d}{dt} \int_{D_{\Sigma}} \rho dv \Rightarrow \int_{D_{\Sigma}} \operatorname{div} J dv = -\int_{D_{\Sigma}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \Rightarrow \operatorname{div} J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Observația experimentală care are în spate acest principiu este cea referitoare la descărcarea buteliilor de Leyda, printr-o scânteie, care arată că descărcarea condensatorului se face prin curent electric (un impuls exponențial):

$$\Rightarrow i_s = -\frac{dq_{Ds}}{dt}; q = Cu; u = Ri \Rightarrow \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow u(t) = u_0 e^{-t/\tau}; \tau = RC; i(t) = \frac{u_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Dar această legătură a devenit evidentă, abia după 1800, când a fost descoperită prima pila voltaică și a putut fi studiat curentul electric, nu numai în regimul tranzitoriu de scurtă durată, cum se întâmpla în cazul descărcării condensatoarelor. S-a realizat astfel legătura dintre electrocinetică, electrostatică și chiar cu efectul magnetic al curentului electric.

Experimentul fundamental, referitor la trecerea de la regimurile statice și staționare la cele dinamice constă în descoperirea de Michael Faraday în anul 1832 a fenomenului de inducție electromagnetică.

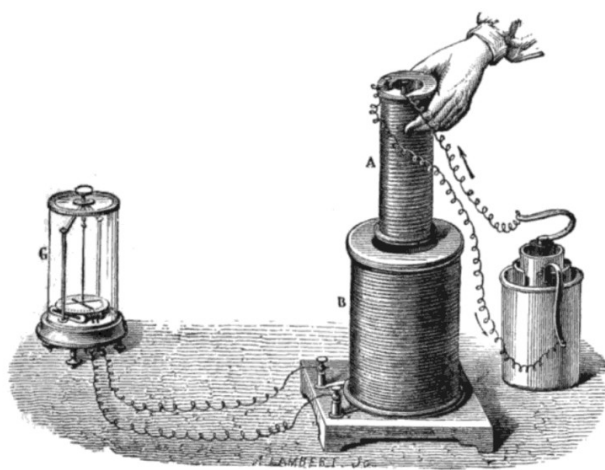


Fig. 14. Experimentul lui Faraday http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday

Acesta urmărea să descopere un efect invers față de cel prin care curentul electric produce câmp magnetic. Dar a constatat doar că dacă fluxul magnetic al unei bobine se modifică în timp, atunci în aceasta se induce o tensiune electrică (Fig. 14) de valoare cu atât mai mare cu cât fluxul variază mai rapid în timp. Deci prin inducție electromagnetică variația în timp a câmpului magnetic produce câmp electric.

Expresia legii inducției electromagnetice se poate stabili și pe cale inductivă, folosind un experiment imaginar al unui cadru etrier conductor, plasat într-un câmp magnetic uniform, de inducție B , orientată perpendicular pe planul cadrului. Dacă translatăm cu viteza v o bară conductoare pe acest etrier (Fig.), atunci fluxul magnetic din cadrul închis cu această bară:

$$\phi = axv \quad d\phi/dt = B a dx/dt = B a v$$

variază în timp cu viteza . Dacă notăm cu e tensiunea indusă în cadru, atunci curentul produs de aceasta va produce o disipare de putere $P = ei$. Puterea

mecanică necesară mișcării barei este $P_m = Fv$, în care $F = Bia$ este forța de natură

magnetică. În acord cu principiul conservării energiei cele două puteri au sumă nulă

$$P_m + P = 0, \quad \text{deci} \quad Biav + ei = 0 \quad \text{implică} \quad e = -Bav = -\frac{d\phi}{dt}$$

Tensiunea electromotoare indusă într-o curbă închisă este egală cu viteza de variație a fluxului electric de pe suprafața mărginită de acea curbă. Acesta este chiar enunțul legii inducției electromagnetice. În medii imobile această lege are următoarea formă locală:

$$u_r = -\frac{d\phi_{s_r}}{dt} \Rightarrow \oint_{s_r} E \cdot dr = -\frac{d}{dt} \int_{s_r} B \cdot dA \Rightarrow \int_{s_r} \text{rot } E \cdot dA = -\int_{s_r} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA \Rightarrow \boxed{\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

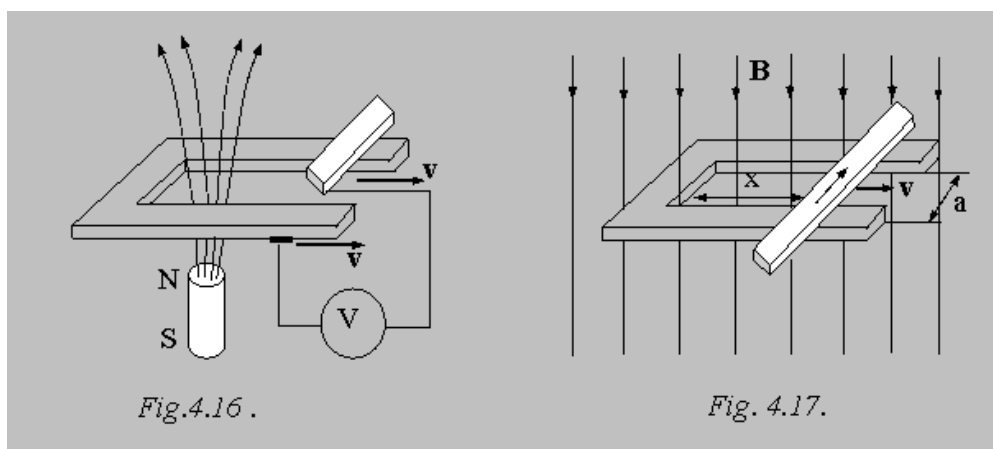


Fig. 15. Experimentul imaginar pentru demonstrarea legii inducției

Ultimul salt conceptual în întregirea electrodinamicii a fost făcut de Maxwell în 1865, când propune amendarea legii circuitului magnetic a lui Ampère, prin adăugarea curentului de deplasare ca sursă a câmpului magnetic, alături de curentul de conducție.

$$u_{m_r} = i_{s_r} + \frac{d\psi_{s_r}}{dt} \Rightarrow \oint_{s_r} H \cdot dr = \int_{s_r} J \cdot dA + \frac{d}{dt} \int_{s_r} D \cdot dA \Rightarrow \boxed{\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t}}$$

Curentul de deplasare este definit de viteza de variație față de timp a fluxului electric, iar densitatea sa este derivată față de timp a inducției electrice.

Doar așa relația este în concordanță cu legea conservării sarcinii, care se obține trecând la limită

suprafața deschisă $s_r \rightarrow \Sigma$ către o suprafață închisă, iar în formă locală aplicând divergența

$$\lim_{s_r \rightarrow \Sigma} \left(u_{m_r} - i_{s_r} - \frac{d\psi_{s_r}}{dt} \right) = -i_{\Sigma} - \frac{d\psi_{\Sigma}}{dt} = 0 \Rightarrow i_{\Sigma} = -\frac{dq_{D_{\Sigma}}}{dt}$$

$$\text{rot } H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \text{div}(\text{rot } H) = \text{div } J + \frac{\partial \text{div } D}{\partial t} \Rightarrow \text{div } J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

În Fig. este evidențiată contradicția din relația lui Ampère

$$\oint_{\Gamma=\partial S} H \cdot dr = \int_{s_1} J \cdot dA = I \neq 0; \quad \oint_{\Gamma=\partial S} H \cdot dr = \int_{s_2} J \cdot dA = 0$$

aplicată în regim variabil, în calculul tensiunii magnetomotoare, folosind două suprafețe care se sprijină pe aceeași curbă închisă, una ce secționează un conductor parcurs de curent de conducție și una ce secționează dielectricul unui condensator (înseriat cu conductorul), și în care curentul de conducție este nul.

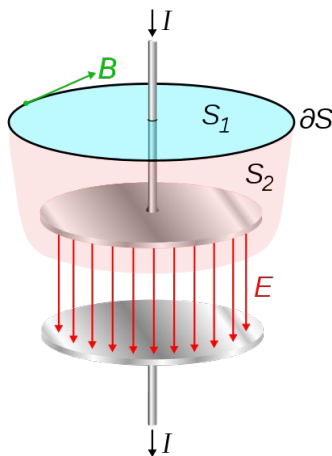


Fig. Contradicția în relația lui Ampere aplicată în regim variabil

http://en.wikipedia.org/wiki/Displacement_current

Legea circuitului magnetic, în forma propusă de Maxwell elimină această contradicție, deoarece curentul total (de conducție plus de deplasare) este solenoidal. El are liniile de curent curbe continui, fără întreruperi, conservându-se la trecerea de la armătura la dielectricul condensatorului, și în consecință, curentul total are aceeași valoare pentru toate suprafețele care se sprijină pe aceeași curbă închisă.

Prin curentul de deplasare, Maxwell a intuit existența unui efect invers inducției electromagnetice, și anume că variația în timp a câmpului electric generează câmp magnetic. Astfel folosind ecuațiile sale a prezis existența undelor electromagnetice și a arătat astfel că

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

lumina este o undă electromagnetică, ce se propagă în vid cu viteza

. Abia în 1887

Heinrich Hertz a pus în evidență experimental existența undelor electromagnetice, realizând de fapt prima radiotransmisie (Fig)

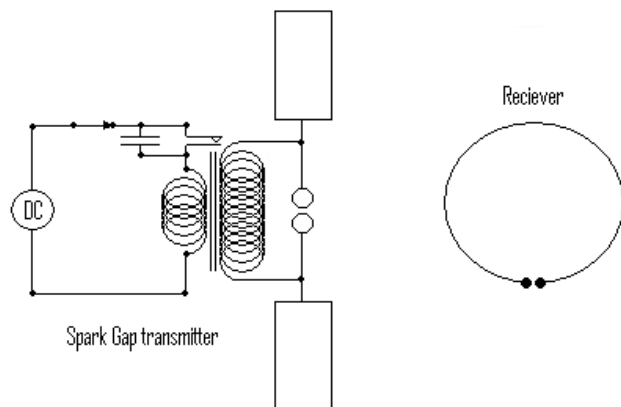


Fig. Experimentul lui Hertz, prima radiotransmisie

http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz.

Relațiile încadrate sunt chiar primele două ecuații ale lui Maxwell, care stau la baza electrodinamicii.

De mare interes pentru electromagnetism sunt legăturile sale cu termodinamica și mecanica, discipline, care a fost înțelese și stăpânite cu mult înainte de a se dezvolta coerent cunoștințele despre electricitate și magnetism. Chiar prima relație cu caracter cantitativ, pe care s-a bazat electromagnetismul, formula lui Coulomb, a forței de interacțiune între două sarcini punctiforme are un model mecanic. Chiar dacă aceasta a fost demonstrată experimental, modelul ei este din legea atracției universale. Locul maselor este luat de sarcini, dar în ambele forța este invers proporțională cu pătratul distanței.

Multă vreme, sarcinile au fost privite ca un fluid electric, iar relația de conservare a sarcinii a avut ca model conservarea masei. De altfel încă de la nașterea sa electromagnetismul macroscopic al corpurilor în mișcare a fost apropiat de mecanica corpurilor continui și de hidrodinamică, unde au intervenit pentru prima dată derivatele substanțiale, de flux, de circulație și de volum ale corpurilor deformabile. În această teorie, conservarea energiei, a momentului liniar și a momentului unghiular au avut evidente modele mecanice. Energia își are rădăcinile conceptuale în termodinamică. Convingerea ca undele electromagnetice, inclusiv lumina se propaga într-un mediu cu proprietăți mecanice cum este eterul, antrenat sau nu de corpuri în mișcarea lor dovedește ca multă vreme electromagnetismul nu s-a desprins de mecanică. Abia prin teoria relativității restrânse, Einstein a rezolvat în mod magistral, gordian am putea spune, dezbaterea asupra ipotezei eterului, demonstrând că pur și simplu nu este nevoie de acest concept, deci ele nu există. Abia astfel electromagnetismul a căpătat totală independență

teoretică. Paradoxul este că lumina, adică undele electromagnetice și viteza lor limitată au un rol fundamental în noua teorie despre spațiu și timp, care stă la baza teoriei relativității. Ea a influențat profund și definitiv, în primul rând cinematica și evident apoi dinamica, deci întreaga mecanică. Electromagnetismul și-a plătit astfel toate datoriile pe care le-a făcut la mecanică. Legătura indisolubilă dintre cele două discipline devine evidentă însă la fundarea mecanicii cuantice, bazată pe dualitatea dintre unde și particule, adică dintre câmp și substanță. Aici fotonul nu este doar un crampei de undă luminoasă ci și o particulă cu impuls, viteză și masă. Toate studiile avansate nu mai tratează independent cele două aspecte, ci în abordare multifizică, în care interacțiunea dintre câmp și substanță joacă un rol fundamental. Fără modelarea riguroasă, microscopică a substanței nu se mai pot explica multe din fenomenele importante pentru progresul tehnologic actual. Aceste modele nu fac altceva decât să descrie modificarea stării microparticulelor, în urma interacțiunii lor mecanice cu câmpul electromagnetic.

Importanța conceptelor și fenomenelor fundamentale ale electromagnetismului și legătura lor strânsă cu termodinamica și mecanica este evidențiată de tendința de a folosi definiții electromagnetice pentru unitățile de măsură fundamentale ale sistemului SI, dar de alte aspecte metrologice avansate, cum este balanța Watt (http://en.wikipedia.org/wiki/Watt_balance).