

ToMeMS - Raport intern - Contribuție la D1.1a "Modelarea cuplata electrostatica si mecanica a microcomutatoarelor de RF - Formularea problemei"

Modelarea multifizică

Daniel Ioan,

6/12/2012

Abstract – Documentul are un caracter introductiv, prezentând etapele modelării multifizice: modelarea conceptuală, alcătuită din modelarea geometrică si cea fizică; modelarea matematică; modelarea analitic-aproximativă si cea numerică; implementarea; reducerea ordinului, iar in final etapa de validare-verificare. Se prezintă termeni, concepte și relații, în limbaj natural, dar și trimiteri web și bibliografice pentru detalii. Scopul documentului este de a unifica interpretările și limbajul în echipa interdisciplinară a proiectului, și de a lumina (mai ales tinerilor) etapele drumului, ce urmează după analiza stadiului actual al cercetărilor în domeniul RF MEMS. Versiunea v2 are corecturi minore, adaugă contribuțiile Gabrielei Ciuprina - căutați (G.C.) și linkurile de la pag. 55 depre testare.

Conținut

1	Introducere – modelarea multifizică.....	3
1.1	Scopul si importanța modelării	3
1.2	Etapele modelării multifizice	4
2	Modelarea conceptuală	4
2.1	Modelarea geometrică	5
2.2	Modelarea fizică	6
3	Modelarea matematică.....	9
4	Modelarea analitic-aproximativă	15
5	Modelarea numerică	17
5.1	Metoda elementului finit	17
5.2	Metoda diferențelor finite. Volume finite. Integrale finite.....	21
5.3	Metoda elementelor de frontieră	29
6	Reducerea modelului	42
7	Aspecte algoritmice – informatice.....	47
8	Validarea si verificarea modelelor.....	51
9	Concluzii.....	57
10	Bibliografie	58

1 Introducere – modelarea multifizică

Modelarea unui dispozitiv sau a unui sistem real este o acțiune fundamentală a științei și ingineriei. Ea constă în dezvoltarea unei imagini abstracte, științifico-matematică a obiectului modelării, plasată în lumea ideilor, sau a unei reprezentări de tip digital-numeric a acelui obiect, plasată în lumea virtuală. Mai există și modele fizice, bazate pe similitudini cu alte fenomene fizice deosebite, sau asemănări geometrice, care sunt machete ale obiectului modelării, obiecte aflate în lumea reală, dar astfel de abordări nu vor intra în atenția noastră. Mai multe detalii despre modelare se găsesc în

http://en.wikipedia.org/wiki/Scientific_modelling

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_model

Orice obiect poate avea mai multe modele, cu grade diferite de acuratețe. Modelele cu caracter parametric corespund unei clase de obiecte reale asemănătoare. De regulă, modele precise sunt mai complicate iar extragerea și simularea are un cost mai ridicat. Alegerea celui mai potrivit model depinde de context și este rezultatul unui compromis optim între acuratețe și simplitate, care sunt cerințe contradictorii.

1.1 Scopul și importanța modelării

Pentru a înțelege realitatea, indiferent dacă vrem să o schimbăm sau nu, trebuie să o modelăm. Modelarea este calea științifică pentru înțelegerea realității. Principalul ei scop este de a putea prevedea cum va funcționa obiectul supus modelării în diferite situații. Dacă vorbim despre un obiect care nu există încă, ci este doar în faza de concepție sau proiectare, atunci necesitatea modelării este evidentă. Doar așa putem verifica dacă obiectul, după realizarea sa practică va corespunde așteptărilor. Modelarea parametrică este esențială în cazul reproiectării, al optimizării, sau a proiectării optime încă de la început.

În mod tradițional, proiectele noi erau verificate prin realizare de prototipuri, care erau apoi testate și caracterizate, iar în caz de eroare se relua ciclul până când performanțele obținute deveneau acceptabile. Datorită costului tot mai ridicat al realizării prototipurilor și a presiunii de a lansa cât mai repede produsele noi pe piață, aceasta abordare a fost înlocuită cu alta în care ciclurile se realizează în lumea virtuală, pe calculator, folosind modele ale obiectului conceput. Aceste modele sunt folosite pentru predicția funcționării obiectului conceput, în diferite situații, operație numită de simulare, în vederea verificării îndeplinirii condițiilor impuse prin tema de proiect. Modelarea devine astfel parte componentă, esențială a procesului de proiectare. Devine astfel fundamentală nu numai pentru știință ci și pentru inginerie. Acest lucru nu se întâmplă numai în domeniul electronicii, ci și în celelalte domenii ale ingineriei. Astfel, succesul procesului de lansare a unui produs nou este indisolubil legat de capacitatea de modelare, pe care o au proiectanții acelui produs. Ne referim la posibilitatea de a extrage modele de precizie

acceptabilă, complexitate rezonabilă, într-un timp cât mai scurt, cu efort minim, dar cu flexibilitate și domeniu de valabilitate cât mai extinse. Putem spune despre capacitatea de inovare a unei companii de înaltă tehnologie că este în strânsă corelare cu capacitatea sa de a modela produsele pe care le dezvoltă. Pentru a facilita activitatea de modelare, s-au dezvoltat metodologii puternice, specializate pentru diferite clase de produse, dar și instrumente software, la fel de specializate.

1.2 Etapele modelării multifizice

Modelarea multifizică și implicit modelarea electromagnetică presupune parcurgerea următoarelor etape:

- **Modelarea conceptuală:** se stabilesc ipotezele simplificatoare și aspectele neglijate;
- **Modelarea matematică:** se formulează modelul în limbaj matematic, sub forma unei probleme bine formulate.
- **Modelarea analitic-aproximativă:** se determină relațiile între mărimile de intrare și cele de ieșire, în formă analitică, rezolvând o variantă aproximativă a ecuațiilor modelului.
- **Modelarea numerică:** se construiește un algoritm dedicat rezolvării ecuațiilor modelului.
- **Verificarea și validarea modelului:** se implementează algoritmul de rezolvare numerică pe un sistem de calcul și se realizează o serie de simulări, ale căror rezultate sunt folosite pentru a valida modelul elaborat.

Dacă rezultatele simulărilor nu verifică ecuațiile modelului matematic, atunci se refac ultimele două etape, până când modelul numeric este verificat. Apoi se validează modelul matematic prin comparația rezultatelor simulării cu cele experimentale. Dacă abaterile nu sunt acceptabile, atunci modelul matematic trebuie modificat. Aceste cicluri se reiau, până când modelul este validat (Ioan, 2000).

Scopul acestui document este de a stabili un cadru conceptual comun pentru echipa multidisciplinară a proiectului ToMeMS, definind și explicând termenii întâlniți cel mai frecvent în modelare. În acest document nu se prezintă modelări, ci doar se explică pașii ce trebuie parcurși pentru a efectua o modelare completă, indiferent de domeniul fizic luat în considerare. Aceasta va unifica punctele de vedere și limbajul folosit, facilitând nu numai comunicarea interdisciplinară ci și efectuarea modelărilor, individual sau în comun, dar și interpretarea rezultatelor lor, atunci când le va veni rândul să fie făcute. În plus, în document, se prezintă și consecințele care rezultă pentru proiectul ToMEMS din analiza generală privind modelarea.

2 Modelarea conceptuală

Modelarea conceptuală este prima etapă a modelării și ea constă în stabilirea modelului geometric și a celui (multi)fizic. În acest scop se începe cu descrierea structurii obiectului modelat și cu analiza principiului său de funcționare.

2.1 Modelarea geometrică

Primul lucru ce trebuie făcut este înțelegerea alcătuirii obiectului modelării. Se descompune (cel puțin mintal) obiectul în părțile sale componente, identificându-se cu această ocazie și materialele, dar mai ales formele și dimensiunile acestor părți. Se identifică apoi structura obiectului asamblat, adică modul în care părțile sunt așezate reciproc, și care sunt suprafețele, muchiile sau punctele de contact.

După cum se va vedea ulterior, toate aceste informații trebuie să ajungă în format electronic, în memoria calculatoarelor. Pentru a descrie calculatorului geometria obiectului modelat, adică formele și dimensiunile sale se folosesc instrumentele geometriei computaționale. Trebuie remarcat că în tehnologia modernă acest lucru se întâmplă încă de la început. Tot mai puține obiecte fabricate trec prin faza de desen tehnic pe hârtie sau pe ecran, multe existând numai sub forma unor fișiere pentru mașini cu comandă numerică sau pentru tehnologia de fabricație microelectronică.

Mai reținem faptul că pentru a descrie numeric sau simbolic geometria unui obiect se folosesc sisteme de referință (de coordonate) adecvate. Cel mai adesea, acestea sunt de tip cartezian (cu trei axe Ox, y, z ortogonale), dar se pot utiliza și sisteme de coordonate curbilinii, dintre care cele mai folosite sunt cel cilindric (Oz, r, φ) și cel sferic (Or, θ, φ). Punctele sunt indicate prin triplete de coordonate, iar curbele și suprafețele prin ecuațiile lor (mai exact prin parametrii acestor ecuații). Domeniile de volum nenul se descriu de obicei prin frontierele lor.

În această fază a modelării interesează mai ales alt aspect, decât modul concret în care se face descrierea geometriei, și anume cel al idealizării formelor reale. Aceasta deoarece modelarea înseamnă în primul rând idealizarea realității. Nu numai că suprafețele rugoase se asimilează cu unele perfect netede, părți ale unor suprafețe geometrice ideale, descrise de un număr cât mai mic de parametri, dar sunt eliminate și alte detalii geometrice neesențiale pentru funcționarea dispozitivului modelat (cum sunt de mult ori detaliile de asamblare).

Dar cea mai importantă idealizare are loc atunci când presupunem că mărimile caracteristice locale (date și necunoscute) nu depind de una sau mai multe coordonate. Deosebim în consecință următoarele categorii de modele geometrice (Ioan, 2000).:

- **1D** – model la care mărimile locale depind doar de o singură coordonată spațială, de regulă a sistemului Cartezian (de exemplu x);
- **2D** – model la care mărimile locale depind doar de două coordonate spațiale, de regulă ale sistemului Cartezian (de exemplu x, y), caz în care modelul se numește plan-paralel;
- **3D** – model la care mărimile locale depind de toate, cele trei coordonate spațiale (de exemplu x, y, z);
- **1.5D** – model la care mărimile locale depind doar de raza r a unui sistem de coordonate cilindrice. Matematic el este în model unidimensional, dar fizic este un model

bidimensional. Este un model și plan-parallel (de-a lungul axei Oz), dar și axisimetric (are axa Oz – axă de simetrie);

- **2.5D** – model la care mărimile locale depind doar de coordonatele spațiale z, r ale unui sistem cilindric, caz în care modelul se numește axisimetric (deoarece mărimile nedepinzând de θ , modelul are axa Oz – axă de simetrie). Matematic este un model bidimensional, dar fizic este tridimensional;

Această clasificare nu este exhaustivă. Un exemplu ar fi cazul modelelor cu simetrie sferică, la care mărimile depind doar de coordonata r a unui sistem de coordonate sferice. De astă dată, matematic problema este unidimensională (1D) dar fizic ea este tridimensională (3D).

Un alt aspect important al modelării geometrice este cel al *domeniului de calcul*. Cel mai adesea modelul geometric este limitat la un domeniu matematic mărginit de o frontieră reală (de exemplu, carcasa obiectului modelat) sau de una *fictivă*. Multe din metodele de modelare a câmpurilor fizice impun ca domeniu în care acestea sunt definite să fie unul mărginit. Trunchierea domeniului real, la unul, de calcul, mărginit este o idealizare care trebuie făcută în modul explicit. La sfârșitul modelării, toate aceste idealizări trebuie inventariate, într-o *listă de ipoteze simplificatoare*, pentru că fiecare dintre ele este susceptibilă de a genera erori de modelare. Atunci când se vor studia cauzele pentru care modelul se abate de la realitate sau când se va analiza posibilitatea de a rafina modelul, în vederea obținerii altuia mai precis, această listă va fi de mare utilitate. Descrierea formală și precisă a datelor geometrice ale obiectului modelat va fi făcută într-o etapă ulterioară, deocamdată, identificăm structura obiectului și ne concentrăm doar pe idealizările pe care le adoptăm.

2.2 Modelarea fizică

Această etapă se realizează pornind de la descrierea calitativă (în limbaj natural) a modului de funcționare a dispozitivului modelat. Cu această ocazie se identifică principalele mărimi fizice ce descriu starea și interacțiunile obiectului respectiv, dar și relațiile cauzale între acestea, identificându-se astfel fenomenele fizice fundamentale pe care se bazează funcționarea sa.

Odată identificate fenomenele fizice, se inventariază și legile fizice sau relațiile fundamentale care le descriu. În cazul fenomenelor multifizice cuplate, mărimile ce descriu cel mai complet starea domeniului de calcul sunt mărimile locale și instantanee, reprezentate matematic prin câmpuri scalare, vectoriale sau tensoriale dependente de timp iar din punct de vedere fizic de câmpurile fizice electrice, magnetice, de eforturi, deformații, presiuni, viteze, temperaturi, etc. Ecuațiile fundamentale satisfăcute de aceste câmpuri sunt de regulă ecuații cu derivate parțiale, specifice domeniului fizicii cărora ele le aparțin: electromagnetism, mecanica mediilor continue, termodinamică, etc. Aceste sunt atât ecuații generale, de conservare, sau constitutive (de material). O atenție deosebită trebuie acordată relațiilor care descriu cuplajul dintre diferitele domenii (relațiile de transfer, sau de conexiune) precum și celor cu caracter energetic.

O etapă importantă a modelării fizice o are analiza modului în care mărimile locale variază în spațiu, dar și în funcție de timp. Prima determină nivelul de dimensionalitate spațială (1D-3D), în timp ce modul în care este presupusă variația în timp determină regimul de funcționare (dar și al câmpului) precum și tipul de simulare ulterioară. Cel mai adesea se întâlnesc următoarele regimuri:

- **Staționar**, în care mărimile nu depind de timp (sau se neglijează efectele acestei dependențe);
- **Armonic**, în care mărimile au o variație sinusoidală față de timp, toate de aceeași frecvență f ;
- **Periodic**, în care mărimile au o variație periodică față de timp, toate cu aceeași perioadă T ;
- **Tranzitoriu**, în care mărimile au o variație neprecizată în timp, pe intervalul de interes $(0, t_{max})$.
- **Analiza modală**, în care se caută modurile proprii de oscilație, care pot apărea în unele structuri după anularea excitațiilor.

În cazul câmpului electromagnetic se mai face o diferență, între regimul static și cel staționar, primul fiind un regim staționar, în care nu are loc transfer energetic. Tot pentru acest câmp se folosește și regimul quasi-staționar (care este de două feluri: inductiv și capacitiv), în care variația în timp este suficient de lentă, pentru a putea neglija anumite efecte (cum este cel al curenților de deplasare și respectiv fenomenul de inducție electromagnetică). Este evident că lucrurile stau la fel și în partea mecanică, structurală, de dinamica fluidelor sau termică, unde deosebim regimuri elastostatice, elastodinamice, staționare, tranzitorii, etc.

În fiecare din aceste regimuri, câmpurile fizice au ecuații diferite. În aceste ecuații intervin în afara câmpurilor soluție și alte date caracteristice problemei, cum sunt constantele sau caracteristicile de material și ce este cel mai important, sursele de câmp, descrise de mărimi locale sau globale. În multe situații acestea sunt mărimi fizice ale domeniului cu care câmpul este cuplat.

În cazul câmpului electromagnetic, în funcție de regimul sau deosebim următoarele forme ale ecuațiilor în medii liniare:

- **Ecuații de tip eliptic scalar** (Laplace, Poisson, în forma clasică în medii omogene sau în formă generalizată, cu operatori *div-grad* în medii neomogene) pentru potențialul scalar, în cazul regimurilor electrostatic (ES), magnetostatic (MS), și electrocinetic staționar (EC);
- **Ecuații de tip eliptic vectorial** (cu operatori de tip *rot-rot*), pentru potențialul magnetic vector în cazul regimului magneto-staționar (MG), dar și în formularile duale ale celorlalte regimuri statice și staționare;

- **Ecuatii de tip Helmholtz complex** (cu operatori de tip *rot-rot*), pentru câmp sau potențialul vector, în cazul câmpului electromagnetic în regim armonic. Ecuatiile de funcții și valori proprii ale acestor operatori trebuie rezolvate în cazul analizei modale;
- **Ecuatii de tip parabolic** (cu operatori de tip *div-grad*sau *rot-rot*), pentru potențialul scalar respectiv cel vector, în cazul câmpului electromagnetic în regim quasi-staționar, capacitiv, respectiv inductiv, analizat în domeniul timpului;
- **Ecuatii de tip hiperbolic** (cu operatori de tip *div-grad*sau *rot-rot*), pentru potențialul scalar respectiv cel vector, în cazul câmpului electromagnetic în regim general variabil, analizat în domeniul timpului. În cazul cu pierderi prin conducție, ecuațiile conțin și un termen de amortizare de natură parabolică.

În medii neliniare, ecuațiile câmpului electromagnetic devin unele neliniare.

Diversitatea ecuațiilor face ca în funcție de regim să întâlnim în câmpul electromagnetic, o gamă largă de fenomene, cum sunt cele de distribuție, ecranare, de muchie, de difuziune, de propagare, de rezonanță, de amortizare, pelicular, etc.

Constatăm că în unele situații, câmpurile fizice nu au același regim pe întregul domeniu de calcul, ci pe diferite subdomenii întâlnim regimuri diferite ale câmpului. Aceste trebuie identificate cu deosebită atenție, pentru că ele pot reprezenta o prețioasă resursă pentru reducerea complexității modelului extras.

Trebuie să mai remarcăm faptul că descrierea fenomenelor se poate face folosind și alte forme ale ecuațiilor fundamentale, de exemplu, *formele integrale, globale, variaționale*, dar pentru moment *forma diferențială* pare să fie cea mai potrivită, urmând ca aceste ecuații să fie reformulate ulterior, conform cerințelor impuse de metodele de rezolvare eficientă.

În multe situații **sursele** câmpurilor nu sunt numai cele **interne**, deci nu sunt descrise numai de mărimile fizice locale, definit pe domeniul de calcul (spațial în produs cartezian cu intervalul temporal), ci ele pot fi surse externe domeniului spațial de calcul, sau anterioare regimului tranzitoriu analizat. Pentru descrierea **surselor externe** se folosesc *condițiile de frontieră* iar pentru cele anterioare se folosesc *condițiile inițiale*. În această etapă de modelare ar trebui identificate toate sursele care influențează soluția problemei, respectiv variația în timp și spațiu a câmpurilor fizice modelate.

Identificarea regimurilor fiecărui câmp fizic, sursele acestor câmpuri, cu evidențierea relațiilor de cuplaj, adică trecerea de la o înțelegere calitativă, fenomenologică spre una cantitativă reprezintă obiectivul principal al etapei de modelare fizică. Și de această dată etapa ar trebui să se încheie printr-o listare a *ipotezelor simplificatoare adoptate*. Fiecare ipoteză de acest fel, duce la neglijarea unor fenomene sau efecte, și ar trebui justificată sau, dacă este posibil, estimat efectul cantitativ al adoptării ei.

Detalii privind *modelarea electromagnetică* în diferite regimuri ale câmpului pot fi găsite în (Ioan, 2012).

3 Modelarea matematică

Această etapă are ca scop formularea problemei în termeni exclusiv matematici și verificarea faptului că problema este bine formulată. De obicei, avem de a face cu o problemă directă, care în forma sa inițială ar presupune rezolvarea unui sistem de ecuații cu derivate parțiale. În schimb, verificarea cât mai simplă a condițiilor de bună formulare presupune reformularea problemei originale, în una echivalentă din unul sau mai multe puncte de vedere. De regulă, aceasta presupune trecerea de la forma tare a ecuațiilor diferențiale la forma lor slabă (numită și variațională). Acest lucru, presupune din punct de vedere matematic o transformare profundă a problemei, mai ales datorită faptului că soluția nu mai este o funcție clasică ci devine una generalizată, pentru care nu mai are sens valoarea ei într-un punct al domeniului de definiție. În consecință, analiza matematică clasică nu mai este suficientă și trebuie făcut apel la aspectele matematice moderne ale analizei funcționale aplicate la ecuațiile cu derivate parțiale, deci și la spațiile de funcții cum sunt cele de pătrat integrabil Lebesgue, cu derivate generalizate, Sobolev și/sau distribuții.

După cum se va vedea, un aspect fundamental al modelării matematice îl reprezintă tocmai stabilirea cadrului funcțional. Fără aceasta, nu putem vorbi de o formulare corectă în termeni matematici.

Dar să identificăm pentru început care sunt principalele categorii de **date ale problemei**, care descriu „ce se dă”:

- **Datele referitoare la domeniul spațial de calcul** (forma și dimensiunile acestuia) descris în termeni matematici, fără nici o ambiguitate. Având în vedere experiența noastră anterioară, este de foarte mare importanță să pornim de la început parametric. Trebuie identificați de la început parametri independenți, iar ceilalți să fie exprimați în funcție de aceștia, astfel încât să putem scala cu ușurință orice model (G.C.). Așa cum am mai menționat, pentru aceasta se folosesc de obicei instrumentele geometriei computaționale (de maximă importanță în proiectarea asistată de calculator – CAD/CAE și în modelarea solidelor: http://en.wikipedia.org/wiki/Solid_modeling, http://en.wikipedia.org/wiki/Computational_geometry http://en.wikipedia.org/wiki/Computer-aided_engineering);
- **Datele ce descriu comportarea materialelor** din orice punct al domeniului de calcul, de obicei, în cazul liniar sunt date valorile constantelor de material (numere reale în cazul mediilor izotrope sau tensori în mediile anizotrope). Dacă materialele sunt neliniare, atunci trebuie cunoscute funcțiile caracteristice ale materialelor, iar în cazul materialelor cu histerezis lucrurile se complică și mai mult, pentru că descrierea acestui fenomen nu este deloc simplă, din punct de vedere matematic. Constatăm că în majoritatea

problemelor practice, domeniul de calcul este alcătuit dintr-o mulțime finită de subdomenii omogene, astfel încât pentru caracterizarea comportării materialelor din întreg domeniul de calcul este suficientă o mulțime finită de numere reale.

- **Sursele interne de câmp**, din orice punct al domeniului de calcul, care uneori sunt incluse în caracteristicile de material;
- **Condițiile de frontieră**, care descriu efectul surselor externe ale câmpului. Ele trebuie cunoscute în orice punct de pe frontieră, la orice momente de timp, dar în unele probleme sunt mărimi fizice cu caracter global, ale căror valori trebuie cunoscute pe tot intervalul de timp al simulării.
- **Condițiile inițiale** descriu efectele evoluției anterioare și se utilizează doar la problemele în regim tranzitoriu.

Necunoscutele problemei de analiza câmpului sunt componentele câmpului, mărimi fizice locale, care sunt reprezentate matematic ca funcții definite pe întregul domeniu de calcul (spațial și temporal). Aceste descriu „ce se cere” în problema de analiză.

Problema nu este complet formulată dacă nu se adaugă la date și necunoscute, **relațiile care trebuie să fie satisfăcute** între acestea, adică ecuațiile, însoțite de condițiile de frontieră și de cel inițiale. Vom presupune pentru început că aceste ecuații sunt unele cu derivate parțiale. Doar în cazuri excepționale se va ieși din acest formalism clasic, specific ecuațiilor fizicii matematice. În cazul câmpului electromagnetic aceste relații sunt *ecuațiile lui Maxwell* (Haus, 1989), câmpurile de viteze din corpurile elastice sunt descrise de *ecuațiile de mișcare și deformare*:

<http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/76290/1/AIAA-11407-643.pdf>

cele din fluide de *ecuațiile Navier-Stokes* (Acheson, 1990) (Acheson, D. J. (1990), *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, [Oxford University Press](#)), iar cele de temperatura de *ecuația lui Fourier* (Holman, 1990). Pentru a evidenția efectele ne-electro-magnetice ale câmpului trebuie adăugate și alte relații sau formule, care descriu efectele termice sau mecanice ale câmpului, cum sunt expresiile Joule, Lorentz, Ampere, ale tensiunilor maxwelliene, forțe generalizate, etc. Aceste relații definesc *mărimile derivate* ale problemei (mărimi calculate din *necunoscutele principale*, care sunt componentele câmpului sau potențialele scalar/vector). Ecuațiile câmpurilor multifizice nu rămân în forma lor generală, ci ele se particularizează în acord cu degenerările geometrice (1D, - fire, fibre medii de grinzi, 2D - placi, etc.) sau regimurile câmpului. Apoi de multe ori ele se reformulează în forme echivalente, mai convenabile rezolvării, cum sunt formele integrale, variaționale sau în forma slabă (care este de fapt o consecință integrală a ecuației integrale).

Problema de analiză a câmpului, descrisă anterior este problema ce trebuie rezolvată în cazul **simulării**. În cazul **modelării** trebuie formulată o altă problemă, mai complicată. Și anume trebuie identificat și descris modul în care depind semnalele de ieșire (răspunsurile sistemului) de semnalele de intrare (excitațiile sistemului), pentru o stare inițială cunoscută. Constatăm deci

că ecuațiile dispozitivului modelat trebuie aduse la forma ecuațiilor unui *sistem intrare-ieșire*, astfel încât să descrie în termeni matematici relația cauzală, care apare între semnalele de excitație și răspuns. Pentru acesta trebuie identificate intrările și ieșirile sistemului, care sunt de cele mai multe ori mărimi globale, definite pe frontiera domeniului spațial de calcul. Cele de intrare intervin în descrierea condițiilor de frontieră.

În fond, algoritmul de simulare, care determină soluția problemei de analiză este o primă reprezentare a modelului, printr-un **sistem (în sensul teoriei sistemelor)**, pentru că descrie relațiile intrare-ieșire. Mai notăm faptul că în cazul problemelor de câmp, descrise de ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic sau hiperbolic, în care intervin derivate de ordinul unu sau doi față de timp, *starea inițială*, descrisă de condițiile inițiale ale acestor ecuații sunt funcții definite pe tot domeniu spațial de calcul. Deoarece astfel de funcții sunt elemente ale unui spațiu infinit dimensional, rezultă că spațiul stărilor sistemului modelat este și el unul infinit dimensional. Avem deci un *sistem cu un număr finit de intrări și de ieșiri, dar cu un număr infinit de stări*. Este normal ca un astfel de sistem să nu fie pe placul proiectanților care își doresc modele cât se poate de simple. Soluția găsită a constat în *aproximarea acestui sistem infinit cu unul finit*, dar fără ca acest lucru să afecteze sensibil relația intrare-ieșire. Operația are loc cu ocazia rezolvării numerice, prin *discretizarea spațială* a ecuațiilor diferențiale, care se aproximează astfel cu un sistem de ecuații diferențiale ordinare. Dar nici așa rezultatele nu sunt pe placul beneficiarilor, deoarece numărul de stări este încă excesiv. Rezultă deci necesitatea aplicării unei proceduri adiționale, numită de *reducerea ordinului modelului*, care are ca scop identificarea unui nou model cu un număr cât mai mic de stări, care are o relație de intrare-ieșire suficient de apropiată de cea a sistemului original și care eventual să prezerve și alte atribute ale acestui sistem.

În concluzie, problema care trebuie rezolvată la **extragerea modelului** nu este numai problema analizei câmpurilor fizice, ci identificarea unui sistem de *ecuații diferențiale ordinare – ODE*, (eventual cuplate cu unele algebrice – *DAE*), care să aibă o dimensiune minimă și o relație între intrări și ieșiri, care aproximează cu o eroare acceptabilă relația dintre intrările și ieșirile sistemului descris de ecuațiile cu derivate parțiale PDE ale câmpurilor fizice. Fără formularea corectă a problemei de analiză, problema extragerii modelului redus nu se poate pune nici ea corect.

În unele situații, domeniul de calcul se **descompune în subdomenii** spațiale disjuncte, pe fiecare fiind definit un sub-sistem intrare-ieșire. Sistemul corespunzător unui subdomeniu spațial poate fi la randul lui **descompus în subsisteme** parțiale ce corespund separării în aspecte fizice diferite: electrice, mecanice, termice, etc. Toate aceste sub-sisteme sunt cuplate între ele prin interfețe (frontierele comune ale subdomeniilor), sau prin mărimi fizice comune, care descriu cuplajul multifizic. Acestea pot fi parametrii materialelor (care depind de câmpul din alt domeniu fizic, de exemplu conductivitatea electrică depinde de temperatură), sursele interne de câmp (de exemplu, puterea disipată, termen liber al ecuației căldurii, depinde de densitatea de curent, prin relația lui Joule), sau condiții de frontieră (de exemplu, temperatura de la suprafața solidului depinde de temperatura și viteza fluidului din exteriorul corpului). Rezultă deci o interconectare

a subsistemelor definite separat, prin descompunerea în domenii (spațiale sau fizice), pentru a obține în final modelul global. Descompunerea în domenii poate fi exploatată cu succes, pentru a genera proceduri performante de modelare și simulare, de exemplu unele potrivite pentru calculatoare multiprocesor. Ea mai are avantajul că încapsulează modelarea fiecărui subdomeniu, lucru ce permite o dezvoltare mai simplă, ierarhică, independentă, pentru fiecare subdomeniu și deci mai flexibilă a obiectelor informatice (algoritmi și structuri de date).

Tipuri de cuplaj. Mai remarcăm faptul că descompunerea în domenii de natură fizică sau geometrică pune în evidență și al aspect, și anume tipul de cuplaj între domenii. Dacă un domeniu îl influențează pe celălalt dar nu și invers, spunem că avem un *cuplaj unidirecțional*, în caz contrar, *cuplajul este bidirecțional*. Dacă ecuațiile dintr-un domeniu trebuie rezolvate simultan (direct sau iterativ) cu cele ale celui alt domeniu, spunem că avem un *cuplaj tare*, în caz contrar, chiar și atunci când ecuațiile la un moment de timp pot fi rezolvate separat, spunem că avem un *cuplaj slab*. Această ultimă clasificare are mai curând un caracter convențional, dictat de algoritmul de rezolvare, decât unul intrinsec, specific problemei. Spre exemplu, interacțiunea dintre fluid și solid (FSI – Fluid Structure Interaction) poate fi tratată ca una slabă sau ca una tare (http://en.wikipedia.org/wiki/Fluid%E2%80%93structure_interaction). Un cuplaj unidirecțional este unul slab. Cuplajul bidirecțional poate fi rezolvat ca un cuplaj tare, sau ca o succesiune de rezolvări de cuplaje slabe, cu avantaje și dezavantaje în fiecare abordare (acuratețe vs efort de calcul).

Și revenim la **problema de analiză**. Formularea ei corectă presupune îndeplinirea următoarelor trei condiții (Alexander H.-D. Cheng, 2005) pag 273, 280:

- **Existența soluției** – pentru orice excitație dintr-o clasă de funcții problema să aibă soluție;
- **Unicitatea soluției** – problema de analiză să aibă o singură soluție;
- **Buna condiționare a problemei** – soluția să depindă continuu de datele problemei, abateri mici ale datelor să nu genereze abateri prea mari ale soluției (în rezolvarea problemei, eroarea să nu se amplifice excesiv).

O problemă de analiză presupune rezolvarea unor ecuații, pe care putem să le scriem generic și implicit astfel:

$$F(x) = y,$$

unde $y \in Y$ reprezintă datele, $x \in X$ reprezintă soluția și aplicația $F: X \rightarrow Y$ reprezintă ecuația ce trebuie rezolvată. Ca o problemă să fie bine formulată trebuie ca pentru orice y din Y să existe x în spațiul soluției X , care verifică ecuația, iar acest x să fie unic. Constatăm că acestea sunt chiar condițiile ca aplicația F să fie inversabilă (adică bijectivă). În consecință, F trebuie să fie surjectivă și injectivă. Condiția de *injectivitate* este dată de teorema de unicitate a soluției, iar cea de *surjectivitate* este dată de teorema de existență.

În plus, mai trebuie îndeplinită și a treia condiție, cea de *continuitate a aplicației inverse* F^{-1} , care leagă datele de soluție (http://en.wikipedia.org/wiki/Well-posed_problem). În consecință, cele două spații X și Y trebuie să fie nu numai *algebrice* ci și *topologice* (să se poată vorbi despre continuitate, normă, distanță, convergență, etc.). Convergența este importantă, și pentru că multe teoreme de existență se demonstrează constructiv (de exemplu, teorema punctului fix) și ele stau la baza algoritmilor numerici de tip iterativ, în care se construiește un sir de soluții numerice,

aproximative, convergente către soluția exactă. Iată de ce, condițiile de buna formulare nu pot fi prezentate fără specificarea exactă (matematică) a spațiilor în care se caută soluția și a spațiului în care se afla datele. Aceste sunt spații de funcții, deci au o structură de spațiu vectorial (eventual afin), dar au și o structură topologică (de regula sunt spații Banach sau Hilbert, deci sunt complete, șirurile Cauchy fiind convergente - lucru extrem de important pentru demonstrarea existenței).

În cazul în care *F* este un operator liniar, lucrurile se simplifică, deoarece unicitatea este asigurată (ecuația are soluție unică pentru orice $y \in Y$, dacă ecuația omogenă $F(x) = 0$ are doar soluția banală $x = 0$, adică dacă nucleul operatorului *F* se reduce la zero. În cazul finit dimensional, *F* se reprezintă prin matricea **F**, care trebuie să aibă nucleu nul, deci să nu aibă valori proprii nule, iar pentru existența soluției, trebuie ca termenul liber să aparțină imaginii matricei **F** (dacă **F** este pătrată, condiția de unicitate este echivalentă cu cea de existență).

Pentru a caracteriza cantitativ cât de bine este formulată o problemă se folosește numărul ei de condiționare, notat $\kappa(F)$. Acesta exprimă cât de mare pot fi erorile relative ale soluției raportate la erorile datelor (http://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number).

În cazul liniar, finit dimensional, numărul de condiționare al matricei **F** este $\kappa(\mathbf{F}) = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{F}^{-1}\|$, egal pentru matrice simetrice și pozitiv definite cu raportul dintre valoarea proprie maximă și cea minimă a matricei **F**. Cu cât acest factor de amplificare a erorii este mai mare, cu atât problema este mai slab condiționată și mai dificil de rezolvat, atât de metodele directe cât și de cele iterative, a căror convergență este mai slabă, pe măsură ce acest număr este mai mare (iar peste o limită a acestui număr, metodele iterative devin chiar divergente). De exemplu, în rezolvarea pe calculator, logaritmul zecimal al numărului de condiționare indică numărul de cifre semnificative exacte, pe care le pot pierde datele, până se ajunge la soluție.

Precondiționarea este tehnica prin care se îmbunătățește numărul de condiționare al matricei. În particular, dacă datele sunt exprimate cu 6 cifre semnificative exacte și numărul de condiționare este un milion, soluția numerică nu are relevanță, deoarece nu are nici o cifră semnificativă exactă. În acest caz, problema este imposibil de rezolvat numeric, cu un minim de precizie. Toate aceste considerații, referitoare la ecuații algebrice nu au relevanță pentru problema continuă formulată matematic în această etapă a modelării, dar se vor dovedi esențiale pentru rezolvarea ei numerică.

Din motivele prezentate anterior, în buna formulare a problemelor de câmp, condiția de continuitate se exprimă de fapt în termeni matematici ca o condiție mai tare, de buna condiționare, mai exact: există constanta reală *L*, a.î. $\|F^{-1}(u) - F^{-1}(v)\|_X \leq L \|u - v\|_Y$, pentru orice $u, v \in Y$, numită *condiția lui Lipschitz*. Constanta *L* este proporțională cu numărul de condiționare al problemei $\kappa(F)$. $= L \|x\|/\|y\|$. Prin această condiție, impunem numărului de condiționare al problemei valori rezonabile, dependente de precizia pe care o considerăm acceptabilă.

Dintre cele trei condiții de buna formulare, cea de *unicitate este cea mai importantă* și trebuie prima verificată în practică, pentru că ea ne indică dacă sunt corecte condițiile de frontieră. Din fericire, ea este și condiția cea mai ușor de verificat, pentru că nu necesită raționamente matematice foarte complicate. Demonstrația ei se bazează pe reducere la absurd, presupunând că există două soluții, estimăm consecința energetică pentru diferența lor și ajungem la o contradicție. În cazul liniar lucrurile sunt mai simple, pentru că se poate aplica lema soluției nule.

Celelalte doua condiții sunt mult mai dificil de verificat, deoarece sunt legate strâns de topologia spațiului în care se caută soluția, așa cum este normal, atunci când vorbim de convergența și continuitate. Ca să înțelegem dificultatea acestei cerințe, pentru unele cazuri, este suficient să notăm că pentru demonstrația existenței și netezimii soluției ecuațiilor Navier-Stokes s-a oferit Premiul Mileniului, în valoare de 1 milion de dolari.

(http://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems).

De un mare ajutor ne este faptul că spațiul în care căutăm soluția să nu fie numai un spațiu algebric, ci să aibă definită și o normă pentru a putea măsura distanța între două funcții, iar dacă este și complet (adică orice șir Cauchy are limită, și aceasta este conținută în acest spațiu), atunci avem un spațiu Banach, și este și mai bine. Dacă norma este indusă de un produs scalar, atunci spațiul devine un spațiu Hilbert, care are marele avantaj că în el putem vorbi, în plus despre proiecții. Mai mult, cea mai bună aproximare a unui element într-un subspațiu este proiecția sa pe acel subspațiu. Completitudinea spațiilor Banach și Hilbert face ca ele să aibă în analiza funcțională rolul fundamental, pe care în algebra numerelor le au corpurile numerelor reale și cel al numerelor complexe. Spre deosebire de mulțimea numerelor raționale, aceste doua corpuri sunt complete, și orice șir Cauchy este convergent. Toată analiza matematică se bazează pe această completitudine. Este normal ca și în analiza funcțională să se prefere un cadru conceptual similar, la fel de puternic.

Acestea sunt motivele pentru care, în studiul modern al ecuațiilor diferențiale, în locul spațiului de funcții continue și derivabile în sens clasic se preferă spațiile de funcții generalizate. Această alegere obligă ca în locul **formei tari a ecuațiilor** cu derivate parțiale, să se **prefere forma lor slabă, obținută prin proiecție Galerkin**(http://en.wikipedia.org/wiki/Weak_formulation), pe un spațiu al funcțiilor de test, izomorf de altfel în această abordare cu spațiul funcțiilor de încercare (de formă sau de bază, în care se caută soluția). Principalele **avantaje ale formei slabe a ecuațiilor** sunt următoarele (Ioan, 2012):

- În forma tare intervin derivate de ordinul doi, pe când în cea slabă *numai derivate de ordinul unu*;
- În forma tare *condiția de frontieră* este scrisă separat, pe când în forma slabă ea *este inclusă în ecuație*;
- Ecuația tare se verifică punctual (în fiecare punct din domeniul de calcul), în timp ce în forma slabă *ecuația se verifică global - funcțional* (pentru fiecare funcție de test, de bază);
- Parametrul ce caracterizează *proprietățile materialelor poate avea o variație spațială arbitrară* în forma slabă, deoarece nu este derivat, în timp ce în forma tare trebuie să aibă o variație suficient de netedă;
- Buna formularea a problemei este consecință a *teoremei lui Lax-Milgram*, din analiza funcțională, care asigură existența, unicitatea și buna condiționare, în condiții destul de largi îndeplinite de operatorul liniar F al problemei, și anume cele de *mărginire* și

coercitivitate. Teorema a fost generalizată de Zarantonello pentru cazul neliniar, înlocuind cele două condiții cu cele de *lipschitzianitate* și respectiv *monotonie* pentru F .

Identificarea spațiului funcțiilor de încercare presupune și separarea condițiilor de frontieră în unele naturale (descrise în expresia formei slabe a ecuațiilor) și în cele esențiale (impuse de la început soluției, deci care sunt satisfăcute de funcțiile de încercare)

În concluzie, constatăm ca nu se poate vorbi deci de formularea matematică corectă a problemei, dacă nu sunt identificate precis spațiile X și Y , în care căutam soluția și respectiv cel în care se află datele problemei. Aceasta operație fundamentală în modelarea matematică se numește *stabilirea cadrului funcțional* al problemei. Chiar dacă se simplifică lucrurile și problema se tratează „inginereste”, în nici un caz **nu se poate renunța la teorema de unicitate**, pentru a verifica în ce măsură condițiile de frontieră asigură unicitatea soluției. Neglijarea acestui pas poate determina grave erori de modelare, care să fie depistate relativ târziu, după irosirea unui efort prețios.

Detalii privind *modelarea matematică în cazul câmpurilor electromagnetice* și teoremele de unicitate, care specifică în mod explicit condițiile de frontieră pentru aceste câmpuri în diferite regimuri pot fi găsite în (Ioan, 2012) și în (Ioan, 2000).

După modelarea matematică, pentru rezolvarea problemei nu mai este necesară nici o ipoteză sau dată de natură fizică. În consecință, problema poate fi transferată unui matematician sau unui informatician, care pot să nu aibă nici o cunoștință referitoare la aspectele fizice-ingineresti ale problemei. Asta doar teoretic, pentru că practic, lucrurile stau doar rare ori așa.

4 Modelarea analitic-aproximativă

După ce problema a fost corect formulată putem trece la rezolvarea ei, dar este recomandabil ca acest lucru să se facă mai întâi pentru o problemă mult simplificată față de cea originală, în așa măsură încât noua problemă să aibă soluție analitică. Pentru a atinge acest deziderat, trebuie adăugate *ipoteze simplificatoare suplimentare*, care de obicei sunt destul de departe de a fi satisfăcute în realitate. Dar chiar și atunci când abordarea este una rudimentară, prezența unei soluții analitice este de mare ajutor pentru a valida soluția numerică și pentru a înțelege în mod sintetic, modul în care soluția depinde de datele problemei.

Cel mai adesea soluțiile analitice se obțin prin modelări *geometrice mult simplificate*. Cel mai simplu este evident cazul 1D, dar se pot obține aproximări analitice și în cazul 2D, atunci când acesta este relevant.

Din punctul de vedere al variației față de timp, primul lucru care trebuie încercat este găsirea unei *soluții staționare*, care este de folos și pentru studiul problemelor dinamice, de regim tranzitoriu, pentru a identifica starea inițială și cea finală, permanentă.

Dacă este necesară o soluție de *regim armonic*, soluția se determină cel mai eficient prin reprezentare în complex. Tot în *forma operațională*, obținută prin transformata Laplace, adică în domeniul frecvenței se realizează analiza de regim tranzitoriu. Evident că aceste tehnici pot fi aplicate, doar dacă sistemul este unul liniar. Dacă el este unul neliniar, atunci singura soluție este să se aplice *liniarizarea* sa, operând doar cu mici variații în jurul unei soluții staționare. Tehnicile de perturbații sunt intens folosite, atunci când se dorește obținerea unei soluții analitice, pentru detalii vezi (Younis, 2004).

Pentru rezolvarea ecuațiilor ce descriu un model simplificat, care are soluție analitică, se poate aplica fie calculul *manual*, fie cel *simbolic*, folosind fie MAPLE sau echivalent, pachetul simbolic de la MATLAB. Scilab are un puternic suport pentru calcule simbolice, privind polinoamele și funcțiile raționale. Deci analiza simbolică în variabila s , ce descrie frecvența complexă este naturală în acest mediu.

După cum s-a constatat, ecuațiile câmpurilor staționare 1D și 2D sunt ecuații eliptice de tip Laplace sau de tip Helmholtz cu operator Laplace, în cazul regimurilor dinamice, după reprezentarea operațională sau în complex. Problemele 2D au condiții de frontieră de tip Dirichlet sau de tip Neumann iar cele 1D sunt de tip Sturm-Liouville, cu condiții la limită bilocale.

O metodă pentru a găsi soluții analitice pentru aceste ecuații este să se utilizeze *discretizarea derivatelor lor spațiale* cu metoda diferențelor finite. Se obține un sistem discret cu un număr relativ mic de grade de libertate, care are soluție analitică aproximativă. Spunem în acest caz că am construit un *sistem cu parametri concentrați*, spre deosebire de sistemul inițial, înainte de discretizare, care era cu *parametri distribuiți*.

O altă abordare constă în determinarea soluției analitice a sistemului cu parametri distribuiți, prin *integrarea ecuației diferențiale* cu condiții la limită bilocale în cazul 1D sau prin aplicarea metodei *separării variabilelor* sau a *reprezentării în complex* în cazul 2D. Astfel de tehnici se aplică, de exemplu atunci când se rezolvă aproximativ problema electromagnetică prin *metoda liniilor de transmisie*.

După ce s-a obținut soluția analitică pe cale manuală sau simbolică, se poate efectua o reprezentare grafică a rezultatului sau o *analiză a sensibilităților* derivând (manual sau simbolic) expresia obținută.

Soluțiile analitice sunt ideale pentru a construi pe baza lor un model de *circuit electric echivalent*, cu parametri concentrați, care poate fi apoi analizat la rândul său, analitic sau numeric, prin simulare în Spice. Pentru reprezentările grafice, dar chiar și pentru simulările

numerice ale modelului cu parametri concentrați, cea mai eficientă cale pare să fie folosirea MATLAB (eventual cu Simulink). O variantă alternativă ar fi descrierea modulului într-un limbaj de descriere hardware, cum este VHDL sau VERILOG. Dar pentru simulare să este nevoie în acest caz de un program care să accepte astfel de modele, cum este Spectre din Cadence sau altele similare.

5 Modelarea numerică

Pentru a obține soluții mai exacte, în cazul unor configurații complicate, singura abordare posibilă este cea numerică, bazată pe utilizarea calculatoarelor pentru a evalua soluția. În acest scop se folosesc mai multe abordări, dintre care cele mai importante sunt:

- **FEM - metoda elementului finit;**
- **FDM - metoda diferențelor finite**, sau variante ale acesteia, cum sunt: metoda volumelor finite (**FVM**) sau tehnica integralelor finite (**FIT**);
- **BEM - metoda elementelor de frontieră**, cunoscută și sub numele de Metoda Momentelor (MoM).

Caracteristicile acestor metode sunt sintetizate în Tabelul 1:

Metoda	Rețeaua de discretizare	Forma ecuațiilor care se discretizează
FEM – element finit	Nestructurată, formată din triunghiuri, patrulatere, tetraedre, hexaedre, etc.	Forma slabă, variațională a ecuațiilor
FDM/FVM-FIT – diferențe/volume sau integrale finite	Rețea cu topologie regulată, laticială (produs tensorial de rețele 1D). Pereche de rețele duale, întretesute, în cazul ecuațiilor hiperbolice.	Forma diferențială / globală
BEM – elemente de frontieră	Rețele nestructurate, 2D, pe frontiera domeniului sau pe interfețele dintre subdomeniile omogene.	Forma integrală

După cum se constată din acest tabel, metodele numerice pentru analiza câmpului sunt caracterizate în principal de tipul rețelei de discretizare și de forma la care sunt aduse ecuațiile, înainte de discretizare. (Alexander H.-D. Cheng, 2005) constată că aceste metode au în acord cu Web of Science următoarea popularitate: FEM 66000, FDM 19000 și BEM 10000.

5.1 Metoda elementului finit

Metoda elementului finit(http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method) este o tehnică numerică de calcul a soluțiilor aproximative ale ecuațiilor cu derivate parțiale, care intervin în cele mai diverse discipline fizice sau ingineresti: analiza structurilor mecanice, curgerea fluidelor, transfer termic, electromagnetism, cu aplicații în industria aeronautică, a automobilului, navală, bio-mecanică, predicția vremii și multe altele. Această metodă poate

privită ca o formă particulară a metodei lui Galerkin, în care variația spațială a soluției este aproximată prin funcții polinomiale pe porțiuni - elemente de forma geometrică simplă (triunghiuri sau patrulatere în 2D și tetraedre, hexaedre, prisme sau piramide în 3D). Prin proiectarea reziduului ecuației cu derivate parțiale (PDE) ce trebuie rezolvată, pe un set de funcții, numite „de test”, se elimină derivatele spațiale din ecuație și se obține:

- *un sistem de ecuații algebrice, reale sau complexe*, în cazul problemelor staționare sau respectiv în problemele reprezentate în complex – analizate în domeniul frecvenței și
- *un sistem de ecuații diferențiale ordinare (ODE)*, în cazul problemelor din domeniul timpului, cum sunt cele de regim tranzitoriu. Prin discretizarea ecuațiilor PDE hiperbolice se obține un sistem ODE, de ordinul doi, iar în cazul ecuațiilor parabolice se obțin sisteme ODE de ordinul întâi, în forma canonică a ecuațiilor de stare.

În cazul problemelor staționare, care descrie de ecuații PDE de tip eliptic (cu operator reciproc – simetric și pozitiv definit), metoda de proiecție Galerkin este echivalentă cu metoda variațională a lui Ritz, bazată pe minimizarea unei funcționale de energie. Cele două abordări generează același sistem de ecuații discrete, dar abordarea prin proiecție este preferabilă, deoarece ea poate fi aplicată și în cazul problemelor care nu au operatori pozitiv definiți (cum sunt de exemplu ecuațiile PDE parabolice). Sistemele discrete de ecuații sunt liniare, în cazul problemelor de câmp în medii liniare, și au ca necunoscute gradele de libertate ale problemei discrete (coordonatele soluției numerice în spațiul finit dimensional al funcțiilor „de încercare”, care este o aproximare finit dimensională a spațiului soluțiilor). Sistemele de ecuații algebrice sau diferențiale ordinare, obținute prin discretizare se rezolvă cu metode numerice: directe sau iterative pentru sistemele algebrice liniare, Newton-Raphson sau Metoda punctului fix, în cazul ecuațiilor neliniare și prin metode de cuadratură, de tip Euler sau Runge-Kutta, în cazul problemelor de regim tranzitoriu. Un avantaj este acela că în cazul uzual al elementelor conforme, sistemul discret moștenește condițiile de bună formulare (deci soluția sa există și este unică), fiind în continuare îndeplinite condițiile teoremei Lax-Milgram. Singura condiție suplimentară care ar trebui satisfăcută este aceea de convergență, care să garanteze că soluția numerică tinde spre soluția exactă, atunci când rețeaua de discretizare devine tot mai fină. Această condiție este o consecință a teoremei de mărginire a erorii numerice. Mai mult, se demonstrează că dintre toate soluțiile numerice posibile, soluția FEM are cea mai mică abatere (în norma energetică), față de soluția exactă.

Matricea sistemului de ecuații algebrice liniare generată în urma discretizării problemelor staționare se numește *matrice de rigiditate*, chiar și în cazul problemelor electromagnetice sau termice, preluând termenul mecanic, care s-a impus, fiind primul folosit. Continuând similitudinea, matricea care ponderează derivatele de ordinul doi în timp se numește matrice de masă, iar cea care ponderează termenul de ordinul întâi se numește *matrice de amortizare*.

O altă caracteristică specifică metodei elementului finit, care derivă din faptul că ea pornește de la forma slabă a ecuațiilor, este aceea că împarte condițiile de frontieră în două mari categorii:

esențiale (cele care sunt impuse de la început soluției numerice) și *naturale* (cele care sunt îndeplinite pe cât de bine posibil de soluția numerică, obținută prin rezolvarea ecuațiilor discretizate). Valorile condițiilor de frontieră naturale apar în membrul drept al ecuațiilor discretizate, încă de la început, iar valorile condițiilor esențiale se impun ca după generarea sistemului prin discretizare, ca niște constrângeri suplimentare.

Conceptul de *element finit* (la singular!) nu trebuie confundat cu elementele geometrice simple, în care se descompune domeniul decalcul, numite de multe ori *elemente finite*. Spre deosebire de acestea, un element finit este o triadă, alcătuită din:

- *mulțimea de celule elementare*, în care se descompune domeniul spațial al problemei;
- *funcțiile de încercare*, care descriu modul de variație a soluției aproximative, în aceste celule;
- *gradele de libertate* ale soluției numerice - mulțimea de variabile reale, care permit identificarea soluției, care este deci o combinație liniară a funcțiilor de bază ale spațiului soluției, având gradele de libertate, coeficienții acestei combinații.

În **perspectivă istorică**, metoda elementului finit a fost aplicată la început, încă din anii 40 pentru rezolvarea problemelor structurale, cu aplicații la proiectarea construcțiilor și aeronavelor. Unul din inițiatorii metodei a fost Richard Courant, care a folosit în S.U.A. discretizări triunghiulare și rezultatele cercetărilor făcute anterior de Rayleigh, Ritz și Galerkin. O. Zienkiewicz, profesor la Imperial College din Londra a fost cel care a fundamentat, începând din 1947 și a răspândit metoda în cele mai largi cercuri de cercetători. Abia în 1950 a fost introdusă matricea de rigiditate și asamblarea ei, prin parcurgerea elementelor. În 1965, NASA a solicitat din partea comunității științifice contribuții la dezvoltarea codului său de element finit, numit NASTRAN. Abia în 1973, prin publicarea cărții lui Strang și Fix (Gilbert Strang, 1973) s-au pus bazele teoretice ale metodei. De atunci, analiza cu element finit a devenit parte componentă a matematicilor aplicate la modelarea celor mai diverse sisteme fizice, în ingineria mecanică sau în cea electrică.

În prezent, metoda elementului finit are cea mai largă aplicabilitate în comparație cu celelalte metode numerice. Explicațiile sunt următoarele:

- Rețeaua FEM, numită și triangulație, alcătuită din triunghiuri, tetraedre, hexaedre sau alte figuri geometrice simple nu trebuie să aibă o topologie structurată, ceea ce asigură *cea mai bună flexibilitate* în modelarea geometrică a unor domenii de forme complicate;
- Formele simple ale celulelor elementare permit adaptarea unor *variații simple* ale soluției numerice în interiorul acestor celule, cum sunt *polinoamele*, rezultate foarte bune obținându-se chiar și în cazul polinoamelor de gradul întâi (element finit de ordinul unu);

- Metoda elementului finit realizează astfel un *echilibru perfect între simplitate și flexibilitate*. Soluția numerică din această metodă este *optimală*, deoarece minimizează reziduul, ea fiind într-un anumit sens cea mai buna soluție numerică posibilă;
- În cazul discretizării în dreptunghiuri descompuse la rândul lor într-o pereche de triunghiuri, metoda elementului finit este *echivalentă cu metoda diferențelor finite*, generând același sistem de ecuații algebrice;
- Topologia nestructurată a rețelei de discretizare permite *rafinarea adaptivă* a rețelei, care va fi îndesită în vecinătatea punctelor critice, în care soluția are variații spațiale puternice;
- Matricea sistemului de ecuații, generat în urma discretizării cu metoda elementului finit are proprietăți remarcabile, care fac ca sistemul liniar să se poată rezolva foarte eficient: ea este *rară, simetrică, pozitiv definită, diagonal dominantă*.

Aceste avantaje, ca și caracterul ei optimal fac ca FEM să fie folosită aproape exclusiv în analiza mecanicii corpurilor solide. Totuși în analiza numerică a fluidelor - CFD (Computational Fluid Dynamics), metoda volumelor finite este cea folosită în prezent în mod preponderent. În electromagnetism sunt folosite toate cele trei abordări numerice, dar metoda elementului finit tinde să fie preponderentă. Pe de altă parte, datorită succesului ei, există o tendință de folosire excesivă a acestei metode, chiar și atunci când alte abordări numerice ar fi mai potrivite. Interesul pentru FEM este ilustrat și de faptul că în ultima perioadă se publică anual peste 5000 de articole care o au ca subiect.

Tot mai multe *produse program* de analiza cu element finit sunt disponibile atât comercial, cât și în domeniul public. Liste ale pachetelor de programe pentru analiza cu element finit sunt disponibile la:

- **IFER**- Internet Finite Element Resources(http://homepage.usask.ca/~ijm451/finite/fe_resources/)
- **NAFEMS**; engineering analysis and simulation – FEA (<http://www.nafems.org/>)
- **Wiki** - List of finite element software packages at Wikipedia;http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_element_software_packages
- **CVEL**- Electromagnetic Modeling web site at Clemson University;<http://www.cvel.clemson.edu/modeling/>
- **FEAdomain.com**<http://feadomain.com/>.

În acest pagini mai sunt prezentate și diferite alte resurse referitoare la FEM, accesibile pe internet: conferințe, cursuri, grupuri de lucru, societăți profesionale, pagini web, reviste, cărți, biblioteci cu funcții utile în FEM, programe comerciale, freeware, opensource, și din domeniul public pentru: elemente finite, generatoare de rețea, software matematic și pentru vizualizarea soluției.

Modul în care se aplică metoda elementelor finite în rezolvarea problemelor de mecanică este prezentat în **cartea de referință** a domeniului (Zienkiewicz, 2005), iar detalii privind aplicare metodei pot fi găsite în (Sorohan, 2003). Pentru electromagnetism vă recomand (Ioan, 2012). Aici se discută diferite aspecte ale metodei, cum sunt: rezolvarea ecuațiilor scalare (cu elemente nodale), vectoriale (cu elemente de muchie), folosirea elementelor de ordin superior, inclusiv rafinarea adaptivă de tip p , h și hp , probleme neliniare și variabile în timp, dar și descompunerea în subdomenii. Invit cu căldură toți membrii echipei ToMeMS să parcurgă această carte proaspătă-proaspătă și să o comenteze. După aceea, multe din lucrurile scrise în acest raport vi se vor părea mult mai clare. Iar după ce contextul este clar, cercetarea vine de la sine ☺

Dintre **pachetele de programe** de FEM, așa cum a rezultat din

http://wiki.mems.lmn.pub.ro/index.php/File:ToMeMS_D1.1-D.I-Stadiu_actual.docx

cele mai des folosite sunt ANSYS și COMSOL.

5.2 Metoda diferențelor finite. Volume finite. Integrale finite

Metoda diferențelor finite - FDM (http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method) este o tehnică numerică de rezolvare a ecuațiilor cu derivate parțiale, bazată pe discretizarea cu diferențe finite a acestora. Prin diferențe finite, derivatele parțiale se aproximează cu expresii algebrice (combinații liniare) ale funcției derivate în puncte vecine celui în care se estimează derivata. Prin această operație de discretizare, ecuațiile cu derivate parțiale liniare se transformă într-un sistem de ecuații algebrice liniare.

Pentru a se realiza **discretizarea**, o operație premergătoare este de a alege o rețea laticială de puncte din domeniul de calcul, numite noduri. Aceasta este o *rețea structurată de noduri*, obținută printr-un produs tensorial de rețele unidimensionale. Dacă vom considera și laturile între nodurile vecine se obține un graf cu topologie regulată numit *grid*. Dar pentru aceasta se încadrează domeniul de calcul într-un domeniu acoperitor, de formă rectangulară, într-un sistem de coordonate adecvat, care poate fi cartezian, polar, cilindric, sferic sau de altă natură. Domeniul rectangular are un număr de coordonate d , egal cu cel al domeniului original. După cum $d = 1, 2$, sau 3 , domeniul rectangular este din punct de vedere matematic 1D (segment), 2D (dreptunghi), sau 3D (paralelipiped) și se obține prin produsul tensorial a d intervale mărginite, din cele d coordonate. Discretizând aceste intervale cu rețele de noduri uniforme sau neuniforme, se obține prin produsul lor tensorial (cartezian) rețeaua globală de noduri. Pentru a indica forma domeniului real de calcul, dacă acesta nu este rectangular se folosește funcția sa caracteristică, adică un tablou de numere întregi definit pe întreaga rețea, cu valori nule, pentru nodurile aflate în afara domeniului real de calcul.

Discretizarea operatorilor diferențiali ordinari sau cu derivate parțiale se bazează pe aproximarea polinomială a funcției care se derivează. Folosind polinomul Newton de interpolare pe nodurile rețelei de discretizare anterior specificată, estimăm valoarea derivatei lui în unul din noduri. Această expresie numită *diferență finită* (http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference)

va fi folosită ca aproximare a valorii derivatei funcției exacte. Pe măsură ce nodurile sunt mai apropiate, eroarea de aproximare scade, iar cu cât ordinul n al aproximării (gradul polinomului) este mai mare, cu atât eroarea este mai mică. Folosind seria Taylor, se demonstrează că eroarea primei derivate este de ordinul pasului rețelei h , ridicat la puterea $n+1$. În funcție de cum alegem nodul în care estimăm derivata dintre nodurile de interpolare, deosebim: *diferențe progresive, centrate, sau regresive*. În mod similar sau recursiv se definesc derivatele superioare sau cele parțiale. În acest fel, în FDM, orice operator diferențial, cum este spre exemplu operatorul Laplace se exprimă printr-un *șablon* (în engleză „stencil”), format din nodurile care intervin în diferențele finite unite cu laturi din gridul rețelei. Fiecare nod din șablon are o pondere ce multiplică valoarea funcției în acel nod, și care este coeficientul din expresia diferențelor finite utilizată în locul operatorului diferențial. Cel mai simplu șablon este cel de ordinul întâi pentru prima derivată (polinomul de interpolare are graficul o dreaptă secantă) și are doar două noduri vecine (cu ponderile $1/h$ și respectiv $-1/h$). De exemplu, șablonul folosit cel mai frecvent pentru lapalceanul 2D este determinat cu diferențe centrate și are cinci noduri, din care unul central (cu pondere $-4/h^2$) și celelalte patru (cu ponderi $1/h^2$) în cruce.

Procedând astfel, **ecuația lui Laplace sau Poisson 2D într-un dreptunghi**, generează în FDM un sistem de ecuații algebrice liniare, cu un număr de necunoscute egal cu numărul nodurilor din rețeaua de discretizare a domeniului de calcul. Fiecare ecuație din sistem, în cazul ecuației Laplace are cel mult cinci termeni nenuli iar termenul liber este și el nul. Dacă rețeaua este uniformă, cu pas egal pe ambele direcții, atunci toți termenii diagonali au valoarea 4 iar cei nediagonali nenuli sunt -1 (după ce am multiplicat toate ecuațiile cu $-h$). În cazul domeniilor dreptunghiulare, cu numerotarea naturală a nodurilor, matricea sistemului are structura bandă. Matricea este simetrică, rară și are diagonală dominantă. Pentru a obține soluția corectă va trebui să adăugăm la aceste ecuații și condițiile de frontieră. Condițiile Dirichlet reduc numărul de necunoscute, dar și de ecuații, cu câte una pentru fiecare nod de pe frontieră. Condițiile Neumann se reprezintă prin discretizare cu FDM, ca un șablon liniar, orientat normal pe frontieră. Acesta înlocuiește șablonul în T corespunzător operatorul Laplace. Dacă valoarea condiției de frontieră este nenulă, atunci această valoare contribuie la termenii liberi ai sistemului de ecuații. După rezolvarea sistemului liniar de ecuații astfel generat se obțin valorile numerice ale soluției – potențial scalar, în toate nodurile rețelei de discretizare. Procedura se generalizează relativ simplu în cazul 3D, cel vectorial, sau pentru forme arbitrare ale domeniului de calcul, respectiv pentru medii neomogene. Lucrurile se complică ceva mai mult în cazul în care ar trebui determinate soluții variabile în timp sau în medii neliniare. După discretizarea spațială, ecuațiile cu derivate parțiale de tip parabolic sau hiperbolic generează un sistem de ecuații diferențiale ordinare, care se rezolvă prin integrare numerică. Folosind tot FDM, se pot aplica metode de integrare numerică implicite (cu diferențe finite regresive) sau explicite (cu diferențe finite progresive). Primele necesită rezolvarea la fiecare pas de timp a unui sistem liniar de ecuații, dar procedura este mai stabilă din punct de vedere numeric și se poate aplica și la pași mari de timp. În schimb, metodele explicite, care au avantajul unui efort de calcul minim la fiecare pas de timp, nu sunt stabile numeric și necesită folosirea unor pași de timp sub o anumită limită

http://en.wikipedia.org/wiki/Courant%E2%80%93Friedrichs%E2%80%93Lewy_condition), dată de *condiția CFL*. Tot stabile numeric sunt și metodele de integrare implicite, de tip Crank–Nicolson, bazate pe diferențe centrate.

Mai multe detalii privind FDM se găsesc în **cărți** ca:

- [Randall J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, SIAM, 2007.](#)
- Matthew and Sadiku, "Numerical Techniques in Electromagnetics," CRC Press, Inc. 1992
- Bondenson A., Rylander T., Ingelstrom P., Computational Electromagnetics, Springer, 2005

De un enorm succes în rezolvarea problemelor de electromagnetism se bucură o variantă a acestei metode, numită **FDTD – Finite Difference Time Domain** (http://en.wikipedia.org/wiki/Finite-difference_time-domain_method). Metoda a fost propusă în 1966 de Kan Yee și este folosită pentru rezolvarea ecuațiilor lui Maxwell, în regim general (full wave). **Cărți** de referință pentru această abordare sunt:

- Allen Taflove and Susan C. Hagness (2005). [*Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed.*](#), Artech House Publishers.
- John B. Schneider, Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method, 2012, <http://www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd/ufdtd.pdf>

În această metodă se folosesc două rețele de discretizare carteziane, înălțuite (duale – nodurile uneia se află în centrele celulelor celeilalte), iar integrarea în timp se face în mod explicit prin „*pasul broaștei*”: la un pas de timp se calculează componentele vectorilor caracteristici câmpului magnetic, iar la următorul se calculează câmpul electric. Deoarece este o metodă explicită, pasul de timp trebuie să îndeplinească restricția CFL. În aplicarea practică a metodei se folosesc cel mai adesea **condiții de frontieră** de tip *PEC* (Perfect Electric Conductor - supraconductor), *PMC* (de simetrie magnetică) sau de tip *OBC* (Open Boundary Condition). Acestea din urmă modelează frontiera deschisă, spre un domeniu nemărginit. Ele sunt de tip *ABC* (Absorbing Boundary Condition, cum sunt cele ale lui Mur sau Liao) sau de tip *PML* (Perfect Matched Layer), care este mai curând un strat absorbant, decât o condiție de frontieră propriu-zisă.

O altă metodă numerică, aflată într-o strânsă legătură cu FDM este **metoda volumelor finite FVM** (Finite Volume Method - http://en.wikipedia.org/wiki/Finite_volume_method). Și această metodă folosește o rețea de discretizare similară cu cea de la FDM, doar că ecuațiile sunt discretizate folosind celule elementare, mici volume care înconjoară fiecare câte un nod. Ecuațiile sunt integrate pe aceste volume și apoi, acolo unde apar integrale ale divergenței, acestea sunt exprimate folosind relația lui Gauss ca sume de fluxuri pe fețele celulelor elementare. Avantajul metodei este caracterul său conservativ, fluxurile unei celule regăsindu-se

ca suma fluxurilor din celulele vecine. Un alt avantaj este acela că metoda poate fi extinsă și în cazul rețelelor nestructurate, cum sunt cele folosite la FEM. Din aceste motive, metoda este folosită intensiv în simularea dinamicii fluidelor.

Metoda permite obținerea unor soluții de înaltă acuratețe, chiar și în cazul șocurilor, discontinuităților sau variațiilor spațiale rapide, dacă se aplică tehnica MUSCL (*Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws* - wiki/MUSCL_scheme). La fiecare moment de timp se calculează fluxul de pe fețele fiecărei celule, folosind media stărilor din celulele vecine, la pasul anterior și aplicând limitatori de pantă (wiki/Flux_limiter).

Cărți de referință ale metodei sunt următoarele:

- Eymard, R. Gallouët, T. R. Herbin, R. (2000) *The finite volume method* Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, 2000, p. 713–1020. Editors: P.G. Ciarlet and J.L. Lions. <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~herbin/PUBLI/bookevol.pdf>
- LeVeque, Randall (2002), *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press.
- HK Versteeg, W Malalasekera - An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method, 2007

Correspondența în electromagnetism al acestei abordări este cunoscută sub numele de **Tehnica Integralelor Finite – FIT** (Finite Integration Technique). Metoda a fost dezvoltată de Thomas Weiland, din 1977:

- M. Clemens and T. Weiland, DISCRETE ELECTROMAGNETISM WITH THE FINITE INTEGRATION TECHNIQUE, *Progress In Electromagnetics Research, PIER 32*, 65–87, 2001
- R. Schuhmann and T. Weiland, CONSERVATION OF DISCRETE ENERGY AND RELATED LAWS IN THE FINITE INTEGRATION TECHNIQUE, *Progress In Electromagnetics Research, PIER 32*, 301–316, 2001
- René Marklein, The Finite Integration Technique as a General Tool to Compute Acoustic, Electromagnetic, Elastodynamic, and Coupled Wave Fields <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.122.1104>

Ultima lucrare prezintă extensiile multifizice ale acestei tehnici, în acustică, elastodinamică și piezoelectircitate dar și în alte discipline.

Principiile acestei abordări sunt următoarele:

- FIT este dedicată rezolvării numerice a problemelor de câmp, folosind o discretizare spațială (ca în FEM), dar nu și funcții de formă;
- Se folosește un grid, alcătuit dintr-o pereche de rețele carteziene, duale, înălțuite, de tip Yee (ca în FDTD);
- Gradele de libertate (necunoscutele problemei discrete) sunt mărimi globale: fluxuri și tensiuni, definite pe elementele geometrice, ale celulelor gridului (fețe, laturi), și nu mărimile locale, componente ale câmpului, ca în FDM;

- Pornește de la forma globală a ecuațiilor (legile câmpului), și nu de la forma lor locală (cum este în FDM), cea slabă-variațională (cum este în FEM) și nici de la cea integrală (cum este în BEM).

Principalele **avantaje** ale folosirii acestei tehnici:

- Legile generale sunt satisfăcute **fără erori de metodă**, acestea fiind transferate ecuațiilor constitutive (legilor de material, operatorilor Hodge, în forma lor discretă);
- Ecuațiile generale obținute prin discretizare (MGE - Maxwell Grid Equations) alcătuiesc un sistem DAE liniar, au un caracter topologic, neavând coeficienți metrici. Ele sunt **rare, mimetice** (au forme similare cu ecuațiile continue, doar că operatorii *div*, *grad*, *rot* sunt înlocuiți prin matricele topologice **D, G, R**, cu elemente de valori doar 0, -1, +1, - forma discretă a acestor operatori);
- Relațiile MGE sunt **conservative**: forma discretă a teoremelor de conservare a sarcini și a energiei sunt o consecință a ecuațiilor MGE, în consecință în soluționarea numerică nu apar moduri false de rezonanță (*spurious modes*);

Deoarece idei similare sau foarte apropiate au fost promovate de mai mulți cercetători sau grupuri de cercetători, există încă o dispută asupra paternității lor și numelui generic pe care ar trebui să le poarte, așa cum rezultă din lucrările:

- E. Tonti, FINITE FORMULATION OF THE ELECTROMAGNETICFIELD, *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 32, 1–44, 2001, <http://www.jpier.org/PIER/pier32/01.00080101.tonti.pdf>
- Piergiorgio Alotto, Fabio Freschi, and Maurizio Repetto, **Multiphysics Problems via the Cell Method: The Role of Tonti Diagrams**, IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 46, NO. 8, AUGUST 2010 2959
- <http://www.umd.edu/dz/vf/images/ieee-magnetique/jpdfs/ieee/mag/tmag/2010046/08aug/2959alot.pdf>
- A. Bossavit, 'GENERALIZED FINITE DIFFERENCES' IN COMPUTATIONAL ELECTROMAGNETICS, *Progress In Electromagnetics Research, PIER* 32, 45–64, 2001 <http://www.jpier.org/PIER/pier32/02.00080102.bossavit.pdf>
- Alain Bossavit and Lauri Kettunen, Yee-like schemes on staggered cellular grids: A synthesis between FIT and FEM approaches, **IEEE Trans., MAG-36**, 4 (2000), pp. 861-7 <http://butler.cc.tut.fi/~bossavit/Papers/Compumag99.pdf>

Se constă că față de forma originală a FIT, noile abordări sunt generalizatoare, deoarece se pot aplica și unor *griduri nestructurate*, apropiind astfel flexibilitatea metodei de cea a FEM.

Datorită avantajelor sale, în proiectele noastre anterioare am folosit intens FIT. Pentru a putea face față complexității problemelor cu care ne-am confruntat am adus îmbunătățiri față de forma clasică a acestei tehnici. Prima și cea mai importantă dintre acestea este abordarea numită **dFIT (Dual Finite Integration Technique)**, propusă de noi și aplicată la rezolvarea problemelor staționare, unde are următoarele caracteristici:

- FIT este aplicată de două ori, fiecare din cele două rețele duale este folosită odată ca rețea electrică și apoi ca rețea magnetică;
- Cele două soluții numerice duale oferă *marginii superioare și inferioare ale soluției exacte*, care este aproximată cu media lor. Media are o rată de convergență mai ridicată decât fiecare dintre soluțiile FIT;
- dFIT permite *controlul preciziei soluției numerice*, oferind robustețe și eficiență. Distanța dintre cele două soluții duale poate fi folosită pentru a controla rafinarea adaptivă a rețelei;
- Prin dFIT numărul de noduri și implicit efortul total de calcul, pentru o acuratețe dată este redus mult față de FIT.
-

Alte îmbunătățiri aduse metodei clasice au fost grupate într-o strategie numită **ALROM (All Levels Reduced Order Modeling)**, care are ca principiu, recomandarea de a aplica reducerea ordinului, la fiecare etapă de modelare (*apriori, on the fly, aposteriori*), în vederea obținerii unui model final cât mai compact. Dintre aceste tehnici menționăm:

- Condiții de frontieră de tip element electromagnetic de circuit (EMCE);
- Omogenizarea celulelor (CELLHO);
- Strat echivalent, la frontiera deschisă (ELOB);
- Calibrarea rețelei de discretizare și a frontierei (Mesh and Boundary Calibration)
- Partiționarea în subdomenii cu regimuri diferite ale câmpului (PROM);
- Operatori Hodge dependenți de frecvență în metale (FredHo);
- Modelarea ierarhică rarefiată a substratului (HSS);
- Modelarea inductivă cu circuite magnetice (MEEC);
- Modelarea parametrică a liniilor de transmisie (pROMTL)
- Reducerea terminalelor de interfațare (reduced hooks);
- Analiza variabilității (parametric models extraction);
- Eșantionare adaptivă a frecvențelor și regresie rațională vectorială paralelizată (AFS-VF).

Aceste tehnici au fost implementate în diferite faze, în mai multe instrumente software, majoritatea integrate într-un program de calculator numit **Chamy**. El este destinat modelării electromagnetice a componentelor pasive din circuitele integrate de înaltă frecvență. A fost conceput ca un instrument EDA, ce poate fi integrat în mediile avansate de proiectare electronică automată (cât am reușit, rămâne de văzut :). El admite la intrare descrieri geometrice de măști, în formatul GDS, iar la ieșire generează un model redus al dispozitivului, reprezentat de un circuit Spice.

Metodele bazate pe FIT, dezvoltate și verificate în UPB-LMN au fost descrise în mai multe **lucrări publicate**, dintre care menționăm:

1. **Daniel Ioan**, Marius Radulescu, Gabriela Ciuprina, *Fast Extraction of Static Electric Parameters with Accuracy Control*, in Scientific Computing in Electrical Engineering (W.H.A.Schilders et al Eds), **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2004, Germany, pp.248-256.

2. **Ioan, D;** Ciuprina, G; Radulescu, M; et al. *Theorems of parameter variations applied for the extraction of compact models of on-chip passive structures*, ISSCS 2005: Signals, Circuits and Systems, Proceedings Pages: 147-150, **IEEE**, 2005
3. **D. Ioan**, Gabriela Ciuprina, M. Radulescu and M. Piper *Algebraic Sparsefied Partial Equivalent Circuit (ASPEEC)* in Scientific Computing in Electrical Engineering, vol 2 (M. A. Anile et al Eds), pp 45-50, **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2006
4. *Absorbing boundary conditions for compact modeling of on-chip passive structures*
Author(s): **Ioan, Daniel;** Ciuprina, Gabriela; Radulescu, Marius Source: **Compel** - the International Journal For Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Volume: 25 Issue: 3 Pages: 652-659, 2006
5. **Ioan, D;** Ciuprina, G; Radulescu, M; et al. *Compact modeling and fast simulation of on-chip interconnect lines* **IEEE Transactions on Magnetics** Volume: 42 Issue: 4 Pages: 547-550 Published: APR 2006
6. G. Ciuprina, **D. Ioan** and D. Mihalache, *Reduced Order Electromagnetic Models based on dual Finite Integrals Technique*, Book chapter in the book Scientific Computing in Electrical Engineering, in the book series Mathematics in Industry (G. Ciuprina, D. Ioan Eds), Vol. 11, pp. 287-294, **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2007, ISBN 978-3-540-71979-3
7. **Ioan, Daniel;** Schilders, Wil; Ciuprina, Gabriela; et al *Models for integrated components coupled with their EM environment* , **Compel** -the International Journal For Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering Volume: 27 Issue: 4 Pages: 820-829 , 2008
8. **Ioan, Daniel;** Ciuprina, Gabriela; Silveira, Luis Miguel, *Effective Domain Partitioning With Electric and Magnetic Hooks*, **IEEE Transactions on Magnetics** Volume: 45 Issue: 3 Pages: 1328-1331 MAR 2009
9. Ciuprina, Gabriela; **Ioan, Daniel;** Mihalache, Diana; et al. *THE ELECTROMAGNETIC CIRCUIT ELEMENT - THE KEY OF MODELLING ELECTROMAGNETICALLY COUPLED INTEGRATED COMPONENTS* , **Revue Roumaine Des Sciences Techniques-Serie Electrotechnique Et Energetique** Volume: 54 Issue: 1 Pages: 37-46 , JAN-MAR 2009
10. Ciuprina, Gabriela; **Ioan, Daniel;** Mihalache, Diana; et al. *Domain Partitioning Based Parametric Models for Passive On-Chip Components* Scientific Computing in Electrical Engineering **SCEE 2008** Sept. 28 - Oct. 3, Helsinki University of Technology, Finland, Volume: 14 Pages: 37-44 , 2010, Springer
11. Ciuprina, Gabriela; **Ioan, Daniel;** Niculae, Dragos; et al. *Parametric Models Based on Sensitivity Analysis for Passive Components*, Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering **ISEF'07** which was held in Prague, Czech Republic, September 13-15, 2007, Intelligent Computer Techniques in Applied Electromagnetics, Volume: 119 Pages: 231-239 , 2008, Springer

12. Stefanescu, Alexandra; Ciuprina, Gabriela; **Ioan, Daniel**; et al., *Models for variability of transmission line structures* SPI08 Ieee Signal Propagation on Interconnects, Pages: 232-235 **IEEE**, 2008 DOI 10.1109/SPI.2008.4558330 ISBN 978-1-4244-2317-0
13. Gabriela Ciuprina, Alexandra Ștefănescu, **Daniel Ioan**, *Frequency dependent parametric models for transmission line structures*, Computer field models of electromagnetic devices (S. Wiak, E. Napieralska-Juszczak Eds), pp.618-625, **IOS Press**, 2010.
14. Stefanescu, Alexandra; **Ioan, Daniel**; Ciuprina, Gabriela; et al. *Parametric Models of Transmission Lines Based on First Order Sensitivities*, Scientific Computing in Electrical Engineering **SCEE 2008** Sept. 28 - Oct. 3, Helsinki University of Technology, Finland Volume: 14 Pages: 29-36 , 2010, Springer
15. Gabriela Ciuprina, **Daniel Ioan**, Diana Mihalache and Ehrenfried Seebacher *Domain Partitioning Based Parametric Models for Passive On-Chip Components* Mathematics in Industry, 1, Volume 14, Pages 37-44 in Scientific Computing in Electrical Engineering **SCEE 2008** Costa, Luis R.J.; Roos, Janne (Eds.) **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2010
16. **Daniel Ioan**, Gabriela Ciuprina and Ioan-Alexandru Lazar, *Substrate Modeling Based on Hierarchical Sparse Circuits*, Mathematics in Industry, 1, Volume 16, Scientific Computing in Electrical Engineering **SCEE 2010**, Part 2, Bastiaan Michielsen, Jean-René Poirier (Eds) Pages 143-152 **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2012, ISBN-10: 3642224520
17. Lazar, Ioan-Alexandru; Ciuprina, Gabriela; **Ioan, Daniel**, *Effective extraction of accurate reduced order models for HF-ICs using multi-CPU architectures*, 11th International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism - **OIPE 2010**, 14-18 September 2010, Sofia, Bulgaria, Inverse Problems in Science and Engineering Volume: 20 Issue: 1 Pages: 15-27 , Taylor & Francis, 2012
18. **Ioan, Daniel**; Lazar, Ioan Alexandru; et al. *Vector Fitting Based Adaptive Frequency Sampling for Compact Model Extraction on HPC Systems*, Ciuprina, Gabriela; Source: **IEEE Transactions on Magnetics** Volume: 48 Issue: 2 Pages: 431-434 Published: FEB 2012

Dar mai multe detalii puteți găsi în **rapoartele interne ale proiectelor de cercetare**:

- CODESTAR D4, Interface format to the CAD environment
- Codestar D8, Usability and adoption of FIT to solve the field problems
- Codestar D12, Prototype of software modules
- CODESTAR D15, Final demonstrator of CAD Tools
- Chameleon RF D1.2b, Report on compact electromagnetic modelling of RF integrated structures
- Chameleon RF D1.3b, Report on multi-level modeling techniques applied to the compact model extraction of RF structures

Din experiența pe care o avem, Chamy pare potrivit pentru a rezolva problema de modelare electromagnetică a dispozitivelor RF MEMS. În schimb pentru celelalte câmpuri fizice cuplate,

inclusiv cel electrostatic ar trebui să se evalueze și alte abordări numerice, de tip FEM și/sau sau BEM.

5.3 Metoda elementelor de frontieră

Metoda elementelor de frontieră(http://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_element_method) **BEM** este o tehnică numerică de analiză a câmpurilor fizice, bazată pe discretizarea ecuațiilor integrale, de frontieră ale acestora. Scopul este ca soluția numerică să se refere doar la mărimi de pe frontiera domeniului de calcul, nu și din interiorul lui. În felul acesta, se reduce sensibil efortul de calcul necesar determinării soluției. Să ne imaginăm domeniul de calcul de forma unui pătrat, a cărui latură se discretizează în n segmente. În metode „de volum”, tip diferențe finite sau elemente finite, numărul de necunoscute este n^2 , iar deoarece matricea sistemului de ecuații este rară, aceasta are de la $5n^2$ până la $9n^2$ elemente nenule. În BEM intervin doar valorile soluției de pe cele patru laturi ale pătratului, deci sistemul are doar $4n$ necunoscute. Dacă n este foarte mare (de exemplu mii sau zeci de mii), atunci și diferența dintre dimensiunile celor două sisteme crește și mai mult. Din păcate matricea sistemului BEM este una plină, și are deci $16n^2$ elemente nenule. Chiar și așa, folosind metode de accelerare a procedurii iterativ, rezolvarea sistemului BEM se face foarte rapid, iar de multe ori și generarea matricei se face cu tehnici ierarhice, sau de rarefiere, în care efortul de calcul este concentrat doar la anumite elemente (cele care descriu interacțiunea apropiată). Se vede clar diferența de abordare între BEM, care operează cu soluția de pe frontieră și FEM sau FIT, care operează cu soluția din întreg domeniul de calcul.

Ca să înțelegem mai ușor care sunt caracteristicile metodei BEM și cum aceasta elimină necunoscutele din interiorul domeniului de calcul, cu care operează FEM, vom considera cazul cel mai simplu al unei **probleme de electrostatică**, într-un domeniu 2D, omogen, mărginit de o serie de electrozi cu potențial cunoscut. Pentru determinarea soluției acestei probleme trebuie rezolvată ecuația de tip Laplace, cu condiții de frontieră de tip Dirichlet, satisfăcută de potențialul electrostatic din acest domeniu. Dacă domeniu ar avea și sarcini distribuite în interiorul său, ecuația care trebuie rezolvată este una de tip Poisson. Fiind o problemă liniară, soluția sa se poate obține prin superpoziție (surse interne plus surse de frontieră).

Dacă vom considera o sarcină punctiformă (care de fapt este una rectilinie filiformă, pentru că problema este plan-paralelă), unitară, plasată într-o poziție arbitrară $\mathbf{r}'$, în interiorul domeniului de calcul, atunci potențialul produs de aceasta în punctul de observație cu coordonate $\mathbf{r}$ este chiar funcția Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ a operatorului Laplace al domeniului respectiv, cu condiții Dirichlet, nule pe frontieră. Soluția problemei Poisson în condiții de frontieră nule este o superpoziție a acestor soluții elementare (o integrală), obținută considerând sarcina punctiformă în diferite poziții din domeniul de calcul. Dacă domeniul are frontiera la mare distanță, atunci soluția se exprimă ca o integrală sursei de câmp (sarcina din interiorul domeniului), ponderată cu funcția Green: Această convoluție a funcției Green cu sursa este chiar integrala coulombiană a potențialului logaritm. Funcția Green a operatorului Laplace din întreg spațiul, adică expresia potențialului

logaritmice ($g=k \ln R$, cu R distanța dintre punctul sursă și cel de observație, cu $k = 1/(2\pi)$) este funcția caracteristică (soluția fundamentală) a operatorului Laplace, chiar și în domenii mărginite, deoarece laplaceanul său este un impuls Dirac unitar. Potențialul din domenii mărginite, cu condiții nenule de frontieră are expresia dată de *formula celor trei potențiale* (a treia formulă Green http://en.wikipedia.org/wiki/Green's_identities), adică este o sumă cu trei termeni:

- *Potențialul sarcinii de volum* – integrala din sarcina interioară, multiplicată cu funcția Green sau cu cea caracteristică;
- *Potențialul de simplă strat* – integrala din derivata după normală a potențialului, multiplicată cu funcția Green sau cu cea caracteristică;
- *Potențialul de dublu strat* – integrala din valoarea potențialului, multiplicată cu derivata după normală a funcției Green sau a funcției caracteristice.

Dacă se folosește funcția Green G_a problemei cu condiții nule de frontieră, atunci cea de a doua integrală se anulează. Iar dacă problema nu are surse interioare de câmp (nu este electrizat în interior), se anulează și prima integrală. În consecință, aducând punctul într-o poziție arbitrară de pe frontieră, se obține o ecuație integrală, care leagă valoarea potențialului din diferite puncte de pe frontieră de valorile derivatei după normală a potențialului, evaluate tot pe frontiera domeniului de calcul. Aceasta este ecuația integrală pentru suprafață (**Boundary Integral Equation - BIE**) a electrostaticii. Aici trebuie să fim foarte atenți, deoarece datorită singularității integralelor care intervin, potențialul este discontinuu, având un salt la trecerea prin frontieră. Din acest motiv, unul din termenii din formula celor trei potențiale (valoarea potențialului rezultat) este ponderat de un coeficient a cărui valoare este 1, atunci când punctul de observație este în interiorul frontierei (domeniului mărginit), este 0 atunci când punctul de observație este în exteriorul frontierei (este în domeniul nemărginit și este $1/2$, atunci când punctul de observație se află pe frontieră, într-o parte netedă a sa (Ang, 2007) (pag. 9). Asta face ca ecuația integrală a electrostaticii să fie una de tip Fredholm de speța a doua.

Cum valorile potențialului sunt date de condiția Dirichlet, rămâne ca necunoscută a acestei ecuații integrale, variația de-a lungul frontierei a derivatei după normală a potențialului. Deoarece această derivată este proporțională cu densitatea superficială de sarcină (de fapt lineică, în problemele 2D), rezultă că necunoscuta ecuației integrale este tocmai această densitate de sarcină pe suprafață. Nucleul ecuației integrale este *funcția Green (G) a problemei*. Dacă se folosește în locul ei, *soluția fundamentală (g)*, care este *funcția Green pentru întreg spațiul*, atunci ecuația integrală mai are un termen integral, de valoare cunoscută, al cărui nucleu este derivata după normală a funcției g . Ecuația integrală de tip Fredholm, de speța a doua a cărei rezolvare numerică este mai stabilă, decât cea de speța întâi, deoarece este mai bine condiționată (Tausch, 1997). Constatăm că în timp ce forma diferențială a ecuațiilor câmpului permite calculul surselor locale prin aplicarea unui operator diferențial câmpului sau potențialului (operator nemărginit), forma integrală a acestor ecuații permite calculul câmpului sau potențialului dintr-un punct, aplicând un operator integral (compact) surselor din întreg spațiul.

Într-un sens, putem spune că operatorul integral cu nucleul g este inversul operatorului diferențial, în cazul nostru operatorul Laplace.

Discretizând expresia integralei se obține un sistem de ecuații algebrice liniare. Pentru aceasta vom considera n noduri pe frontieră, pe care o să o aproximăm cu o linie poligonală cu vârfurile în cele n noduri. Laturile ei se vor numi **elemente de frontieră**. Considerând densitatea de sarcină o constantă necunoscută, pe fiecare segment sursă, și poziționând punctul de observație, pe rând, în centrul celor n segmente, se obține un sistem liniar de n ecuații algebrice, care are ca necunoscute tocmai valorile acestor constante, atașate laturilor poligonului. Aceasta se întâmplă, indiferent dacă s-a folosit pentru nucleul ecuației integrale funcția Green sau numai funcția caracteristică a operatorului Laplace. În al doilea caz, are avantajul că g având o expresie simplă, elementele matricei sistemului și termenul liber se pot calcula exact, cu formule analitice, ca integrale pe segment a potențialului logaritmă sau respectiv a derivatei sale după direcția normală la segment (Ang, 2007)(pag. 14). O atenție deosebită trebuie acordată termenilor diagonali și celor vecini, pentru care integralele conțin singularități. În (Ang, 2007) (pag. 16) sunt date și codurile FORTRAN pentru calculul acestor integrale, dar și pentru generarea matricei și termenului liber al sistemului BEM. În (Anders Bondeson, 2005) ca și în (Ioan Daniel, 1989) și în <http://www.lmn.pub.ro/~daniel/BazeELTH-3-Teoremele%20el-mg.pdf> sunt date codurile MATLAB.

Rezolvând sistemul liniar de ecuații algebrice (numit al elementelor de frontieră **BEM**), se determină distribuția de sarcină de pe frontieră, care ulterior poate fi folosită pentru a calcula potențialul, în orice punct al domeniului de calcul, deci pentru a determina soluția numerică, completă a problemei. Cu cât numărul de elemente de frontieră crește, cu atât soluția este mai precisă. *Convergența* este accelerată, dacă rețeaua de discretizare a frontierei este *adaptată* soluției. Cu cât soluția variază mai rapid de-a lungul frontierei, cu atât segmentul ar trebui să fie mai scurt. O regulă practică spune că este bine ca segmentele să nu aibă sarcini totale prea diferite între ele. Respectând această regulă, conductoarele vor fi divizate mai des spre margini, iar efectul de muchie (creșterea puternică a densității de sarcină spre margini) va fi mai bine reprezentat numeric (C.-F. Wang, 2001), (Anders Bondeson, 2005).

Abordarea poate fi extinsă fără prea mari dificultăți în cazul **problemelor cu surse interne de câmp** (caz în care sistemul liniar, obținut în urma discretizării conține în membrul drept, valorile aproximative ale integralelor corespunzătoare sarcinii de volum), dar și pentru **condiții mixte**: *Dirichlet* pe o parte a frontierei, și *Neumann* pe restul ei. În acest ultim caz, necunoscuta principală a problemei este potențialul în punctele cu condiție Neumann și densitatea de sarcină în punctele cu condiție Dirichlet. În fond, ecuația integrală de frontieră, definește un operator care leagă variația potențialului pe frontieră de variația derivatei lui normale pe aceeași frontieră. Acesta este *operatorul Poincare-Steklov* de tip Dirichlet la Neumann, iar ecuațiile discretizate cu BEM sunt forma discretă a acestui operator. În absența sarcinilor interioare, operatorul Poincare-Steklov este liniar, iar în prezența lor el devine unul afîn. Dacă ne referim la metode numerice „de volum”, tip FEM, FDM, putem spune că prin BEM se elimină variabilele din nodurile interne

domeniului de calcul, ecuațiile rezultate fiind *complementul Schur* al acestora. Privit din punct de vedere vectorial, acest operator leagă componenta tangențială a câmpului de componenta sa normală. Operatorul Poincare-Steklov reprezintă transpunerea în limbaj matematic a tomografiei de impedanță. Aceasta este și explicația pentru care, matricea sistemului de ecuații liniare generat de BEM se numește *matrice de impedanță* iar termenul liber se numește vectorul excitațiilor sau al *potențialelor*,

(http://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9%28%93Steklov_operator, (Bossavit, 1990)

Mergând mai departe, abordarea se generalizează și la cazul **domeniilor neomogene**. Ecuația ce trebuie rezolvată acum este una Poisson generalizată, cu operator eliptic, reciproc și pozitiv definit, de tip *div-grad*. În cazurile simple, cum sunt, spre exemplu mediile stratificate se poate determina funcția Green a domeniului neomogen (Gulbin Dural, 1995), (Michael Paulus, 2000), dar în cazurile mai complicate, în care se folosește soluția fundamentală a întregului spațiu, trebuie introduse ca necunoscute auxiliare, valorile densității de volum a sarcinii de polarizare în punctele domeniului neomogen. Ecuațiile integrale își pierd acum caracterul lor de frontieră. În condițiile în care constanta de material (permitivitatea dielectrică în cazul nostru) este constantă pe porțiuni și are variații - salturi doar pe interfețele dintre domeniile de omogenitate, atunci este preferabil să se introducă necunoscute auxiliare, cum sunt valorile componente normale a inducției electrice aceste interfețe (proporțională cu derivata după normală a potențialului). Aceste necunoscute permit utilizarea soluției fundamentale, pentru întreg spațiul omogen, în locul funcției Green a domeniului mărginit și neomogen (a cărei determinare analitică poate fi uneori foarte dificilă, sau chiar imposibilă). Pentru a înțelege această abordare, ne putem imagina că analizăm cu BEM fiecare sub-domeniu omogen și apoi cuplăm ecuațiile, folosind condițiile de interfață (continuitatea potențialului și conservarea componente normale a inducției electrice). După cuplarea multidomeniu, se obține un sistem care are necunoscute adiționale, ce descriu soluția pe interfețe. Problemele scalare întâlnite în regimurile magnetostatic, sau electrocinetic se rezolvă la fel, datorită similitudinii ecuațiilor cu cele ale electrostaticii (Massoud, 1998), (Meijs, 2003).

O altă extensie se face, prin trecerea de la **2D** la **3D**. Funcția caracteristică ($g = k/R$) este acum potențialul coulombian al sarcini punctiforme din 3D, invers proporțional cu distanța până R la sarcină. De această dată, frontiera se aproximează cu o suprafață poliedrală. Cea mai flexibilă modelare geometrică este cea în care fețele acestui poliedru – elementele de frontieră - sunt triunghiulare. Și în cazul 2D, la fel ca în cazul 2D, frontiera a fost partiționată disjunct într-un număr finit de elemente de frontieră de formă geometrică simplă. Coeficientul a_{ij} al matricei de impedanțe este integrala pe triunghiul sursă al inversei distanței $1/R_{ij}$, până la centrul elementului al poliedrului frontieră. Aceste integrale au ca și cele ale derivatei după normală a funcției $1/R_{ij}$ expresii analitice exacte (Fetzer97-Comparison of analytical and numerical integration techniques, Jain05Rectangular). Ele trebuie neapărat folosite, mai ales pentru calculul termenilor diagonali, care sunt integrale singulare. O mare atenție trebuie dată și termenilor

„aproiați”, pentru care R are valori mici. Termenii „depărtați” se pot calcula cu formule aproximative, de integrare numerică.

Un pas mai dificil îl constituie transpunerea acestei proceduri, pentru rezolvarea **problemelor vectoriale**, cum sunt de exemplu, cele de câmp magnetic staționar sau variabil în timp. În principiu, în problemele de câmp vectorial, funcția Green are un caracter tensorial (diadic), legând vectorul sursă (de exemplu densitatea de curent din punctul sursă) de vectorul răspuns (de exemplu inducția magnetică din punctul de observație). Un caz mai simplu, în care tensorul are un caracter diagonal are loc în cazul în care sursa este densitatea de curent, iar răspunsul este potențialul vector (http://cc.ee.ntu.edu.tw/~rbwu/course/Guided_waves/chap3A_Dyadic.pdf) (DyadicGreen Function). Dacă ne referim la potențialul magnetic vector, operatorul Poincare-Steklov leagă componenta tangențială a acestuia de pe frontieră de componenta tangențială a rotorului acestuia tot pe frontieră. Privind din punctul de vedere al câmpului, este aceeași legătură, între componenta normală și cea tangențială a câmpului (magnetic de astă dată) de pe frontieră. Totuși, folosirea potențialului (magnetic) vector, pe care o putem face și în cazul magnetostatic sau chiar electrostatic reprezintă abordarea duală față de cea în care se folosește potențialul scalar (Bossavit, 1990).

Trebuie să remarcăm faptul ca procedura prezentată se poate aplica și pentru rezolvarea problemelor exterioare, adică a problemelor cu **domeniu de calcul nemărginit**, lucru foarte dificil sau chiar imposibil, în metodele FEM sau FDM. Acesta este și explicația de ce în rezolvarea problemelor nemărginite se folosește deseori combinația **FEM-BEM** (Stefan Kurz, 1995), (Kezhong Zhao, 2006), (Beer, 2008)pag 435, (T. Preisner, 2009). În aceasta, problema interioară se discretizează cu FEM, iar cea exterioară cu BEM, care devine condiție de frontieră deschisă pentru domeniul interior. Abordarea mixtă este potrivită, mai ales în cazul problemelor, în care domeniul interior, mărginit este neomogen (caz în care avantajele BEM sunt pierdute), iar cel exterior, nemărginit este omogen (aer de exemplu, care se poate extinde în întreg spațiul bi-sau tri-dimensional). Dar atunci când se scriu ecuațiile integrale de frontieră, pe o suprafață mărginită (de exemplu o sferă), pentru un operator eliptic (de exemplu Laplace) trebuie dată mare atenție feței la care ne referim (interioară sau exterioară). Pentru că în acest caz, potențialul nu este continuu (ci are un salt, de dublu salt pe frontieră), folosirea valorii interioare în BEM duce la rezolvarea problemei interioare (mărginite), pe când folosirea valorii exterioare, duce la rezolvarea cu BEM a problemei exterioare (nemărginită).

Tehnica BEM, așa cum a fost prezentată până acum este folosită frecvent, în multe aplicații electromagnetice, dintre care cea mai frecventă este determinarea numerică a capacităților. **Extragerea capacităților și inductanțelor** în configurații complicate ajuns la performanțe neimaginabile, prin perfecționarea acestei tehnici. (Joel R. Phillips and Jacob K. White, 1997), (Zhenhai Zhu, 2004), (Zhu-PhD, 2004), (C.-F. Wang, 2001), FastCap, FastHenry, FastImp (http://www.rle.mit.edu/cpg/research_codes.htm).

Datorită similitudinii ecuațiilor metoda prezentată poate fi folosită și la rezolvarea problemelor mecanice staționare de elasticitate sau curgere potențială, dar și în analiza distribuției temperaturii. În (Beer, 2008) la pag. 195 se prezintă un program general (inclusiv cu codul sursă FORTRAN), bazat pe BEM pentru rezolvarea unor astfel de probleme și se ilustrează (la pag. 264) cu deformarea unei grinzi în consolă.

Prezentarea anterioară a trecut cu vederea un aspect important. Presupunerea că funcția necunoscută este constantă pe porțiuni (segmente în 2D și triunghiuri în 3D) nu este singura posibilă. Am putea considera, de exemplu soluția numerică din 2D liniară pe porțiuni (o funcție al cărui grafic de variație de-a lungul frontierei este o linie poligonală) sau chiar una, mai netedă, polinomială pe porțiuni. În general, putem presupune că soluția este o combinație liniară de *funcții de bază* (sau de încercare), definite pe frontieră și având suport local pe aceasta. Lucrurile seamănă cu abordarea de la elemente finite, ceea ce și facilitează cuplarea celor două metode. *Gradele de libertate* ale metodei BEM sunt coeficienții funcțiilor de bază, care intervin în expresia soluției numerice, ca o combinație liniară a acestor funcții. În exemplul electrostatic 2D prezentat anterior funcțiile de bază sunt niște impulsuri dreptunghiulare, unitare, fiecare cu suportul pe un segment al frontierei. Prin rezolvarea sistemului liniar generat în urma discretizării se determină vectorul gradelor de libertate, care identifică în mod univoc soluția numerică, descriind printr-o funcție scară variația densității superficiale de sarcină, de-a lungul frontierei.

Vom merge și mai departe cu **similitudinea cu FEM**, definind pe frontieră un set de *funcții de test* și vom anula proiecția reziduului ecuației integrale pe aceste funcții. Deosebirea față de FEM este că acum atât funcțiile de bază cât și funcțiile de test sunt definite doar pe frontieră. În plus, reziduul se referă la ecuația integrală, și nu la forma slabă a ecuației cu derivate parțiale. Fiecare funcție de test generează câte o ecuație a sistemului discret, în urma anularii proiecției reziduului. Vorbim de fapt despre o valoare medie pe frontieră a reziduului, medie calculată folosind funcția de test ca pondere. Din acest motiv, metoda se mai numește a *reziduurilor ponderate*, sau a *momentelor*, deoarece această proiecția pe o funcție pondere se mai numește și moment. Momentul nu este altceva decât produsul scalar (din spațiul L_2) al celor două funcții. Sunt cam multe denumiri pentru un singur concept, dar explicația este de natură istorică. Deoarece multe sunt folosite în vorbirea curentă și în literatură, ele trebuie înțelese corect, inclusiv cu sinonimii lor.

O primă alegere pentru funcțiile de test este ca acestea să fie impulsuri Dirac, cu suportul în centrul elementelor de frontieră. Aceasta a fost alegerea implicită în exemplele anterioare. Această alegere, corespunde plasării punctului de observație, pe rând, în centrul fiecărui element de frontieră, și impunerea acolo a condiției de frontieră, operație numită și **colocație**. Ea nu are de fapt nevoie de folosirea funcțiilor generalizate de tip impuls Dirac, decât doar pentru a încadra colocația într-un cadru conceptual mai general. Avantajul colocației este că are nevoie doar de integrarea pe elementul sursă nu și pe cel de observație. Dezavantajul este că metoda filtrează din

condiția de frontieră, valorile ei doar în punctele de colocație. Modul de variație între aceste puncte nefiind luat deloc în considerare.

În principiu, putem testa soluția problemei folosind o gamă largă de funcții de test, de ordin mare sau mai mic. Dar calitatea soluției numerice care se obține va depinde de această alegere (Aksun93-Test functions). O alegere frecventă în cazul operatorilor autoadjuncți (cum este și operatorul Laplace) este ca funcțiile de test să fie chiar funcțiile de bază (numite împreună *funcții de formă*). Acesta este metoda lui **Galerkin**. Dacă folosim această alegere, în problema de electrostatică descrisă anterior, sistemul de ecuații algebrice se obține impunând pe fiecare segment ca valoarea medie a soluției numerice să fie valoarea medie pe acel segment a condiției de frontieră de tip Dirichlet. Acesta face ca elementele a_{ij} ale matricei sistemului să se calculeze, nu prin integrale simple, ci prin integrale duble, din $1/R$, atât pe segmentul sursă j cât și pe cel de observație i . Chiar dacă lucrurile par mai complicate, avantajul este că se obține o matrice simetrică, mult mai bine adaptată unor rezolvări iterative foarte rapide. Simetria reflectă la nivel discret reciprocitatea – o proprietate fizică fundamentală a câmpului descris de ecuații cu operatori autoadjuncți. În cazul acesta, metoda de proiecție Galerkin este echivalentă cu metoda variațională Rayleigh-Ritz, ambele generând același sistem de ecuații discrete. Pe lângă metoda Galerkin, în literatură se întâlnește o gamă foarte largă de funcții de bază și metode de testare a ecuațiilor. Atunci când funcțiile de bază nu coincid cu cele de test, metoda rezidului ponderat se numește Petrov-Galerkin. Petrov fiind acela care a extins metoda Galerkin la cazul operatorilor care nu sunt autoadjuncți.

În metoda Galerkin, complexitatea procedurii depinde mult de alegerea funcțiilor de bază (identice cu cel de test). În 2D, funcțiile de bază și de test de tip impuls dreptunghiular sunt cea mai simplă alegere, următorul pas ar fi alegerea funcțiilor de bază cu grafic triunghiular ("acoperiș", izoparametrice de ordinul întâi), care vor genera soluții numerice liniare pe porțiuni. Aceasta face ca necunoscutele să devină nodale (gradele de libertate sunt valorile soluției în vârfurile liniei poligonale – frontieră). Se poate merge mai departe și la funcții de bază polinomiale, continuu și chiar netede, cu suport local, obținându-se *BEM-Galerkin de ordin înalt*. În cazul 3D, fiind definite pe o triangulație, funcțiile de bază BEM de ordin superior sunt similare cu funcțiile de bază din FEM 2D. Iar trecerea la funcții de ordin mai înalt presupune renunțarea la integrarea analitică și folosirea integrării numerice de tip Gauss, așa cum s-a întâmplat și la FEM în fazele sale timpurii. Spre deosebire de FEM, acum se integrează pe element produsul dintre funcțiile de formă și nucleul ecuației integrale. Problema erorii de integrare numerică și stabilirea numărului pe noduri Gauss este discutată în (Beer, 2008), la pag 139.

Mai mult, în cazul problemelor vectoriale, se folosească elemente de frontieră *div-conforme* sau *rot-conforme*, „de muchie”, pentru care gradele de libertate sunt tensiunile (magnetice) de pe laturile triangulației BEM de pe frontieră. La elementele *div-conforme* componenta normală a câmpului se conserva la trecerea între elementele adiacente, și nu există deci acumulare de sarcini pe muchii, pe când la cele *rot-conforme* se conservă componenta tangențială a câmpului.

Această perspectivă asupra BEM ilustrează și legătura intimă existentă cu FEM. Multe din conceptele care păreau specifice FEM, cum sunt cele de funcții de bază izoparametrice, funcții de test, triangulație, elemente nodale și de muchie, etc. sunt transferate în BEM, pentru a-i oferi o fundamentare matematică mai solidă. Aceste cunoștințe se dovedesc a fi deci de metode numerice, în general, și nu specifice numai uneia din metodele de discretizare și rezolvarea ecuațiilor câmpurilor fizice.

Trebuie să mai remarcăm și faptul ca FEM este și ea un caz particular al metodei Galerkin. Ecuațiile discrete FEM se obțin prin proiecție pe funcții de test, deci sunt momente ale reziduului. În consecință, deoarece FEM este o variantă a metodei reziduurilor ponderate (implicit a momentelor), folosirea numelui de *MoM*, în sensul de BEM este confuză și ar trebui descurajată.

Metoda elementelor de frontieră BEM, adică metoda momentelor (MoM), pentru rezolvarea ecuațiilor integrale de frontieră (BIE) poate fi aplicată nu numai în regim staționar ci și în cazurile în care **câmpul variază în timp**. Avem în principiu două situații, analiza în *domeniul frecvenței* și în *domeniul timpului*. În primul caz, prin transformări operaționale se obțin ecuații complexe, de tip Helmholtz, cu operatori eliptici, similari operatorului Laplace, deci ele pot fi rezolvate similar cu rezolvarea prezentată în cazul electrostaticii.

Și în cazul reprezentării complexe, avem două situații: *frecvențe joase* - regim quasi-staționar (Wolfgang M. Rucker, 1995), (Hiptmair, 2007) și *frecvențe înalte* - regim electrodinamic, general variabil Mosig88-BEM. (J.R. Mosig, 1988). Deosebirea față de cazul static este că de această dată, funcția Green $g = K \exp(-jkR)/R$ este complexă și în consecință sistemul de ecuații BEM este unul liniar, complex. Aici s-a notat $K = 1/(4\pi)$, și cu k^2 constanta Helmholtz, egală cu pătratul numărului de undă $\omega^2 \epsilon \mu$, în regim electrodinamic fără pierderi; și egală cu $-j\omega \mu \sigma$, în regim magneto-quasi-staționar. Problemele dinamice, armonice sau tranzitorii se rezolvă deci prin reprezentare în complex sau transformată Laplace, iar apoi se discretizează și rezolvă cu BEM, ca o ecuație eliptică, staționară, urmând ca în final să se calculeze numeric transformata Laplace inversă.

Al doilea caz se referă la *ecuații integrale de frontieră în domeniul timpului*, un domeniu mai puțin studiat. Prin discretizarea lor cu BEM se obține un sistem de ecuații diferențiale ordinare (ODE), în care intervin doar mărimi definite pe frontiera domeniului de calcul, și care se rezolvă cu tehnici de integrare numerică. Aceste ecuații, nu sunt în forma standard, ci sunt cu întârziere, deoarece în ele intervine timpul retardat, necesar propagării undelor (2002), (Beer, 2008), pag 390. Folosirea BEM pentru analiza regimului dinamic, pune în evidență un alt mare avantaj al acestei metode față de cele de volum. În cazul metodelor FEM sau FDM, este necesară trunchierea domeniului de calcul folosind, de multe ori o frontieră virtuală, ceea ce generează mari dificultăți, mai ales în studiul propagării undelor. În domenii nemărginite undele radiază, dar în cazul frontierelor ele se reflectă, afectând grav corectitudinea soluției. Acesta este motivul pentru care au fost inventate, condiții artificiale de frontieră „deschisă”, numit condiții

absorbante. Pe acestea ar trebui ca undele să nu se reflecte ci să fie total absorbite, indiferent de unghiul lor de incidență, lucru care nu se întâmplă cu exactitate. Ecuațiile integrale ca și varianta lor discretă BEM nu au nevoie de așa ceva, pentru că ele descriu întreg spațiul nemărginit.

În cazul problemelor structurale necunoscuta principală a ecuației integrale poate fi: câmpul de deplasări, eforturi sau deformații (Beer, 2008), pag 490, pe când în problemele de câmp electromagnetic variabil în timp, deosebim, următoarele situații:

- **EFIE** – Electric Field Integral Equation – necunoscuta este intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$ de pe frontiera domeniului, acolo unde începe de regulă un corp perfect conductor, cu condiții de frontieră de tip PEC (Anders Bondeson, 2005), (Hussein, 2007), (John L. Volakis, 2012);
- **MFIE** – Magnetic Field Integral Equation – necunoscuta este intensitatea câmpului magnetic $\mathbf{H}$ de pe frontiera domeniului (ceva mai complicată decât anterioara, și cu restricția că se poate aplica doar domeniilor închise PEC (Anders Bondeson, 2005), (Özgür Ergül, 2006), (John L. Volakis, 2012);
- **CFIE** – Combined Fields Integral Equation – necunoscutele sunt atât intensitatea câmpului electric $\mathbf{E}$ cât și cea a câmpului magnetic $\mathbf{H}$, de pe frontiera domeniului. Ecuația se obține prin combinația liniară a ecuațiilor EFIE și MFIE, rezultatul fiind mai robust numeric decât anterioarele (Erik Jørgensen, 2003), (Anders Bondeson, 2005), (Özgür Ergül, 2009), (John L. Volakis, 2012);
- **MPFIE** – Mixed Potentials Integral Equation – necunoscutele sunt atât potențialul magnetic vector $\mathbf{A}$ cât și potențialul electric scalar V , de pe frontiera domeniului de calcul (J.R. Mosig, 1988), (Sharad Kapur, 2004).

Pentru astfel de abordări, dintre multiplele posibile alegeri, pentru funcțiile de bază și cele de test, cea care are un succes deosebit este **RWG** Rao–Wilton–Glisson (Rao SM) și cele de tip **acoperiș** (Chang, 1992), dar pentru modele mai precise se folosesc tot mai mult funcțiile de **bază de ordin superior** (W. Cai, 2001), (Erik Jørgensen, 2003), (Felipe Valdés, 2009). Funcțiile RWG asociate unei muchii sunt proporționale cu vectorul ce unește vârful opus muchiei cu punctul curent și ele sunt normate astfel încât să fie *div*-conforme. Acesta le face potrivite pentru EFIE, în timp ce pentru MFIE ar trebui funcții de baza *rot*-conforme (cum sunt de exemplu funcțiile $\mathbf{n} \times \text{RWG}$ (Özgür Ergül, 2006). Expresiile integralelor acestor funcții pe triunghiuri sunt date în (Anuja Apte, 2003) (John S. Asvestas, 2008). Alegerea necorespunzătoare a funcțiilor de bază și de test poate genera erori mari, în schimb alegerea lor potrivită duce la soluții numerice rapid convergente către soluția exactă (M. I. Aksun, 1993). Tehnicile de analiză a câmpurilor variabile cu BEM sunt folosite în aplicații de înaltă frecvență, mai ales pentru studiul **împrăștierii undelor electromagnetice**, cu scopul de a identifica diferite obiecte, după semnătura lor pe

radar. Dar sunt analizate și structuri de tip *microstrip* (J.R. Mosig, 1988), (Chang, 1992), (Rainer Burger, 1997), (Feng Ling, 1999), (Vikram Jandhyala, 2002), (Mark VRANCKEN, 2002), cum întâlnim în analiza electromagnetică a comutatoarelor RF-MEMS. În analiza împrăștierei se rezolvă ecuațiile câmpului rezultat prin suprapunerea câmpului incident (cunoscut, de obicei o undă plană, dar poate fi și cel datorat excitației unui port, cum se întâmplă în cazul RF-MEMS) cu cel împrăștiat („scattered field”), în urma interacțiunii cu substanța. Codurile pentru analiza împrăștierei undelor electromagnetice pe obiecte de forme foarte complicate (avioane, automobile, tancuri, etc.) au ajuns la *performanțe greu de imaginat*

(Jiming Song, 1997), (J. M. Song, 1998), (JIMING SONG, 1998), (Sanjay Velamparambil, 2003), (J. M. Taboada, 2010).

În lucrările (Jun-Sheng Zhao, 2000), (Jin-Fa Lee, 2003) se studiază folosirea unor transformări de tip *loop-tree* pentru a preconditiona matricea impedanțelor, astfel încât să se rezolve rapid și la frecvențe joase și înalte. Explicația este că cele două topologii sunt în corespondență cu descompunerea Helmholtz a câmpului, în componenta sa irotațională și solenoidală.

Lucrările (Weng Cho Chew, 1997), (Sharad Kapur David E. Long, 1997), (Kalyan C. Donepudi, 2000), (Sanjay Velamparambil, 1999), (Tie Jun Cui, 2004), (Yang Wang, 2005) fac o trecere în revistă a tehnicilor pentru **accelerarea soluționării**, cum sunt: *FMM* – Fast Multipole Method, *MLFMA* – MultiLevel Fast Multipole Algorithm, *FFT* – Fast Fourier Transform, majoritatea bazate pe preconditionarea rezolvării iterative de tip Krylov, cum este GMRES, sau propun noi abordări, mai eficiente, inclusiv paralelizări. În aceste programe (cum este spre exemplu *FISC*), pe lângă condiția de frontieră PEC (Perfect Electric Conductor) mai sunt implementate și altele, cum sunt: condiția de frontieră cu impedanță superficială (*IBC* – Impedance Boundary Condition), folie rezistivă (*RS*-Resistive sheet) sau folie dielectrică (*TDS* - Thin Dielectric Sheet).

Modul în care se aplică BEM la rezolvarea problemelor de câmp magnetic staționar sau de **joasă frecvență** este prezentat în mai multe lucrări cum sunt (C. A. BREBBIA, 1987), (Hiptmair, 2007), (F. Hantila, 2003), (F. Hantila, 2007), (I.R. Ciric, 2011) și cele citate în acestea. Constatăm că o dificultate suplimentară întâlnită este cea a problemelor neliniare. Aceasta apare datorită relației constitutive, de material neliniare. În electromagnetism ea poate fi de natură dielectrică, magnetică sau conductivă, iar în analiza structurilor ea apare datorită plasticității materialelor sau datorită fenomenelor de contact (Beer, 2008) pag. 407.

Rezultatele referitoare la BEM, în cazul electromagnetic pot fi transferate și altor câmpuri fizice (termice, de curgere sau elastice), prin similitudine.

Dacă recapitulăm **principalele caracteristici** și aspecte ale procedurilor bazate pe BEM, care determină performanțele acestora, ele ar fi:

- Rețeaua de discretizare – forma elementelor de frontieră: triunghiuri, dreptunghiuri, patrulatere plane sau curbe, de îndesite adaptiv;
- Tipul domeniului: exterior (nemărginit), interior (mărginit), încheiat pe fire sau pe suprafețe;
- Funcțiile de bază: impuls Dirac, constante, liniare pe porțiuni, armonice pe porțiuni, RWG, acoperiș, de muchie - irotationale, solenoidale, de ordin superior;
- Funcțiile de test: de ordin mai mic decât cele de bază, identice cu cel de bază;
- Ecuațiile rezolvate: staționare (eliptice), cvasistaționare (parabolice), în regim general (hiperbolic), în complex (Helmholtz); de moduri proprii;
- Tipuri de materiale: omogene (operator Laplace), cu staturi omogene, neomogen, neliniar;
- Condiții de frontieră: Dirichlet, Neumann, mixte, conductoare perfecte, cu impedanță superficială; folie rezistivă, folie dielectrică;
- Necunoscutele ecuației integrale: potențialul scalar, potențialul vector, câmpul electric, câmpul magnetic, mai multe câmpuri sau potențiale;
- Modul de calcul al integralelor (la generarea matricei impedanțelor): analitic, numeric Gauss, hibrid, altfel;
- Modul de rezolvare a sistemului liniar: direct, iterativ, metoda folosită;
- Felul de condiționare; FMM, FFT, multinivel, altele.
- Posibilitatea de a fi executate în paralel: pe cluster, pe procesoare multinucleu, pe GP-GPUB;
- Caracteristici extrase; semnătura radar - RCS (radar cross section), matricea capacităților, rezistențelor, caracteristici de frecvență, inductanțelor, circuitul echivalent PEEC, răspuns tranzitoriu;
- Alte aspecte: Natura câmpului – elastic, potențial de curgere, electromagnetic (regim), termic, multifizic, cuplarea cu FEM, etc.

Aspectele avansate ale BEM ar fi cele referitoare la: rafinare adaptivă automată, generarea rapidă și cu precizie a matricei impedanțelor, condiționări eficiente, tratarea neliniarităților, probleme cuplate și paralelizări scalabile.

În **perspectiva istorică**, principiile matematice ale metodei se găsesc în descoperirile lui Green iar aspectele sale algoritmice au fost enunțate de inginerul mecanic rus Galerkin, încă din 1915, dar interesul pentru această abordare a fost stârnit abia după 1960, prin apariția tehnicii de calcul, care a permis implementarea ei pe calculator. Interesul pentru BEM și actualitatea cercetărilor în

domeniul BEM sunt ilustrate și de faptul că în ultima perioadă se publică anual peste 700 articole, care o au ca subiect. Fundamentarea matematică a BEM (prin rezultatele unor mari matematicieni, cum sunt Laplace, Poisson, Gauss, Stokes, Green) este descrisă într-o manieră captivantă în (Alexander H.-D. Cheng, 2005). Se vede clar de aici caracterul multifizic al acestei tehnici, dar și efortul științific deosebit al comunității matematice și a celei ingineresti, pentru a se ajunge la starea conceptuală actuală și la dezvoltarea ei algoritmică. Mai constatăm că confuzie a existat la începutul secolului XX, până la apariția programelor de calcul dedicate rezolvării ecuațiilor integrale de frontieră, dar și ani buni după aceea. Incorporarea în BEM a conceptelor provenite din FEM a avut loc abia în 1976, prin teza de doctorat a lui Lachat, care folosește încă numele de BIE – metoda ecuațiilor integrale de suprafață. Numele de BEM – metoda elementelor de frontieră fiind propus, ca o oglindire a numelui FEM, de C.A. Brebia, de la Universitatea din Southampton, abia în 1977. Termenul s-a referit încă de la început la rezolvarea numerică a ecuațiilor integrale de frontieră, prin descompunerea de frontiere în elemente geometrice simple, pe care se caută o soluție, folosind funcții de bază, ca cele din FEM, dar definite superficial. În 1978, Brebia publică prima carte despre BEM, intitulată ‘The Boundary Element Method for Engineers’, în care metoda este fundamentată pe metoda reziduurilor ponderate, făcând chiar și deosebirea între condițiile de frontieră esențiale și cele naturale. Ulterior comunitatea științifică mondială a extins folosirea numelui BEM și la alte cazuri, cum ar fi rezolvarea unor probleme cu operatori, care nu sunt autoadjuncți. Din păcate, lucrarea citată nu include realizările din domeniul electromagnetismului. Prima contribuție care a evidențiat caracteristicile acestei abordări în electromagnetism este cartea lui R.F. Harrington intitulată *Field Computation by Moment Methods* (Harrington, 1993), apărută în 1968 (Croswell, 1990). Ulterior, abordarea a fost folosită tot mai intens și dezvoltată corespunzător, conform citărilor anterioare, pentru a rezolva atât probleme de frecvență joasă cât și mai ales de înaltă frecvență.

Principalele cărți referitoare la BEM și MoM sunt următoarele:

- R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, 1968
- C.A. Brebia, *The Boundary Element Method for Engineers*, 1978
- Anders Bondeson, Thomas Rylander, Par Ingelstrom, *Computational Electromagnetics*, Springer, 2005
- W.T. Ang, *A Beginner's Course in Boundary Element Methods*, 2007
- Walton C Gibson, *The method of moments in electromagnetics*, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2008
- Gernot Beer, Ian Smith, Christian Duenser, *The Boundary Element Method with Programming: For Engineers and Scientists*, Springer, <http://dl.kashti.ir/ENBOOKS/The%20Boundary%20Element%20Method%20with%20Programming%20For%20Engineers%20and%20Scientists.pdf>
- John L. Volakis and Kubilay Sertel, *Integral Equation Methods for Electromagnetics*, SciTech Publishing, 2012

Pe baza eforturilor de cercetare din proiectului ToMeMS și a rezultatelor lor ar merita redactată o carte, dedicată folosirii metodei BEM în electromagnetism, similară cu cea dedicată metodei elementului finit (Ioan, 2012). Aceasta poate dezvolta ideile prezentate aici. Absența unui astfel de document a determinat extensia mai amplă aici a subiectului despre BEM față de FEM.

Principalele **coduri care folosesc BEM**(<http://www.cvel.clemson.edu/modeling/>) sunt:

- **Fasthenry, Fastcap, and Fastlap**, <http://www.fastfieldsolvers.com/>
- **FEKO Lite** (MLFMM pentru antene) <http://www.feko.info/product-detail/feko-lite>
- **BETL** - a C++ template library for the discretisation of boundary integral operators. <http://www.sam.math.ethz.ch/betl/>
- **Puma-EM** An open-source and high performance Method of Moments / Multilevel Fast Multipole Method parallel program <http://sourceforge.net/projects/puma-em/>
- **PARAFEM**, Parallel BEM solver for elasticity problems described in Gernot Beer, Ian Smith, Christian Duenser, *The Boundary Element Method with Programming: For Engineers and Scientists*, <http://www.parafem.org.uk/>

Pachete comerciale:

- **Agilent Momentum**
<http://www.home.agilent.com/agilent/product.jsp?cc=RO&lc=eng&ckey=1385440&nid=-34333.804583.00&id=1385440&cmpid=29280>
- **IES** – Integrated Engineering Software <http://www.integratedsoft.com/>
- **Mentor Graphic HyperLynx 3D EM**(formerly IE3D from Zeland Software)
<http://www.mentor.com/products/pcb-system-design/circuit-simulation/hyperlynx-3d-em>

În acest context, **activitatea de cercetare-dezvoltare** se desfășoară pe două planuri. Pe de o parte se dezvoltă noi modele, mai exacte, care țin cont de mai multe fenomene sau cuplaje, folosind instrumentele software existente. Pe de altă parte se dezvoltă noi instrumente software, mai performante, bazate pe noi algoritmi sau noi fundamente conceptuale. Sunt situații în care pachetele de programe existente nu au funcțiile necesare dezvoltării unui nou model, și este necesară dezvoltarea în paralel și a unui nou instrument software. Oricum pentru alegerea celei mai potrivite metodologii de modelare este necesară cunoașterea la perfecție a caracteristicilor, atât ale modelului analizat, simulat sau simulat cât și ale procedurilor și instrumentelor software existente. Indiferent ce cale se alege, trebuie studiate cu mare atenție rezultatele obținute anterior și publicate în literatura de specialitate. Lucrările citate în această secțiune ar trebui parcurse de Sorin în vederea includerii lor în stadiul actual, pe care îl va prezenta în teza sa.

6 Reducerea modelului

Extragerea modelului numeric și chiar simularea sa nu încheie modelarea dispozitivului. Nu trebuie să uităm că proiectanții au nevoie de mai mult. Ei sunt interesați de modele simple, flexibile și relativ precise ale dispozitivelor pe care le concep. În proiectare au loc frecvent modificări repetate ale parametrilor, cu scopul de a atinge, în final specificațiile impuse prin tema de proiect. Acestea impun necesitatea unor modele, care să se poată simula foarte rapid, chiar dacă, în etapa inițială, ele nu sunt foarte precise.

Pentru a înțelege scopul acestei etape, vom începe cu un **exemplu simplu**. Să ne imaginăm un cub cu fețele încălzite la diferite temperaturi. În interior, variația în timp a supra-temperaturii este soluția ecuației căldurii, cu condiții Dirichlet de frontieră și cu condiții inițiale, pe care le presupunem nule. Soluția ecuației cu derivate parțiale, liniare, de tip parabolic determinată prin separarea variabilelor este o serie de funcții cu variație exponențială în timp, cu constante de timp tot mai mici. Practic, evaluăm soluția prin trunchierea seriei la un număr finit n de termeni. Aceștia sunt soluțiile unor ecuații diferențiale ordinare liniare de ordinul întâi. Iată că prin trecerea de la PDE la ODE am realizat o primă reducere a ordinului modelului, de la infinit, la un număr finit n . Dacă rezolvăm problema, cu o metodă numerică, de exemplu, cu FEM, prin discretizare realizăm același lucru, adică o trecere de la un sistem cu o infinitate de stări la unul cu număr finit. *Numărul de stări* indică de fapt numărul de variabile ale căror valori trebuie cunoscute la momentul inițial pentru a determina evoluția ulterioară a soluției, în timp.

Lucrurile nu se opresc aici. Răspunsul depinde puternic de variația temporală și spațială a condițiilor de frontieră, care reprezintă *excitația sistemului* (sursa câmpului de temperatură). Ideal ar fi ca și aceasta să fie reprezentată de un vector (cu un număr finit de componente), variabile eventual în timp, care este de fapt semnalul de intrare al sistemului. Pentru asta trebuie realizată o discretizare a condițiilor de frontieră, care din obiecte infinite dimensionale (cum sunt funcțiile de două variabile spațiale) sunt approximate prin obiecte descrise de vectori finit dimensionali. Acest lucru se realizează fie introducând conceptul de terminal termic (suprafața de pe frontieră, pe care temperatura nu are variații spațiale) sau folosind discretizări, de tip BEM.

Procedând în mod similar și cu soluția - variația în timp a temperaturii, care este răspunsul modelului, pe care o discretizăm spațial, obținem în final un număr finit de *semnale de ieșire*.

Aceste aspecte se întâlnesc nu numai în problemele termice, ci în orice problemă de dispozitiv cu parametri distribuiți, descrisă de ecuații cu derivate parțiale ale câmpului, indiferent de natura sa fizică. Discretizarea modelelor descrise de ecuații cu derivate parțiale și reprezentarea lor prin sisteme, care au un număr finit de intrări, de ieșiri și de stări constituie un pas fundamental al modelării matematice și numerice, pe care trebuie să-l avem în vedere și în cazul nostru. Aceasta este o primă etapă, fundamentală, a reducerii ordinului modelelor.

Remarcăm că numărul n al stărilor modelului discret (numeric) este de regulă de ordinul sutelor până la milioane, mult prea mare față de așteptările proiectanților sau ale altor posibili utilizatori ai acestor modele. Proiectantul cubului descris anterior vrea să știe cât durează regimul tranzitoriu termic, cât de repede se răcește sau se încălzește acel obiect. Aici intervine, ca o necesitate, etapa cunoscută sub numele de **reducerea ordinului modelelor MOR** (Model Order Reduction). Cele două etape: de discretizare și MOR împreună sunt numite *reducerea modelului* (Model Reduction).

Reducerea ordinului modelului extras are ca scop identificarea unui sistem descris de ecuații diferențiale ordinare, cu un număr de stări $q \ll n$, dar care să aibă același număr de intrări și ieșiri ca sistemul original și care asigure o relație între semnalele de intrare și ieșire apropiată de cea a sistemului original. În unele situații se dorește preservarea și a altor caracteristici cum este pasivitatea. Definiția reducerii ordinului își găsește formulări matematice precise, în literatura de specialitate.

Dacă revenim la exemplul cubului în tranziție termică, probabil că un model redus, cu 1-5 constante de timp (obținut pentru tot atâtea variabile de stare) și cam cu tot atâtea semnale de ieșire cât și de intrare este suficient în majoritatea cazurilor practice.

În general, deosebim următoarele **metode și feluri de reducerea modelului**:

- Reducerea ordinului sistemelor liniare, cu *ecuații de stare* în forma canonică;
- Reducerea ordinului sistemelor liniare, cu ecuații de *semi-stare* (DAE, descriptor);
- Reducerea ordinului sistemelor liniare, *pornind de la rezultate măsurate sau simulate*;
- Reducerea ordinului sistemelor *neliniare*;
- Reducerea ordinului modelelor cu *elemente finite* (ROM for ANSYS, COMSOL, etc.)
- Reducerea ordinului specifică unor ecuații, aplicații sau *domenii particulare* (circuite, structuri, termo, hidro, MEMS, etc.)
- Fiecare din domeniile enumerate au și variante de reducerea ordinului sistemelor parametrice, foarte importantă în modelarea pentru proiectare și optimizare (G.C.).

Fiecare din aceste tematici are propria sa literatură. Ea s-ar putea rezuma în limbaj natural, dar nu știu ce relevanță ar avea asta pentru proiect. Deoarece doar descrierea principiilor celor mai importante metode de reducerea ordinului ar necesita, pentru precizie o aprofundare cu un mai puternic caracter matematic și de teoria sistemelor, ne mulțumim ca în continuare să facem doar o scurtă trecere în revista a principalelor referințe bibliografice. Cei interesați sunt invitați să le consulte selectiv. Pentru o scurtă trecere în revistă cu caracter introductiv, puteți consulta „*Wil Schilders, Introduction to Model Order Reduction*” (o găsiți cu Google).

Începem cu **resurse de pe net** privind reducerea ordinului:

- <http://modelreduction.com/> reducerea ordinului la sisteme multi-disciplinare (termice, structurale, termo-mecanice, electromecanice), MOR for ANSYS, MOR liniar și neliniar cu multe linkuri utile, pagina lui *Evgenii B. Rudnyi, CADFEM* care a ținut și cursul

Eurosim 2006: Automatic Compact Modelling for MEMS: Applications, Methods and Tools, planșele sunt disponibile aici.

- <http://www.caam.rice.edu/~modelreduction/> un proiect în care sunt implicate universitățile americane Rice, Purdue, Florida State și UCL. Conține rapoartele tehnice, publicații și teze, prezentări (A. Antoulas, D.C. Sorensen, K. Gallivan, P. Van Dorren).
- <http://www.math.ethz.ch/~kressner/modred/descriptor.pdf> planșele Tatjanei Stykel despre reducerea ordinului sistemelor descriptor (DAE).

Cărți de referință:

- Athanasios C. Antoulas, **Approximation of Large-Scale Dynamical Systems**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005, ISBN: 0898715296;
- Peter Benner, Roland W. Freund, Danny C. Sorensen and Andras Varga (eds). **Special Issue on Order Reduction of Large-Scale Systems**. 2006;
- WH Schilders, HA Van der Vorst, J Rommes, *Model order reduction: theory, research aspects and applications* Springer, 2008 (aici avem și noi o contribuție :).

Cel mai importante teze de doctorat în domeniul MOR sunt cele realizate de Eric Grimme, Pieter J. Heres, Jing-Rebecca Li, Antoine Vandendorpe, Pepijn Wortelboer, Yunkai Zhou, toate accesibile prin pagina lui Evgenii B. Rudnyi. Tot aici găsiți și trimiteri la paginile unor importanți cercetători din domeniul MOR, cum sunt: [Athanasios C. Antoulas](#), [Zhaojun Bai](#), [Peter Benner](#), [Biswa Nath Datta](#), [Roland W. Freund](#), [Serkan Gugercin](#), [Enrique S. Quintana-Ortí](#), [Axel Ruhe](#) și [Danny C Sorensen](#).

Experiența noastră privind reducerea ordinului este descrisă în următoarele **lucrări publicate**:

- **Daniel IOAN**, Gabriela CIUPRINA, Marius RĂDULESCU, Marius PIPER *All Levels Strategy to Reduce the Model Order of On-chip Passive Components*, IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation **CEFC 2004**, Digest Book p345, Seoul, Korea, June 6-9, 2004
- Gabriela Ciuprina, **Daniel Ioan** ALLROM STRATEGY FOR ORDER REDUCTION OF ON-CHIP PASSIVE STRUCTURES AT HIGH FREQUENCIES, **ATEE 2004**, 25-26 nov. 2004, P.U.B.
- G. Ciuprina, **D. Ioan** and D. Mihalache, *Reduced Order Electromagnetic Models based on dual Finite Integrals Technique*, Book chapter in the book *Scientific Computing in Electrical Engineering*, in the book series *Mathematics in Industry* (G. Ciuprina, D. Ioan Eds), Vol. 11, pp. 287-294, **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2007, ISBN 978-3-540-71979-3
- **Daniel Ioan** and Gabriela Ciuprina, *Reduced Order Models of On-Chip Passive Components and Interconnects Workbench and Test Structures*, in *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Wilhelmus H. A. Schilders, Henk A. van der Vorst and Joost Rommes *Mathematics in Industry*, Volume 13, III, 447-467, DOI: 10.1007/978-3-540-78841-6_20, **Springer-Verlag, Heidelberg**, 2008, ISBN 978-3-540-78840-
- G. Ciuprina, D. Ioan, I.A. Lazar, **M.I. Andrei**, "Adaptive Frequency Sampling for the Effective Extraction of Reduced Models for HF-ICs Passive Components", *Proceedings*

of National Symposium of Theoretical Electrical Engineering (SNET 2010), Bucharest, 2010

- I.A. Lazar, **M.I. Andrei**, E. Caciulan, G. Ciuprina and D. Ioan, "Parallel algorithms for the efficient extraction of fitting based reduced order models", Proceedings of the 7th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE 2011), pp:385-390, 12-14 May, Bucharest, 2011
- Ioan-Alexandru Lazăr, Gabriela Ciuprina, **Daniel Ioan**, *Effective extraction of accurate reduced order models for HF-ICs using multi-CPU architectures*, Inverse Optimization and Inverse Problems, Electromagnetism - OIPE 2010, Proceedings, Ivan Yatchev, Iliana Marinova (Eds.), pages 5-8, **TU Sofia**, 2010, and Inverse Problems in Science and Engineering Volume: 20 Issue: 1 Pages: 15-27 Published: 2012 Taylor & Francis
- Daniel Ioan, Gabriela Ciuprina, Cosmin Bogdan Dita, Mihail Iulian Andrei, "**Electromagnetic Models of Integrated Circuits with Coupled Magnetic Circuits**", ICEEA 2012, September 2012, Cape Town, South Africa
- Gabriela Ciuprina, Daniel Ioan, Cosmin Bogdan Dita, and Mihail Iulian Andrei, "**Frequency Parameterized Models for Planar On-Chip Inductors**", SCEE 2012, September 2012, Zurich, Switzerland
- Gabriela Ciuprina, Daniel Ioan, Cosmin Bogdan Dita, and Mihail Iulian Andrei, "**Optimal terminals identification for domain partitioning of electromagnetic circuit elements**", OIPE 2012, September 2012, Ghent, Belgium
- Jorge Fernandez Villena, L. Miguel Silveira, Gabriela Ciuprina, **Daniel Ioan**, Sebastian Kula, *Parametric Model Order Reduction*, **COMSON handbook**, Springer Verlag, 20 pages, accepted for publication.
- Gabriela Ciuprina, Alexandra Stefanescu, Sebastian Kula and **Daniel Ioan**, *Robust Procedures for Parametric Model Order Reduction of High Speed Interconnects*, **COMSON handbook**, Springer Verlag, 30 pages, accepted for publication.

Dar mai mult detalii se găsesc în următoarele **rapoartele interne** ale proiectelor la care am participat:

- CODESTAR D5, Report on existing and new order reduction methods
- CODESTAR D11, Demonstrator of ROM Workbench
- CODESTAR D15, Final demonstrator of CAD Tools
- CODESTAR D16, Report on the benchmarking of currently available tools
- Chameleon RF, D1.4. Report on the compact modelling of the building blocks of the benchmark RF design blocks
- Chameleon RF, D2.1b, Report on Modelling Methods for EM Interaction Between Compact Models of Devices
- Chameleon RF, D2.2, Report on modelling for lithography and process induced variability
- Chameleon RF, D3.1, Report on Parametric Model Order Reduction Techniques
- Chameleon RF, D3.3b, Report on Algorithms for Reducing Massively Coupled Systems

Cred că toate acestea ar fi bine să fie introduse în biblioteca virtuală ToMeMS.

Ca urmare a eforturilor de cercetare desfășurate în cele două proiecte internaționale, s-a dezvoltat în LMN un pachet de instrumente MATLAB, dedicat reducerii ordinului și caracterizării sistemelor și circuitelor, numit **ROM Workbench**, care implementează mai multe metode. Ca urmare a studiilor efectuate cu acest pachet, strategia aleasă de noi pentru reducerea ordinului a fost bazată pe algoritmul VF (Vector Fitting - <http://www.energy.sintef.no/Produkt/VECTFIT/>) propus în B. Gustavsen and A. Semlyen, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting", *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1052-1061, July 1999. Acesta pornește de la valorile numerice, complexe din caracteristica de frecvență și extrage o aproximare rațională a acesteia, determinând implicit polii și zerourile funcției de transfer. Abordarea a dat rezultate excelente în cazurile testate în proiectele Codestar și Chameleon RF. În strânsă legătură cu reducerea ordinului se află și problema reprezentării modelului într-o formă acceptabilă pentru industrie. Modul în care s-a sintetizat circuitul Spice, care realizează modelul de ordin redus este prezentat în raportul Codestar D15.

Un avantaj al acestei abordări este acela că poate fi folosită și pentru a extrage modele compacte, pornind de la rezultatele măsurătorilor, după cum este ilustrat în raportul Chameleon RF D1.4.

Programele care realizează reducerea modelului (Chamy și ROM Workbench, împreună cu manualele lor de utilizare), dezvoltate în Codestar și perfecționate în Chameleon pot fi accesate din pagina LMN. Ele se vor putea aplica în principiu fără dificultăți la modelarea electromagnetică a dispozitivelor RF MEMS și la extragerea modelelor EM reduse, pentru o plajă largă de frecvențe radio.

În cazul **RF MEMS**, reducerea ordinului are relevanță în două situații distincte:

- Reducerea ordinului sistemului electromecanic, care funcționează la rece și are ca mărime de intrare tensiunea de acționare și ca mărime de ieșire poziția armăturii mobile (descrisă de un scalar sau de un vector, variabile în timp). Problema este dificilă deoarece este una neliniară, în care avem puțină experiență.
- Reducerea ordinului modelelor electromagnetice (RF), care este mai simplă, deoarece este o problemă liniară, și în care avem mare experiență, datorită proiectelor Codestar și Chameleon RF.

Rezultă deci că va trebui să aplicăm procedurile cunoscute pentru modelarea RF și să investigăm reducerea ordinului problemei electromecanice. O trece în revistă a lor este făcută încă din (<http://modelreduction.com/doc/papers/rudnyi02SU.pdf>). După ce vom avea propria viziune privind modelele electromecanice vom analiza, dacă este nevoie de noi metode și instrumente pentru reducerea modelului electromagnetic. În final cele două modele (electromecanic și electromagnetic) vor fi integrate într-un model unic al dispozitivului RF MEMS, descris în Spice sau VHDL. Este o țintă pentru teza lui Sorin Lup, dar la această activitate vor colabora probabil

și alți membri ai echipei ToMeMS. Bogdan va colabora, dacă va fi nevoie, mai ales la elaborarea de noi modelele reduse de tip electromagnetic inclusiv în paralelizarea lor.

7 Aspecte algoritmice – informatice

Această secțiune se referă la etapa de **implementare a codului** de extragere prin intermediul calculatoarelor a modelelor dispozitivelor supuse analizei.

Programele de calculator folosite pentru extragerea și simularea modelelor dispozitivelor multifizice (<http://en.wikipedia.org/wiki/Multiphysics>) au o **structură** comună cu toate gamele CAD/FEA, de proiectare automată, cu cele trei mari părți, care asigură:

- *Preprocesarea* – permite descrierea problemei ce trebuie rezolvată, introducerea și modificarea tuturor datelor ce descriu dispozitivul analizat, dar și parametrii rezolvării;
- *Solverul* – pregătește problema pentru rezolvare (generează de exemplu rețeaua de discretizare spațială, forma discretă a ecuațiilor și condițiilor de frontieră, verifică în ce măsură datele sunt consistente, acțiuni care pot fi incluse în faza de preprocesare), rezolvă efectiv sistemul de ecuații (algebrice liniare în regim permanent din medii liniare, cu metoda aleasă de utilizator: directă, iterativă, cu sau fără rafinare adaptivă; în cazul mediilor neliniare, ecuația neliniară se rezolvă iterativ calculând sau nu matricea jacobian la fiecare iterație, în problemele de regim tranzitoriu, se integrează numeric ecuațiile în timp, folosind metode implicite sau explicite). În cazul în care se dorește doar reducerea ordinului, fără simulare, ecuațiile generate nu se rezolvă ci se supun procedurilor de reducere.
- *Postprocesarea* – determină mărimile derivate de interes pentru utilizator și permite afișarea și vizualizarea în diferite formate a rezultatelor.

După felul de **interfață cu utilizatorul**, programele se împart în două mari categorii: interactive și ne-interactive, sau mai exact în:

- Programe cu *interfață grafică* *GUI*(Graphic User Interface)http://en.wikipedia.org/wiki/Graphical_user_interface
- Programe cu *interfață textuală* *CLI* (Command Line Interface)http://en.wikipedia.org/wiki/Command-line_interface
- Programe care se *execută fără intervenție umană* (batch) http://en.wikipedia.org/wiki/Batch_processing

Ultimele preiau datele dintr-un fișier specificat în linia de comandă și salvează rezultatele într-un fișier de ieșire, specificat tot în linia de comandă (prin care sunt lansate în execuție). În proiectul Codestar am conceput atât o interfață grafică GUI (descrisă în raportul D15), cât și un mod automat de execuție (batch), în care programul CODESTAR-LMN primea un fișier de intrare în

format XML (descriș în raportul D4), generat automat din formatul CIF. Fluxul de informații este descriș de Fig.1 de la pag. 9 din D8 și în Fig. 2.1 de la pag. 21 din D15. Codul scris în CODESTAR nu mai este funcțional, dar înțelegerea fluxului său de informații este foarte utilă și pentru ToMeMS. În mod asemănător a fost tratat și pachetul ROM-Workbench. Fluxul lui de date este ilustrat în Fig. 2 din pag. 13 a raportului D 16.

Indiferent care este modul de interacțiune cu utilizatorul este recomandat ca fișierelor de intrare și de ieșire să aibă **formate standard**. Dintre diferitele standarde folosite în industria EDA, următoarele ne interesează în mod deosebit, pentru ca sunt în legătură cu activitatea de modelare.

- **GDSII** (<http://en.wikipedia.org/wiki/GDSII>) este un format de fișier, care conține baza de date ce descrie geometria straturilor unui circuit integrat (IC layout). Este un format binar ce descrie forme geometrice plane etichete – text și alte informații referitoare la structura ierarhică a circuitului. GDS (Graphic Database System) este standardul de facto în industria EDA , chiar dacă are ca proprietar compania Cadence, dar în practică se mai întâlnesc și alte doua formate, folosite în același scop: CIF ([Caltech Intermediate Form](#)) și OASIS (Open_Artwork_System_Interchange_Standard).
Formatul este descriș în [Computer Aids for VLSI Design - Appendix C: GDS II Format](#) by Steven M. Rubin (<http://www.rulabinsky.com/cavd/text/chapc.html>), în [The GDSII Stream Format](#) by Jim Buchanan (http://www.buchanan1.net/stream_description.shtml) și http://www.cnf.cornell.edu/cnf_spie9.html.

În afară de soluțiile comerciale, sunt disponibile o serie amplă de utilitare referitoare la GDSII: editoare (<http://www.klayout.de> , <http://www.layouteditor.net/wiki/LayoutEditor>, - LayoutEditor, nu e la fel de prietenos ca Klayout, în plus are destule funcții pe care nu le ofera decat cu bani), viwere 2D și 3D (<http://www.atchoo.org/gds2pov>) convertitoare la format ASCII și invers GDS2ASC/ ASC2GDS (<http://www.gbresearch.com/gdsutilities/>), și încă multe altele (<http://www.layouteditor.net/links/>) Translatoarele CIF2GDS și GDS2CIF au prețul licenței de 1500\$ fiecare :).Dar sunt disponibile free, biblioteci de funcții în C <http://search.cpan.org/dist/GDS2/>, Java <http://sourceforge.net/projects/jgds/> și Ruby, pentru citire /scriere GDSII. Cred că ar fi utile pentru ce încearcă Andreea să facă . Ar trebui ca principalele instrumente din domeniu public sa fie instalate în LMN, împreună cu documentația și menționate în intranetul proiectului. Folosirea viwerelor 3D ar trebui să devină o uzanță, pentru realizarea de lucrări frumoase . Sorin este rugat sa importe gds-ul comutatorului trimis de Alexandra în COMSOL, sa obținem o imagine 3D, similară cu cele incluse de Iulian în teza sa. Astfel de imagini dovedesc profesionalismul și inspiră încredere. Poate merita încercat si VTK <http://www.vtk.org/>.

- **SPICE** (<http://en.wikipedia.org/wiki/SPICE>) este formatul standard pentru descrierea circuitelor electronice analogice, prin netlist-ul lor. Chiar dacă există mai multe dialecte ale acestui limbaj, ele nu diferă în aspectele de bază. Unele pot oferi facilități suplimentare față de limbajul de bază, admit de exemplu parametrizări, sau au elemente și modele incorporate mai elaborate. Este formatul pe care l-am folosit în Codestar și Chamelon pentru a descrie modelul de ordin redus extras de Chamy. În consecință, avem instrumentele de sinteză și generare automată a fișierului netlist în format Spice, pentru sisteme liniare. Acesta poate fi folosi fără probleme pentru a descrie modelul porților RF

al comutatoarelor MEMS. Prin similitudine el s-ar putea folosi și pentru descrierea modelului mecanic redus, dar în literatură se preferă un format de descriere hardware de tip HDL (Hardware Description Language).

- **VHDL** (<http://en.wikipedia.org/wiki/VHDL>) este un limbaj de descriere hardware folosit în proiectarea electronică automată a circuitelor integrate pentru a descrie atât parte digitală cât și cea analogică a unor sisteme hibride, cu semnale mixte, așa cum se întâmplă frecvent în ultima vreme, de exemplu în telefonie celulară. El este folosit atât pentru modelarea și simularea unor circuite cu structură cunoscută cât și pentru descrierea unor circuite noi, care vor fi sintetizate folosind compilarea descrierii. Abia prin extensiile standardului din ultima perioadă (VHDL AMS) limbajul poate descrie semnale mixte. Deoarece el face o descriere comportamentală și mai puțin structurală, proiectul unui circuit arată în VHDL mai mult ca un program scris într-un limbaj comun de programare, cu declarații de tip, expresii, operatori, instrucțiuni de control, funcții. Ținta este să se poată face descrierea comportamentală a unui circuit digital, urmând apoi ca aceasta să poată fi compilată – sintetizată și transferată rapid în circuite integrate la comandă ASIC sau în popularele și accesibile arii de porți logice FPGA. Practic, astfel fiecare aplicație ar putea avea propriul procesor adaptat cerințelor aplicației respective. Datorită puterii sale, VHDL este mult mai dificil de folosit, decât limbajul Spice, care are un caracter descriptiv și nu unul comportamental. Dacă o să îl folosim, precis că vom utiliza doar o restricție foarte limitată a sa, și ne vom baza pe exemplele din bibliotecile de dispozitive RF MEMS, descrise în VHDL.
- **XML** (<http://en.wikipedia.org/wiki/XML>) , adică **Extensible Markup Language (XML)** este un limbaj simplu ,de marcare, textual, care definește un set de reguli pentru marcarea documentelor, astfel încât acestea sa fie înțelese fără ambiguități, și de om și de calculator. Definiția lui este disponibilă la <http://www.w3.org/TR/REC-xml/>. Deoarece este foarte flexibil și permite definirea unor structuri de date arbitrare, l-am folosit ca limbaj al fișierelor intermediare (de exemplu, pentru a descrie obiectele ce vor fi modelate). Fișierele erau generate pornind de la descrierea geometrică a straturilor circuitului integrat (în format CIF) și descrierea verticală tehnologiei straturilor (în format XML) dar și un fișier de comenzi (tot în format XML). Probabil că va fi folosit în mod similar și în proiectul ToMeMS. Dar operarea cu acest limbaj în programe sau în definiții ale structurilor de date presupune utilizarea unor instrumente ajutătoare (API și respectiv Schema), dintre care unele foarte utile erau în domeniul comercial. Aici trebuie făcută o analiză mai serioasă asupra celor mai bune soluții, iar rezultatele prezentate întregii echipe (probabil de Andreea și/sau Sorin). **Trebuie menționată și experiența negativă: nu am ajuns la un acord cu partenerii, în ceea ce privește formatul xml. Nu am avut acces la un soft gds2xml. De aceea, merită să folosim pentru început fișierele xml generate din Klayout. Dar într-adevar, mai ales Andreea poate să caute alte soluții mai inteligente.**

Alegerea limbajului pentru descriere **modelelor geometrice 3D**, a solidelor și a rețelei de discretizare, este încă o problemă deschisă și va depinde de produsul program CAD/FEM/multifizic cu care decidem să lucrăm. Trebuie să menționăm aici că în lume sunt multe proiecte și facilități pentru cercetările multifizice. Exemple sunt http://www.cerfacs.fr/globc/PALM_WEB/ The Open Palm sau

<http://www.csc.fi/english/pages/elmer>. Nu este lipsit de interes să analizăm posibilitatea unor colaborări internaționale, de preferință europene cu astfel de proiecte.

În legătură cu implementarea modelării în cadrul proiectului ToMeMS este esențial să decidem, care este **tehnologia informatică** pe care o vom folosi și în ce măsură vom dezvolta cod propriu. Dacă recapitulăm, avem situațiile (G.C.):

1. Modele analitice pentru intelegere
2. Modele vechi cu software existente
3. Modele noi cu software existente
4. Modele vechi cu software noi
5. Modele noi cu software noi

Codul propriu este deci la punctele 4 si 5. :)

Aceste întrebări rămân deocamdată deschise, pentru că nu avem încă toate elementele să decidem inteligent asupra lor. Dar asta nu elimină studiul mai aprofundat al aspectelor informatice și de calcul. Avem în vedere următoarele:

- Folosirea tehnicilor de *calcul de înaltă performanță*, în special utilizarea eficientă a sistemelor de calcul multiprocesor, cu arhitectură ierarhică: cluster, multi-nucleu, GP-GPU.
- Dezvoltarea cunoștințelor și a condițiilor de a realiza transfer tehnologic IT în folosirea bibliotecilor de funcții pentru folosirea tehnicii de calcul de înaltă performanță în *rezolvarea problemelor științifice multifizice de mare complexitate*.
- Avem în vedere cunoștințe referitoare la: rezolvarea rapidă a *sistemelor de ecuații algebrice cu matrice rare de foarte mari dimensiuni (cu peste un milion de necunoscute), metode directe și iterative de mare viteză, preconditionări eficiente, FFT, FMM, Multigrid și descompunerea în subdomenii (DDM)*.
- Folosirea principiilor *ingineriei software*, în vederea dezvoltării unor produse de calitate (proiectare orientată pe obiecte, re folosirea codului, medii eficiente de dezvoltare, controlul versiunilor, documentarea, testarea automată).

Chiar dacă nu vor fi antrenați în activitatea de implementare toți membrii echipei, **studenții și doctoranzii** trebuie să facă acest efort, pentru că fără dezvoltarea unor coduri sau proceduri automate proprii de modelare nu vor putea progresa în carieră. Important este ca eforturile lor sa nu fie irosite în van. Și nu mă refer aici la eforturile de învățare ci la cele de creativitate. Cu toții sperăm că ele vor duce la rezolvarea unor probleme, care să stârnească interesul pe plan internațional, la evenimentele științifice la care vor participa cu comunicări. Pentru asta trebuie să-și perfecționeze deprinderile de comunicare profesională, să lucreze cu cele mai avansate cunoștințe și tehnologii matematice și informatice, dar ce este cel mai important, să aibă o

atitudine creativă, inovativă, iscoditoare, pentru a identifica soluții și abordări originale. În același timp, cu respect și admirație pentru marile contribuții autentice ale înaintașilor. Dacă vor înțelege bine contextul, atunci la noi probleme complicate vor găsi soluții inteligente.

8 Validarea și verificarea modelelor

Activitatea de modelare nu se încheie cu elaborarea modelului. Un pas foarte important are loc după aceea și constă în evaluarea și caracterizarea sa. **Verificarea** ne asigură că modelul a fost construit în acord cu cerințele din formularea matematică a problemei iar **validarea** ne asigură că la rândul ei această formulare este una corectă, în acord cu realitatea. Pe scurt, în prima etapă se verifică dacă soluția satisface ecuațiile, adică nu este eronată, iar în a doua, dacă ecuațiile nu sunt eronate. Asta chiar dacă, logic pare că ar trebui procedat pe dos. Asta pentru că vorba unui clasic în viață: „Erori au fost, erori sunt încă!”.

Pentru a verifica soluția unei probleme de câmp, se rezolvă problema pentru o excitație (sursa de câmp) particulară și se determină în ce măsură soluția satisface ecuațiile câmpului și condițiile sale de frontieră. Pentru aceasta, se înlocuiește câmpul în ecuații și se determină numeric *reziduul* ecuației sau al condiției de frontieră.

Dacă suntem mai analitici, ar trebui să evaluăm în ce măsură sunt verificate ecuațiile cu caracter general și în ce măsură sunt verificate ecuațiile constitutive, de material. Este evident că abaterile de la relațiile constitutive sunt mai puțin grave decât cele ale relațiilor generale sau topologice. Ne putem imagina că rezolvăm de fapt o problemă apropiată, în care dispozitivul este realizat din materiale asemănătoare, dar cu caracteristici ușor modificate. Atunci când constantele de material au abateri relative în limita erorilor de măsurare, atunci acest lucru nu este grav, deoarece nu este nici măcar observabil experimental. Mai mult, în producția de serie se poate întâmpla frecvent ca produsele să nu fie perfect identice, ci de la unul la altul să existe mici abateri ale constantelor de material, sau chiar ale geometriei. Acestea sunt motivele pentru care, în ingineria curentă sunt acceptabile abateri care pot merge până la valori destul de mari, nu numai de 1% ci chiar și până la 5% sau chiar 10%. Evident că sunt aplicații speciale, ca de exemplu dispozitivele metrologice, în care cerințele sunt mult mai riguroase. Acest lucru se mai întâmplă în toate cazurile în care dispozitivele sunt în directă legătură cu riscuri privind securitatea oamenilor sau a unor bunuri valoroase, cum se întâmplă în domeniile aerospațial, aeronautic sau nuclear. În rest, elaborarea și folosirea unor modele de prea mare precizie nu este justificată economic. Dar chiar și așa ele trebuie verificate, pentru că există întotdeauna riscul unor erori grosolane. Iată deci că verificarea este esențială în toate cazurile. Și nu trebuie să ne așteptăm să avem modele perfecte, lipsite de erori, oricât de mici. Așa ceva este imposibil.

Dar o primă verificare se referă la sistemul de ecuații obținute prin discretizarea câmpului. Reziduul acestor ecuații este o măsură a erorii cu care este rezolvată problema.

O altă abordare simplă este să se considere un câmp particular, ales arbitrar, să se determine apoi din ecuații sursele care ar produce acel câmp și apoi să se rezolve problema de analiză pentru acele surse, pentru a determina în ce măsură câmpul rezultat este apropiat de cel considerat inițial.

Un instrument foarte util pentru verificarea soluției constă în verificarea consecințelor ecuațiilor, cum sunt *consecințele* de natură energetică, sau cele privind alte mărimi, care au caracter *conservativ*. Este vorba de verificarea ecuației de bilanț energetic sau de altă natură. Avantajul este că față de verificarea ecuațiilor, care are caracter local, verificarea bilanțului energetic, este sintetică, având un caracter global. Ea se referă la comportarea soluției pe întreg domeniul, iar în cazul energiei, și pe întreg intervalul de timp.

Verificarea modelelor, care sunt sisteme intrare/ieșire presupune determinarea semnalului de ieșire, pentru variații particulare ale intrării. Cel mai adesea acestea se presupun de forme cu totul particulare sau chiar degenerate, cum sunt: cele constante, sinusoidale, exponențiale, impuls particular mai mult sau mai puțin neted, funcție treaptă, etc. Important este să putem determina răspunsul în acel caz pe cale analitică sau pe altă cale, cum este cea simbolică. Reducerea ordinului ar trebui să fie verificată separat, atunci când acest lucru este posibil.

Prima problemă care se ridică în evaluarea cantitativă se referă la faptul că în urma verificării rezultă un vector de abatere, iar dorința este să avem un singur criteriu numeric, care să exprime *sintetic* această abatere, adică să măsoare distanța între ce ar trebui să se obțină și ce s-a obținut de fapt. Din punct de vedere matematic, aceasta dilemă se reduce la alegerea normei vectorului, prin care exprimăm sintetic abaterea. Cel mai adesea eroarea se exprimă relativ (în procente), raportând norma abaterii la norma vectorului ce caracterizează mărimea care exprimă ce se dorea să se obțină). Necazuri apar atunci când norma vectorului la care se raportează tinde către zero. Atunci trebuie căutat alt vector, sau în cel mai rău caz se raportează la ceva de ordinul zerourului mașinii, care oricum merită adăugat la norma de referință. Un exemplu clarificator este cel al sistemului de ecuații liniare, obținut în urma discretizării ecuațiilor câmpului. În acest caz avem vectorul soluție, cel al termenului liber și cel al reziduului, definit ca diferența dintre vectorul obținut prin înlocuirea soluției în ecuații și termenul liber. Eroare relativă este norma reziduului raportată la norma termenului liber. Situația este perfect asemănătoare în cazul sistemelor neliniare, dar și în cazul altor ecuații, inclusiv cele diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale, numai că operatorul ecuației se schimbă. Aceasta deoarece în abordarea numerică, toate mărimile (locale cu variație spațială sau semnale cu variație temporală) se reprezintă prin discretizare pe rețele adecvate ca vectori finit dimensionali. Cel mai frecvente norme vectoriale folosite în practică sunt *norma euclidiană* (radical din suma pătratelor componentelor) și *norma Cebîșev* (modulul maxim al componentelor). Primul descrie abaterea medie pătratică iar al doilea descrie abaterea maximă. Norma euclidiană este mai puțin tăioasă decât norma max, deoarece se referă la toate componentele, pe când cealaltă se referă doar la componenta cea mai aberantă. Dacă vrem să le comparăm atunci ar trebui ca norma euclidiană să fie calculată chiar ca o medie, și înainte de a calcula radicalul să raportăm suma pătratelor componentelor la numărul lor. În cazul

mărimilor matriceale, deoarece estimarea normei lor euclidiene este costisitoare (pentru că presupune rezolvarea unei probleme de valori proprii) se preferă folosirea altor măsuri, cum este seminorma Frobenius.

O altă problemă foarte importantă a evaluării cantitative a corectitudinii soluției se referă la *relevanța* mărimii căreia i se determină abaterea. Reziduul ecuației, în forma sa discretă sau chiar în formă continuă nu este întotdeauna cea mai relevantă mărime pentru a caracteriza calitatea soluției. Se pot da ușor exemple, în care reziduul este rezonabil de mic, dar soluția este afectată de erori importante. Acest lucru se întâmplă în cazul problemelor slab condiționate, la care mici abateri ale datelor (sursele de câmp, descrise de termenul liber al ecuațiilor) determină abateri mari ale soluției. Acesta este motivul pentru care sunt preferabile procedurile de verificare, care estimează abaterea soluției față de cele care se referă la reziduu. Mai exact: eroarea relativă a soluției $e < \text{numarul de condiționare} \cdot \text{reziduul relativ (G.C.)}$.

În strânsă legătură cu acest aspect al verificării se află deci și valoarea *numărului de condiționare al problemei*, care descrie gradul de bună condiționare al ei. Dacă reușim să calculăm măcar valoarea aproximativă a lui, atunci putem spune în ce măsură norma reziduului are relevanță pentru verificarea soluției. Dar pentru acest lucru ar trebui să facem o analiză a variabilității soluției. Aceasta constă în analiza efectului pe care o au variațiile datelor problemei asupra variației soluției. O primă abordare în analiza variabilității este cea de determinare a *sensitivităților* soluției sau a unor mărimi derivate din aceasta, față de parametri caracteristici datelor problemei, care pot fi de natură geometrică sau de material. Matematic, analiza se reduce la determinarea valorilor derivatelor parțiale ale mărimilor de ieșire față de parametri ce descriu datele problemei. O astfel de analiză a sensibilităților prezintă interes practic, mai ales atunci când se dorește să se studieze efectul abaterilor tehnologice asupra producției de serie. Modelul trebuie deci să permită realizarea virtuală a procedurii SPC (Statistic Production Control), încă din faza de proiectare. Dar analiza sensibilităților de ordinul întâi nu este decât un aspect al *analizei variabilității*. Altele se referă la analize parametrice, cum sunt: sensibilitățile de ordin superior, analiza statistică, sau identificarea cazului cel mai defavorabil (în care se poate ține cont inclusiv de anumite corelații care există între datele de intrare). Ideal ar fi ca prin rezolvarea problemei să se determine nu numai soluția în cazul nominal ci și parametrii statistici ai acesteia (de, exemplu, valoare medie și abaterea standard), atunci când se cunosc parametrii statistici ai datelor.

Analiza variabilității, se poate face pe *cale teoretică sau empirică*. Rezultatele analizei teoretice se pot implementa sub forma unor proceduri de calcul eficient al sensibilităților, care stau la baza analizei variabilității. Analiza empirică a variabilității se realizează, rezolvând problema de câmp de mai multe ori, cu diferite date de intrare, numite experimente numerice. Datele de intrare pot fi generate aleator, cum se întâmplă în metoda Monte Carlo și alte metode stohastice, sau alese cu grijă, cum se face în cazul tehnicilor de proiectarea experimentelor. Aceasta deoarece altfel, folosind metoda forței brute pentru verificarea completă a soluției numerice, și extragerea

modelului de variație parametrică ar trebui efectuate extrem de multe experimente numerice, lucru prohibitiv.

Constatăm că toate aspectele referitoare la verificare se referă la relația dintre soluția numerică și ecuația sau problema formulată matematic despre acea ecuație, care a fost rezolvată. Discuțiile se poartă în cadru matematic, funcțional al acestei probleme sau al unei probleme asemănătoare care este aproximarea sa discretă.

O altă procedură care trebuie parcursă după verificarea modelului este *validarea* sa. Aceasta ne va asigura că modelul construit este util în activitatea de proiectare. Cea mai solidă metodă de verificare a unui model este confruntarea sa cu realitatea. De această dată vom concepe o baterie de teste, alcătuită dintr-o serie de scenarii, privind excitarea atât a dispozitivului real cât și a modelului său cu semnale de intrare similare, aplicate în condiții similare. Validarea experimentală a modelului are loc, doar dacă răspunsul modelului are abateri acceptabile față de răspunsul obiectului real.

Aranjamentele făcute, în vederea *validării experimentale* modelului numeric trebuie realizate cu deosebită grijă pentru a alege caracteristici relevante. Ele trebuie stabilite împreună cu echipa de modelare și descrise în detaliu (atât aranjamentul experimental cât și postprocesarea aplicată rezultatelor măsurătorilor), pentru a elimina orice aspect care ar putea genera neconcordanțe.

În literatură, **dispozitivele RF MEMS acționate electrostatic** sunt caracterizate experimental astfel:

- *Static*, prin caracteristica de acționare C-V cu histerezis;
- *În RF*, prin dependența parametrilor S în funcție de frecvență;
- *În regim tranzitoriu*, prin măsurarea modului de variație în timp a capacității, pe durata regimului tranzitoriu de comutație în ambele sensuri. În unele cazuri se măsoară direct, variația în timp a poziției armăturii mobile.

O altă metodă de validare a unui model este să se compare comportarea sa cu cea a altui model stabilit pentru același dispozitiv, cu condiția ca celalalt model să fie obținut prin aplicarea altor modele matematice și/sau numerice, și să fi fost, de preferință validat experimental anterior. Deoarece validare experimentală este foarte scumpă, presupunând concepția și realizarea de prototipuri, urmată de caracterizarea lor experimentală, *validarea software* este folosită frecvent, mai ales în cazul noilor dispozitive. Aceasta metodă de validare este de altfel singura, care se poate aplica dispozitivelor ce nu au fost încă realizate practic și sunt doar în faza de concepție/proiectare.

Prima validare care trebuie efectuată este cea bazată pe compararea dintre rezultatele simulărilor modelului dezvoltat și cele ale *modelului analitic-aproximativ*. Nu este de așteptat să existe coincidență. Mai ales în cazul problemelor complicate, rezultatele pot fi destul de departe

cantitativ, totuși este așteptată o similitudine calitativă, iar abaterile să aibă o explicație plauzibilă.

Verificarea și validarea modelelor numerice este conceptual similară cu *validarea componentelor software* (<http://bigfoot.cs.upt.ro/~marius/curs/vvs/curs1.pdf>). Ca și în cazul programelor pentru calculator, și în cazul modelelor, **testarea** este o etapă esențială în dezvoltarea lor. Ea este procedura prin care se urmărește identificarea erorilor unui. Datorită complexității, testarea nu poate fi decât parțială, iar efectuarea ei poate pune în evidență erori, dar nu poate garanta absența lor. Testarea este o operație de managementul riscurilor și în orice caz de asigurarea calității. Din motive psihologice și de credibilitate, este recomandabil ca testarea să fie făcută de altcineva decât cel care a dezvoltat codul. Cazurile de test trebuie integrate într-o procedură de testare automată, care trebuie executată periodic, sau după orice modificare a codului, oricât de mică. Bateria de teste trebuie să îndeplinească următoarele *condiții*:

- Să aibă complexitate adecvată, de preferință progresivă;
- Să fie puternice, adică să aibă șanse mari să descopere erori, dacă acestea există;
- Să fie relevante și ușor de evaluat (să dea indicații clare dacă este eroare și eventual unde este aceasta, pentru a permite depanarea rapidă).
- Să fie convingătoare și credibile pentru un eventual utilizator.

Câteva concluzii amuzante, găsite pe net: Testarea software nu pare la fel de sclipitoare ca dezvoltarea, dar cere la fel de multă creativitate și experiență. A fi un bun testor seamănă cu a fi un bun doctorand, pe măsură ce înveți mai mult îți dai seama că ai tot mai multe de aflat.

Noi nu am reușit să lucrăm până acum integral profesionist, cel puțin din punctul de vedere al (auto)testării codului. Dacă vom scrie coduri noi, atunci ar fi un moment potrivit să învățăm să facem asta și să câpătăm deprinderile necesare (Andreea ar fi cel mai potrivit responsabil să ne ghideze în această activitate). La chamy, de exemplu, am pierdut o gramadă de timp, atunci când am trecut la probleme complexe, din cauza bug-urilor care au aparut pe parcurs (și care ar fi ieșit la iveală, dacă am fi făcut teste pe probleme simple, alese corespunzător). Pe parcurs le-am rezolvat, dar nici nu am avut resursa umană suficientă, implicată în dezvoltarea/validarea codurilor scrise (G.C.). Pe de altă parte, cred că deprinderile profesionale ar fi reușit să crească eficiența și în consecință să reușim să facem mai mult cu eforturi umane mai mici, deci și cu oameni mai puțini.

Deoarece probabil că vom dezvolta prototipuri tot în MATLAB, ar trebui studiate posibilitățile pe care le oferă acest mediu pentru testare. Iată câteva trimiteri utile:

http://en.wikipedia.org/wiki/Software_development_process

http://en.wikipedia.org/wiki/Software_testing

<http://en.wikipedia.org/wiki/Debugging>

http://en.wikipedia.org/wiki/Unit_testing

<http://en.wikipedia.org/wiki/XUnit>

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unit_testing_frameworks

<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/22846-matlab-xunit-test-framework> .

De altfel întreaga activitate dintr-un proiect științific cum este al nostru este similară cu activitatea de dezvoltarea programelor de calculator, în acord cu ingineria software (http://se.inf.ethz.ch/old/teaching/ws2006/0273/slides/outsourcing_20_requirements.pdf).

Etapale ciclului de viață ale unui program se regăsesc și într-un proiect științific: analiza cerințelor; proiectare; implementare; testare; valorificare:

- În prezent, prin *analiza stadiului actual*, identificăm problemele nerezolvate încă și care ar prezenta interes pentru proiectanții de dispozitive electronice, industria producătoare de circuite integrate și beneficiarii, utilizatori - clienții finali, adică facem o analiză a cerințelor, adoptând în final o decizie asupra problemei pe care ne propunem să o rezolvăm.
- În etapa de „*proiectare*” *software*, care este de fapt etapa „științifică” a proiectului dezvoltăm suportul teoretic și metodologic necesar rezolvării problemei formulate anterior.
- În etapa de *implementare* dezvoltăm metodologia informatică, identificăm dintre conceptele, tehnologiile, mediile și soluțiile (funcțiile de bibliotecă) existente care sunt cele mai potrivite pentru rezolvarea eficientă a problemei noastre, iar în final concepem structurile de date și algoritmi pentru realizarea componentelor software necesare.
- Atât în timpul implementării cât și după acesta pornim activitatea de *testare*, folosind diferite cazuri de test (benchmarks), inclusiv pe cele pe care le-am identificat din faza de analiză, pentru defini mai clar cerințele și așteptările.
- În etapa de *valorificare* ne concentrăm pe difuzarea cunoștințelor dezvoltate în proiect, prin publicarea de lucrări, comunicări la conferințe și discuții cu beneficiarii din industrie dar și redactarea de materiale didactice și de recunoaștere (cursuri, teze, dizertații) precum și conceperea de propuneri de noi proiecte științifice pentru a relua ciclul de viață al cercetării.

Aceste etape răspund pe rând la întrebările: Ce vrem să facem? Cum vrem să facem? Cum punem calculatorul să facă? Am reușit să facem ce am vrut? Cui folosește?

Este o activitate complexă în care etapele se suprapun, iar managementul calității și riscului sunt esențiale. Toate acestea se fac cu resurse umane care abia își dezvoltă competențele, dar tocmai paralelismul dintre procesul de învățare și cel de creație științifică, specific mediului universitar aduce peste tot în lume prospețimea, flexibilitatea și deschiderea spre cele mai avansate idei și concepte. Așa s-au obținut unele dintre cele mai inovative produse și tehnologii avansate.

Înainte de concluzii, vreau să vă spun răspunsul meu la întrebarea care ne frământă te toți. În ce va consta **originalitatea** rezultatelor noastre? Sunt multe posibilități, dar cea mai clară, să-i zicem „cireșa de pe tort”, cred că se numește optimizare RF MEMS ,sau mai larg rezolvare unor probleme inverse referitoare la aceste dispozitive. După extragerea modelului redus parametric, aceste probleme inverse îl vor putea folosi pe acesta ca model surogat. Iar dacă identificăm parametri, funcția obiectiv și constrângerile vom aplica diverși algoritmi, de data asta în paralel, dintre care și celebrul

- G. Ciuprina, D. Ioan, I. Munteanu, "Use of Intelligent Particle Swarm Optimization in Electromagnetics", *IEEE Trans.on Magnetics*, vol. 38, no. 2, pp. 1037-1040, 2002, citat de peste 200 ori!

pentru a găsi cel mai bun comutator, cel mai mic, cel mai rapid sau cel mai reactiv☺

9 Concluzii

În prezentul raport au fost prezentate etapele care trebuie urmate, pentru a realiza o modelare completă a dispozitivelor, în care câmpurile multifizice au un rol important, cum sunt și comutatoarele RF MEMS. La fiecare etapă s-a prezentat conținutul ei, de la ce date pornește și ce rezultate se așteaptă. Parcurgerea acestor etape, conform specificațiilor descrise în acest raport, pentru dispozitivele de interes ale proiectului ToMeMS ar duce în final la realizarea obiectivelor proiectului, din punctul de vedere al UPB/CIEAC/LMN. Trebuie să remarcăm că aceste specificații, care reprezintă doar cadrul formal în care se desfășoară cercetarea stabilesc formatele rapoartelor următoare, dar ele nu privesc de fapt aspectele inovatoare și creative. Aceste vor fi subiectul rapoartelor ce vor urma. Iar realizarea lor nu este deloc banală. Important este pentru moment că știm mai clar ce ne așteaptă.

Din cele prezentate, trebuie să remarcăm, că pentru proiectul nostru,**prima urgență este descrierea unor structuri de test** cu cea mai simplă geometrie (toy-benchmarks), de preferință unele care să aibă rezultate ale simulărilor prezentate în literatura de specialitate. Ele ar trebui să fie potrivite pentru simulări statice, tranzitorii și electromagnetice (RF). Modelarea conceptuală și matematică a acestor structuri ar duce la elaborarea unui cadru teoretic mai larg, care va putea fi extins și adaptat ulterior, în funcție de rezultatele abordărilor numerice. Alexandra a propus patru structuri de test în raportul ei postat pe intranet, dar vor trebui găsite în literatura și altele, și apoi definite de noi unele foarte simple, dacă se poate chiar cu soluții analitice.

Acesta este motivul pentru care propun ca următorul **raport intern**, ce va fi elaborat până la data de 22 ianuarie 2013, intitulat probabil *Modelarea cuplata electrostatica si mecanica a microcomutatoarelor*. Formularea problemei să aibă în afară de Introducere și Concluzii următoarele părți:

- 1. Modelarea conceptuală (geometrică și fizică) a comutatoarelor RF MEMS. Cea fizică este structurată astfel: MEC, ES, FD, MEC+ES, MEC+ES+FD, cu cuplaj slab și cu cuplaj tare (G.C.).
- 2. Aspecte privind modelarea matematică a dispozitivelor RF MEMS. În care prezentăm cât mai clar ce se dă și ce se cere.
- O anexa: Descrierea structurilor de test TOMEMS

și să fie redactat în acord cu specificațiile din acest document. În consecință, documentul nu ar trebui să conțină aspecte privind rezolvarea problemei, numerică sau analitică. Acestea vor constitui obiectul altor rapoarte ulterioare. Îmi închipui că autorii cheie ai acestui raport vor fi G. Ciuprina, S. Sorohan și eventual D. Isvoranu, la care se vor adăuga și alții, dacă vor avea ceva de adăugat.

Concluzia finală a acestui raport este că în tot efortul de cercetare, descris anterior, activitatea de modelare cu toate fațetele ei reprezintă firul central al cercetării, realizând coerența și unitatea ei.

10 Bibliografie

Acheson D. J. Elementary Fluid Dynamics, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, [Carte]. - [s.l.] : Oxford University Press, 1990.

Alexander H.-D. Cheng Daisy T. Cheng, Heritage and early history of the boundary element method [Articol]. - [s.l.] : <http://www.prismaingegneria.net/wp-content/uploads/downloads/2012/02/Cheng-A.H-Heritage-and-early-history-of-BEM.pdf>, 2005.

Anders Bondeson Thomas Rylander, Par Ingelström Computational Electromagnetics, Springer 2005 [Carte]. - [s.l.] : Springer, 2005.

Ang W. T. A Beginner's Course in Boundary Element Methods, Universal Publishers, Boca Raton, USA, 2007. [Carte]. - [s.l.] : <http://www.ntu.edu.sg/home/mwtang/bem2011.html>, 2007.

Anuja Apte SIMULATION OF PATCH ANTENNAS ON ARBITRARY DIELECTRIC SUBSTRATES - RWG BASIS FUNCTIONS [Raport]. - 2003.

Beer Gernot, Smith, Ian, Duenser, Christian The Boundary Element Method with Programming For Engineers and Scientists, [Carte]. - [s.l.] : Springer, 2008.

Bossavit A. The "scalar" Poincaré–Steklov operator and the "vector" one: algebraic structures which underlie their duality [Conferință] // In Fourth International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Moscow, 1990), pages 19–26.. - [s.l.] :

http://www.ddm.org/DD04/The_Scaler_Poincar_Steklov_Operator_and_the_Vector_One.pdf, 1990.

C. A. BREBBIA R. MAGUREANU The boundary element method for electromagnetic problems, [Articol] // Engineering Analysis, Vol. 4, . - 1987.

C.-F. Wang L.-W. Li, P.-S. Kooi, and M.-S. Leong, EFFICIENT CAPACITANCE COMPUTATION FOR THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES BASED ON ADAPTIVE INTEGRAL METHOD, [Carte]. - [s.l.] : <http://www.jpier.org/PIER/pier30/0003132.>, 2001. - Vol. Progress In Electromagnetics Research, PIER 30, 33–46.,

Chang David Fellow, IEEE, and Jian X. Zhen, Student Member, IEEE, Electromagnetic Modeling of Passive Circuit Elements in MMIC, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES. VOL. 40. NO. 9. SEPTEMBER 1992. - 1992.

Croswell Origin and development of the method of moments for field computation [Periodic]. - 1990.

Erik Jørgensen Higher-Order Integral Equation Methods in Computational Electromagnetics [Raport]. - [s.l.] : PhD, TU Danmark, 2003.

Eriksson Anders Mechanical Model of Electrostatically Actuated Shunt Switch [Conferință] // Proceedings of the COMSOL Multiphysics User's Conference. - Stockholm : [s.n.], 2005.

F. Hantila M. Maricar, I. Hantila, Procedura iterativa FEM-BEM pentru calculul campului electromagnetic in medii feromagnetice, [Conferință] // SNET 07, Bucuresti. - 2007.

F. Hantila M. Vasiliu, M. Maricar, A. Della Giacomo, Boundary Element Method for Multiply Connected Domains [Conferință] // JAPMED'03, Athena, 19-21 mai . - 2003.

Felipe Valdés Francesco P. Andriulli, Kristof Cools, and Eric Michielssen, High-order Quasi-Curl Conforming functions for Multiplicative Calderón Preconditioning of the EFI [Conferință]. - 2009.

Feng Ling Student Member, IEEE, Dan Jiao, and Jian-Ming Jin, Senior Member, IEEE, Efficient Electromagnetic Modeling of Microstrip Structures in Multilayer Media, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 47, NO. 9, . - 1999.

Gilbert Strang George Fix An Analysis of the Finite Element Method (1973, 2008) [Carte]. - 1973.

Gulbin Dural Member, IEEE, and M. I. Aksun, Member, IEEE, Closed-Form Green' s Functions for General Sources and Stratified Media, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 43, NO. 7, JULY 1995 1545. - 1995.

Harrington R.F. Field Computation by Moment Methods [Carte]. - [s.l.] : IEEE Press, 1993.

Haus Hermann A., and James R. Melcher Electromagnetic Fields and Energy. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall,. [Carte]. - 1989.

Hiptmair BEM for Eddy Currents computation [Conferință]. - 2007.

Holman J.P. Heat Transfer; 7th ed ; [Carte]. - [s.l.] : McGraw-Hill, 1990.

Hussein K. F. A. , FAST COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR EFIE APPLIED TO ARBITRARILY-SHAPED CONDUCTING SURFACES, [Conferință] // Progress In Electromagnetics Research, PIER 68, 339–357, . - 2007.

I.R. Ciric F.I. Hantila, M. Maricar, I A New Vector Potential BEM for Magnetic Fields Bounded by Perfect Conductors [Articol] // IEEE Trans. on MAG 2011. - 2011.

Ioan Daniel Metoda Elementului Finit pentru Modelarea Electromagnetică [Carte]. - 2012.

IOAN Daniel Metoda Elementului Finit pentru Modelarea Electromagnetică [Carte]. - 2012.

Ioan Daniel Modelarea dispozitivelor electromagnetice,
<http://www.lmn.pub.ro/~daniel/cursmde.pdf> [Carte]. - 2000.

Ioan Daniel ș.a. Metode numerice în ingineria electrică, E [Carte]. - [s.l.] : Editura Matrix-Rom, București,, 1989.

J. M. Song C. C. Lu, W. C. Chew, and S. W. J. M. Song, C. C. Lu, W. C. Chew, and S. W. Let Fast Illinois Solver Code (FISC) [Periodic]. - 1998.

J. M. Taboada M. G. Araujo, J. M. Bertolo, L. Landesa, MLFMA-FFT PARALLEL ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF LARGE-SCALE PROBLEMS IN ELECTROMAGNETICS (INVITED PAPER), [Periodic]. - 2010.

J.R. Mosig Arbitrarily Shaped Microstrip Structures and Their Analysis with a Mixed Potential Integral Equation, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 36, NO. 2, FEBRUARY 1988. - 1988.

Jiming Song Member, IEEE, Cai-Cheng Lu, Member, IEEE, and Weng Cho Chew, Fellow, IEEE , Multilevel Fast Multipole Algorithm for Electromagnetic Scattering by Large Complex

Objects, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 45, NO. 10,. - 1997.

JIMING SONG The Fast Illinois Solver Code: Requirements and Scaling Properties, [Periodic]. - 1998.

Jin-Fa Lee Senior Member, IEEE, Robert Lee, Senior Member, IEEE, and Robert J. Burkholder, Senior Member, IEEE, Loop Star Basis Functions and a Robust Preconditioner for EFIE Scattering Problems, [Conferință] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 51, NO 8. - 2003.

Joel R. Phillips and Jacob K. White Associate Member, IEEE, A Precorrected-FFT Method for Electrostatic Analysis of Complicated 3-D Structures, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTER-AIDED DESIGN OF INTEGRATED CIRCUITS AND SYSTEMS, VOL. 16, NO. 10, OCTOBER 1. - 1997.

John L. Volakis Kubilay Sertel Integral Equation Methods For Electromagnetics, [Carte]. - [s.l.] : Scitech, 2012.

John S. Asvestas Stephen Yankovich, Oliver E. Allen, CALCULATION OF IMPEDANCE MATRIX INNER INTEGRAL TO PRESCRIBED PRECISION [Raport]. - 2008.

Jun-Sheng Zhao Member, IEEE, and Weng Cho Chew, Fellow, IEEE, Integral Equation Solution of Maxwell's equations from Zero Frequency to Microwave Frequencies [Conferință] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 48, NO. 10, OCTOBER . - 2000.

Kalyan C. Donepudi Jiming Song, Senior Member, IEEE, Jian-Ming Jin, Senior Member, IEEE, Gang Kang, and Weng Cho Chew, Fellow, IEEE, A Novel Implementation of Multilevel Fast Multipole Algorithm for Higher Order Galerkin's Method, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 48, NO. 8. - 2000.

Kezhong Zhao Marinos N. Vouvakis, and Jin-Fa Lee, Fellow, IEEE, Solving Electromagnetic Problems Using a Novel Symmetric FEM-BEM Approach [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 42, NO. 4, APRIL 583. - 2006 .

M. I. Aksun Member, IEEE, and Raj Mittra, Fellow, IEEE, Choices of Expansion and Testing Functions for the Method of Moments Applied to a Class of Electromagnetic Problems, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 41, NO. 3, MARCH . - 1993.

Mark VRANCKEN FULL WAVE INTEGRAL EQUATION BASED ELECTROMAGNETIC MODELLING OF 3D METALLIC STRUCTURES IN PLANAR STRATIFIED MEDIA, [Raport]. - [s.l.] : PhD, Leuven, 2002.

Massoud FastHenry [Articol]. - 1998.

Meijs N.P. van der SPACE FOR SUBSTRATE RESISTANCE EXTRACTION [Articol]. - 2003.

Michael Paulus Phillipe Gay-Balmaz, and Olivier J. F. Martin¹, Accurate and efficient computation of the Green's tensor for stratified media, [Articol] // PHYSICAL REVIEW E VOLUME 62, NUMBER 4 OCTOBER. - 2000.

Özgür Ergül Student Member, IEEE, and Levent Gürel, Fellow, IEEE, Comparison of Integral-Equation Formulations for the Fast and Accurate Solution of Scattering Problems Involving Dielectric Objects with the Multilevel Fast Multipole Algorithm, [Articol] // 176 IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 57, NO. 1, JANUARY . - 2009.

Özgür Ergül Student Member, IEEE, and Levent Gürel, Senior Member, IEEE, The Use of Curl-Conforming Basis Functions for the Magnetic-Field Integral Equation, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 54, NO. 7, JULY . - 2006.

Rainer Bunger Member, IEEE, and Fritz Arndt, Fellow, IEEE Efficient MPIE Approach for the Analysis of Three-Dimensional Microstrip Structures in Layered Media, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES, VOL. 45, NO. 8 . - 1997.

Rao SM Wilton DR, Glisson AW Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. [Articol] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation 1982; AP-30:409–418.

Rao, Sakar, Numerical sSolution in TD IE for Arbitrary Shaped Conductor/Dielectric, I [Articol] // EEE AP dec, . - 2002.

Rebeiz Gabriel M. RF MEMS: Theory, Design, and Technology [Carte]. - [s.l.] : John Wiley & Sons, 2003.

Sanjay Velamparambil Jiming Song Weng Cho Chew, On the Parallelization of Electrodynamic Multilevel Fast Multipole Method on Distributed Memory Computers, [Conferință]. - 1999.

Sanjay Velamparambil Weng Cho Chew, and Jiming Song, 10 Million Unknowns: Is It That Big? [Periodic]. - 2003.

Sharad Kapur David E. Long ICE3: A Fast Integral Equation Solver for Efficient 3-Dimensional Extraction, [Conferință] // ICCAD . - 1997.

Sharad Kapur David E. Long, LargeScale FullWave Simulation [Conferință]. - [s.l.] : ACM, 2004.

Stefan Kurz Joachim Fetzer, Gunther Lehner, An improved algorithm for the BEM-FEM-coupling method using domain decomposition, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 31, NO. 3, MAY 1995. - 1995.

T. Preisner W. Mathis A Three Dimensional FEM-BEM Approach for the Simulation of Magnetic Force Microscopes, [Conferință]. - [s.l.] : PIERS ONLINE, VOL. 5, NO. 3, 281, 2009.

Tausch Jacob White Second kind Integral Formulation – Capacitive [Articol]. - [s.l.] : <http://faculty.smu.edu/tausch/Papers/advCM.pdf>, 1997.

Tie Jun Cui Senior Member, IEEE, Weng Cho Chew, Fellow, IEEE, Guang Chen, and Efficient MLFMA, RPFMA, and FAFFA Algorithms for EM Scattering by Very Large Structures, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 52, NO. 3, - 2004.

Tie Jun Cui Senior Member, IEEE, Weng Cho Chew, Fellow, IEEE, Guang Chen, and Tie Jun Cui, Senior Member, IEEE, Weng Cho Chew, Fellow, IEEE, Guang Chen, and [Articol].

Vikram Jandhyala Yong Wang, Dipanjan Gope, and Richard Shi, Coupled Electromagnetic-Circuit Simulation of Arbitrarily-Shaped Conducting Structures using Triangular Meshes, [Conferință]. - 2002.

W. Cai Yijun Yu and X. C. Yuan, Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering, [Conferință]. - 2001.

Weng Cho Chew Fellow, IEEE, Jian-Ming Jin, Senior Member, IEEE, Cai-Cheng Lu, Member IEEE, Eric Michielssen, Member, IEEE, and Jiming M. Song, Member, IEEE Fast Solution Methods in ElectromagneticsInvited Paper, [Conferință]. - 1997.

Weng Cho Chew Fellow, IEEE, Jian-Ming Jin, Senior Member, IEEE, Cai-Cheng Lu, Member IEEE, Eric Michielssen, Member, IEEE, and Jiming M. Song, Member, IEEE Fast Solution Methods in ElectromagneticsInvited Paper, [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON ANTENNAS AND PROPAGATION, VOL. 45, NO. 3. - 1997.

Wolfgang M. Rucker Robert Hoschek and Kurt R. Richter Various BEM Formulations For Calculating Eddy Currents In Terms Of Field Variables [Articol] // IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS. VOL 31. NO 3 . MAY. - 1995.

Yang Wang THE FAST MULTIPOLE METHOD FOR 2D COULOMBIC PROBLEMS:ANALYSIS, IMPLEMENTATION AND VISUALIZATION [Raport]. - [s.l.] : Master of Science, , 2005.

Younis Modeling and Simulation of Microelectromechanical Systems in Multi-Physics Fields [Articol]. - 2004.

Zhenhai Zhu Ben Song and Jacob White, pfft++ – A general and extensible fast integral equation solver based on a precorrected FFT algorithm [Conferință]. - 2004.

Zhu-PhD Efficient Integral Equation Based Algorithms for Parasitic Extraction of Interconnects with Smooth or Rough Surface, [Raport]. - [s.l.] : MIT, 2004.

Zienkiewicz O. C. The finite element method: its basis and fundamentals [Carte]. - 2005.

***Notă:** Aproape toate lucrările folosite în acest raport au fost găsite liber pe net și doar două cu ieeexplore. Dacă mai ținem cont și de calitatea excepțională a articolelor din Wikipedia, care au fost citate, rezultă în mod evident, că la ora actuală, Internetul este un tezaur bibliografic inestimabil, pentru activitatea științifică. Google și Scholar știu enorm de multe. Trebuie doar să învățați să-i folosiți cum trebuie. Informație este din abundență, dar ce face mai deștepți, este ce înțelegem noi din ea.*