

Regimul electrostatic (ES)

Daniel Ioan, Feb. 2013

1. Regimurile câmpului EM

În multe situații practice, ecuațiile câmpului electromagnetic se simplifică datorită modului în care variază în timp mărimile fizice. Clasificăm aceste situații, numite regimuri, astfel [1-3]:

- **Regimuri statice:** Ecuații eliptice de tip Poisson, Laplace (distribuție)
 - Electrostatica ES
 - Magnetostatica MS
- **Regimuri staționare**
 - Electrocinetica EC
 - Magneto-staționar MG
- **Regimuri quasi-staționare:** Ecuații parabolice de tip Fourier (difuzie)
 - Capacitiv EQS
 - Inductiv MQS
- **Regimuri general variabile:** Ecuații hiperbolice de tip d'Alambert (propagare)
 - Electrodinamic ED (FW)
 - General, fără pierderi FP (LL)

Regimurile dinamice pot fi analizate în **domeniul timpului (regim tranzitoriu)** sau în **domeniul frecvenței**. În ultimul caz ecuațiile devin eliptice de tip Helmholtz complexe. În regimul LL se formulează și **problema analizei modale**, în care se caută modurile de rezonanță și frecvențele proprii [19-21].

2. Ipotezele electrostaticii

În regimul electrostatic [1-3, 5, 7,8]:

- Corpurile sunt **imobile**: $\mathbf{v} = 0$;
- Mărimile sunt **constante în timp**: $\frac{d}{dt} = 0$;
- **Nu au loc transformări de energie**: $p = 0 \Rightarrow J = 0$, deci curenții sunt nuli;
- **Nu interesează distribuția câmpului magnetic**, deci se presupune $B=0$, $H=0$.

3. Ecuațiile fundamentale ale electrostaticii

Ecuațiile electrostaticii se obțin din legile electromagnetismului, în ipotezele regimului [1-5,19-35].

- **Teorema lui Gauss**, rezultată din legea fluxului electric:

$$\psi_{\Sigma} = q_{D_{\Sigma}} \Leftrightarrow \oint_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_{\Sigma}} \rho dv \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \Leftrightarrow \operatorname{div}_s \mathbf{D} = \rho_s$$

- **Teorema potențialului electrostatic**, rezultată din legea inducției electromagnetice:

$$u_{\Gamma} = \frac{d\varphi_{S_{\Gamma}}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V; \quad \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \Leftrightarrow \mathbf{E}_{t2} = \mathbf{E}_{t1}$$

În formă locală ele sunt ecuații diferențiale de ordinul întâi.

- **Relația constitutivă, de material**, rezultă din legea legăturii dintre $\mathbf{D}$ și $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{E}) \Leftrightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \mathbf{P} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p \Rightarrow \mathbf{D} = \bar{\varepsilon} \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$$

Ultima relație constitutivă se poate folosi formal și în medii neliniare, dacă se considera formal $\mathbf{P}_p$ funcție dependentă de intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$. Un alt mod de a reprezenta dielectricii neliniari este să se considere permitivitatea dependentă de intensitatea câmpului electric.

- **Condiția de echilibru electrostatic în conductoare**, rezultă din legea conducției:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathbf{E}_i, \text{ în conductoare.}$$

Câmpul electrostatic este descris de câmpurile vectoriale $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ sau de câmpul scalar V , cu sursele de câmp ρ , $\mathbf{P}_p$ și $\mathbf{E}_i$ și constanta de material ε . În conductoare, câmpul electric este cunoscut, fiind opusul câmpului imprimat. Din acest motiv, acestea pot fi eliminate din domeniul de calcul.

4. Ecuația de ordinul doi a electrostaticii

Este ecuația diferențială satisfăcută de potențialul electrostatic V . Acesta este determinat până la o constantă aditivă, deoarece $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V = -\operatorname{grad}(V+C)$ și devine unic determinat când se indică valoarea lui într-un punct, numit de referință, sau de masă, atunci când potențialul este nul acolo.

Eliminând din ecuațiile de ordinul întâi câmpurile $\mathbf{E}$ și $\mathbf{D}$ se obține **ecuația de ordinul doi**:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho &\Rightarrow \operatorname{div}(-\varepsilon \operatorname{grad} V + \mathbf{P}_p) = \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 &\Rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} V \Rightarrow -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = \rho_t; \quad \rho_t = \rho + \rho_p, \rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}_p \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p &\Rightarrow \mathbf{D} = -\varepsilon \operatorname{grad} V + \mathbf{P}_p \end{aligned}$$

În care s-a notat cu ρ_p densitatea de volum a sarcinii de polarizație. Faptul că polarizația (permanentă sau temporară) produce același potențial ca o distribuție echivalentă de sarcini fictive, numite de polarizație, permite reducerea analizei corpurilor polarizate la analiza corpurilor electrizate. Mai mult, în felul acesta analiza dielectricilor cu caracteristică afină („liniari” cu polarizație permanentă) se reduce la o problemă liniară, la care polarizația permanentă devine sursă de câmp (și nu constantă de material).

În astfel de dielectrici, potențialul electrostatic satisface deci o ecuație de tip **Poisson** generalizată, care devine cea clasică în medii omogene: $\varepsilon = ct \Rightarrow -\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = \rho_t / \varepsilon \Leftrightarrow \Delta V = -\rho_t / \varepsilon$

În dielectricii neelectrizați și nepolarizați permanent, membrul drept al ecuației se anulează, iar aceasta devine o ecuație **Laplace** (generalizată, în medii neomogene):

$$\rho_t = 0 \Rightarrow -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$$

Pe suprafețele de interfață între două corpuri cu proprietăți dielectrice diferite, potențialul satisface următoarele condiții de trecere:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \\ \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 \\ \varepsilon_1 \frac{dV_1}{dn_{12}} - \varepsilon_2 \frac{dV_2}{dn_{12}} = \rho_s \end{cases}$$

5. Problema fundamentală a electrostaticii

Problema fundamentală a electrostaticii constă în determinarea câmpului, pornind de la sursele lui.

Datele acestei probleme sunt [11-13]:

- Forma și dimensiunile domeniului de calcul D .
- Caracteristica dielectrică din orice punct al domeniului de calcul, descrisă în medii liniare de permitivitatea $\varepsilon > 0$ (scalar sau tensor simetric și pozitiv definit).
- Sursele interne de câmp din orice punct al domeniului de calcul, descrise de densitatea de sarcină ρ și de vectorul polarizației permanente $\mathbf{P}_p$.
- Sursele externe de câmp, descrise de condițiile de frontieră.

Necunoscuta principală a problemei este câmpul scalar V , definit pe domeniul D și care trebuie să satisfacă ecuația de ordinul doi și condițiile de frontieră. După ce a fost determinat potențialul, intensitatea și intensitatea câmpului electrostatic se determină prin gradient și apoi aplicând relația de material. Există însă și metodologii de calcul, în care câmpul se calculează direct, rezolvând ecuațiile de ordinul întâi, fără să fie calculat potențialul V . **Problema de câmp este corect formulată**, dacă sunt îndeplinite următoarele trei condiții [12]:

- Problema **are** soluție;
- Aceasta soluție este **unică**;
- Și depinde **continuu** de sursele de câmp, date ale problemei.

Dacă soluția problemei nu depinde continuu de datele ei, atunci mici variații ale datelor pot determina salturi ale valorii soluției, făcând ca aceasta să nu aibă relevanță, deoarece în practică, datele sunt mereu afectate de erori de măsurare sau de reprezentare.

6. Teorema energiei electrostatice, teorema lui Tellegen

Aceasta este o consecință pătratică, integrală a ecuațiilor fundamentale ale electrostaticii [1-7], [22-27]. Pentru început vom considera un domeniu D , mărginit de frontiera Σ , în interiorul căruia se afla un dielectric liniar caracterizat de permitivitatea ε și un număr de n conductoare liniare. Dacă integram pe acest domeniu funcția scalară

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{V}) = \operatorname{div}(\mathbf{D})V + \mathbf{D}\operatorname{grad}V = \rho V - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \int_D \operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{V}) dv = \oint_{\partial D = \Sigma \cup S_k} \mathbf{D}\mathbf{V} d\mathbf{A} = \int_D (\rho V - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) dv \Rightarrow$$

$$2W_e = \int_D \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \int_D \rho V dv + \oint_{\Sigma} \varepsilon V \frac{dV}{dn} dA - \sum_{k=1}^n V_k \oint_{S_k} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_D \rho V dv + \oint_{\Sigma} \varepsilon V \frac{dV}{dn} dA + \sum_{k=1}^n V_k q_k \Rightarrow$$

$$2W_e = (\mathbf{D}, \mathbf{E})_{L^2(D)^3} = (\rho, V)_{L^2(D)} + (D_n, V)_{L^2(\Sigma)} + \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{v} \Rightarrow (\mathbf{D}, \mathbf{E}) = (\rho, V) + \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{v}$$

Constatam deci ca energia câmpului electrostatic se poate determina fie prin integrarea densității de energie (semiprodusul dintre intensitatea și inducția câmpului electric) pe întreg domeniul ocupat de câmp, fie prin integrarea semiprodusului produsului dintre (densitatea de) sarcină și potențial. Constatam ca la ultima integrala trebuie adăugate nu numai sarcinile conductoarelor (înmulțite cu potențialele lor) ci și contribuția frontierei, pe care o putem considera și pe ea formată dintr-o mulțime de conductoare electrizate superficial. Acesta este **enunțul teoremei energiei electrostatice în domenii liniare**.

În cazul **dielectricilor cu caracteristică afină**, densitatea de coenergie/energie are expresia

$$\mathbf{D} = \mathbf{f}(\mathbf{E}) = \bar{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p \Rightarrow w_e^* = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{D}' d\mathbf{E}' = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{f}(\mathbf{E}') d\mathbf{E}' = \int_0^{\mathbf{E}} (\bar{\varepsilon}\mathbf{E}' + \mathbf{P}_p) d\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot \bar{\varepsilon}\mathbf{E} / 2 + \mathbf{P}_p \mathbf{E} = \mathbf{D}\mathbf{E} / 2 + \mathbf{P}_p \mathbf{E} / 2$$

$$w_e = \mathbf{D}\mathbf{E} - w_e^* = \mathbf{D}\mathbf{E} / 2 - \mathbf{P}_p \mathbf{E} / 2 = \mathbf{E} \bar{\varepsilon} \mathbf{E} / 2$$

iar **teorema energiei electrostatice** capătă forma:

$$2W_e = \int_D (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{E}) dv = \int_D (\rho V - \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{E}) dv + \oint_{\Sigma} \varepsilon V \frac{dV}{dn} dA + \sum_{k=1}^n V_k q_k;$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}\mathbf{V}) = \rho V - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \oint_{\partial D = \Sigma \cup S_k} \mathbf{D}\mathbf{V} d\mathbf{A} = \int_D (\rho V - (\bar{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p) \cdot \mathbf{E}) dv \Rightarrow$$

$$2W_e = \int_D \mathbf{E} \cdot \bar{\varepsilon} \mathbf{E} dv = \int_D (\rho V - \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{E}) dv + \sum_{k=1}^n V_k q_k - \oint_{\Sigma} V D_n dA$$

Dacă studiem cu atenție demonstrația, constatăm că în cazul în care frontiera este unul din cele n conductoare, iar dielectricul nu este electrizat, atunci este satisfăcută relația

$$\int_D \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \sum_{k=1}^n V_k q_k$$

valabilă pentru indiferent care este caracteristica dielectrică (liniară sau neliniară). Mai mult, inducția și sarcinile pot corespunde unei stări a sistemului de conductoare iar intensitatea și potențialul pot corespunde altei stări. Singura condiție este ca inducția să fie solenoidală iar intensitatea câmpului să fie irotațională. Membrul stâng al egalității este de fapt produsul scalar din L^2 dintre cele două

$$(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}$$

câmpuri caracteristice: inducție și intensitate, iar membrul stâng este produsul scalar din $\mathbb{R}^n$ dintre vectorul potențialelor și cel al sarcinilor celor n conductoare.

Aceasta este **teorema lui Tellegen pentru câmpurile electrostatice**, care afirmă că scalar dintre intensitatea irotațională a câmpului electric și câmpul solenoidal al inducției electrice este egal cu produsul scalar al vectorilor sarcinilor și potențialelor (numite și pseudo-energii, deoarece se măsoară în J). Când cele două câmpuri vectoriale descriu același câmp electrostatic, dintr-un domeniu cu caracteristică dielectrică arbitrară, atunci valoarea celor două produse scalare reprezintă chiar dublul energiei electrostatice, iar rezultatul este o consecință a teoremei energiei electrostatice.

7. Teorema de unicitate a potențialului electrostatic

Teoremele de unicitate ale soluției problemei fundamentale a electrostaticii sunt cele care dau condițiile corecte de frontieră ale acestor probleme. Pentru început vom considera problema mai simplă a determinării potențialului scalar, soluție a ecuației de ordinul doi a electrostaticii. Condițiile de frontieră pentru aceasta problemă sunt de tip Dirichlet (valoarea potențialului pe frontieră) sau de tip Neumann (valoarea pe frontieră a derivatei după normală a potențialului, proporțională cu componenta normală a inducției electrice). Problema cu condiții Dirichlet în toate punctele frontierei are soluție unică, în schimb problema cu condiții Neumann în toate punctele de pe frontieră nu este una bine formulată. Aceasta deoarece potențialul nu este univoc determinat, neavând punct de referință, el este determinat doar până la o constantă arbitrară. Mai mult este posibil ca problema nici măcar să nu aibă soluție, cum se întâmplă în cazul condițiilor Neumann arbitrare, a căror integrală pe suprafața de frontieră (proporțională cu sarcina totală din domeniul de calcul), fiind arbitrară, nu satisface această restricție, impusă de teorema lui Gauss. O altă categorie de probleme, frecvent întâlnite în practică este cea a problemelor mixte, cu condiții de frontieră hibride, în care pe o parte a frontierei sunt date condiții Dirichlet, iar pe restul frontierei sunt impuse condiții de tip Neumann. Problemele hibride sunt bine formulate, dacă partea cu condiții Dirichlet nu este vidă, pentru a avea cel puțin un punct de referință pentru potențial. Mai remarcăm faptul că la suprafața conductoarelor incluse în domeniul de calcul, în mod tipic este dată o condiție de frontieră de tip Dirichlet (cunoaștem potențialul fiecărui conductor), pentru că distribuția superficială de sarcină la suprafața conductoarelor este de regulă necunoscută.

Teorema de unicitate pentru potențialul electrostatic are deci următorul enunț [11,12]. Problema fundamentală a electrostaticii, descrisă în paragraful 5 are soluție unică, dacă în fiecare punct de pe frontieră este cunoscută fie valoarea potențialului V (care trebuie știut cel puțin într-un punct), fie valoarea derivatei sale după normală:

- Condiția **Dirichlet** $V(\mathbf{r}) = f_D(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S_D \subseteq \Sigma,$
- Condiția **Neumann** $\frac{dV}{dn} = f_N(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Sigma - S_D = S_N \neq \Sigma,$

În cazul mediilor afine sau liniare și pasive (cu permitivitate pozitiv definită), demonstrația teoremei de unicitate se bazează pe teorema energiei electrostatice. Vom presupune prin absurd ca exista două soluții V', V'' ale aceleiași probleme. Diferența lor $V = V' - V''$ va satisface ecuația de ordinul

doi, dar cu surse nule atât în interior, cât și în exterior, deci potențialul diferență va avea condiții de frontieră f_D, f_N nule, iar câmpul diferență va satisface relația

$$\int_D \mathbf{E} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E} dv = \int_D (\rho V - \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{E}) dv + \sum_{k=1}^n V_k q_k - \oint_{\Sigma} V D_n dA \Rightarrow \int_D \mathbf{E} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E} dv = \int_{S_D} \epsilon f_D \frac{dV}{dn} dA + \int_{S_N} \epsilon V f_N dA = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = 0 \Rightarrow V(\mathbf{r}) = \int_{C(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0, \mathbf{r}_0 \in S_D \Rightarrow V(\mathbf{r}) = V'(\mathbf{r}) - V''(\mathbf{r}) = 0 \Rightarrow V'(\mathbf{r}) = V''(\mathbf{r}), \quad Q.E.D.$$

În consecință, în cazul problemelor liniare, demonstrația unicității se face folosind lema soluției nule, conform căreia o problemă liniară are soluție unică, dacă problema omogenă (cu surse nule) are soluție nulă. Identitatea energetică, care are membrul stâng un termen pozitiv definit, evidențiază deci în membrul drept sursele de câmp, atât cele interne cât și cele externe, a căror cunoaștere asigură unicitatea soluției. Și a căror anulare duc la anularea soluției. Ele sunt deci: densitatea de sarcină, polarizația permanentă din toate punctele domeniului de calcul, Valoarea potențialului sau a derivatei sale după normală (proporțională cu componenta normală a inducției electrice) din orice punct de pe frontiera domeniului de calcul, iar pe conductoare fie sarcinile, fie potențialele fiecărui conductor. Dacă domeniul de calcul este nemărginit, și se extinde la întreg spațiul $\mathbb{R}^3$ sau $\mathbb{R}^2$, atunci condițiile de frontieră pe Σ se înlocuiesc cu condiții asimptotice, de scădere suficient de rapidă a potențialului, spre punctul de la infinit, astfel încât integrala pe Σ să se anuleze.

8. Teoremele de unicitate pentru câmpul electrostatic

În acest paragraf vom formula problema fundamentală a electrostaticii în termeni de câmp. Constatăm că valoarea condiției Dirichlet se poate obține prin integrarea pe o curbă deschisă, cuprinsă în suprafața de frontieră a intensității câmpului electric, iar valoarea condiției Neumann se determină din componenta normală a inducției electrice:

$$V = f_D(P) = \int_{PP_0} \mathbf{E}_t d\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{E}_t = \mathbf{grad}_s V = \mathbf{grad}_s f_D$$

$$\frac{dV}{dn} = f_N(P) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\epsilon}}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{P}_p) \Rightarrow f_N(P) = -\mathbf{Dn} / \epsilon = -D_n / \epsilon; \quad \bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon \bar{\mathbf{1}}, \quad \mathbf{P}_p = 0$$

În problema de câmp, frontiera este partiționată disjunct în partea S_E pe care se dă componenta tangențială a câmpului (ce se identifica pe baza relațiilor anterioare cu S_D) și complementara sa față de Σ , care este de fapt S_N . Totuși, implicația reciprocă din prima relație este valabilă doar dacă suprafața S_D , pe care se dă condiția Dirichlet este una conexă (este formată dintr-o singură bucată, și nu mai multe părți disjuncte). Aceasta deoarece la trecerea de la o parte la alta intervine o tensiune, diferența de potențial necunoscută, ceea ce face ca potențialul de pe întreaga S_D să nu se poată calcula doar prin integrarea componentei tangențiale a intensității câmpului electric pe S_D .

Acesta este motivul pentru care, în cazul în care suprafața S_E pe care se dă E_t **nu este conexă ci este alcătuită din n părți disjuncte**, $S_E = \bigcup_{k=1}^n S_{Ek}, S_{Ek} \cap S_{Ej} = \emptyset$ condițiile de frontieră ale problemei de câmp au adăugate restricții suplimentare. Pentru fiecare parte disjunctă S_{Ek} a suprafeței S_E trebuie

$$U_k = \int_{P_k P_n} \mathbf{E}_t d\mathbf{r}, \quad P_k \in S_{Ek}, P_n \in S_{En} \quad \text{sau} \quad \Psi_k = \int_{S_{Ek}} D_n dS, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1)$$

cunoscute fie valoarea potențialului unui punct fie valoarea fluxului electric de pe acea suprafață (excepție face ultima suprafață, care a fost considerată de referință pentru potențial):

Pentru demonstrație se va aplica lema soluției nule și teorema energiei electrostatice [11,12]:

$$\begin{aligned}\int_D \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv &= \int_D (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{E}) dv = \int_D \rho V dv - \oint_\Sigma V \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA \\ \oint_\Sigma V \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA &= \int_{S_N = \Sigma - S_E} V D_n dA + \sum_{k=1}^n \int_{S_{Ek}} V D_n dS = 0, \quad \int_{S_{Ek}} V D_n dS = U_k \int_{S_{Ek}} D_n dS = U_k \Psi_k \\ V(P) &= \int_{PP_0} \mathbf{E}_t d\mathbf{r} = \int_{PP_0 \subset S_{Ek}} \mathbf{E}_t d\mathbf{r} + \int_{PP_0 \subset S_N} \mathbf{E}_t d\mathbf{r}, \\ \int_D \mathbf{E}^2 dv &= 0 \Rightarrow \mathbf{E} = 0 \Rightarrow V(P) = \int_{PP_0 \subset D} \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0, \quad \text{Q.E.D.}\end{aligned}$$

9. Teoremele liniarității și superpoziției electrostatice

În acest paragraf vom considera doar probleme electrostatice cu dielectrici liniari, la care $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Aceștia pot fi izotropi sau anizotropi, caz în care permitivitatea este un tensor. Așa cum am constatat anterior rezultatele se pot extinde și în cazul dielectricilor cu caracteristică afină, dacă vom considera polarizația permanentă sursă cunoscută de câmp.

Teorema liniarității demonstrează faptul că liniaritatea de la scară locală se extinde și la scară globală, asigurând liniaritatea relației între sursele de câmp și câmpul electrostatic generat de acestea [1-5]. În condițiile teoremei de unicitate, problema fundamentală a electrostaticii este bine formulată, ea având soluție unică și dependentă continuu de surse. În consecință orice problema bine formulată definește un operator care aplicat surselor de câmp determină soluția problemei. Domeniul de definiție al acestui operator conține următoarea secvență de obiecte, care descriu cauzele câmpului: $C = [\rho, \mathbf{P}_p, \mathbf{E}_t, D_n, \mathbf{q}', \mathbf{v}']$ iar codomeniul lui conține obiectele, care descriu câmpurile soluție: $\mathcal{F} = [V, \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{v}', \mathbf{q}']$. Vom nota acest operator de soluționare a problemei de câmp cu $S: \{C\} \rightarrow \{\mathcal{F}\}$. Constatăm că printre sursele problemei se află densitatea de sarcină ρ ; polarizația permanentă $\mathbf{P}_p$, câmpuri scalare și respectiv vectoriale, definite pe domeniul de calcul; condiția de frontieră referitoare la componenta tangențială a câmpului $\mathbf{E}_t$ (eventual în locul ei, valoarea potențialului de pe frontieră); și cea referitoare la componenta normală a inducției D_n , ambele definite pe părți disjuncte ale frontierei propriu-zise (fără conductoarele incluse în domeniul de calcul), vectorul sarcinilor $\mathbf{q}'$ ale primelor m conductoare și vectorul potențialelor $\mathbf{v}'$ ale celorlalte, până la $(n-1)$ conductoare. În acești vectori sunt incluse și condițiile suplimentare referitoare la fluxuri electrice și potențiale pentru părțile disjuncte ale frontierei pe care se dă $\mathbf{E}_t$. În schimb, potențialele conductoarelor $\mathbf{v}'$, cărora li se cunosc sarcinile; ca și sarcinile $\mathbf{q}'$ conductoarelor cărora li se cunosc potențialele sunt incluse în vectorul soluție.

Teorema liniarității afirmă că dacă dielectricul este liniar, atunci și operatorul de soluționare este unul liniar:

$$S\left(\sum_{k=1}^j \lambda_k C_k\right) = \sum_{k=1}^j \lambda_k S(C_k)$$

Demonstrația acestei proprietăți se bazează pe liniaritatea ecuațiilor satisfăcute de soluție. În consecință în problemele electrostatice liniare se poate aplica **principiul superpoziției**, conform căruia, suma cauzelor determină suma efectelor. Soluția unei probleme cu mai multe surse se poate

determina adunând soluțiile problemelor, care au pe rând o singură sursă, iar celelalte surse sunt nule. Câmpul produs de diferite distribuții de sarcină (volumetrică, superficială etc.) se suprapune peste cel produs de polarizația permanentă (respectiv de sarcinile de polarizație) și apoi se suprapune peste câmpul determinat de diferitele condiții de frontieră, care se pot referi la sarcini ale conductoarelor, potențialele lor sau componenta tangențială a intensității câmpului sau inducției electrice de pe frontieră. Teorema se poate extinde și la cazul conductoarelor cu câmp electric imprimat. Acestea adaugă în procesul de superpoziție contribuția lor, care se reprezintă ca o condiție de frontieră de tip Dirichlet, a cărei valoare se calculează integrând câmpul imprimat pe frontiera conductorului.

Trebuie notat faptul că aceste teoreme nu se pot aplica în cazul dielectricilor neliniari, chiar dacă $S: \{C\} \rightarrow \{F\}$ este bine definit, dar el nu este un operator liniar. Mai menționăm faptul că superpoziția se poate aplica doar surselor de câmp și nu celorlalte date ale problemei, de exemplu, ea nu se aplică domeniilor de calcul sau constantelor de material. Rezultă că pentru a putea suprapune soluțiile a două probleme, cele două probleme trebuie să aibă domenii de calcul identice, permeabilități repartizate la fel precum și aceeași partiție Dirichlet-Neumann a frontierei.

10. Relațiile lui Maxwell pentru capacități

În acest paragraf vom considera cazul a $n+1$ conductore scufundate într-un dielectric liniar; omogen sau nu; izotrop sau nu, descris de ecuația constitutivă de forma $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, în care ε este un scalar sau tensor pozitiv definit, eventual dependent de punctul din domeniul de calcul (Fig. 1.a). Cum singurele surse de câmp sunt sarcinile sau potențialele conductoarelor, vom presupune ca domeniul de calcul este mărginit de ultimul din cele n conductoare, considerat de referință pentru potențial (de masă). Cazul domeniului nemărginit, extins la întreg spațiul corespunde extensiei către infinit a acestui ultim conductor, de referință. Un astfel de sistem este numit condensator multipolar. Mărimile globale ce îl caracterizează sunt [1-5]:

- **Vectorul potențialelor** $\mathbf{v} = [v_1; v_2; \dots; v_n]$;
- **Vectorul sarcinilor** $\mathbf{q} = [q_1; q_2; \dots; q_n]$.

Fiind o problemă liniară sarcina q_j a conductorului arbitrar j , atunci când conductorul k este alimentat la potențialul v_k este proporțională cu potențialul sursei $q_j = c_{jk} v_k$. Coeficientul de proporționalitate se măsoară în Farazi și se numește coeficient de capacitate (sau capacitate nodală). El este pozitiv pentru $j = k$, deoarece conductorul k electrizat pozitiv are potențial pozitiv, dar în caz contrar c_{jk} este negativ, deoarece liniile de câmp electric se îndreaptă spre conductorul j , atunci când conductorul k este electrizat pozitiv. Aplicând principiul superpoziției, se calculează sarcina q_j a conductorului arbitrar j , în condițiile în care sunt cunoscute potențialele nenule ale tuturor conductoarelor: $q_j = c_{j1} \cdot v_1 + c_{j2} \cdot v_2 + \dots + c_{jn} \cdot v_n$.

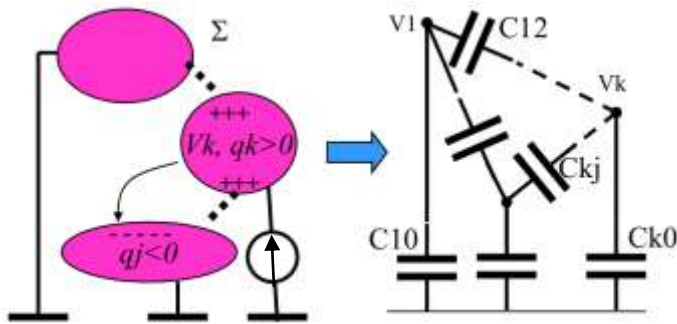


Fig. 1. Capacitățile parțiale ale unui sistem de conductoare

În general rezultă următoarele relații liniare (scrise în final în formă matricial-vectorială) cunoscute sub numele de **relațiile lui Maxwell pentru capacități**:

$$\begin{cases} q_1 = c_{11} \cdot v_1 + c_{12} \cdot v_2 + \dots + c_{1n} \cdot v_n \\ q_2 = c_{21} \cdot v_1 + c_{22} \cdot v_2 + \dots + c_{2n} \cdot v_n \\ \dots \\ q_n = c_{n1} \cdot v_1 + c_{n2} \cdot v_2 + \dots + c_{nn} \cdot v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{v}$$

Matricea $\mathbf{C}$ a capacităților nodale este (după cum se va demonstra ulterior) o matrice simetrică, pozitiv definită, cu diagonala dominantă, strict pozitivă și cu termeni nediagonali negativi. Dacă exprimăm sarcinile în funcție de tensiunile electrice dintre perechile de conductoare:

$$\begin{aligned} q_1 &= c_{11} \cdot v_1 + c_{12} \cdot v_2 + \dots + c_{1n} \cdot v_n = C_{10} \cdot v_1 + C_{12} \cdot (v_1 - v_2) + \dots + C_{1n} \cdot (v_1 - v_n) \\ c_{11} &= C_{10} + C_{12} + \dots + C_{1n}, \quad c_{12} = -C_{12}, \quad \dots, \quad c_{1n} = -C_{1n} \Rightarrow \\ C_{kj} &= -c_{kj} > 0, \quad C_{k0} = c_{k1} + c_{k2} + \dots + c_{kn} > 0 \end{aligned}$$

coeficienții de proporționalitate C_{jk} poartă numele de “capacități parțiale (sau de latură)”. Ele sunt opusele capacităților nodale (deci sunt pozitive), iar suma elementelor de pe linia k a matricei $\mathbf{C}$ (sau de pe coloana k , cu aceeași valoare, deoarece matricea este simetrică $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$) este capacitatea parțială C_{k0} față de masă. Cel mai simplu caz particular este cel în care $n=1$, și matricea $\mathbf{C}$ se reduce la un singur element pozitiv, capacitatea conductorului față de masă (care poate fi punctul de la infinit sau un conductor plasat la frontiera dielectricului). Cele două conductoare au sarcini opuse, $q = q_1 = -q_0 = C(v_1 - v_0)$ și proporționale cu tensiunea dintre ele. Spunem că avem de a face cu un condensator dipolar (cu două armături). Acest dispozitiv liniar este caracterizat de capacitatea sa C , definită ca raportul dintre sarcina unei armături și tensiunea de la acea armatură la cealaltă. Prin exprimarea sarcinilor unui condensator multipolar în funcție de tensiuni și nu în funcție de potențiale, se constituie de fapt o schemă echivalentă formată din condensatoare dipolare pentru sistemul multipolar (Fig. 1.b). Deoarece nu se pot măsura, capacitățile parțiale sunt parametri fictivi. Au sens fizic direct doar capacitățile echivalente, de exemplu cea dintre conductoarele k și j , când celelalte sunt conectate la masă, sunt izolate sau conectate la unul din cele două conductoare k și j . Această capacitate măsurabilă ca orice capacitate dipolară se numește “capacitate de serviciu”, sau „capacitate echivalentă”.

Relațiile lui Maxwell pentru capacități au fost stabilite exact în condițiile în care este valabilă teorema lui Tellegen, în consecință, **energia câmpului electrostatic al unui sistem de n conductoare** are expresia: $2W_e = (\mathbf{D}, \mathbf{E}) = \int_D \varepsilon E^2 dv = \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{Cv} > 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{Cv} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} > 0, \quad \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$$

$\mathbf{S}$ este inversa matricei $\mathbf{C}$, matrice numită a coeficienților de potențial sau a „elastanțelor”.

11. Extragerea capacităților

Fie că este vorba de o capacitate bipolară, fie că despre una parțială sau nodală, calculul ei numeric presupune determinarea câmpului electrostatic. Extragerea capacităților pornind de la forma și dimensiunea domeniului și valorile constantelor de material reprezintă a doua problemă fundamentală a electrostaticii. Ea se reduce la prima problemă fundamentală, cea de analiză a câmpului electrostatic.

Extragerea capacităților se poate realiza pe două căi:

- **Prin metoda liniară:** conductoarele sunt alimentate succesiv cu potențial unitar, iar pentru fiecare excitație se determină câmpul electrostatic cu condiții de frontieră de tip Dirichlet $\mathbf{v} = [1; 0; \dots; 0; \dots; 0]$, $\mathbf{v} = [0; 1; \dots; 0; \dots; 0]$... Fiecare din cele n probleme de câmp determină o

$$\text{coloană a matricei } \mathbf{C}, \text{ deoarece } c_{kj} = \left. \frac{q_k}{v_j} \right|_{\substack{v_i=0 \\ i=1..n \neq j}} = -C_{kj}, \text{ for } k \neq j.$$

- **Prin metoda energetică:** conductoarele sunt alimentate succesiv cu potențial unitar, la fel ca în metoda anterioară, dar coeficienții de capacitate se calculează folosind energia câmpului

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_{kj} v_k v_j \Rightarrow c_{kk} = \left. \frac{2W_e}{v_k^2} \right|_{\substack{v_i=0 \\ i=1..n \neq j}}$$

$$v_i = 0, \text{ pentru } i = 1..n \neq k, j \Rightarrow W_e = c_{kk} v_k^2 / 2 + c_{kj} v_k v_j + c_{jj} v_j^2 / 2 \Rightarrow c_{kj}$$

Soluția pentru cazul $\mathbf{v} = [0; 0; \dots; 1; \dots; 1; \dots; 0]$ se determină prin superpoziție.

12. Teoremele reciprocității și pasivității

Spunem despre un dielectric că este reciproc, dacă tensorul permeabilității sale este unul simetric. Considerente termodinamice garantează aceasta comportare la materialele pasive, pentru care acest tensor este simetric și pozitiv definit (http://w0.rz-berlin.mpg.de/imprs-cs/download/sy04_8.pdf).

Teorema reciprocității ne garantează că proprietatea de simetrie se transferă de la nivel local la nivel global. Ea are următorul enunț: în dielectricii liniari și reciproci, care au tensorul permitivității simetric ($[\varepsilon] = [\varepsilon]^T$) relația dintre sursele câmpului (sarcina electrică) și soluție (potențialul) este una simetrică. Mai exact, operatorul de ordinul doi, al problemei fundamentale a electrostaticii, cel care

leagă distribuția potențialului de distribuția sarcinii $A\bullet =_{def} -div(\bar{\bar{\epsilon}}grad\bullet)$; $AV = \rho$ este în condiții de frontieră nule un operator simetric (autoadjunct). Doua distribuții de potențial determinate de distribuțiile arbitrare de sarcină $\rho_1 = AV_1, \rho_2 = AV_2$ au produsele scalare (din L^2) încrucișate egale $(V_1, \rho_2) = (V_2, \rho_1) \Leftrightarrow (V_1, AV_2) = (AV_1, V_2)$.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se folosește un raționament asemănător cu cel de la teorema energiei electrostatice, doar ca se operează cu produse scalare încrucișate, deci cu pseudo-energii:

$$(V_1, \rho_2) - (V_2, \rho_1) = (E_1, D_2) - (D_1, E_2) + \int_{\Sigma} (V_1 D_{n2} - V_2 D_{n1}) dA = \int_{R^3} (\bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{\epsilon}}^T) E_1 \cdot E_2 dv + 0 = 0$$

În particular dacă o sarcină $q_1=q$ pasată în punctul P_1 produce în punctul P_2 un potențial $V_2=V$, atunci sarcina $q_2=q$, plasată în punctul P_2 va produce în punctul P_1 potențialul $V_1=V$, de aceeași valoare cu V_2 din cazul anterior.

Dacă avem condiții de frontieră nenule, cum se întâmplă în cazul unui sistem de conductoare

$$\int_D (V_1 \rho_2 - V_2 \rho_1) dv + \int_{\Sigma} (V_1 \rho_{s2} - V_2 \rho_{s1}) dA = \int_D (E_1 \cdot D_2 - D_1 \cdot E_2) dv = \int_{R^3} (\bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{\epsilon}}^T) E_1 \cdot E_2 dv = 0 \Rightarrow (V_1, \rho_2) + (V_1, \rho_{s2}) = (V_2, \rho_1) + (V_2, \rho_{s1}); (E_1, D_2) = (D_1, E_2)$$

în care, primul produs scalar este cel din $L^2(D)$, al doilea este din $L^2(\Sigma)$, iar ultimul este din $L^2(D)^3$.

În consecință, matricea capacităților unui sistem de conductoare scufundate într-un dielectric reciproc și neelectrizat este o matrice simetrică:

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{q}'' - \mathbf{q}'^T \cdot \mathbf{v}'' = (E', D'') - (D', E'') = 0 \Rightarrow \mathbf{v}^T \cdot C \mathbf{v}'' - [C \mathbf{v}']^T \cdot \mathbf{v}'' = \mathbf{v}^T \cdot [C - C^T] \mathbf{v}'' = 0 \Rightarrow C = C^T$$

Teorema pasivității ne garantează că proprietatea de pasivitate se transferă de la nivel local la nivel global. Ea are următorul enunț: în dielectricii liniari reciproci și pasivi, care au tensorul permitivității simetric și pozitiv definit ($\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\epsilon}}^T, E^T \cdot D = E^T \cdot \bar{\bar{\epsilon}} E > 0, \forall E \neq 0$), relația dintre sursele câmpului (sarcina electrică) și soluție (potențialul) este una pozitiv definită iar energia câmpului electrostatic este pozitivă.

Mai exact, operatorul de ordinul doi, al problemei fundamentale a electrostaticii, cel care leagă distribuția potențialului de distribuția sarcinii $A\bullet =_{def} -div(\bar{\bar{\epsilon}}grad\bullet)$; $AV = \rho$ este în condiții de frontieră nule un operator simetric și pozitiv definit. Distribuția arbitrară de sarcină nenulă $\rho = AV$ are produsul scalar (din L^2) cu potențialul determinat de ea un număr strict pozitiv $(V, \rho) = (V, AV) > 0$.

Valorile proprii ale matricelor simetrice și pozitiv definite (indiferent dacă acestea reprezintă tensori ai permitivității sau matrice ale capacităților) sunt numere reale și pozitive [19-21].

13. Variația permitivității

În acest paragraf vom studia efectul pe care îl are variația permitivității dielectricului condensatoarelor asupra capacității acestora [27]. Pentru aceasta vom considera un condensator liniar, dipolar în următoarele trei situații:

1. Permitivitatea are valorile de referință, descrise de funcția $\varepsilon_1 = \varepsilon(\mathbf{r})$, definită pe domeniul dielectricului neelectrizat, iar potențialul are în același domeniu distribuția $V' = V_1(\mathbf{r})$ cu valoarea V pe frontiera conductorului activ. Sarcina acestui conductor este $q = CV$.
2. Permitivitatea are valorile perturbate descrise de funcția $\varepsilon_2 = \varepsilon(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon$, definită pe domeniul dielectricului, iar potențialul are în același domeniu distribuția $V'' = V' + \delta V = V_2(\mathbf{r})$ cu valoarea V pe conductor, deci cu perturbație δV nula pe frontieră. Pentru a putea aplica teorema superpoziției vom considera permitivitatea cu valorile de referință și vom echivala perturbația ei prin sarcinile de polarizație generate de aceasta: $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 = (\varepsilon(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon) \mathbf{E}'', \rho_p = -\text{div}(\delta\mathbf{P}) = -\text{div}(\delta\mathbf{D}) = -\text{div}(\mathbf{E}'' \delta\varepsilon)$. Sarcina conductorului activ este $q + \delta q = (C + \delta C)V$. Prima componentă a potențialului din această problemă este chiar distribuția problemei anterioare și are ca sursă condiția de frontieră iar a doua componentă (perturbația) are ca sursă sarcina de polarizație din dielectric și condiții de frontieră nule.
3. Cazul perturbat, obținut prin diferența dintre cazul 2 și cazul 1, astfel încât prin superpoziția dintre cazul 3 și cazul 1 sa se obțină cazul 2. În consecință, în cazul 3, permitivitatea este $\varepsilon_1 = \varepsilon(\mathbf{r})$, potențialul are distribuția δV cu valori nule pe frontieră, sursa de câmp fiind ρ_p iar sarcina conductorului este $\delta q = V\delta C$.

Dacă aplicăm teorema reciprocității între cazurile 1 și 3, rezultă

$$\begin{aligned}
 (\rho_1, V_3) &= (\rho_3, V_1) \Rightarrow 0 = (\rho_p, V') + V\delta q \Rightarrow V\delta q = -(\rho_p, V') \Rightarrow \\
 V^2 \delta C &= -(V', \text{div}(\delta\varepsilon \mathbf{E}'')) = -\delta\varepsilon(V', \text{div}(\text{grad} V')) = -\delta\varepsilon(V', \text{div}(\text{grad} V') + \text{div}(\text{grad} \delta V)) \Rightarrow \\
 \frac{\delta C}{\delta\varepsilon} &= -\frac{(V', \Delta V')}{V^2} > 0
 \end{aligned}$$

Deoarece $(V', \text{div}(\text{grad} \delta V)) = (\delta V, \text{div}(\text{grad} V')) = 0$.

În consecință, **teorema variației permitivității** are următorul enunț: perturbația permitivității $\delta\varepsilon$ și modificarea capacității δC , generată de aceasta au același semn. Atunci când crește permitivitatea sau se metalizează subdomenii ale dielectricului unui condensator, capacitatea sa crește. Scăderea permitivității determină scăderea capacității. Afirmatia reprezintă extensia teoremei **Cohn-Vratsanos** (http://www.es.isy.liu.se/publications/papers_and_reports/1991/Sensitivity_Bound.pdf) din teoria circuitelor. Ea poate fi extinsă și la cazul condensatoarelor multipolare.

14. Teorema lui Thomson. Minimizarea funcționalei de energie

În continuare vom prezenta formularea variațională a problemei fundamentale a electrostaticii [27]. La baza acestei formulări stă următoarea teoremă de minimizare a funcționalei de energie.

Teorema lui Thomson: Dintre toate distribuțiile posibile de potențial, care satisfac condițiile de frontieră esențiale, funcționala de energie este minimă pentru soluția exactă a problemei de electrostatică. În cazul problemei pentru potențial scalar, condiția de frontieră esențială este condiția Dirichlet, iar condiția Neumann este naturală, fiind inclusă în expresia funcționalei de energie. În consecință, dintre toate distribuțiile posibile ale sarcinii pe suprafața conductoarelor, cea care minimizează funcționala de energie este cea reală.

<http://users-phys.au.dk/thostrup/pdf/chapter1.pdf>

<http://arxiv.org/pdf/1005.5519.pdf>

Vom considera pentru început cazul unui dielectric liniar neelectrizat, cu condiții Dirichlet, în care funcționala de energie este chiar energia electrostatică $F(V) = W_e = \int_D \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} dv = \frac{1}{2} \int_D \epsilon \text{grad}^2 V dv$.

Deoarece $\epsilon > 0$, perturbarea soluției determină creșterea valorii acestei funcționale

$$V' = V + \delta V \Rightarrow \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \delta \mathbf{E} \Rightarrow W' = (\mathbf{E} + \delta \mathbf{E}, \mathbf{D} + \delta \mathbf{D}) / 2 = W + (\delta \mathbf{E}, \delta \mathbf{D}) / 2 > W \Rightarrow W < W'$$

$$\text{pentru } \Delta V = \rho = 0; \Sigma = S_D \Rightarrow (\delta \mathbf{E}, \mathbf{D}) = (\mathbf{E}, \delta \mathbf{D}) = (\rho, \delta V) - \int_{\Sigma} D_n \delta V dA = 0.$$

În consecință, matricea capacității are perturbația $\mathbf{v}^T (\mathbf{C}' - \mathbf{C}) \mathbf{v} > 0$, pentru orice vector $\mathbf{v}$, relație ce poate fi scrisă și sub forma $\mathbf{C}' > \mathbf{C}$, în care $\mathbf{C}$ este capacitatea exactă iar $\mathbf{C}'$ este capacitatea aproximativă, extrasă din soluția perturbată. Putem spune că este minimizată nu numai energia ci și capacitatea.

În cazul mai general al problemelor liniare cu dielectrici electrizați, funcționala de energie are expresia:

$$F(V) = \frac{1}{2} \int_D [\epsilon (\text{grad} V)^2 - \rho V] dv + \int_{S_N} V D_n dA < F(V')$$

Se constată că din energia câmpului electrostatic se scade energia surselor interne și externe corespunzătoare condiției de naturale (Neumann). Deoarece este un punct de minim, soluția exactă a problemei, anulează variația diferențială a funcționalei de energie

$$\delta F(V) = 0 \Leftrightarrow \int_D [\epsilon \text{grad} V \cdot \text{grad} \delta V - \rho \delta V] dv + \int_{S_N} \delta V \cdot D_n dS = 0, \quad \delta V|_{S_D} = 0$$

Problema fundamentală a electrostaticii a fost reformulată astfel ca o problemă variațională, în care se caută distribuția potențialului ce minimizează funcționala de energie, deci anulează variația diferențială a acestei funcționale. Aceasta abordare este cunoscută ca metoda Ritz.

O altă abordare este cea de proiecție, cunoscută de metoda Galerkin. Ecuația de ordinul doi se proiectează pe variația arbitrară a potențialului (nulă pe S_D):

$$[\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) + \rho] = 0 \Rightarrow \int_D \delta V [\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) + \rho] dv = 0$$

Prelucrând funcția integrată $\operatorname{div}(\delta V \varepsilon \operatorname{grad} V) = \delta V \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} V) + \varepsilon \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} \delta V \Rightarrow$

$$\int_D (\delta V \rho - \varepsilon \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} \delta V) dv - \int_{S_N} \delta V D_n dS = 0$$

Aceasta este chiar condiția variațională Ritz. S-a demonstrat astfel echivalența dintre cele două abordări, Ritz și Galerkin, dar s-a identificat și expresia funcționalei de energie din teorema lui Thomson.

15. Forma slabă a ecuației electrostatice. Existența și stabilitatea soluției

Formularea variațională a problemei fundamentale a electrostatice, în matematică este cunoscută sub numele de forma slabă a ecuației de ordinul doi, cu derivate parțiale de tip eliptic, satisfăcută de potențialul electrostatic. Aceasta stă la baza metodei elementelor finite [12]. În termeni matematici, problema fundamentală a electrostatice din domeniul de calcul Ω se formulează în felul următor: aflați $V \in H_D^1(\Omega)$ astfel încât

$$a(V, U) = f(U), \forall U \in H_0^1(\Omega), \text{ cu}$$

$$a(V, U) = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} V \cdot \operatorname{grad} U dv, \quad f(U) = \int_{\Omega} U \rho dv + \int_{S_N = \partial\Omega - S_D} U f_N dA, \operatorname{meas}(S_D) \neq 0$$

$$H_D^1(\Omega) = \{V \in L^2(\Omega) \mid \operatorname{grad} V \in L^2(\Omega), V|_{S_D} = f_D\}, \quad H_0^1(\Omega) = H_D^1(\Omega)|_{f_D=0}$$

Constatăm că în această formulare, riguroasă din punct de vedere matematic s-a stabilit cu precizie cadrul funcțional, specificându-se atât spațiul de funcții în care se caută soluția (numite și funcții de încercare) cât și spațiul de funcții pe care s-a proiectat ecuația (numite funcții de test). Cele două spații sunt spații Sobolev ce conțin funcții cu gradient de pătrat integrabil Lebesgue, ale căror urmă pe frontieră satisfac condiția Dirichlet nenulă, respectiv nulă. Ele sunt identice în condiții Dirichlet nule și izomorfe în caz contrar (când spațiul funcțiilor de încercare este translatarea spațiului funcțiilor de test cu un element care satisface condițiile Dirichlet nenule).

Conform **teoremei Lax-Milgram**: dacă funcționala biliniară $a(.,.): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ este

- mărginită $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|, \forall u, v \in X$ și
- coercivă $|a(u, u)| \geq c \|u\|^2, \forall u \in X$

atunci problema determinării elementului v , astfel încât $a(u, v) = f(u)$, în care $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcțională liniară este o problemă bine formulată, are soluție în X , aceasta este unică și depinde continuu de f .

(http://en.wikipedia.org/wiki/Lax-Milgram_theorem,
http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation).

În Endre Suli, Finite Element Methods for Partial Differential Equations, 2012 se demonstrează că cele două condiții ale teoremei Lax-Milgram sunt îndeplinite în cazul funcționalei de energie electrostatică. Problema fundamentală a electrostaticii este deci una bine formulată, are soluție, aceasta este unică și depinde continuu de sursele de câmp.

16. Abordări duale. Teoreme de încadrare

Anterior s-a folosit intensiv potențialul electrostatic scalar V , rezultat al caracterului irotațional al câmpului. Dar în cazul dielectricilor neelectrizați, inducția electrică este un câmp solenoidal, ceea ce permite definirea în acest caz a unui potențial electrostatic vector $\mathbf{T}$ [6]:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{P} \\ \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{T} \\ \operatorname{rot} \mathbf{D} = \mathbf{J}_p \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{T} = \mathbf{J}_p \Rightarrow -\Delta \mathbf{T} = \mathbf{J}_p, \operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \\ \mathbf{J}_p = \operatorname{rot} \mathbf{P} \end{cases}$$

Constatăm că acest potențial este la rândul său irotațional, datorită condiției de etalonare de tip Coulomb. El satisface o ecuație rot-rot, de tip Poisson vectorială, în care termenul liber este rotorul polarizației. Dacă se folosește modelul afin de polarizare

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_p \Rightarrow \mathbf{E} = \varepsilon^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{P}_p) \Rightarrow \operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{T}) = \mathbf{J}_p, \mathbf{J}_p = \operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{P}_p)$$

Spre deosebire de abordarea anterioară, numită **coulombiană**, care a fost bazată pe potențialul scalar, și în care corpurile polarizate erau modelate ca o distribuție fictivă de sarcini de polarizație $\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}_p$, abordarea **amperiană** este bazată pe potențial vector, iar corpurile polarizate sunt modelate cu distribuții de curenți fictivi, de polarizație, cu densitatea $\mathbf{J}_p = \operatorname{rot}(\varepsilon^{-1} \mathbf{P})$, iar pe suprafețele de discontinuitate cum sunt frontierele corpurilor dielectrice $\mathbf{J}_{sp} = \operatorname{rot}_s(\varepsilon^{-1} \mathbf{P})$.

Trebuie să remarcăm că cele două modele definesc două probleme liniare, care sunt echivalente cu cea inițială doar parțial. Modelul coulombian are același potențial scalar ca și problema originală, deci și aceeași intensitate a câmpului, dar nu și aceeași inducție electrică (care este inițial $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ și respectiv $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ în problema cu sarcini fictive). În schimb, modelul amperian are același potențial vectorial ca și problema originală, deci și aceeași inducție electrică, dar nu și aceeași intensitate a câmpului electric (care este inițial $\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P}) / \varepsilon_0$ și respectiv $\mathbf{E} = \mathbf{D} / \varepsilon_0$ în problema cu curenți de polarizație fictivi).

În abordarea amperiană, funcționala de energie are expresia

$$F(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \int_D [\varepsilon (\operatorname{rot} \mathbf{T})^2 - \mathbf{T} \cdot \mathbf{J}_p] dv - \int_{S_E} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_t dA < F(\mathbf{T}')$$

în care S_E este partea de frontieră pe care se impune condiția naturală referitoare la componenta tangențială a câmpului electric: $\mathbf{n} \times (\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{T}) \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_t$.

Demonstrația aceste afirmații poate fi găsită în D. Ioan Metoda elementelor finite pentru modelarea electroagheică, 2012, (paragraful 2.3.2 Formularea corectă a problemei rot-rot) și în <http://maxwell.sze.hu/docs/C4.pdf> <http://maxwell.sze.hu/docs/C4.pdf>.

În cazul problemei de electrostatică pentru potențialul vector, condiția de frontieră naturală este condiția pentru condiția pentru componenta tangențială E_t a câmpului electric, fiind inclusă în expresia funcționalei de energie a problemei, iar condiția pentru componenta normală D_n a inducției electrice este esențială. Aceasta trebuie impusă atât funcțiilor de încercare cât și celor de test.

Deoarece în cazul potențialului scalar și a celui vector, condițiile de frontieră naturale și esențiale sunt schimbate între ele, spunem că cele două abordări ale aceleiași probleme sunt complementare, sau duale. Forma slabă a problemei constă în aflarea elementului din $H(rot, \Omega) = \{T \in L^2(\Omega)^3 \mid rot T \in L^2(\Omega), rot T|_{S_N} = D_n\}$, care satisface egalitatea

$$a(T, W) = f(W), \forall W \in H_0(rot, \Omega), \text{ cu } H_0^1(\Omega) = H(rot, \Omega)|_{D_n=0},$$

$$a(T, W) = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} rot T \cdot rot W dv; \quad f(W) = \int_{\Omega} W \cdot J_p dv + \int_{S_E} W \cdot E_t dA$$

În cazul condensatorului multipolar, cu dielectric liniar și neelctrizat, funcționala de energie este

$$F(T) = \frac{1}{2} \int_D \varepsilon^{-1} (rot T)^2 dv = \int_D \frac{E \cdot D}{2} dv = W < F(T') = W'$$

$$T' = T + \delta T \Rightarrow D' = D + \delta D \Rightarrow W' = (E + \delta E, D + \delta D) / 2 = W + (\delta E, \delta D) / 2 > W \Rightarrow W < W'$$

$$\text{pentru } \Delta V = \rho = 0; \Sigma = S_E \Rightarrow (\delta E, D) = (E, \delta D) = (\rho, \delta V) - \int_{\Sigma} D_n \delta V dA = 0.$$

Adică chiar valoarea energiei electrostatice, care folosind condițiile esențiale de frontieră este

$W = q^T S q > 0$, în care S este elastața ($S = C^{-1}$). În consecință, matricea capacității are perturbația $q^T (S' - S) q > 0$, pentru orice vector q , relație ce poate fi scrisă și sub forma $S' > S$, în care S este elastața exactă iar S' este elastața aproximativă, extrasă din soluția perturbată. Putem spune că este minimizată nu numai energia ci și inversa capacității. În consecință minimizarea energie conduce de această dată la maximizarea și nu minimizarea capacității !!!

Teorema încadrării capacităților. Dacă $C'' = [S']^{-1}$ este capacitatea perturbată extrasă din potențialul vector și cu C' capacitatea perturbată extrasă din potențialul scalar, cele două matrice încadrează capacitatea exactă, neperturbată: $C'' < C < C'$.

Încadrarea soluției exacte de cel două soluții duale, aproximative, obținute din modelul amperian și respectiv cel coulombian permite determinarea erorii de aproximare, lucru foarte important pentru metodele numerice [14]. O altă teoremă utilă de încadrare a soluției este cea referitoare la trunchierea domeniului de calcul.

Teorema încadrării capacităților domeniului trunchiat. Dacă C' este capacitatea extrasă folosind domeniul trunchiat cu condiții de frontieră Neumann nule (domeniul este mărginit de o folie anelectrică), iar C'' este capacitatea extrasă folosind domeniul trunchiat cu condiții de frontieră

Dirichlet nule (domeniul este mărginit de o folie conductoare), atunci cele două matrice încadrează capacitatea originală a domeniului netrunchiat: $C'' < C < C'$.

Este evidențiată din nou dualitatea dintre condițiile Dirichlet și Neumann. Demonstrația acestei teoreme este banală, bazându-se pe teorema variației permitivității. În primul caz, partea trunchiată este încărcată cu un material anelectric (cu $\varepsilon = 0$) iar în al doilea cazul cu un material conductor (cu $\varepsilon \rightarrow \infty$). Această teoremă se poate aplica și în cazul trunchierii domeniilor nemărginite (întreg spațiul) la domenii mărginite, trunchieri care intervine frecvent în abordările numerice [17].

17. Teorema câmpului adjunct. Sensitivități

Teorema variației permitivității a evidențiat sensul în care variază capacitățile, când este perturbată valoarea constantei de material în unele locuri. În continuare vom determina sensibilitatea, adică rata relativă a acestei variații [15], [18].

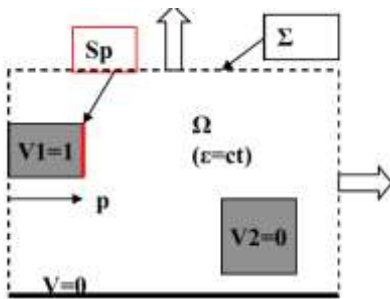


Fig. 2. Condensator parametrizat

Vom considera un condensator liniar descris de mai mulți parametri geometrici, din care ne îndreptăm atenția asupra parametrului p . Considerăm două repartiții de câmp, una originală, cu caracteristica de material $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$ și alta adjunctă, cu caracteristica de material $\underline{D} = \varepsilon^T \underline{E}$, caracteristici identice, în cazul uzual al dielectricilor izotropi sau reciproci. Conform teoremei lui Tellegen, pseudo-energiile electrostatice corespunzătoare variațiilor au expresiile $(\delta \underline{E}, \underline{D}) = \delta \underline{v}^T \underline{q}$, $(\underline{E}, \delta \underline{D}) = \underline{v}^T \delta \underline{q}$. Vectorul sarcinilor $\underline{q} = \underline{C} \underline{v}$ are variația $\delta \underline{q} = \delta \underline{C} \underline{v} + \underline{C} \delta \underline{v} = \delta \underline{C} \underline{v}$ în cazul excitațiilor constante ($\delta \underline{v} = 0$). Diferența pseudo-energiilor $(\delta \underline{E}, \underline{D}) - (\underline{E}, \delta \underline{D}) = \delta \underline{v}^T \underline{q} - \underline{v}^T \delta \underline{q} = (\delta \underline{E}, \varepsilon \underline{E}) - (\underline{E}, \varepsilon \delta \underline{E}) = -\underline{v}^T \delta \underline{C} \underline{v}$. Alegând $V_k = V_0 \delta_{ki}$ pentru $k = 1, \dots, n$, rezultă $\delta C_{ij} = (\delta \varepsilon, \underline{E}_i \underline{E}_j) / V_0^2$, iar în final $\frac{\partial C_{ij}}{\partial p} = \frac{1}{V_0^2} \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \underline{E}_i \cdot \underline{E}_j d\Omega = \frac{1}{V_0^2} \int_{S_p} \varepsilon \underline{E}_i \cdot \underline{E}_j dS > 0$, în care S_p este suprafața care se modifică (prin translatare după direcția normală), sub influența parametrului p .

Concluzionând, pentru a calcula derivata capacității C_{12} , față de parametrul p , determinăm câmpul $\underline{E}$ produs de conductorul 1, alimentat la potențialul V_0 și apoi câmpul adjunct $\underline{E}$, produs de conductorul 2, alimentat la potențialul V_0 . Se integrează apoi dublul densității de pseudoenergie $\underline{E} \underline{D}$ pe suprafața S_p afectată de parametrul p , iar rezultatul se raportează la V_0^2 . Avantajul acestei abordări bazată pe folosirea câmpului adjunct este că se pot calcula sensibilitățile față de mai mulți parametri, cu un efort de calcul minimal, folosind aceeași pereche de câmpuri original și adjunct, fără să fie necesară calcule suplimentare de câmp pentru fiecare parametru nou.

18. Forțe electrostatice

Câmpul electrostatic acționează cu forțe, cupluri, presiuni sau tensiuni mecanice asupra corpurilor electrizate și polarizate temporar sau permanent, care pot fi dielectrici sau conductori [1-5]. Pentru început vom analiza cazul cel mai simplu al corpurilor de foarte mici dimensiuni.

Câmpul electric de intensitate $\mathbf{E}$ acționează cu forța coulombiană $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ asupra unui corp punctiform, electrizat cu sarcina q . Direcția acestei forțe coincide cu cea a câmpului, dar sensul ei depinde și de semnul sarcinii. Trebuie să remarcăm totuși că această relație este inconsistentă din punct de vedere matematic, deoarece câmpul unui corp punctiform este nemărginit în acel punct. Ea trebuie înțeleasă mai curând astfel: forța exercitată de câmpul electric asupra unui corp de mici dimensiuni este produsul dintre sarcina acelui corp și intensitatea câmpului mediu din corp (la limită, câmpul din centrul corpului). Această dificultate dispare când vorbim despre densitatea de volum a forței coulombiene $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$, care permite calculul forței și cuplului, pe care câmpul electrostatic le exercită asupra unui întreg corp electrizat cu o distribuție arbitrară de sarcini (volumetrică sau la suprafețele de discontinuitate, de separare între corpuri, cum sunt suprafețele corpurilor conductoare):

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{E} dv = \int_D \rho_v \mathbf{E} dv + \int_{S_d} \rho_s \mathbf{E} dA; \quad \mathbf{C} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{E} dv = \int_D \rho_v \mathbf{r} \times \mathbf{E} dv + \int_{S_d} \rho_s \mathbf{r} \times \mathbf{E} dA$$

Conform observației anterioare, aici intensitatea câmpului electric, care se integrează pe suprafețele de discontinuitate este câmpul mediu de pe cele două fețe ale suprafeței S_d .

Orice corp polarizat este echivalent cu o distribuție de sarcini fictive de polarizație $\rho_p = -\text{div} \mathbf{P}$, atât din punctul de vedere al câmpului $(\mathbf{V}, \mathbf{E})$ produs (conform prezentării anterioare), dar cât și din punctul de vedere al efectul mecanic al câmpului asupra corpului echivalat (în baza expresiei tensorului tensiunilor maxwelliene). În consecință, relațiile de mai sus se aplică și pentru calculul acțiunilor ponderomotoare, asupra corpurilor electrizate și polarizate, dacă în locul densității de sarcină adevărată folosim sarcina totală, inclusiv ce de polarizare $\rho_t = \rho + \rho_p = \rho - \text{div} \mathbf{P}$.

Un mic corp polarizat, de exemplu un cilindru de lungime l și aria bazei A , polarizat uniform axial, are sarcinile de polarizație repartizate uniform pe cele două baze $\rho_{ps} = -\text{div}_s \mathbf{P} = \pm P \Rightarrow q = \pm PA$, fiind de fapt un dipol cu cele două sarcini plasate la distanța l (Fig. 3). Momentul dipolar este $\mathbf{p} = q\mathbf{l} = nPA\mathbf{l} = \mathbf{P}V$, unde $V=Al$ este volumul corpului. Acțiunile mecanice asupra dipolului, deci inclusiv asupra corpului polarizat de moment $\mathbf{p}$ sunt descrise de

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2) - q\mathbf{E}_v(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2) = \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}); \quad \mathbf{C} = \frac{l}{2} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}/2) - \left(-\frac{l}{2}\right) \times q\mathbf{E}_v(\mathbf{r} - \mathbf{l}/2) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

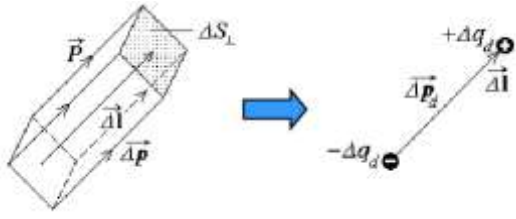


Fig. 3. Echivalarea corpului polarizat cu un dipol [F.M.G. Tomescu, Electrotehnica]

Constatăm ca aceste mici corpuri tind să fie rotite, astfel încât polarizația lor să fie orientată în direcția și sensul câmpului. După rotire, forțele care acționează asupra lor tind să le deplaseze spre zonele de câmp electric intens. Aceste relații se aplică în cazul polarizării permanente, în schimb pentru micile corpuri dielectrice, liniare, care se polarizează temporar

$$\mathbf{f} = \text{grad}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) = \varepsilon_0 \chi \text{grad}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\varepsilon_0 \chi}{2} \text{grad} E^2 \Rightarrow \mathbf{f} = \chi \text{grad}(w_e) \Rightarrow \mathbf{F} = \int_D \chi \text{grad}(w_e) dv$$

Atunci când sunt sferice aceste mici corpuri au polarizația în direcția câmpului, deci asupra lor nu se exercită cupluri. În schimb, asupra corpurilor cu forme anizotrope, cum sunt elipsoizii sunt acționate de cupluri, care tind să le orienteze în direcția câmpului [16]. Forțele electrostatice care acționează asupra particulelor dielectrice sunt proporționale cu susceptivitatea dielectrică (sunt cu atât mai mari cu cât corpul se polarizează temporar mai tare) și tind să le deplaseze înspre zonele în care densitatea de energie a câmpului este mai mare (câmpul este mai intens).

În regim electrostatic, sarcina conductoarelor liniare se distribuie la suprafața lor cu o densitate $\rho_s = \text{div}_s \mathbf{D} = D_n = \varepsilon E_n$. Acesta face ca acțiunile ponderomotoare asupra corpurilor conductoare să aibă expresia $p = \rho_s E_n / 2 = \varepsilon E_n^2 / 2 = w_e \Rightarrow \mathbf{F} = \oint_{\Sigma} p \mathbf{n} dA$, $\mathbf{C} = \oint_{\Sigma} p(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dA$. Câmpul electrostatic acționează asupra conductoarelor cu o presiune (orientată spre exteriorul conductorului, indiferent care este orientarea câmpului), a cărei valoare este chiar densitatea de energie a câmpului electric de la suprafața conductorului. Deoarece câmpul este orientat normal la suprafața conductorului, această expresie a presiunii este în acord cu expresia tensorului tensiunilor maxwelliene.

În cazul general, conform teoremei energiei electromagnetice în medii mobile și teoremei conservării impulsului electromagnetic, în medii liniare, densitatea de volum a forței electrostatice are expresia:

$$\mathbf{f} = \rho_v \mathbf{E} - \frac{E^2}{2} (\text{grad} \varepsilon) + \text{grad} \left(\frac{E^2}{2} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right) = \text{div} \left[\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}^T + \bar{\mathbf{I}} \left(\frac{E^2}{2} \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - w_e \right) \right]$$

În primul membru se recunosc: forța coulombiană, forța asupra dielectricilor neomogeni (datorată polarizației temporare a acestora), forța de electrostricțiune, iar în membrul drept expresia tensorului tensiunilor maxwelliene și acelor de electrostricțiune.

O altă metodă principal diferită de a determina acțiunile ponderomotoare este cea bazată pe teoremele forțelor generalizate. Spre exemplu, forțele exercitate asupra armăturilor condensatoarelor dipolare sau multipolare liniare au expresiile:

$$W_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{S} \mathbf{q} \Rightarrow X_k = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_q \Rightarrow X_k = - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_k} \mathbf{q}; \quad W_e = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \Rightarrow X_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial x_k} \mathbf{v}.$$

Când cunoaștem sarcinile armăturilor și expresiile capacităților inverse, atunci este preferabil să aplicăm prima teoremă a forțelor generalizate, iar atunci când cunoaștem potențialele lor și expresiile capacităților este preferabilă a doua teoremă a forțelor generalizate. Derivatele capacităților se pot calcula, numeric sau simbolic. Remarcăm ca ele sunt chiar senzitivitățile determinate cu metoda câmpului adjuncț.

O teorema referitoare la forțele electrostatice este **teorema lui Earnshaw**, conform căreia, un sistem de corpuri nu poate fi menținut în stare de echilibru staționar stabil doar de forțele electrostatice. Demonstrația acestei teoreme pornește de la condiția de echilibru mecanic stabil a unei particule, asupra căreia acționează forța coulombiană $\text{div} \mathbf{F} < 0 \Leftrightarrow \text{div}(q\mathbf{E}) < 0$, dar $\text{div} \mathbf{E} = 0$.

În concluzia acestui paragraf, constatăm că efectele mecanice ale câmpului electrostatic sunt total determinate de soluția problemei fundamentale a acestui regim. Cunoașterea câmpului permite determinarea acțiunilor ponderomotoare prin diferite metode, care dau același rezultat.

19. Probleme externe. Integralele coulombiene

În acest paragraf vom determina câmpul electrostatic în întreg spațiul vid datorat unor distribuții arbitrare de sarcini electrice [1-5].

Fiind o problemă liniară se poate aplica principiul superpoziției. Pornim de expresia potențialului produs în vid, în punctul $\mathbf{r}$ de o sarcină punctiformă q plasată în punctul $\mathbf{r}_0$ (determinat folosind teoremele fundamentale ale electrostaticii în formă globală):

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

Suprapunând câmpurile sarcinilor elementare $dq = \rho dv$ rezultă expresiile potențialului și a câmpului produs de o distribuție arbitrară de sarcini, numite integralele coulombiene:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\rho(\mathbf{r}_0) dv_0}{R}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\rho(\mathbf{r}_0) \mathbf{R} dv_0}{R^3}.$$

Iar dacă există și corpuri electrizate superficial, atunci trebuie considerate și integralele pe suprafețele acestor corpuri:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\rho dv}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_d} \frac{\rho_s dA}{R}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\rho \mathbf{R} dv}{R^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_d} \frac{\rho_s \mathbf{R} dA}{R^3}$$

Câmpul corpurilor electrizate are liniile orientate de la sarcinile pozitive la cele negative. În cazul problemelor plan paralele (2D), o sarcină elementară (punctuală în planul xOy) este de fapt un fir rectiliniu, infinit lung electrizat. Potențialul acestui fir are expresia, cunoscută sub numele de potențial logaritmic:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R} \ln(R/R_0), \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_l \mathbf{R}}{2\pi\epsilon_0 R^2}, \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

Care prin superpoziție determină expresia integralelor coulombiene din problemele plan paralele:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{R^2} \rho \ln R dA + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{S_d \cap \Pi} \rho_s \ln R ds, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{R^2} \frac{\rho \mathbf{R} dA}{R^2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{S_d \cap \Pi} \frac{\rho_s \mathbf{R} ds}{R^2}$$

În care s-a notat cu Π , planul problemei plan-paralele ($z=0$).

În cazul corpurilor polarizate permanent ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$), folosind sarcinile de polarizație se obțin expresiile

$$V(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\text{div} \mathbf{P}_p dv}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_d} \frac{\text{div}_s \mathbf{P}_p dA}{R}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\mathbf{R} \text{div} \mathbf{P}_p dv}{R^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_d} \frac{\mathbf{R} \text{div}_s \mathbf{P}_p dA}{R^3},$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{-1}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_{R^2} \text{div} \mathbf{P}_p \cdot \ln R \cdot dA + \int_{S_d \cap \Pi} \text{div}_s \mathbf{P}_p \cdot \ln R \cdot ds \right), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{2\pi\epsilon_0} \left(\int_{R^2} \frac{\mathbf{R} \text{div} \mathbf{P}_p \cdot dA}{R^2} + \int_{S_d \cap \Pi} \frac{\mathbf{R} \text{div}_s \mathbf{P}_p \cdot ds}{R^2} \right),$$

care se superpun cu cele anterioare, în cazul dielectricilor liniari și omogeni, polarizați permanent și electrizați.

Aceste relații se pot aplica și dielectricilor omogeni, dacă se substituie ϵ_0 cu ϵ . Iar dacă avem dielectrici liniari, polarizați temporal, neomogeni, atunci în aceste expresii, $\mathbf{P}_p$ trebuie înlocuit cu

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}_0) = \chi \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = -\chi \text{grad} V(\mathbf{r}_0); \quad \chi = \epsilon_r - 1 = (\epsilon - \epsilon_0) / \epsilon_0.$$

Prin această substituie, integralele coulombiene, care erau explicite până acum, devin ecuații integrale, deoarece necunoscuta se află atât în membrul stâng, cât și sub integrală.

În cazul în care în domeniu se află și corpuri conductoare, distribuția de sarcini de la suprafețele lor este necunoscută. Atunci când cunoaștem potențialul conductoarelor (condiții Dirichlet pe suprafața lor, notată cu Σ), densitatea de sarcină de la suprafața conductoarelor este soluția ecuației integrale obținută prin trecerea la limită $\mathbf{r} \rightarrow \Sigma$ a relațiilor:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3 - D_\Sigma} \frac{\rho - \text{div} \mathbf{P} dv}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\rho_s dA}{R}, \quad \mathbf{r} \in R^3 - D_\Sigma$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{R^2 - D_\Sigma} (\rho - \text{div} \mathbf{P}) \cdot \ln R \cdot dA + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \rho_s \cdot \ln R \cdot ds, \quad \mathbf{r} \in R^3 - D_\Sigma$$

Acestea reprezintă ecuațiile integrale ale electrostaticii, reformularea ecuațiilor fundamentale ale acestui regim, ecuații de ordinul întâi - globale, de ordinul doi, sau în forma slabă variațională (Ritz sau Galerkin). Fiecare din aceste formulări stau la baza câte unei metode numerice de calcul a câmpului electrostatic: Metoda Ecuațiilor Integrale (IEM, dacă dielectricii se polarizează temporal), Metoda Elementelor de frontieră (BEM, dacă dielectricii sunt polarizați doar permanent), Metoda Ecuațiilor Integrale sau Metoda Integralelor Finite (FIT), Metoda Diferențelor Finite (FDM) și respectiv Metoda Elementelor finite (FEM) [11-13].

20. Câmpul corpurilor polarizate

Ca și în paragraful următor, vom considera pentru început corpuri de mici dimensiuni plasate în vidul extins în întregul spațiu, urmând ca ulterior să calculăm câmpul produs de corpuri care au o distribuție arbitrară a polarizației permanente [8].

După cum am constatat în paragraful 18, un mic corp polarizat, este echivalent cu un dipol cu sarcinile $+q$ și $-q$ plasate la distanța l și cu momentul dipolar $\mathbf{p} = q\mathbf{l} = \mathbf{P}V$, unde $V=Al$ este volumul corpului. Potențialul și câmpul produse de un mic cilindru polarizat uniform (Fig. 4) au expresiile

$$V(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R^3} \frac{\text{div} \mathbf{P} dv}{R} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\text{div}_s \mathbf{P} dS}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_+} + \frac{-q}{R_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_+ R_-} \approx$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta l \cos \theta}{R^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R}, \Rightarrow V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} V = -\text{grad} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^3} \text{grad}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}) \text{grad} \frac{1}{R^3} \right] \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right]$$

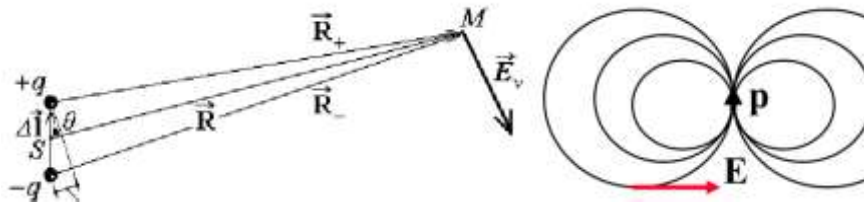


Fig.4. Câmpul produs de un mic corp polarizat [F.M.G. Tomescu, Electrotehnica]

Prin superpoziție se obține potențialul și câmpul produse de o distribuție arbitrară a polarizației

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} dv}{R^3};$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \text{grad} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{R^3} dv.$$

În cazul particular al unei sfere de rază a , polarizată permanent uniform (Fig. 5), câmpul exterior este câmpul unui mic corp polarizat cu același moment electric ca și sfera, și plasat în centrul sferei. Câmpul din interiorul sferei este uniform, cu intensitatea orientată în direcția polarizației dar cu sens invers față de aceasta, în timp ce inducția electrică este orientată în sensul polarizației. Cele două câmpuri se determină din condiția de continuitate a componentei tangențiale și respectiv a componentei normale, la ecuatorul și respectiv polul sferei:

$$\mathbf{E}_{ext} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right], \Rightarrow E_r = \frac{p \cos \alpha}{2\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{2Pa^3 \cos \alpha}{3\epsilon_0 R^3}, E_\alpha = \frac{-p \sin \alpha}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{-Pa^3 \sin \alpha}{3\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{Ecuador: } E_{int} = E_{ext} \Rightarrow E_{int} = P/(3\epsilon_0) \Rightarrow \mathbf{E}_{int} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}, \quad \mathbf{D}_{int} = \frac{2\mathbf{P}}{3}$$

$$\text{Poli: } D_{int} = D_{ext} \Rightarrow -\epsilon_0 E_{int} + P = 2P/3$$

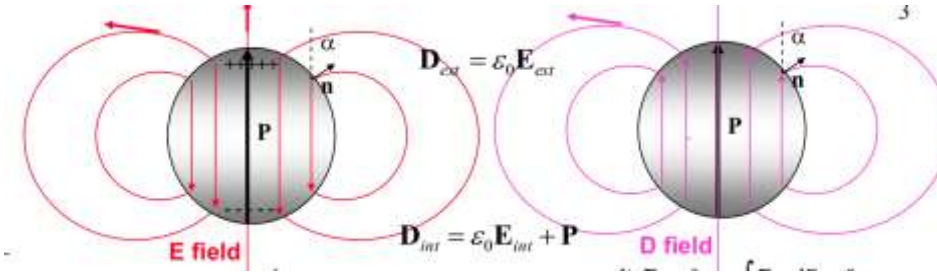


Fig. 5. Campul din interiorul sferei polarizată permanent

Expresiile obținute sunt utile și pentru a determina felul în care este perturbat câmpul de dielectricii care se polarizează temporar. Vom presupune un câmp electric uniform în vid, de intensitate E_0 , în care introducem un corp sferic, realizat din dielectric liniar cu permitivitatea ϵ . Sfera se va polariza temporar în direcția și sensul câmpului exterior (Fig.6). Conform rezultatelor anterioare, liniile câmpului, inițial drepte paralele sunt atrase și concentrate în interiorul sferei, cu atât mai mult cu cât, permitivitatea ei este mai mare. În interiorul dielectricului, inducția electrică este întărită, în schimb intensitatea câmpului electric este slăbită:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{int} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = E + \chi E/3 = (1 + \chi/3)E \Rightarrow E_{int} = E_0/(1 + \chi/3)$$

$$D_{int} = \epsilon E_{int} = \epsilon E_0/(1 + \chi/3) = D_0(1 + \chi)/(1 + \chi/3) \Rightarrow p = \epsilon_0 E_0 4\pi a^3 \chi/(\chi + 3)$$

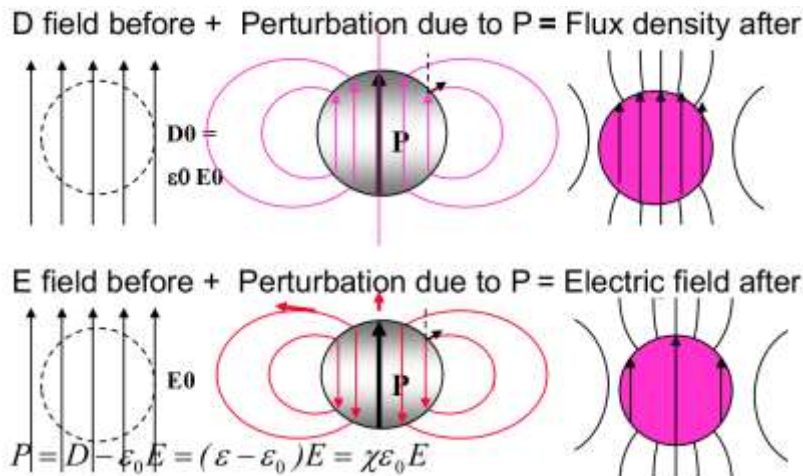


Fig. 6. Perturbația câmpului datorată unei sfere dielectrice

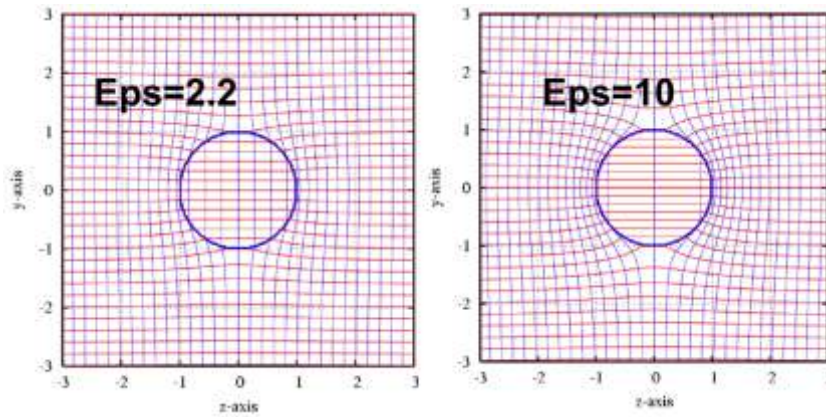


Fig. 7. Echipotențialele și liniile de câmp ale unor sfere dielectrice în câmp uniform
http://wiki.4hv.org/index.php/Dielectric_Sphere_in_Electric_Field

Momentul electric ce descrie polarizarea temporară a sferei este proporțional cu câmpul inițial. Și crește cu susceptibilitatea, mai ales la valori mici ale acesteia. Cu cât permitivitatea este mai mare, cu atât câmpul interior este mai mic (Fig. 7). Asimptotic el scade față de E_0 de $\varepsilon/3$ ori, la limită pentru cazul $\varepsilon \rightarrow \infty$, care corespunde de fapt sferei conductoare, câmpul interior se anulează. În schimb, inducția electrică din interior crește cu ε , dar cel mult de trei ori față de valoare inițială. Deci o sferă conductoare perturbă câmpul și atrage în interiorul ei linii de câmp electric, dar cel mult de trei ori mai multe decât una nepolarizabilă. Sarcina de influență, distribuită la suprafața sferei conductoare, are densitatea cu distribuție cosinusoidală față de unghiul azimutal:

$$E_\alpha = E_0 \sin \alpha - \frac{p \sin \alpha}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = 0 \Rightarrow p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0,$$

$$E_r = E_0 \cos \alpha + \frac{p \cos \alpha}{2\pi\varepsilon_0 a^3} = (E_0 + 2E_0) \cos \alpha = 3E_0 \cos \alpha; \Rightarrow \rho_s = D_n = \varepsilon_0 E_r = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \alpha.$$

Vom încheia acest paragraf considerând un corp (încadrat într-o sferă de rază a), plasat în vid și electricizat cu o distribuție arbitrară de sarcini reale sau de polarizație. La mare depărtare, sfera este văzută ca o sarcină punctuală, plasată în centrul ei, cu potențialul invers proporțional cu distanța și câmpul invers proporțional cu pătratul distanței. Dacă sfera are sarcină totală nulă, atunci ea este echivalentă cu un dipol plasat în centrul sferei și cu momentul dipolar egal cu momentul distribuției reale de sarcină. Acum, la mare distanță, conform cu Tabelul 1, potențialul variază invers proporțional cu pătratul distanței iar câmpul invers proporțional cu cubul distanței. Dacă în schimb înlocuim distribuția inițială arbitrară de sarcini cu o sarcină totală și cu momentul dipolar echivalent, plasate în centrul sferei, atunci câmpul produs de aceste surse echivalente va aproxima câmpul real nu numai la distanțe foarte mari față de raza sferei ci și la distanțe ceva mai mici. Acest procedeu poate continua, distribuția arbitrară de sarcină producând în final un câmp egal cu cel al unei serii de multipoli echivalenți. În dezvoltarea multipolară, potențialul unei distribuții arbitrare de sarcini punctiforme are expresia

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r^{n+1}} Y_n^m(\theta, \varphi)$$

în care $M_n^m = \sum_{i=1}^{n2} q_i r_i^n Y_n^{-m}(\theta_i, \varphi_i)$ sunt coeficienții multipolari iar Y sunt armonicile sferice. Eroarea acestei dezvoltări este mărginită de $err < K(R/r)^{l+1}$, care scade rapid cu ordinul l al ultimului termen multipolar considerat.

Tabelul 1. Distribuția câmpului pentru diferite surse concentrate

Sursa de câmp	Potențialul $V(\mathbf{r})$	Câmpul $\mathbf{E}(\mathbf{r})$
Sarcină punctiformă în 3D	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$	$\frac{q\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$
Sarcină lineică rectiliniile (2D)	$\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R} \ln(R/R_0)$	$\frac{\rho_l \mathbf{R}}{2\pi\epsilon_0 R^2}$
Mic corp polarizat în 3D	$\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right]$
Dreaptă polarizată transversal (2D)	$\frac{\mathbf{P}_l \cdot \mathbf{R}}{2\pi\epsilon_0 R^2}$	$\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{P}_l \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^4} - \frac{\mathbf{P}_l}{R^2} \right]$

Detalii privind dezvoltarea mutipolară pot fi găsite în : [22] iar modul în care se aplică aceasta pentru a accelera calculele numerice prin tehnica FMM (Fast Multipole Method) este descris în K. Nabors – *FastCap*, IEEE Trans on CAD, nov 91.

21. Ecuațiile integrale ale electrostaticii. Funcția Green

Vom continua analiza ecuațiile integrale ale electrostaticii, observând că atunci când punctul curent se află pe suprafața conductoarelor, integrala pe Σ devine una improprie, deoarece apar situații în care $R=0$, iar funcția de sub integrală devine nemărginită [8]. Un alt aspect, care nu a fost luat în considerare anterior este cazul domeniului de calcul mărginit, când vorbim despre o „problemă interioară”. Condițiile de frontieră în acest caz pot fi de tip Dirichlet sau Neumann. Studiul problemei interioare va arunca o altă lumină și asupra rezolvării problemei în domeniul complementar, nemărginit, numită „problema exterioară”.

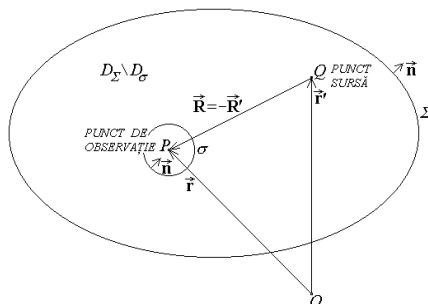


Fig. 8. Punctele sursă Q și de observație P [F.M.G. Tomescu, Electrotehnica]

Sa determinăm pentru început soluția problemei interioare, adică potențialul din interiorul unui domeniu mărginit, alcătuit din dielectric omogen electrizat. Pornim de la identitatea lui Green:

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad}(g)) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + f \Delta g \Rightarrow$$

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) = f \Delta g - g \Delta f \Rightarrow \int_D (f \Delta g - g \Delta f) dv = \oint_{\partial D} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$$

în care vom presupune că $f=V(\mathbf{r})$ este potențialul căutat, iar $g(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R}$ este soluția fundamentală a ecuației Laplace (potențialul în vid al unei sarcini punctiforme unitare). Deoarece această funcție satisface ecuația $-\Delta g(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, spunem că ea este funcția Green pentru întregul spațiu. Aceste alegeri conduc la relațiile

$$\int_{D_\Sigma \setminus D_\sigma} (f \Delta g - g \Delta f) dv' = \oint_\Sigma \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA' + \oint_\sigma \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dA',$$

$$\Delta g = 0, \quad \lim_{R' \rightarrow 0} \oint_\sigma f \frac{\partial g}{\partial n} dA' = \lim_{R' \rightarrow 0} \frac{f_{\text{med}}}{R'^2} \oint_\sigma dA' = 4\pi \cdot f(P); \quad \lim_{R' \rightarrow 0} \oint_\sigma g \frac{\partial f}{\partial n} dS' = \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_{\text{med}} \cdot \frac{4\pi R'^2}{R'} \rightarrow 0$$

în care, pentru a elimina singularitatea ($R=0$), din domeniul de calcul a fost eliminată o mică sferă σ , de rază $R' \rightarrow 0$, cu centrul plasat în punctul P , de observație (Fig.8). În final se obține

$$V(P) = \frac{-1}{4\pi} \int_{D_\Sigma} \frac{\Delta V|_Q}{R'} dv' - \frac{1}{4\pi} \oint_\Sigma \left[V|_Q \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R'} \right) - \frac{1}{R'} \frac{\partial V}{\partial n} \right]_Q dA'$$

relație cunoscută sub numele de formula celor trei potențiale. Ea conține în membrul drept următorii termeni:

- Potențialul de volum, care dă contribuția surselor din interiorul domeniului (sarcinile distribuite volumetric ρ_v);
- Potențialul de dublu strat, care dă contribuția unei folii polarizate superficial (P_s), plasată pe frontiera domeniului de calcul și care generează un salt de potențial la trecerea prin frontieră;
- Potențialul de simplu strat, care dă contribuția unei distribuții superficiale de sarcină (ρ_s) de pe frontiera domeniului de calcul.

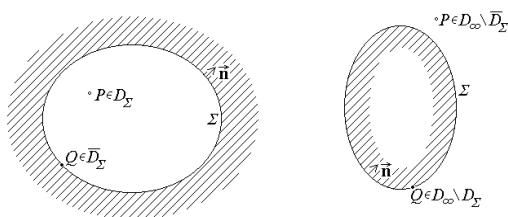


Fig. 9. Problemele electrostatice interioare și exterioare [F.M.G. Tomescu, Electrotehnica]

Se spune despre această formulă că este înșelătoare, deoarece ar sugera că pentru calculul potențialului din interiorul unui domeniu ar trebui cunoscute și condițiile de frontieră Dirichlet dar și cele Neumann, când în realitate, conform teoremei de unicitate trebuie cunoscută doar una dintre ele. Soluția problemei exterioare are aceeași formă, numai că de această dată sensul normalei la suprafața de frontieră se schimbă (Fig. 9). Aceasta face ca potențialul să aibă un salt la trecerea prin frontiera Σ , de la problema exterioară la cea interioară. Soluția problemei Dirichlet se poate exprima ca un potențial de dublu strat iar soluția problemei Neumann se poate exprima ca un potențial de simplu strat (<http://www.stanford.edu/class/math220b/handouts/potential.pdf>).

Formula celor trei potențiale nu se poate aplica punctelor de pe frontieră. Pentru astfel de puncte

$$\lim_{R' \rightarrow 0} \oint_{\sigma} f \frac{\partial g}{\partial n} dA' = \lim_{R' \rightarrow 0} \frac{f_{\text{med}}}{R'^2} \oint_{\sigma} dA' = \omega - \text{unghiul solid sub care se vede frontiera domeniului de calcul:}$$

$$\omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{daca } P \text{ este in interiorul domeniului de calcul } D_{\Sigma} \\ 2\pi, & \text{daca } P \text{ este intr-un punct neted al frontierei } \Sigma \\ \Omega, & \text{daca } P \text{ este intr-un punct unghiular al frontierei } \Sigma \end{cases}$$

În consecință, rezultă ecuația integrală

$$\omega V(P) = - \int_{D_{\Sigma}} \frac{\Delta V|_Q}{R'} dv' - \oint_{\Sigma} \left[V|_Q \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R'} \right) - \frac{1}{R'} \frac{\partial V}{\partial n} \right]_Q dA'$$

valabilă atât în interiorul domeniului de calcul cât și pe frontieră, în punctele netede ale acesteia, dar și pe muchii sau vârfuri. În 2D, în care ecuația Laplace are soluția fundamentală $g(\mathbf{r}) = \ln \frac{1}{R'}$, forma integrală a ecuației electrostaticii este

$$\alpha V(P) = - \int_{D_{\Gamma}} \Delta V|_Q \left(\ln \frac{1}{R'} \right) dA' - \int_{\Gamma = \partial D_{\Gamma}} \left[V|_Q \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R'} \right) - \frac{\partial V}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{R'} \right) \right] ds'$$

în care

$$\alpha = \begin{cases} 2\pi, & \text{daca } P \text{ este in interiorul domeniului de calcul } D_{\Gamma} \\ \pi, & \text{daca } P \text{ este intr-un punct neted al frontierei } \Gamma \\ \beta, & \text{daca } P \text{ este intr-un colt de unghi } \beta \text{ al frontierei } \Gamma \end{cases}$$

Pentru a extinde această abordare și la cazul domeniilor neomogene trebuie ca în locul soluției fundamentale ale ecuației Laplace să se utilizeze funcții Green pentru operatorul $\text{div}(\epsilon \text{grad})$. Vom considera pentru început cazul unui dielectric neomogen extins în întreg spațiul $\mathbb{R}^3$ (Fig.10). Funcția Green este definită ca potențialul din punctul $\mathbf{r}''$ dat de o sarcina punctiformă, plasată în punctul $\mathbf{r}'$:

$$-\text{div}(\epsilon \text{grad} V(\mathbf{r}'')) = \rho(\mathbf{r}') \Rightarrow -\text{div}(\epsilon \text{grad} G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')) = \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}').$$



Fig.10. Cazul domeniilor nemărginite neomogene

Prin superpoziție rezultă soluția ecuației Poisson generalizate, pentru o distribuție arbitrară a surselor de câmp, ca integrala a acestora, ponderate cu funcția Green:

$$V(\mathbf{r}'') = \int_{R^3} G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV$$

Trebuie să remarcăm că în baza teoremei reciprocității $(\rho', V'') = (\rho'', V') \Rightarrow (\rho', G\rho'') = (\rho'', G\rho')$, funcția Green este simetrică $G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$. În cazul particular al dielectricilor omogeni, funcția Green este $G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon R}$, iar integrala anterioară devine integrala coulombiană pentru potențial.

Un exemplu de funcție Green pentru un domeniu neomogen este potențialul produs de o sarcină punctiformă plasată deasupra unui semispațiu dielectric cu susceptivitate χ (Fig. 11):

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \left[\frac{1}{R} - \frac{\alpha}{R'} \right], & \text{for } z = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{k} > 0, \alpha = \chi/(\chi + 2), \\ \beta/R, & \text{for } z \leq 0, \beta = 2/(\chi + 2) \end{cases}$$

<http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jk1/lectures/node38.html>

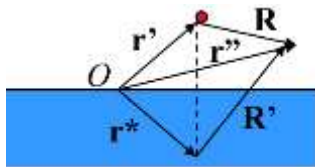


Fig. 11. Sarcina punctiformă într-un domeniu neomogen

Vom considera acum cazul unui domeniu neomogen, mărginit de frontiera Σ , pe care sunt impuse condiții mixte nule (Fig. 12). Funcția Green este acum soluția problemei:

$$-\text{div}(\epsilon \text{grad} G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')) = \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'), \text{ pentru } \mathbf{r}'' \in D$$

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = 0, \text{ pentru } \mathbf{r}'' \in S_D \subset \Sigma = \partial D, S_D \neq \emptyset$$

$$\frac{dG(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')}{dn''} = 0, \text{ for } \mathbf{r}'' \in S_N = \Sigma - S_D$$

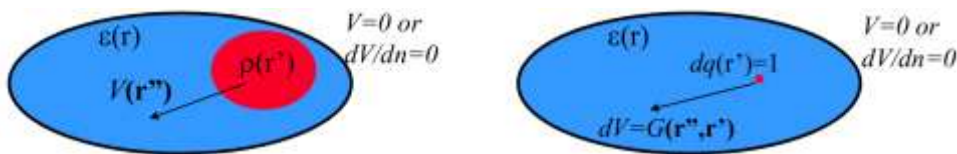


Fig. 12. Cazul domeiilor neomogene mărginite cu condiții de frontieră nule

Și de această dată, potențialul produs de o distribuție arbitrară de sarcini $V(\mathbf{r}'') = \int_D G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dv$ se obține prin superpoziție, deci va îndeplini condițiile de frontieră mixte nule menționate anterior.

Un exemplu de astfel de funcție Green este corespunzător unei sarcini punctiforme plaste deasupra unui semispațiu conductor:

$$G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{cases} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right], & \text{for } z = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{k} > 0, \\ 0, & \text{for } z \leq 0, \end{cases}$$

care se obține din exemplul anterior considerând $\chi \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 1, \beta \rightarrow 0$.

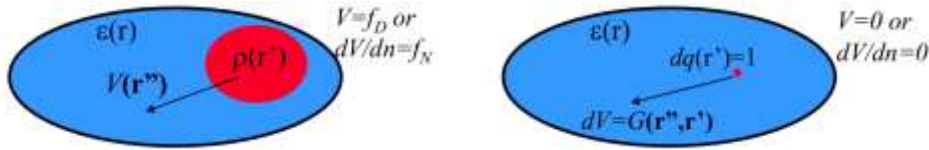


Fig. 13. Cazul domeniilor neomogene mărginite cu condiții de frontieră nenule

Ultima situație pe care o vom considera este cazul domeniilor mărginite de o suprafață cu condiții de frontieră nenule (Fig. 13). Păstrăm neschimbată definiția funcției Green (adică o definim tot în condiții de frontieră nule) și aplicăm o relație de tip reciprocitate:

$$\begin{aligned} \text{div}(\delta V \epsilon \text{grad} V) &= \delta V \text{div}(\epsilon \text{grad} V) + \epsilon \text{grad} V \cdot \text{grad} \delta V \Rightarrow \\ \int_D (\delta V \rho - \epsilon \text{grad} V \cdot \text{grad} \delta V) dv - \int_S \delta V D_n dS &= 0 \Rightarrow \int_D (V \delta \rho - \delta V \rho) dv - \int_S (V \delta D_n - \delta V D_n) dS = 0 \\ \int_D (V \delta \rho - \epsilon \text{grad} V \cdot \text{grad} \delta V) dv - \int_S V \delta D_n dS &= 0 \end{aligned}$$

În care $\delta \rho, \delta V$ vor fi sarcina și potențialul corespunzătoare funcției Green, rezultă $V - \int_D G \rho dv = \int_S (\epsilon V \frac{dG}{dn} - G D_n) dA$. În final potențialul unei distribuții arbitrare de sarcină, dintr-un domeniu neomogen, mărginit de o suprafață cu condiții mixte de frontieră are expresia:

$$V(\mathbf{r}'') = \int_D G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dv - \int_{S_D} \epsilon \frac{dG}{dn'} \cdot f_D(\mathbf{r}') dA' - \int_{S_N} \epsilon G f_N(\mathbf{r}') dA'$$

Spre deosebire de formula celor trei potențiale (care era de fapt o ecuație integrală), această relație nu mai are un caracter înșelător, în ea intervenind doar condițiile de frontieră ale problemei corect formulate, Dirichlet sau Neumann. Ea generalizează integrala coulombiană pentru cazul domeniilor neomogene și mărginite.

Vom exemplifica această abordare considerând o distribuție arbitrară de sarcini deasupra unui electrod plan, conectat la masă, dar care are o parte S , de potențial V_0 . Fiind o problemă Dirichlet $S_N=0$, rezultând potențialul

$$V(\mathbf{r}'') = \int_{z>0} G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dv - \epsilon_0 V_0 \int_S \frac{dG}{dn'} dA', \quad \text{cu } G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

Constatăm că aceste expresii ale potențialului sunt soluții ale ecuațiilor integrale, de tipul formulei celor trei potențiale.

22. Metodele electrostaticii

Prezentul document nu urmărește prezentarea modului în care se pot rezolva problemele de electrostatică ci doar formularea lor corectă, în vederea modelării electromagnetice [11-13]. Vom enumera doar cele mai frecvente metode de analiza, care se împart în abordări analitice și numerice.

Principalele metode analitice [3], [4], [7], [8], [10] pentru calculul câmpului electrostatic sunt:

- Metoda lui Gauss – metodă elementală pentru problemele 1D problems;
- Metoda superpoziției, integralele coulombiene;
- Metoda imaginilor;
- Metoda separării variabilelor;
- Metoda funcțiilor analitice, pentru probleme 2D;
- Metoda transformării conforme Schwarz-Christoffel;
- Metoda funcției Green.

Metodele numerice [6], [8], [9], [12] cel mai frecvent folosite pentru calculul câmpului electrostatic sunt:

- Metoda diferențelor finite (FDM - Finite difference method);
- Metoda integralelor finite (FIT - Finite integration Technique - finite volumes);
- Metoda elementelor finite (FEM - Finite Element Method);
- Metoda elementelor de frontier (BEM - Boundary Element Method);
- Metoda ecuațiilor integrale (IEM - Integral Equations Method), cunoscută și sub numele de metoda momentelor (MoM – Method of Moments).

Studiul metodelor de rezolvare nu poate fi făcut fără înțelegerea formulării corecte a problemei, care a fost prezentată în acest document.

23. Bibliografie

[1] A. Timotin, Viorica Hortopan, A. Ifrim, M. Preda, "Lecții de Bazele Electrotehnicii", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.

[2] M. Preda, P. Cristea, "Bazele electrotehnicii", vol. I și vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.

- [3] C .I. Mocanu, "Teoria campului electromagnetic", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [4] R. Răduleț, Bazele Electrotehnicii - Probleme I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
- [5] Hermann A. Haus and James R. Melcher, Electromagnetic Fields and Energy (Prentice-Hall, 1989)
<http://ocw.unam.na/OcwWeb/Electrical-Engineering-and-Computer-Science/6-641Spring-2005/Readings/index.htm#textbooks>
- [6] Alain Bossavit Computational Electromagnetism, Academic Press Inc 1998
- [7] Sadiku, Matthew N. O. (2006). Elements of Electromagnetics (4th ed.). Oxford University
- [8] ANCA TOMESCU, I.B.L. TOMESCU, F.M.G. TOMESCU, ELECTROTEHNICĂ SISTEME ELECTROMAGNETICE CALCULUL CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC MATRIX, ROM, BUCUREȘTI, 2007
- [9] Daniel Ioan, Irina Munteanu, Bogdan Ionescu, Mihai Popescu, Radu Popa, Mihai Lăzărescu, Gabriela Ciuprina. Metode numerice în ingineria electrică. MATRIX ROM, București, 1998
- [10] Daniel Ioan. Metode pentru calculul campului electromagnetic. Separarea variabilelor, Institutul Politehnic Bucuresti, Editura IPB, Bucutesti, 1988
- [11] D. Ioan. Modelarea Dispozitivelor Electromagnetice:
<http://www.lmn.pub.ro/~daniel/cursmde.pdf>
- [12] Daniel Ioan. Metoda elementului finit pentru modelarea electromagnetică, UPB, 2012
- [13] Daniel Ioan. Modelarea multifizică, raport intern al proiectului TOMEMS, UPB, 2012
- [14] Ioan, D; Ciuprina, G; Radulescu, M; et al. Theorems of parameter variations applied for the extraction of compact models of on-chip passive structures, ISSCS 2005: Signals, Circuits and Systems, Proceedings Pages: 147-150, IEEE, 2005
- [15] Bi, Yu; van der Kolk, K.; Ioan, D.; et al. Sensitivity Computation of Interconnect Capacitances with respect to Geometric Parameters, 2008 IEEE-EPEP Electrical Performance of Electronic Packaging, Pages: 193-196, IEEE, 2008
- [16] Ionita, Valentin; Ioan, Daniel Magnetic Torque Evaluation for Magnetized Nanoparticles in Applied Electromagnetic Engineering For Magnetic, Superconducting and Nanomaterials A.G. Mamalis, M. Enokizono and A. Kladas(Eds.), Volume: 670 Pages: 103-109, Trans Tech Publications - TTP, 2011
- [17] Ioan, Daniel; Ciuprina, Gabriela; Radulescu, Marius, Absorbing boundary conditions for compact modeling of on-chip passive structures, Compel - the International Journal For Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Volume: 25 Issue: 3 Pages: 652-659, 2006
- [18] Ioan, D; Munteanu, I; Ciuprina, G, Adjoint field technique applied in optimal design of a nonlinear inductor, IEEE Transactions on Magnetics Volume: 34 Issue: 5 Pages: 2849-2852, 1998

Carti de referinta pentru Electromagnetism la nivel de licență:

[19] Dugdale, Essentials of Electromagnetism (1993) - pornește de la legi (Maxwell)

<http://www.amazon.com/Essentials-Electromagnetism-MacMillan-Physical-Science/dp/1563962535>

[20] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, 3rd Ed (1999) - mai avansata, porneste

istoric <http://www.amazon.com/Introduction-Electrodynamics-Edition-David-Griffiths/dp/013805326X>

[21] Matthew N. O. Sadiku, Elements of Electromagnetics

Carti de referinta pentru Electromagnetism la nivel de master/doctorat:

[22] J D Jackson, Classical Electrodynamics - traducere: Electrodinamica clasica (ET 1991)

http://www.amazon.com/Classical-Electrodynamics-Third-Edition-Jackson/dp/047130932X#_

[23] K. Simony, Electrotehnica teoretica, traducere in Editura Tehnica, 1974

[24] Smythe, Static and Dynamic Electricity <http://www.amazon.com/Static-Dynamic-Electricity-William-Smythe/dp/0891169172>

[25] Stratton, Electromagnetic theory <http://www.amazon.com/Electromagnetic-Theory-Stratton-Julius-Adams/dp/1406765473>

[26] Van Bladel, Electromagnetic fields

[27] E. Dunod, Electrostatique et magnetostique

Lista bibliografica: <http://www.emie.ugal.ro/curstce/10%20-%20Bibliografie.pdf>

Cursuri disponibile pe net:

[28] Carmen Schiopu – Electromagnetism

http://www.physics.pub.ro/Cursuri/Carmen_Schiopu_-_Electromagnetism/

http://www.physics.pub.ro/Cursuri/Emil_Petrescu_-_Fizica_1/Cap7.pdf

[29] Marian Pearsica – Electrotehnica-http://www.afahc.ro/invatamant/electro/electro_b.pdf

[30] Cursuri APRS – <http://ham.aprs.ro/Cursuri/>

[31] Sergiu Ivas TEORIA MACROSCOPICĂ A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

<http://www.emie.ugal.ro/curset.html>

[32] Electrotehnica si electronica: http://www.emie.ugal.ro/curs_ee.html

[33] T. Leuca Chestiuni speciale de Elecgtrotehnica

<http://webhost.uoradea.ro/tleuca/Chestiuni%20speciale%20de%20Electrotehnica.pdf>

[34] Gh Mandru – Bazele electrotehnicii

<http://www.scribd.com/doc/36642484/Bazele-electrotehnicii-Mandru>

[35] A. Moraru – Bazele electrotehnici

http://www.infocarti.ro/A.Moraru_BE1_TCEImg/

http://www.infocarti.ro/A.Moraru_BE1_TCEImg/cap1.pdf.../cap23.pdf

ANEXA: Prezentarea inductivă a electrostaticii. Istoria ideilor

În acest document, electrostatica a fost prezentată în mod deductiv, pornind de la legile electromagnetismului, da ea poate fi prezentată și în manieră inductivă, așa cum s-au dezvoltat cunoștințele și ideile despre acest domeniu, de-a lungul timpului. O astfel de prezentare are o bază empirică; se pornește de la observațiile experimentale, urmate apoi de generalizări (inducții incomplete) și raționamente, care în final au dus la ecuațiile fundamentale ale electrostaticii, iar în final la legile electromagnetismului.

Experimentul fondator al electrostaticii este experiența lui Coulomb, care în anul 1787, folosind o balanță de torsiune (Fig. 14) a constatat că forța dintre două sarcini punctiforme este proporțională cu sarcinile și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele:

$$F = K \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2}$$

relație similară cu legea newtoniană a atracției universale.

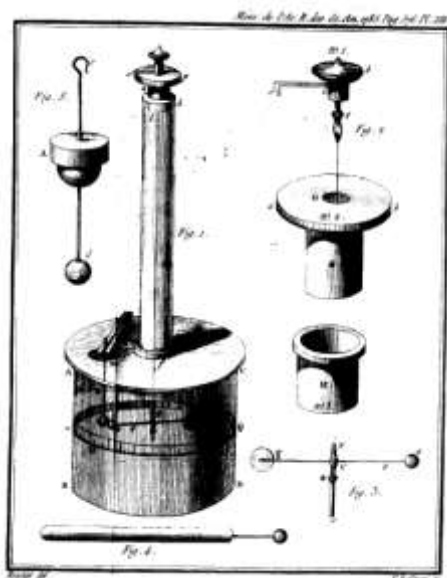


Fig. 14. Experiența lui Coulomb

Dacă se definește câmpul electric dintr-un punct în vid ca raportul dintre forța asupra unui corp de probă plasat în acel punct și sarcina q a corpului de probă, rezultă din relația lui Coulomb expresia câmpului produs în vid de o sarcină punctiformă Q :

$$\mathbf{E}_v =_{\text{def}} \frac{\mathbf{F}}{q} \Rightarrow \mathbf{E}_v = K \frac{Q}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

Prin superpoziție se obține câmpul produs în vid de o distribuție arbitrară de sarcini:

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}) = K \sum_{i=1}^n \frac{q_i \mathbf{R}_i}{R_i^3} \Rightarrow \mathbf{E}_v = K \int_D \frac{R d\mathbf{q}}{R^3}, \quad d\mathbf{q} =_{\text{def}} \rho d\mathbf{v}$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{r}, \quad R_i = |\mathbf{R}_i|, \quad d\mathbf{q} =_{\text{def}} \rho d\mathbf{v}$$

Lucrul mecanic efectuat de câmp asupra unui corp de probă permite definirea tensiunii electrice pe drumul pe care este deplasat corpul de probă ca raportul dintre acesta și sarcina corpului de probă:

$$W_{AB} = \int_{C_{AB}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = q \int_{C_{AB}} \mathbf{E}_v d\mathbf{r} = q U_{AB}, \quad U_{AB} =_{\text{def}} \int_{C_{AB}} \mathbf{E}_v d\mathbf{r} = W_{AB} / q$$

Tensiunea electrică se exprimă ca diferența dintre potențialul inițial și cel final, în care potențialul este o mărime fizică scalară ce caracterizează câmpul, definit ca tensiunea între punctul curent și un punct de referință, în care potențialul este nul:

$$U_{AB} = KQ \int_{C_{AB}} \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{R} = - \frac{KQ}{R} \Big|_A^B =_{\forall C} V_A - V_B, \quad V_P =_{\text{def}} U_{PP_\infty} = \frac{kQ}{R} \Rightarrow$$

Pornind de la această expresie a potențialului unei sarcini punctiforme, se determină prin superpoziție potențialul produs de o distribuție arbitrară de sarcini în domeniul corpului D :

$$V = \int_D \frac{dq}{R}$$

Teorema potențialului electrostatic exprimă proprietățile acestei mărimi fizice:

$$V_A =_{\text{def}} \int_{C_{AO}} \mathbf{E}_v d\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{E}_v = -\text{grad} V, \Leftrightarrow \int_{C_{AB}} \mathbf{E}_v d\mathbf{r} = - \int_{C_{AB}} \text{grad} V d\mathbf{r} = - \int_{C_{AB}} dV = V_A - V_B$$

$$\text{rot}(\text{grad} V) = 0 \Rightarrow \text{rot} \mathbf{E}_v = 0, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_v d\mathbf{r} = \lim_{A \rightarrow B} U_{AB} = 0$$

evidențiind caracterul irotațional al câmpului electrostatic.

Fluxul câmpului electric în vid, calculat pe o suprafață închisă (inițial o sferă care are în centru o sarcină punctiformă, iar apoi o suprafață arbitrară :

$$\oint_{\Sigma_0} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA = \frac{KQ}{R^2} \oint_{\Sigma_0} dA = 4\pi R^2 \Rightarrow \varepsilon_0 \oint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA = \sum_{i=1}^n q_i, \quad \varepsilon_0 =_{\text{def}} 1/(4\pi K) \Leftrightarrow K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$$

demonstrează teorema lui Gauss, conform căreia acest flux este proporțional cu sarcina din interiorul suprafeței. Constanta de proporționalitate este permitivitatea vidului – o constantă universală.

Forma locală a teoremei lui Gauss dă divergența câmpului electric din vid, proporțională cu densitatea de volum a sarcinii electrice:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_v =_{\text{def}} \lim_{V_{D_\Sigma} \rightarrow 0} \oint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dS / V_{D_\Sigma} = \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{V_{D_\Sigma} \rightarrow 0} \frac{Q}{V_{D_\Sigma}} = \rho / \epsilon_0, \quad Q = \sum_{i=1}^n q_i$$

Pentru a caracteriza starea electrostatică a corpurilor se folosește, pe lângă sarcină și momentul electric (Fig. 15), iar la nivel local polarizația:

$$\mathbf{p} = \lim_{d \rightarrow 0} (q\mathbf{d}), \quad \mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \int_D \mathbf{P} dV$$

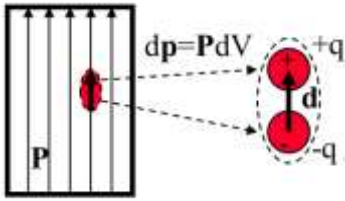


Fig. 15. Echivalența corpului polarizat cu un dipol

Echivalența dintre polarizație și dipol este în total acord cu interpretarea microscopică a polarizației. Ea evidențiază semnificația sarcinilor de polarizație (Fig. 16):

$$\Delta q_d = -P \Delta S_{\perp} = -P \Delta S \cos \theta = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \Delta S; \quad q_{PD_\Sigma} = -\oint_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dA \Rightarrow \rho_P = -\operatorname{div} \mathbf{P}$$

$$\rho_{SP} = -\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)|_{S_{12}} = -\operatorname{div}_S \mathbf{P}; \quad P_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma} \rho_{SP} dS = -q_{PD_\Sigma}$$

Pentru a descrie câmpul în corpuri analizăm câmpul dintr-o fantă plată din acel corp (Fig. 17).

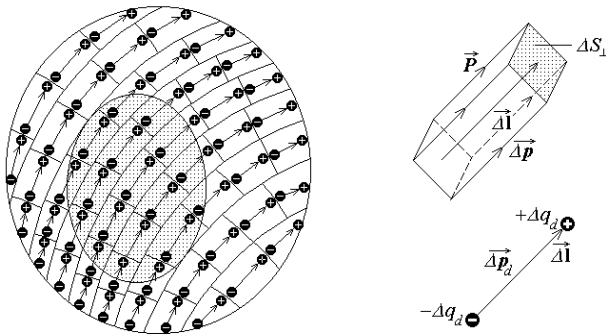


Fig. 16. Apariția sarcinilor de polarizație

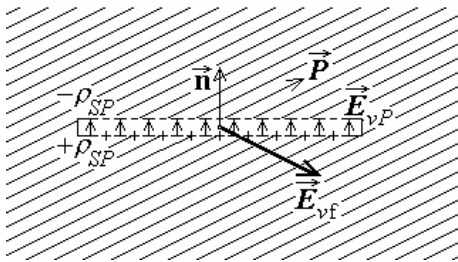


Fig. 17. Câmpul din vidul unei fante

Constatăm că acesta depinde de orientarea acelei cavități vide, dar că folosind o pereche de vectori, definiți astfel: $\mathbf{E} =_{def} \mathbf{E}_{vc}(\mathbf{n} \perp \mathbf{P})$ - intensitatea câmpului electric, $\mathbf{D} =_{def} \epsilon_0 \mathbf{E}_{vc}(\mathbf{n} \parallel \mathbf{P})$ - inducția electrică se poate determina câmpul din vidul fantei, pentru orice orientare a sa:

$$\mathbf{E}_{vc}(\mathbf{n}) = \mathbf{E} + \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})}{\epsilon_0} \mathbf{n}. \text{ Între cei doi vectori, care descriu câmpul din corpuri există}$$

legătura $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$. Pornind de la expresia câmpului din vidul fantei constatăm verificarea conservării componente tangențiale a intensității câmpului și a celei normale a inducției:

$$\mathbf{E}_{vct} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{vc} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = \mathbf{E}_t; \quad \mathbf{D}_{vct} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{vc} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = D_n \text{ la trecerea de la corp la vidul fantei, dar implicit și la trecerea de la un corp la altul (printr-o fantă virtuală).}$$

Tensiunea și fluxul electric în corpuri au expresiile:

$$U = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{r} = 0$$

$$\Psi_S = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \int_S D_n dA = \int_S D_{nv} dA = \epsilon_0 \int_S \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA \Rightarrow \oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \epsilon_0 \oint_{\Sigma} \mathbf{E}_v \cdot \mathbf{n} dA = q$$

Din care rezultă formele globale ale teoremei Gauss și a potențialului electrostatic:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \forall S_{\Gamma};$$

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = q, \quad \forall D_{\Sigma}$$

Tensiunile și fluxurile electrice, definite ca integralele intensității câmpului electric și inducției din corpuri au valorile integralelor intensității câmpului electric și inducției din fante virtuale tubulare respectiv plate, practicate în corp de-a lungul curbelor și respectiv de-a latul suprafețelor pe care se integrează (Fig. 18).

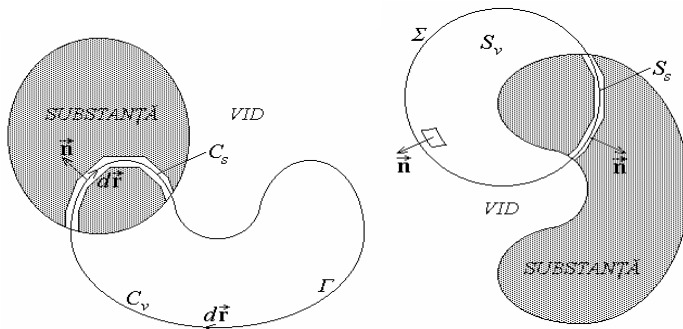


Fig. 18. Tensiunea și fluxul în corpuri

În cazul dielectricilor liniari, polarizația este proporțională cu intensitatea câmpului:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} \Rightarrow \boxed{\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

Care este relația constitutivă în acest caz. Relațiile încadrate sunt chiar relațiile fundamentale ale electrostaticii (Fig. 19).



Fig. 19. Experiment electrostatic 😊