Électromagnétisme et éléments finis, Vol. 1

(ouvrage collectif sous la direction de Gérard Meunier)

Hermès–Lavoisier (Paris), 2003

Chapitre 1

Géométrie de l'électromagnétisme et éléments finis

1.1. Introduction

Souvent, dans l'histoire des sciences, une notion que l'on croyait dépassée semble revenir en usage, mais sous un aspect renouvelé. La méthode des différences finies, supplantée par celle des éléments finis (MEF) vers la fin des années soixante, en est un exemple. Elle n'a jamais vraiment disparu, en fait: ce qu'on appelle FDTD, pour "finite differences in time domain", ou schéma de Yee [Ye], qui est encore de loin la méthode la plus populaire pour les problèmes de propagation d'onde [Tf], n'est autre que la méthode des différences finies sur deux réseaux en dualité, décalés l'un par rapport à l'autre. Mais dans les applications à basse fréquence, où les maillages réguliers et uniformes étaient très tôt apparus comme une contrainte insupportable, l'introduction des éléments finis, sous l'impulsion de P.P. Silvester notamment [SC, SF], fut comme une libération, et fit de la méthode de Galerkine, ou approche variationnelle, le soubassement théorique de l'électromagnétisme numérique, un passage obligé pour qui avait ou aurait un jour à se servir d'un ordinateur pour résoudre les équations de Maxwell ou l'une de leurs déclinaisons.

Beaucoup de ceux qui eurent à enseigner ces techniques souffrirent du décalage entre le niveau mathématique — excessif — requis des étudiants pour assimiler ces

---

Chapitre rédigé par Alain BOSSAVIT

bases théoriques, et la réalité du terrain — qu'il n'est pas nécessaire de décrire. Que le calcul des champs, avec ses références intimidantes à l'analyse fonctionnelle (dérivée de Fréchet, espaces de Sobolev, distributions, ...) puisse ainsi apparaître comme beaucoup plus difficile que le calcul des circuits, semblait une anomalie.

C'en était une. Une nouvelle approche des méthodes numériques "à maillage" se précise aujourd'hui, où différences finies, éléments finis, "volumes finis", "intégration finie" [We], etc., ne s'opposent plus, mais constituent les diverses facettes de quelque chose que l'on pourrait appeler[1] "différences finies généralisées": Les contraintes d'uniformité du maillage y sont atténuées, et l'on peut suivre à loisir les surfaces matérielles, réduire le grain du maillage dans les zones critiques telles que les entrefers, tout comme dans la MEF. Mais le passage par une formulation variationnelle, ou "formulation faible" préalable du problème, n'y est plus une obligation. On peut arriver aux équations "discrètes", celles que l'ordinateur est capable de prendre en charge, par une démarche directe, fondée sur de simples considérations de conservation des charges, flux, courants, démarche d'autant plus naturelle qu'elle fait apparaître ces équations *comme des équations de circuits*, et tire ainsi parti de la familiarité des étudiants avec les lois de Kirchhoff et la notion de circuit équivalent.

Les éléments finis seraient-ils donc devenus inutiles? Loin de là. Mais ils sont, dans cette perspective, affaire de professionnels: ceux qui conçoivent les méthodes, analysent leur qualité en termes de précision, d'erreur par rapport à la solution exacte des équations dites "continues", de vitesse de convergence vers cette solution lorsqu'on raffine le maillage. Rien de tout cela n'est possible — à moins de revenir aux maillages uniformes d'autrefois — sans éléments finis. Mais le programmeur, l'utilisateur de code, peut sans les connaître, et en un minimum de temps, être instruit de la façon dont les équations discrètes sont formées.

Cette formation, ou "assemblage" des équations, en différences finies généralisées, a peu à voir (et en cela non plus il n'y a pas simple retour en arrière) avec les développements de Taylor locaux par lesquels on transformait autrefois une équation aux dérivées partielles en équation aux différences. L'idée essentielle est que les équations de Maxwell expriment la *conservation*, en temps et espace, de certaines entités, déjà évoquées, et donc que c'est sous *forme intégrale* qu'elles doivent être formulées. La discrétisation s'obtient ensuite, de façon quasi automatique, en restreignant ces exigences de conservation à certains volumes, certaines surfaces de l'espace — ceux et celles définis par le maillage adopté. Intégration, plutôt que différentiation.

---

1. Le titre même de [CW] (dont je ne connais pas le contenu) montre que l'idée est dans l'air. Voir aussi [Ma], et [He].

Ce point de vue, par conséquent, suppose une présentation appropriée des équations de Maxwell, où l'on met moins l'accent sur l'analyse vectorielle, les opérateurs, grad, div, rot, etc., que sur les deux lois fondamentales, Faraday et Ampère, exprimées sous forme intégrale. On insistera beaucoup sur le fait[2] que ces lois peuvent se formuler sans aucune "métrique" de l'espace (ni produit scalaire, ni notion de distance ou d'orthogonalité ne sont nécessaires), d'où la tonalité "géométrique" de ce chapitre", et l'abondance des rappels nécessaires auxquels on va procéder ci-dessous. L'effort de lecture que cela implique devrait être compensé par la rapidité avec laquelle, une fois munis de ce bagage, on pourra construire les schémas numériques.

Les éléments finis qui interviennent ensuite, dans l'analyse d'erreur de ces méthodes, ne peuvent être sans spécificités: Ils doivent, comme tous les éléments finis, être à même de *reconstituer un champ à partir d'un nombre fini de degrés de liberté*, mais la nature des degrés de liberté (DdL), flux, circulations, etc., qui les attribue à *d'autres éléments géométriques du maillage que les nœuds*, rend les éléments nodaux classiques inadaptés, à moins que le champ ne soit scalaire.[3] Une tradition bien établie classe les éléments finis selon la nature des degrés de liberté. C'est ainsi que l'on a des éléments

– *de Lagrange*, lorsque les DdL sont des *valeurs* ponctuelles de la fonction à reconstituer,

– *d'Hermite*, lorsque les DdL peuvent aussi être des valeurs de certaines *dérivées* de la fonction à reconstituer.

Les éléments dont nous allons parler ici reconstituent une *forme différentielle* (concept qu'on va développer, et qui généralise la notion de fonction scalaire ou vectorielle) à partir de DdL qui sont certaines *intégrales* de cette forme, sur les arêtes, les facettes, etc. Ainsi d'importance comparable à ceux de Lagrange et d'Hermite, ils ne sauraient porter un nom moins illustre, et leur inventeur [Wh] est effectivement un des grands géomètres du siècle passé, Hassler Whitney (†1989). Ce chapitre sera donc consacré aux éléments

– *de Whitney*, dont les DdL sont des *intégrales* de la forme différentielle à reconstituer.

---

2. Très important lorsqu'on aborde la question du calcul des *forces*, qui est au delà des ambitions de ce chapitre.

3. En dimension 2, on peut toujours s'arranger pour n'avoir à calculer que des champs scalaires, et beaucoup de modélisations peuvent se faire utilement en dimension 2. L'importance des éléments finis nodaux, scalaires, traditionnels n'est donc en rien diminuée par cette remarque.

1.2. Cadre géométrique

La physique classique s'expose dans un cadre géométrique familier à tous, l'espace-temps newtonien, c'est-à-dire, mathématiquement parlant, le produit de l'espace euclidien à trois dimensions par la droite temporelle. Si familier que l'on en oublie souvent qu'il s'agit d'une *construction*, plus ou moins adéquate pour ce que l'on veut en faire — énoncer les lois de la physique — et donc sujette à l'examen critique. La Relativité est venue nous le rappeler, et les liens étroits entre Relativité et Électromagnétisme sont bien connus. Pourtant ce n'est pas à cette remise en question des notions d'espace et de temps que l'on va se livrer ici, d'abord parce que ce n'est pas le lieu, et ensuite parce qu'il ne sera jamais question de corps en mouvement dans ce Chapitre. Il est donc légitime de traiter séparément espace et temps, que nous considérons comme des données de l'expérience. Ce que nous voulons faire ici est une critique de la façon dont l'espace lui-même est mathématiquement décrit, une *déconstruction* de la structure mathématique "Espace euclidien à trois dimensions", symbole "E_3", que chacun connaît et tient peut-être (mais à tort) pour le cadre obligé de la physique classique.

Cette structure, en effet, est trop riche à certains égards. Comme on va l'expliquer plus loin, E_3 se compose d'un espace affine à trois dimensions (on revient là-dessus tout de suite), muni d'une métrique (notion de distance, d'angle, etc.) et d'une orientation (distinction entre trièdres droits et gauches). Sur ce dernier point, il est clair que les lois physiques ne peuvent pas dépendre d'une *convention*, arbitraire, celle par laquelle nous classons les tire-bouchons, ou les escargots, en deux catégories. Or on sait bien que le produit vectoriel, et le rotationnel, qui jouent un rôle essentiel en électromagnétisme, dépendent de cette orientation. Il y a donc là un problème, qui suffirait à justifier ce qui suit. Mais on verra que même la métrique n'est pas nécessaire à, par exemple, l'expression de la loi de Faraday, $\partial_t B + \mathrm{rot}\, E = 0$, malgré les apparences. On ne voit pas bien, d'ailleurs, en quoi la longueur du barreau de platine de Sèvres pourrait affecter les électrons. La métrique n'intervient que dans l'expression des lois de comportement (telles que $B = \mu H$, etc.), et reconnaître ce fait éclairera certains aspects de l'analyse d'erreurs, le moment venu.

Quelques mots sur les notations. En dehors de leur utilisation standard pour souligner tel ou tel mot, l'emploi des *italiques* signale qu'une *définition* est en train d'être donnée, explicitement ou non. (Dans les légendes de figures, composées ici en italiques, la convention est inversée.) Une fonction f définie sur tout ou partie d'un ensemble X et prenant ses valeurs dans un ensemble Y sera dite "de *type* $X \to Y$". Son *domaine*, $\mathrm{dom}(f)$, est l'ensemble des x de X pour lesquels $f(x)$ existe. (On ne fera pas de distinction entre "application" et "fonction".) Le *codomaine* $\mathrm{cod}(f)$ est l'image de X par f. L'expression $\sup\{x \in X : f(x)\}$ signifie "la borne

supérieure des valeurs de $f(x)$ lorsque x parcourt l'ensemble X". (On pourra aussi bien écrire $\sup\{f(x) : x \in X\}$, avec le même sens.) On sera attentif à ne pas confondre les applications linéaires (appelées aussi opérateurs, pour la variété) avec les matrices qui les représentent, une fois choisie une base. En règle générale, si l'application est A, la matrice est $\mathbf{A}$, en caractères gras. Ce style servira aussi à repérer les objets de dimension finie obtenus par discrétisation, tels que tableaux de degrés de liberté, matrices dites "de rigidité", etc. Le produit vectoriel, en rupture (justifiée, à mon avis, cf. Note 33) avec la tradition française, sera noté avec la croix de Gibbs $\times$, et non avec le signe $\wedge$, réservé pour un autre emploi ("produit extérieur").

1.2.1. *Espace vectoriels, espace affines*

Expliquer ce qu'est un espace vectoriel, de nos jours, est sans doute superflu. On peine à imaginer comment le maniement de cette structure mathématique pouvait passer pour une audace moderniste il y a 50 ans [Na]. Curieusement, la notion très voisine d'espace affine reste négligée. Au risque de paraître ridicule dans 50 ans, on va y consacrer l'espace nécessaire.

1.2.1.1. *Espaces vectoriels*

Un espace vectoriel réel est un ensemble d'objets appelés vecteurs, que l'on peut ajouter les uns aux autres, et multiplier par un nombre réel. Ils forment un *groupe* par rapport à l'opération d'addition: $u + (v + w) = (u + v) + w$, existence d'un vecteur particulier, 0, tel que $v + 0 = v$, et pour tout v d'un vecteur $-v$ tel que $v + (-v) = 0$. Ce groupe est *commutatif* ($u + v = v + u$). De plus, à tout couple $\{v, \rho\}$ formé d'un vecteur et d'un nombre réel correspond un vecteur ρv, avec les propriétés de linéarité, $\rho v = v$ si $\rho = 1$, $\rho(u + v) = \rho u + \rho v$, etc., qu'on se passera de détailler.

Un espace vectoriel est donc un ensemble d'objets *plus* un système d'opérations sur eux, autrement dit un ensemble "structuré" par ces opérations. Comme toujours en mathématiques dans ce cas, on porte une attention particulière aux applications qui préservent cette structure, c'est-à-dire en l'occurrence, aux applications L d'un espace vectoriel V dans un autre, W, telles que $L(v + v') = L(v) + L(v')$ et $L(\rho v) = \rho L(v)$, dites *linéaires*. Si L est biunivoque (dans ce cas, son inverse L^{-1} est linéaire de W vers V), on dit que L est un *isomorphisme*[4] d'espaces vectoriels.

---

4. Ce vocabulaire est universel. Les ensembles structurés selon un modèle commun, tous les groupes par exemple, ou tous les espaces vectoriels, tous les espaces métriques, etc., forment ce qu'on appelle une *catégorie* [Ge, ML, LH], et chacun d'eux est un *objet* de

Dans tout ce qui précède, on peut remplacer le corps des réels $\mathbb{R}$ par un autre, le corps $\mathbb{C}$ des complexes le plus souvent, obtenant alors un espace vectoriel "complexe", ou "sur les complexes". Il est plus intéressant en fait d'examiner l'opération de *complexification*, qui associe à un espace vectoriel réel V un espace complexe V^c, dit son complexifié: Prendre le produit cartésien de V par lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des paires ordonnées de vecteurs $\{v_R, v_I\}$, définir l'addition comme $\{v_R, v_I\} + \{v'_R, v'_I\} = \{v_R + v'_R, v_I + v'_I\}$, et la multiplication par le complexe $\alpha + i\beta$ comme $(\alpha + i\beta)\{v_R, v_I\} = \{\alpha v_R - \beta v_I, \beta v_R + \alpha v_I\}$. Difficile à mémoriser, mais la convention suivante aide: écrire un élément $v = \{v_R, v_I\}$ du complexifié sous la forme $v = v_R + iv_I$, et appliquer les régles de l'algèbre, avec $i^2 = -1$, à toutes les expressions rencontrées. Le *conjugué* de v est $^*v = v_R - iv_I$. Noter que V s'identifie à l'ensemble des "vecteurs réels" de V^c, c'est-à-dire des couples de V^c de la forme $\{v, 0\}$, où v parcourt V, caractérisés par $^*v = v$.

1.2.1.2. *Bases, dimensions, compléments*

Une partie A de V *engendre* un *sous-espace vectoriel* de V, formé de toutes les combinaisons linéaires[5] $\rho_1 v_1 + ... + \rho_k v_k$ de vecteurs appartenant à A. Il est facile de vérifier que l'ensemble de ces sommes, noté $^v A$, est bien un espace vectoriel, et pas forcément V tout entier, d'où les termes employés. L'intersection $U \cap W$ de deux sous-espaces U et W étant un sous-espace, le sous-espace engendré par A est "le plus petit" sous-espace contenant A, c'est-à-dire l'intersection de tous ceux-là. Une partie B de V constitue une *base* si elle engendre V et si elle est *minimale* à cet égard, en ce sens qu'aucune partie de B autre que B elle-même n'engendre V. (Le vecteur 0, par conséquent, ne peut pas appartenir à B, à moins que B ne se réduise à ce seul vecteur. Dans ce cas, V aussi ne contient que le vecteur 0, ce qu'on écrit $V = \{0\}$.) Les vecteurs d'une partie A de V sont *linéairement indépendants* si A forme une base du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. L'espace V est *de dimension finie* s'il admet une base finie, $B = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ disons. Il est facile de voir alors que toute autre base compte aussi n vecteurs, et l'entier n s'appelle la *dimension* de V. Noter que $n = 0$ n'est pas exclu: c'est le cas si $V = \{0\}$.

---

cette catégorie. Les applications $f : X \to Y$, où X et Y sont des objets de la même catégorie, s'appellent *morphismes* lorsqu'elle préservent la structure, comme dans l'exemple ci-dessus des applications linéaires. S'il y a correspondance biunivoque, f est un *isomorphisme*. C'est un *automorphisme* si $X = Y$. Par exemple, la multiplication par ρ dans un espace vectoriel X en est un. Mais pas la translation par t, c'est-à-dire l'opération $v \to v + t$, où t est un vecteur fixe. (Voyez-vous pourquoi?)

5. Finies — forcément: nous n'avons rien à ce stade qui permette de parler de somme d'une *série* (infinie) de termes.

L'espace est de dimension infinie s'il n'y a pas de base finie. De tels espaces sont parfaitement banals: L'ensemble de toutes les suites de réels $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ a une structure (évidente) d'espace vectoriel, et il est de dimension infinie. L'ensemble de tous les "champs scalaires" ou de tous les "champs vectoriels" dans une région donnée sont d'autres exemples, plus proches de ce que l'on va effectivement rencontrer plus loin.

Si dans un espace vectoriel V de dimension n on fait le choix d'une base $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$, tout v de V s'écrit $v = v^1w_1 + ... + v^nw_n$, et d'une seule façon possible, ce qui permet de mettre en correspondance biunivoque v et le vecteur $\mathbf{v}$ de ses composantes, $\mathbf{v} = \{v^1, ..., v^n\}$. Il s'agit là d'un élément de $\mathbb{R}^n$, le produit cartésien de $\mathbb{R}$ par lui-même n fois, et puisque $\mathbb{R}^n$ est bien un espace vectoriel, comme on le vérifie immédiatement, le mot "vecteur" pour $\mathbf{v}$ est tout à fait légal. Mais on ne doit pas confondre v avec $\mathbf{v}$, car la correspondance $\mathrm{comp}_w : V \to \mathbb{R}^n$ définie par $\mathrm{comp}_w(v) = \mathbf{v}$ dépend du choix d'une base, et n'est donc pas, comme on dit, "canonique". C'est toutefois un isomorphisme, ce qui montre que tous les espaces vectoriels de même dimension sont bâtis sur le même modèle. Cela nous autorise à parler de "l'espace vectoriel", au singulier, "de dimension n," et à lui réserver une notation (on l'appellera ici V_n).[6]

Une base d'un espace V réel est aussi une base pour son complexifié V^c: En effet, si $v = v_R + iv_I$, on a $v_R = \sum_k v_R^k w_k$ et $v_I = \sum_k v_I^k w_k$, d'où $v = \sum_k (v_R^k + iv_I^k)w_k$. Bien sûr, il y a d'autres bases, pouvant contenir des vecteurs "complexes", c'est-à-dire non réels, au sens ci-dessus.

La dimension d'un sous-espace est bien sûr le nombre minimal de vecteurs pouvant l'engendrer, et 0 s'il se réduit au vecteur 0. L'image dans W d'une application linéaire $L : V \to W$ est un sous-espace de W, dont la dimension s'appelle le *rang* de L. Ce rang ne peut dépasser la dimension de V ni celle de W, et atteint l'une et l'autre si L est, respectivement, injective ou surjective.

REMARQUE.– Petite énigme: (1°) Un espace réel V et son complexifié V^c ont mêmes dimensions. (2°) La dimension d'un sous-espace *strict* (on dit plutôt *propre),* c'est-à-dire ne coïncidant pas avec l'espace considéré, est strictement inférieure à la

---

6. Il importe de bien comprendre ce qui se passe ici: Tous les espaces vectoriels entre lesquels existe un isomorphisme, c'est-à-dire tous ceux de même dimension, sont considérés comme équivalents et regroupés dans une classe d'équivalence, à laquelle on attribue l'étiquette V_n, où n est la dimension. Dans cette classe, il y a un représentant particulier, à savoir $\mathbb{R}^n$. Mais rien n'oblige à lui faire un sort en "travaillant en composantes", c'est-à-dire en se ramenant à $\mathbb{R}^n$ chaque fois que des vecteurs de dimension n interviennent dans une question de physique. (C'est rarement une bonne idée.)

dimension de celui-ci. (3°) Les vecteurs réels forment un sous-espace strict de V^c, donc la dimension de V est inférieure (de moitié, pourrait-on croire) à celle de son complexifié. EXERCICE 1: Où est l'erreur? ◊

Deux sous-espaces U et W de V sont *complémentaires* si tout v de V s'écrit de façon unique $v = u + w$, avec u dans U et w dans W. "Unique" implique $U \cap W = \{0\}$. On peut noter cela $V = U + W$, à condition d'être bien clair sur le sens de "+".[7] Les applications $v \to u$ et $v \to w$ de V sur U et W s'appellent *projections.* Le seul complémentaire possible pour $\{0\}$ est V lui-même, et vice-versa, mais en dehors de ces cas, U admet une infinité de complémentaires (Fig. 1). (On les construit en "complétant" une base de U par autant de vecteurs indépendants hors de U qu'il en faut pour faire une base de V.) Un exemple de complémentarité en dimension infinie est la "décomposition de Helmholtz" $v = \text{rot } a + \text{grad } \varphi$ d'un champ de vecteurs v.[8] Là, W est l'espace des gradients, dans une région donnée,[9] et U celui des champs "solénoïdaux", i.e., à divergence nulle. Le fait qu'on puisse aussi écrire $u = \text{rot } a' + \mu \text{ grad } \varphi'$, où μ est une fonction positive non constante, montre que W peut être différent, pour le même U, dans ce type de décomposition, tout comme en dimension finie.

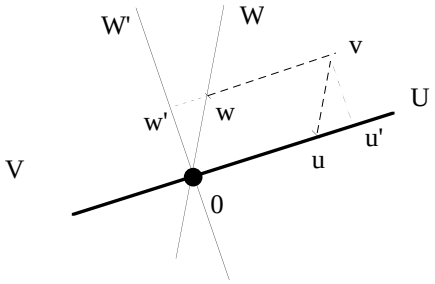

Figure 1. *Sous-espaces complémentaires:* $V = U + W$, *et* $V = U + W'$. *Remarquer que l'expression "projection sur* U" *n'a de sens que si l'on précise* W. *Une telle projection,* p *disons, est idempotente,* i.e., $p(pv) = pv$. *(*EXERCICE 2: *Prouver la réciproque.)*

---

7. L'emploi du symbole $\oplus$, en général associé à l'orthogonalité, est vivement déconseillé dans ce contexte: Encore une fois, nous n'avons aucune structure ici permettant de parler d'orthogonalité. $U + V$ s'appelle la *somme* de U et V. L'adjectif "supplémentaire" est parfois préféré, en français, à "complémentaire".

8. L'unicité, ici, est celle de rot a et grad φ, pas celle de a ou φ.

9. Pourvu qu'elle soit de forme simple. Autrement, la décomposition de Helmholtz soulève des questions difficiles de topologie, qu'on n'abordera pas ici.

1.2.1.3. *Volumes*

Qui sait ce qu'est un déterminant sait ce qu'est un volume:

DÉFINITION.–. *Un* p-volume, *sur* V, *est une application* $\{v_1, ..., v_p\} \to \text{vol}(v_1, ..., v_p)$ *à valeurs réelles, linéaire par rapport à chaque facteur,* alternée, *en ce sens que* $\text{vol}(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_p) = -\text{vol}(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_p)$, et non-dégénérée, *i.e., à valeurs non nulles si les* v_i *sont indépendants.*

Exemple: Ayant dressé le tableau rectangulaire des composantes des v_i, dans une base donnée, et prenant le déterminant d'une sous-matrice carrée d'ordre p, on obtient une application de type $V \times ... \times V \to \mathbb{R}$ qui est un p-volume. (Une combinaison linéaire de telles applications, pour des sous-matrices différentes, est encore un p-volume.) Mais on peut parler de volume sans qu'il y ait de base, de même qu'une application linéaire existe en soi, indépendamment de toute base ou elle se *représenterait* par une matrice. Un déterminant, par contre, en tant qu'application de type $V \times ... \times V \to \mathbb{R}$, est toujours relatif à une base.

REMARQUE.– Plus loin, nous parlerons du déterminant det(L) d'une application linéaire L de V dans lui-même. Ce n'est pas contradictoire, car dans ce cas, on se sert de la *même* base pour représenter les vecteurs v et leurs images Lv. La matrice carrée **L** qui représente L a alors le même déterminant quelle que soit la base choisie. (Si L se représente par **L** dans une base, elle se représente par $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{L}\,\mathbf{S}$ dans une autre,[10] et $\det(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{L}\,\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^{-1})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{S}) = \det(\mathbf{L})$.) ◊

Tout p-volume est identiquement nul pour $p > n$, la dimension de V. Le cas $p = n$ est intéressant: Choisissons une base, ce qui définit un n-volume particulier, à savoir le déterminant. Tout autre n-volume est alors multiple de celui-là. Deux n-volumes ne diffèrent donc que par un facteur multiplicatif. Le couple $\{V_n, \text{vol}\}$, où vol est l'un des volumes possibles sur V_n, forme une structure que l'on appelle parfois espace *jaugé* [Ba]. Le cas $p = 1$ est important aussi: Un 1-volume est une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un élément du dual de $\mathbb{R}$. On préfère alors parler de *covecteur.*[11]

EXERCICE 3. L'espace des n-volumes de V est donc lui-même un espace vectoriel, de dimension 1. Quelle est la dimension de l'espace des p-volumes?

---

10. **S** est la *matrice de passage*, obtenue en mettant en colonnes les composantes des nouveaux vecteurs de base.

11. On utilise aussi "p-covecteur", comme synonyme de "p-volume".

1.2.1.4. *Orientation*

Passons à quelque chose de moins bien connu, l'orientation. S'orienter, en langage courant, c'est savoir où est le Nord. Orienter une carte, c'est la poser de telle sorte que le Nord du papier coïncide avec le Nord géographique; les spins s'orientent parallèlement dans un champ magnétique; les pigeons ont le sens de l'orientation. Et ainsi de suite. *Rien* de tout cela ne se retrouve dans la notion mathématique d'orientation, pour laquelle il importe de lire les définitions sans idées préconçues.

Soient $\{w_j : j = 1, ..., n\}$ et $\{w'_i : i = 1, ..., n\}$ deux bases d'un même espace V, de dimension $n > 0$. Chaque w'_i s'écrit de façon unique $w'_i = \sum_j a_i^j w_j$ dans la base des w_j, d'où les coefficients a_i^j d'une matrice A, qui est régulière (sinon les w'_i ne seraient pas indépendants), et a donc un déterminant non nul. On dit que les deux bases *ont même orientation* si ce déterminant est positif. "Avoir même orientation" est une relation d'équivalence entre les différentes bases de V, qui les partage en deux classes distinctes. Un *espace vectoriel orienté* est alors un couple de la forme $\{V, Or\}$, où Or désigne l'une de ces deux classes. Il y a deux choix possibles, et donc deux espaces orientés associés à un même espace V.

Orienter un espace vectoriel, c'est lui adjoindre une classe d'orientation, produisant ainsi un espace orienté.[12] Ce qu'on appelle "le sens direct" dans le plan, ou "la règle des trois doigts" en dimension 3, sont autant de conventions par lesquelles on se met d'accord sur la classe de bases choisie. On peut orienter un espace vectoriel en lui adjoignant une base, mais c'est plus qu'il n'en faut: la classe d'équivalence de cette base suffit. Cette classe est alors considérée comme celle des bases "positivement orientées", ou "directes" (par opposition à "rétrogrades" ou "gauches"), et autres vocables. (De même, un espace jaugé se trouve du même coup orienté, mais ce qui compte alors est la classe des volumes de même signe que la jauge, non la jauge elle-même: La structure d'espace orienté est donc moins riche que celle d'espace jaugé, ou encore, on passe de celui-ci à celui-là en oubliant une partie de l'information.)

Le sens mathématique du mot orientation est donc assez différent de celui évoqué au début, et c'est peut-être la cause des difficultés que cette notion semble susciter. Orienter, c'est pouvoir distinguer, en dimension 1, vecteurs positifs et négatifs, savoir ce que signifie "tourner vers la gauche" en dimension 2, savoir ce qu'est "un trièdre de sens direct" en dimension 3. Le cas de l'espace vectoriel de dimension 0 est spécial: Par convention, l'orienter consiste à lui attribuer un signe, $+$ ou $-$.

---

12. Orientation en ce sens n'est qu'un aspect de l'orientation des objets géométriques en général. Pour ceci, très peu connu, voir [Ca].

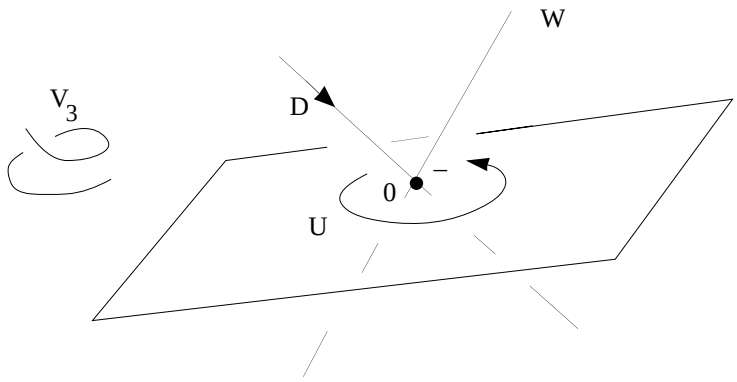

Figure 2. *Quelques sous-espaces vectoriels du même espace* V_3*, chacun orienté (sauf* W*, voir le texte), comme l'icône proche de son nom l'indique. (Le sous-espace* {0} *porte l'orientation –.) Noter l'orientation de* V_3*, opposée à celle que l'on utilise le plus souvent. (Son icône est sans flèche. Est-ce une erreur?)*

Tout espace vectoriel pouvant être orienté, les divers sous-espaces d'un même espace vectoriel peuvent être tous orientés, simultanément et indépendamment (Fig. 2). L'orientation éventuelle de W, par exemple, sur la Fig. 2, est indépendante de celle de U. Toutefois, le fait d'avoir orienté U donne un "sens de contournement" ("autour") de W, tout autre chose que l'orientation au sens précédent, qui était un "sens de parcours" ("le long") de W. Cette nouvelle notion d'orientation[13] s'appelle "externe", pour la distinguer de la précédente, que l'on qualifiera d'"interne", pour la symétrie et la clarté. Sa définition mathématique est simple: Un sous-espace est pourvu d'une *orientation externe* lorsque l'un de ses complémentaires est (intérieurement) orienté. (L'orientation externe de V tout entier est donc un signe, + ou –.)

Ceci est sans ambiguïté, car une fois (intérieurement) orienté un complémentaire U de W, tout autre complément U' a une orientation interne induite par celle de U (ou si l'on préfère, *compatible* avec celle de U). Soit en effet $\{w_1, ..., w_p\}$ une base quelconque de W et $\{w_{p+1}, ..., w_n\}$ une base de U prise dans la classe positive concernant U. Si U' est un autre complémentaire, son orientation interne compatible avec celle de U est donnée par toute base $\{w'_{p+1}, ..., w'_n\}$ telle que les deux bases complètes de V, soit $\{w_1, ..., w_p, w_{p+1}, ..., w_n\}$ et $\{w_1, ..., w_p, w'_{p+1}, ..., w'_n\}$, aient même orientation. Orienter extérieurement W,

13. Elle semble due à Veblen et Whitehead [VW]. À quelques exceptions près, notamment [Bu], elle est peu enseignée, malgré son importance en électromagnétisme, fortement soulignée par Tonti [Tn].

donc, revient à orienter intérieurement *tous* ses compléments, d'un seul coup, de façon compatible, au sens de la clause précédente. La symétrie ainsi obtenue[14] est tout à fait satisfaisante: Orienter intérieurement U donne aussi, de la même façon, une orientation externe à chacun de ses compléments, d'un seul coup.

L'orientation externe d'un plan[15], en dimension 3, est donc l'orientation interne d'une droite qui le traverse, autrement dit c'est un "sens de traversée" ("à travers" ce plan), alors que l'orientation interne consiste à donner un "sens gyratoire" ("dans" le plan). L'orientation externe du sous-espace $\{0\}$ est une classe de bases de l'espace tout entier.

Il est tout à fait possible d'orienter intérieurement et extérieurement le même sous-espace, et ces deux orientations *n'ont rien à voir* l'une avec l'autre. On peut trouver cela difficile à admettre: L'orientation externe de U, Fig. 2, n'est-elle pas donnée par la règle "du bonhomme d'Ampère", le sens de traversée de U allant des pieds vers la tête d'un observateur perché en 0 qui verrait le sens gyratoire dans U comme de sa droite à sa gauche? Certes, mais cela suppose une orientation de l'espace "ambiant", c'est-à-dire V_3. Soit en effet une orientation de V_3, telle que celle figurée par l'icône en colimaçon de la Fig. 2, et soit $\{w_1, w_2\}$ une base de sens direct dans U. Une orientation interne de W en résulte alors, celle donnée par un vecteur w_3 de V_3 tel que $\{w_1, w_2, w_3\}$ soit une base positive de V. D'où un sens de traversée de U, c'est-à-dire une orientation externe, mais comme on le voit, elle va de haut en bas dans ce cas de figure!

Orientations interne et externe d'un même sous-espace, donc, ne se déduisent l'une de l'autre que si l'espace ambiant est orienté.[16] En revanche, orientation interne d'un sous-espace et externe *de* (n'importe lequel de) *ses compléments* se correspondent canoniquement, sans aucune référence à l'orientation de l'espace ambiant.

---

14. Noter tout de même qu'orientation *externe* suppose un "sur-espace" de référence, dont l'orientation interne, ou "intrinsèque", n'a pas besoin. La symétrie n'est donc pas totale. Mais c'est bien conforme au sens des mots.

15. Passant par l'origine, ainsi que la droite dont il est question après, puisque nous parlons de sous-espaces vectoriels. On anticipe ici sur la suite, où cette phrase sera correcte à la lettre.

16. La "règle d'Ampère" s'avère ainsi une façon ingénieuse de préciser cette correspondance canonique, *une fois l'espace orienté par la règle des trois doigts de la main droite.* C'est donc une convention superposée à une autre convention. Comme le *résultat* (objectif) d'une expérience physique ne saurait dépendre de nos *conventions* (arbitraires, bien qu'historiquement établies et en pratique non révisables), l'importance que ces règles d'orientation semblent avoir en électromagnétisme devient suspecte, et nous aurons à tirer cela au clair.

1.2.1.5. *Espaces affines*

Intuitivement, un espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié où était son origine. Mathématiquement, il y faut un peu plus de façons. Un espace affine A est un ensemble, dont les éléments s'appellent des *points*, sur lequel un espace vectoriel V (dit "associé" à A) "agit", "transitivement" et "régulièrement". Il ne reste plus qu'à donner le sens de ces mots techniques.

On a rappelé au début que tout espace vectoriel V était aussi un groupe commutatif (si l'on oublie les multiplications par des scalaires). Un groupe V *agit* sur un ensemble A si à tout élément v de V correspond une application T_v de A dans lui-même, que l'on appelle dans ce cas une translation, avec $T_v(T_w x) = T_{v+w} x$ pour tous v et w de V et x de A. En particulier, $T_0 x = x$. L'action est *transitive* si, pour tout couple de points $\{x, y\}$, il existe[17] un v tel que $T_v x = y$. Elle est *régulière* si l'ensemble des v tels que $T_v x = x$ se réduit à 0 pour tous les x. On voit qu'on peut alors écrire $T_v x = x + v$, ainsi que $v = y - x$ si $y = T_v x$, et appliquer en confiance les règles de l'algèbre. Si on fixe un point o dans A, et que l'on associe au point x le vecteur $v(x)$ tel que $v(x) = x - o$, on obtient une correspondance biunivoque entre A et V, mais elle n'est pas canonique, puisqu'elle dépend du choix de o. Inversement, si l'on considère les éléments de V comme des points, et si l'on définit l'action de V sur lui-même par $T_u v = v + u$,[18] on fait de V un espace affine.

En physique, beaucoup d'auteurs confondent points et vecteurs, allant jusqu'à noter r le "point courant", translaté de o par le vecteur r. C'est fort bien lorsqu'il y a un point privilégié qui constitue une origine naturelle, comme en Mécanique Céleste, mais autrement, c'est aussi injustifié et maladroit que d'introduire des vecteurs de base là où le calcul se mènerait aussi bien sans eux. Or il n'y a pas, a priori, de point privilégié, parce que les lois physiques sont, en règle générale, invariantes par translation. C'est d'ailleurs pour cela que l'espace affine est un cadre naturel pour la physique classique.[19]

17. L'ensemble des points y que l'on peut ainsi atteindre à partir de x, i.e., l'ensemble de ses transformés, s'appelle l'*orbite* de x sous l'action du groupe. "Transitivité" signifie donc "une seule orbite". (On prendra garde que certains auteurs disent "libre" plutôt que "régulière".)

18. Ou plus généralement $T_u v = v + Lu$, où L est un automorphisme (cf. Note 5) de V.

19. A priori, la physique prend place dans un continu à trois dimensions, sans les éléments de structure qui en font un espace affine. Mais on constate expérimentalement (à un certain niveau de généralité, bien sûr, par exemple à propos des propriétés de la lumière dans le vide), que "tous les points se valent", en ce sens que la translation d'une expérience d'un point à un autre donne lieu aux mêmes résultats, "translatés" eux aussi comme il

Multiplier un point par un réel n'a pas de sens. En revanche, prendre le barycentre $x_\theta = (1 - \theta)x_0 + \theta x_1$, avec θ réel, est une opération licite (et on usera largement de cette notation). En effet, il suffit de prendre un point o arbitraire comme origine, et de poser $x_\theta = o + (1 - \theta)(x_0 - o) + \theta(x_1 - o)$, le translaté de o par un vecteur bien défini. On voit sans peine que le résultat est indépendant de o, et on généralise immédiatement à plus de deux points. Les notions de sous-espace, de base, etc., se transposent alors facilement: Une partie A engendre un *sous-espace affine*, formé de tous les barycentres possibles de familles de points de A, une *base affine* de ce sous-espace est un système de points minimal l'engendrant. Plus précisément, un système de points $\{x_0, x_1, ..., x_p\}$ dont aucun n'est barycentre des autres engendre le sous-espace affine formé de tous les points $x = \sum_{i = 0, ..., p} \theta_i x_i$, où $\sum_{i = 0, ..., p} \theta_i = 1$, dont la *dimension* est p. Les θ_i s'appellent *coordonnées barycentriques* de x dans la base des x_i. Deux sous-espaces affines sont *parallèles* si l'un d'eux se déduit par translation d'un sous-espace contenu dans l'autre.

Les ensembles de vecteurs v tels que $Lv = k$, où L est une application linéaire, s'appellent sous-espaces *affines* de V, l'associé, par un abus de langage très naturel, car c'est bien ce qu'ils sont lorsqu'on considère V comme un espace affine. Pour un même L et différents k, ils sont parallèles. Celui correspondant à $k = 0$, le *noyau* $\ker(L)$ de L, est un sous-espace vectoriel, dit sous-espace vectoriel *parallèle* à tous ces affines, ou parfois, leur sous-espace vectoriel *directeur*.

Les morphismes entre espaces affines sont les *applications affines*, c'est-à-dire celles qui conservent les barycentres. (Elles conservent alors, par voie de conséquence, bien d'autres choses: l'alignement, le parallélisme ..., mais pas les distances ou les angles, notions qui de toute façon n'ont pas de sens dans un espace affine.) On se convaincra (EXERCICE 4) que toute application affine est de la forme $L(x - o) + k$, où k est un point de l'espace d'arrivée, o une origine dans l'espace de départ, et L une application linéaire. Ce sont aussi, si l'on se sert de bases affines, les applications linéaires par rapport aux coordonnées barycentriques, sous une certaine restriction (à trouver, EXERCICE 5).

La *somme* $U + W$ de deux sous-espaces affines, cette fois, est l'ensemble des barycentres de la forme $\theta u + (1 - \theta)w$, avec u dans U et w dans W. Si $U \cap W$ se réduit à un seul point, soit o, on dit que U et W sont *complémentaires*. Le rapport avec les mêmes notions concernant les espaces vectoriels est évident.

---

convient. On reconnaît ainsi l'existence d'un *groupe*, celui des translations, agissant sur ce continu tridimensionnel, que l'on peut donc modéliser par un espace affine. (On peut aller plus loin et arguer que l'expérience nous donne accès au groupe des translations, d'où nous inférons la structure affine de l'espace où nous vivons.)

La théorie de l'orientation, de ce fait, est immédiate: Orienter un espace affine, c'est orienter son espace vectoriel associé. Chaque sous-espace affine peut être orienté, indépendamment. Il s'agit là d'orientation interne. L'orientation externe s'obtient en donnant une orientation interne à l'un des complémentaires (ce qui les oriente tous, comme plus haut). On peut reprendre ici la Fig. 2 sans rien y changer d'autre que le nom de l'origine: o au lieu de 0. (Fig. 3. Prendre o comme origine est un choix arbitraire, et les sous-espaces affines autres que W et U n'ont pas de raison de passer par o.) En particulier, on peut se servir des mêmes icônes.

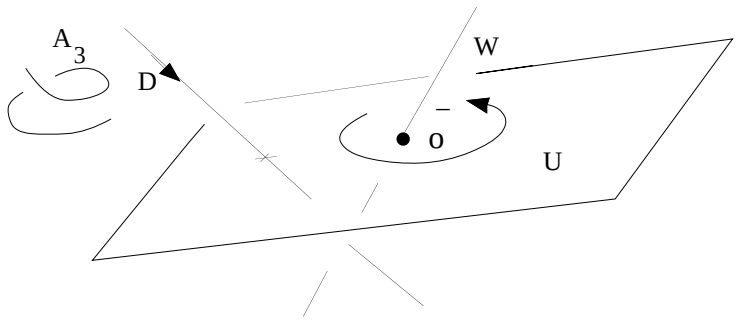

Figure 3. *Sous-espaces affines du même espace* A_3*, y compris* A_3 *lui-même, chacun orienté (extérieurement, pour ce qui concerne* W).

1.2.2. *Variétés*

Il ne s'agit pas de faire ici un cours de géométrie différentielle, et variété[20] sera un nom générique pour les lignes ("variétés de dimension 1") et surfaces (dimension 2) plongées[21] dans A_3. On les supposera *régulières par morceaux*, ce qui implique en particulier qu'elles présentent partout une tangente ou plan tangent qui dépend continûment[22] du point courant, à l'exception éventuellement de points singuliers ou

20. Le mot "multiplicité" (comme en allemand *mannigfaltigkeit* ou en anglais *manifold)* serait meilleur, mais n'est pas en usage. On n'en a retenu que l'initiale: notre variété générique s'appellera M.

21. "Plongement" est un mot technique, signifiant essentiellement que cette ligne ou surface est sans points de rebroussement ni points doubles. "Immersion" veut dire que si l'on se restreint à une boule de rayon assez petit, centrée en un point de la ligne ou surface, on a alors un plongement. Cela n'exclut pas les points doubles. (Une courbe plane en forme de 8 est une immersion du cercle dans le plan, mais pas un plongement.) Voir p. ex. [KN] ou [RF]. (On constatera que ces auteurs ne s'accordent pas totalement sur la notion de plongement, ce qui aide à relativiser les choses.)

lignes singulières (coins, arêtes, etc.), en nombre fini. Occasionnellement, on s'occupera aussi des points (dimension 0) et des régions connexes à frontière régulière (dimension 3). Une définition plus précise va être donnée plus loin, mais ce qui précède suffit pour le moment.

1.2.2.1. *Vecteurs tangents*

Dans un espace affine, on appelle *vecteur lié* tout couple $\{x, v\}$, où x est un point et v un vecteur de l'associé. On visualise un tel "vecteur" comme ayant "sa queue en x et sa tête en $x + v$", ou plus platement, comme le couple de points $\{x, x + v\}$. On dira que v est un "vecteur en x" ou "ancré à x", ou "lié à x". (Par opposition, un vecteur ordinaire v s'appelle alors un *vecteur libre*.) Il faut souligner avec force que *les vecteurs liés ne sont pas des vecteurs,* car ils ne forment pas un espace vectoriel: Faire la somme de $\{x, v\}$ et $\{y, w\}$ n'a déjà guère de sens (à moins qu'on ne veuille y voir $\{{}^1\!/_2\, x + {}^1\!/_2\, y, v + w\}$ ...), mais multiplier $\{x, v\}$ par ρ n'en a vraiment aucun, car on ne saurait, en l'absence d'un point origine, multiplier x par ρ.[23] D'où l'abondance de guillemets dans ce qui précède.

En revanche, l'ensemble des "vecteurs en x", c'est-à-dire des vecteurs liés d'origine x, forme bien un espace vectoriel, isomorphe à V_n. On l'appelle *espace tangent* en x, noté T_x. Ce nom paraîtrait bizarre si l'on ne pensait à l'ensemble des vecteurs en x tangents à une ligne ou une surface passant par x: ils forment un sous-espace vectoriel de T_x, qu'il est pleinement justifié d'appeler "espace tangent". Plus généralement, une variété M de dimension p a un espace tangent, noté T_xM, en chacun de ses points (hormis les points singuliers évoqués plus haut). On réalise alors que T_x est un sous-espace de l'espace des vecteurs en x tangents à une variété de dimension n, à savoir A_n lui-même, ce qui justifie la terminologie. Noter que $x + T_xM$ est un sous-espace affine, tangent à M au point x.[24] (Fig. 4).

On remarquera, même si la distinction est un peu pédante, que c'est l'espace *affine* tangent qui correspond à l'idée intuitive de tangente ou plan tangent à une ligne ou une surface. (Nous pensons alors aux points de cette ligne ou de ce plan.)

---

22. Ceci ne suppose pas de métrique dans A_n: Comme on va le voir plus loin, un espace de dimension finie a une topologie naturelle, par rapport à laquelle cette notion de continuité prend son sens.

23. Décider que $\rho\{x, v\} = \{x, \rho v\}$ ne résout rien, car alors $\{x, 0\} = 0$ pour tout x, et il serait embarrassant d'avoir plus d'un élément 0 dans un espace vectoriel.

24. Les couples de la forme $\{x, x + W\}$, où W est un sous-espace de T_xM s'appellent élé*ments de contact* de M.

L'espace tangent en x, lui, est quelque chose d'un peu plus abstrait. (Il faut penser aux *vecteurs* liés issus de x, tangents à la ligne ou à la surface.)

Nous noterons TA_n l'ensemble de tous les vecteurs liés, et TM celui des vecteurs liés tangents à M. La question, "si ce ne sont pas là des espaces vectoriels, alors quoi ?" est légitime, car tout de même, ils ont beaucoup en commun avec eux. Ce sont des fibrés vectoriels, notion dont nous n'aurons pas vraiment besoin,[25] si ce n'est pour définir les champs de vecteurs: Un tel champ est une fonction de type $A_n \to TA_n$, autrement dit, en chaque point x d'une certaine région de l'espace affine (le domaine du champ), un vecteur lié {x, v}.

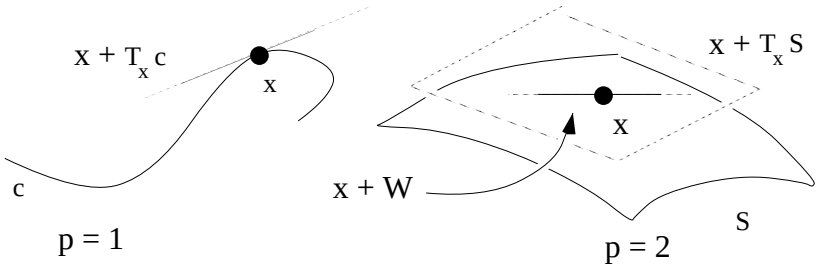

Figure 4. *Variétés, espaces tangents, élément de contact (le couple* {x, x + W}). L*es espaces vectoriels eux-mêmes, soit* T_xc, T_xS, W, *ne sont pas représentés.*

REMARQUE.– Pourquoi tant de complications? Pourquoi ne pas dire qu'un champ de vecteurs est une fonction de type $A_n \to V_n$? Parce qu'on se priverait ainsi de parler de champs de vecteurs "vivant sur" une surface, par exemple, et plus généralement sur une variété M. Dans l'esprit de la définition précédente, de tels champs sont simplement des fonctions de type $M \to TM$, associant à x un vecteur lié {x, v} tangent à M, c'est-à-dire des "sections" de TM (cf. Note 25). ◊

On peut définir des champs d'objets plus complexes, en particulier des champs de covecteurs, et plus généralement, de p-volumes opérant sur chaque espace tangent.

---

25. Un *fibré vectoriel* est une variété (ici, l'ensemble des vecteurs liés tangents à M) munie d'une opération π appelée *projection* (ici, $\pi(\{x, v\}) = x$) sur une variété appelée *base* (ici, M), telle que chacune des *fibres* $\pi^{-1}(x)$ *au dessus* de x soit isomorphe à un même espace vectoriel (ici, V_p, si M est de dimension p). Une application f de la base dans le fibré vérifiant, comme dans le cas des champs de vecteurs, $\pi(f(x)) = x$, s'appelle une *section.*

On retrouvera ce type de champs plus tard sous le nom de formes différentielles. Il sera toujours sous-entendu que ces champs sont *réguliers*, c'est-à-dire pourvus d'autant de dérivées successives que l'exige la situation, ou tout au moins, *réguliers par morceaux*, comme les variétés elles-mêmes.

1.2.2.2. *Orientation des variétés*

Orienter une variété, c'est donner une orientation à chacun de ses espaces tangents, de façon "cohérente", comme on va l'expliquer. Supposons d'abord $T_x M$ orienté, en un certain point x. Puisque M est régulière, on peut munir chaque espace tangent en y, pour tous les y au voisinage de x, d'une base dépendant continûment de y, et qui soit d'orientation positive lorsque $y = x$. (Le cas exceptionnel des arêtes, coins, etc., est laissé à la réflexion du lecteur.) On décide alors que toutes ces bases sont d'orientation positive. On a ainsi *orienté de façon cohérente* (c'est par définition ce que cela signifie) tout un voisinage de x. Reste à couvrir tout M de cette façon, de proche en proche. *Si* on peut le faire, on a orienté de façon cohérente tous les espaces tangents. On dit alors que la variété est *orientable*. (Toutes ne le sont pas, comme l'exemple du ruban de Möbius le montre.) Si M est *connexe*, i.e., en un seul morceau, il n'y a que deux orientations possibles, celles de l'espace tangent au point x dont on est parti. Sinon, il y en a 2^k, où k est le nombre de composantes connexes, puisqu'on a le choix entre deux orientations pour chacune d'elles.

L'orientation d'une courbe est un sens de parcours (le long de) cette ligne. Celle d'une surface est un sens gyratoire universel, continu de proche en proche (un peu comme tous les pays d'un même continent finissent par adopter la même convention à cet égard). Celle d'une région tridimensionnelle (connexe) est un sens de rotation des hélices, coquillages, escaliers, etc. Celle d'un point est un signe, + ou –.

La notion d'orientation externe existe aussi. D'abord, dans un voisinage assez petit de x, il est possible de trouver un complémentaire commun à tous les espaces affines tangents (Fig. 5). En l'orientant, on oriente extérieurement, de façon cohérente, tous les espaces tangents du voisinage. Le reste est comme ci-dessus. L'orientation externe d'une surface est un sens de traversée de celle-ci ("à travers"). Celle d'une courbe est un sens de contournement ("autour de"). Celle d'une région tridimensionnelle est un signe, et celle d'un point, une orientation interne de son voisinage, c'est-à-dire, en termes d'icônes, un tire-bouchon.

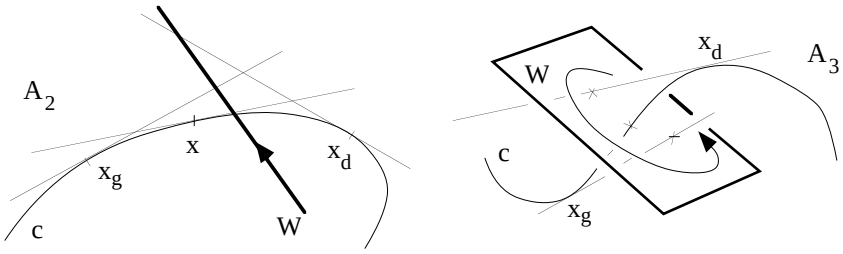

Figure 5. *Sous-espace affine orienté* W, *complémentaire de tous les espaces tangents à la courbe* c, *dans un voisinage de* x, et *conférant à chacun d'eux une orientation externe, de façon cohérente. Gauche: 2D. Droite: 3D.*

On remarquera que la "démonstration" familière du fait que le ruban de Möbius n'est pas orientable, basée sur l'impossibilité de trouver un système continu de normales à la surface, démontre en fait l'impossibilité d'une orientation *externe* de cette surface. (Ce qui compte ici, bien entendu, n'est pas l'orthogonalité de la normale par rapport à la surface, mais le fait qu'elle pointe dans une direction bien définie, c'est-à-dire l'orientation *interne* de la droite qui la porte.) Mais le résultat est le même, car l'espace affine ambiant étant orientable, l'orientation interne d'une droite traversant la surface confère une orientation interne au plan tangent au point de traversée, par application de la règle des trois doigts (de la main que l'on voudra).

REMARQUE.– Il existe des variétés de dimension 3 non orientables, obtenues par exemple en identifiant les faces opposées d'un cube de certaine façon. Un ruban de Möbius plongé dans une telle variété peut avoir une orientation externe, alors que sa non-orientabilité interne (propriété intrinsèque) subsiste. La démonstration traditionnelle est donc déficiente. Pour démontrer à un(e) novice la non-orientabilité du ruban de Möbius, faites-en un avec du papier transparent, dessinez une base de deux vecteurs sur un autre morceau du même papier, que vous ferez glisser le long du ruban jusqu'à le faire revenir "à l'envers" au point de départ. *(Transparent*, le papier. C'est une condition sine qua non du succès de l'expérience.[26]) ◊

De même que sous-espaces vectoriels et affines d'un même espace peuvent être orientés indépendamment, chaque ligne, surface, etc., plongée dans A_3 peut avoir sa propre orientation indépendamment des surfaces, volumes, etc., qui la contiennent. En particulier, la frontière ou *bord* d'une variété peut être orientée indépendamment de celle-ci.

---

26. Merci à Yves Wadier pour cette remarque.

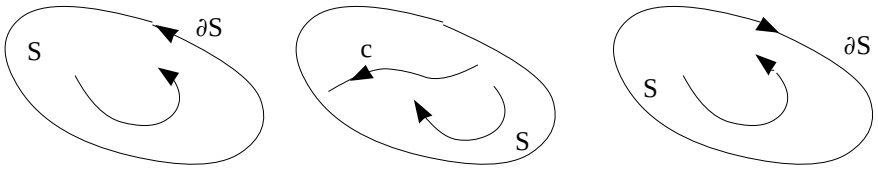

Figure 6. *Orientations d'une surface* S *et de son bord* ∂S, *"compatibles" à gauche, mais pas à droite. Noter qu'une telle notion ne pourrait avoir de sens pour une ligne intérieure à la surface (milieu).*

L'intuition, pourtant, nous dit qu'il y a une différence entre les parties extrêmes de la Fig. 6, de ce point de vue. Les orientations "s'accordent" à gauche, mais pas à droite. Qu'est-ce à dire?

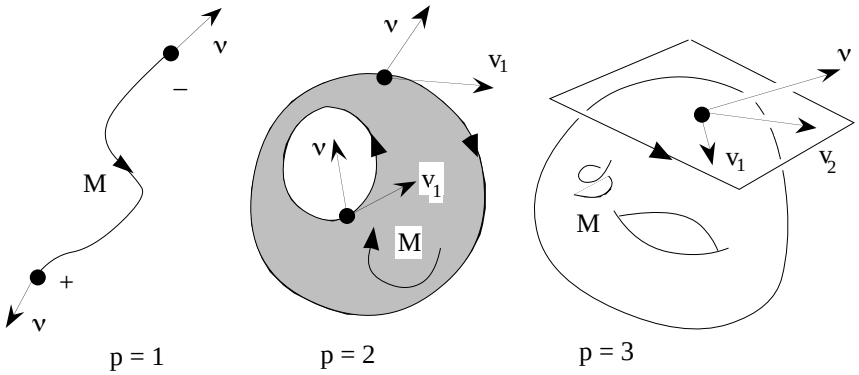

Figure 7. *Les vecteurs désignés par* ν *sont tous sortants par rapport à la variété* M, *de dimension* p. *Dans les cas* p = 1 *et* p = 2, *le bord de* M e*st en deux parties.*

La réponse tient à ce qu'en un point du bord d'une variété M, on peut toujours trouver un vecteur, parmi ceux de $T_x M$, qui soit *sortant* par rapport à M,[27] notion qui a un sens en toutes dimensions (Fig. 7). Supposons M orientée, et cherchons une façon naturelle d'orienter son bord. Il s'agit donc, étant donnée une base $\{v_1, ..., v_{p-1}\}$ de vecteurs tangents à ∂M en x, de savoir si cette base est directe ou

27. Les complémentaires de $T_x \partial M$ dans $T_x M$ sont de dimension 1. On prend l'un d'eux, où il doit exister un point y tel que le segment ouvert]x, y[ne soit pas dans M. Alors, ν = y – x.

non. Pour cela, plaçons ν en tête de liste, ce qui donne une base de T_xM, dont on sait si elle est directe ou non, car T_xM est orienté (par définition), si M l'est. On décide alors que $\{v_1, ..., v_{p-1}\}$ est directe si $\{\nu, v_1, ..., v_{p-1}\}$ est directe, d'où une orientation de ∂M, qu'on appelle l'orientation *compatible* avec, ou *induite* par, celle de M.

REMARQUE.– Il y a une part de convention dans cette définition, car au lieu de ν sortant, on pourrait prendre ν entrant. Mais ce n'est pas du même ordre[28] que le choix arbitraire entre deux orientations possibles dans le cas d'un espace vectoriel. ◊

1.2.3. *Espaces euclidiens*

Nous allons maintenant "habiller" l'espace affine d'un nouvel élément structurel, la métrique, qui avec l'orientation va en faire l'espace euclidien de la géométrie scolaire et de la physique courante.

1.2.3.1. *Produit scalaire*

Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel V est une fonction de type $V \times V \to \mathbb{R}$, pour laquelle on use en général d'une notation "infixe", telle que $v \cdot v'$. Ses propriétés sont $v \cdot v' = v' \cdot v$, linéarité par rapport aux deux arguments, et $v \cdot v > 0$ si $v \neq 0$. Le nombre $|v| = (v \cdot v)^{1/2}$ s'appelle *norme euclidienn*e de V induite par ce produit scalaire.[29] Le réel θ compris entre 0 et π tel que $\cos \theta = (v \cdot v')/|v||v'|$ est l'*angle* entre v et v'. Remarquer (EXERCICE 6) que tout autre produit scalaire est de la forme $Lv \cdot Lv'$, où L est linéaire inversible.

Il y a comme on sait d'autres *normes*,[30] c'est-à-dire d'autres fonctions $\| \ \|$ de type $V \to \mathbb{R}$ vérifiant $\|\rho v\| = \|\rho\| \, \|v\|$ et $\|v + v'\| \leq \|v\| + \|v'\|$, avec $\|v\| > 0$ si $v \neq 0$. La norme euclidienne est de toutes "la plus symétrique", dans la mesure où elle ne privilégie aucune direction de l'espace (sur ce point, trop long à développer

---

28. Que ν soit sortant ou entrant, par rapport à M, est une *propriété*, vérifiable, de ν et de M, qui sont les objets d'intérêt. Le caractère direct ou rétrograde d'une base est bien lui aussi une propriété, mais du couple <base, espace orienté>, alors que l'objet d'intérêt est la base, seule.

29. L'extension aux complexes est délicate, car ce qu'on obtient en faisant simplement $(v_R + iv_I) \cdot (v'_R + iv'_I)$, soit $v_R \cdot v'_R - v_I \cdot v'_I + i(v_R \cdot v'_I + v_I \cdot v'_R)$, n'est pas un nombre réel. Le *produit scalaire hermitien* de v et v', complexes, se définit comme $v \cdot *v'$, c'est-à-dire $(vR + iv_I) \cdot (v'_R + iv'_I)$, et la norme euclidienne de v par $|v| = (v \cdot *v)^{1/2}$.

30. Par exemple, $\|v\| = \sum_i |v^i|$, où les v^i sont les composantes de v.

ici, voir [Bo], Appendice C). Si V est de dimension finie, toutes ces normes sont *équivalentes*, en ce sens qu'il existe deux constantes positives c et C telles que $c|v| \leq \|v\| \leq C|v|$, pour tout v, ce dont on va tout de suite voir les implications.

La norme de V_n induit une *distance* sur A_n, celle de deux points x et y étant par définition $d(x, y) = |y - x|$, ce qui fait du couple $\{A_n, d\}$ un *espace métrique*, avec des ouverts, voisinages, etc., en un mot une *topologie*, et donc la possibilité de parler de fonctions continues de A_n dans un autre espace métrique (et entre autres, dans $\mathbb{R}$). Outre les propriétés de toute distance (symétrie, $d(x, y) = 0$ implique $x = y$, inégalité du triangle), cette distance-là est *invariante par translation* ($d(x, y) = d(x + v, y + v)$ pour tout v). L'équivalence des normes en dimension finie fait qu'il n'y a qu'une topologie "raisonnable" sur A_n, ce dont on a déjà tiré parti.

Tout vecteur lié ayant une norme, on peut maintenant définir la *longueur* d'un arc de courbe c: C'est la limite, selon des modalités qu'on n'aura pas besoin de rappeler ici,[31] des "sommes de Riemann" $\sum_{i = 1, \ldots, n} |x_i - x_{i-1}|$, où les x_i sont des points successifs de la courbe, x_0 et x_n coïncidant avec ses extrémités. Un passage à la limite analogue, après découpage en triangles, permet d'assigner des *aires* aux surfaces bornées, une fois définie l'aire du triangle que forment deux vecteurs liés u et v de même origine: Celle-ci est, par définition, $^1/_2 |u||v| \sin \theta$, c'est-à-dire la moitié de la racine carrée de $|u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2$. On reconnaît là un déterminant, ce qui indique comment généraliser: la *mesure* du *simplexe* construit sur p vecteurs v_1, ..., v_p de même origine, s'obtient en prenant la racine carrée du déterminant (positif, forcément) formé des produits $v_i \cdot v_j$, et en divisant par $p!$. D'où en particulier, en dimension 3, la notion de *volume* d'une région bornée de l'espace, toujours comme limite d'une somme de Riemann. (Attention, la mesure n'est pas un p-volume au sens vu plus haut. Mais il y a un rapport simple entre les deux, la mesure étant la valeur absolue d'un p-volume.)

Un produit scalaire permet donc de mesurer les angles, longueurs, aires, volumes. En bref, il confère une *métrique* à l'espace. En particulier, il donne sens à la notion d'*orthogonalité* de deux vecteurs ($v \cdot v' = 0$), de deux sous-espaces vectoriels ($U \perp W$ si et seulement si $u \cdot w = 0$ pour tout u de V et tout w de W), de deux sous-espaces affines (orthogonaux si leurs directeurs le sont), et de deux variétés (orthogonales en un point commun x si leurs espaces tangents respectifs le sont). Une base $\{u_1, \ldots, u_p\}$ du sous-espace U est *orthonormale* si $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$ (le "symbole de Kronecker", égal à 1 si $i = j$, à 0 sinon). On peut toujours en trouver une en orthonormant une base par le procédé de Gram–Schmidt. On peut toujours

---

31. Rappelons que toutes nos variétés sont régulières par morceaux, donc bornées, ce qui assure l'existence des limites en question.

aussi, en dimension finie n, compléter une base orthonormale jusqu'à ce qu'elle possède n éléments, ce qui revient à construire le *complémentaire orthogonal* W de U, tel que $U \perp W$ et $V = U + W$, tout en lui donnant une base. Dans ce cas, $U \cap W = \{0\}$, et la notation $V = U \oplus W$ résume l'ensemble de ces faits.

L'*adjoint* d'un opérateur L de V dans lui-même, par rapport à $\cdot$, est l'opérateur L^a tel que $Lv \cdot w = v \cdot L^a w$ pour tout couple de vecteurs v, w. Les opérateurs A et U sont respectivement *auto-adjoint* si $A = A^a$ et *unitaire* si $Uv \cdot Uw = v \cdot w \quad \forall\, v, w$, ce qui revient à dire que $U^{-1} = U^a$. Il faut être attentif à la façon dont ces propriétés passent aux matrices repésentatives, car c'est seulement dans le cas d'une base orthonormale (au sens de $\cdot$) qu'elles s'expriment simplement: On a alors $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ (la transposée de $\mathbf{A}$) et $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^t$.

Tout ceci s'étend à des espaces de dimension infinie, mais pas sans travail. C'est la théorie des espaces de Hilbert et des séries de Fourier, dont on ne parlera pas ici.

1.2.3.2. E_3, *l'espace euclidien standard*

Le cadre familier de la physique classique est l'espace euclidien de dimension 3 *orienté*, désigné ci-dessous par le symbole E_3 :

DÉFINITION–. *L'espace euclidien* E_3 *est la structure formée par un espace affine* A_3 plus *un produit scalaire sur son associé* V_3 plus *une orientation*.

Le plus souvent, tous ces éléments de structure sont fournis d'un seul coup, sous la forme d'une base orthonormale $\{w_1, w_2, w_3\}$. Le produit scalaire est alors $\sum_{i = 1, 2, 3} u^i v^i$, et la classe d'orientation des bases directes est celle qui contient $\{w_1, w_2, w_3\}$. On rajoute même souvent une origine o, et on considère les vecteurs de base comme liés à o, ce qui introduit des *coordonnées:* les coordonnées d'un point x sont, par définition, les composantes du vecteur $x - o$. Il est de loin préférable de bien distinguer ces diverses "couches structurelles", car selon les questions de physique en cause, certaines peuvent être complètement superflues, et leur introduction ne fait alors qu'obscurcir les choses, comme on va le voir. Donc même lorsque nous nous plaçons dans E_3 plutôt que A_3, nous ne supposons a priori ni base, ni origine, ni coordonnées.

D'ailleurs, lorsque de tels éléments s'avèrent utiles, ce ne sont pas forcément les mêmes partout. On peut par exemple, à propos de problèmes de courants de Foucault sur une coque mince, trouver commode d'introduire une base de vecteurs

tangents en *chaque* point de la surface, sans aucune relation avec les vecteurs de base de l'espace. Même le produit scalaire peut devoir, à l'occasion, être local à chaque espace tangent, et varier d'un point de l'espace à l'autre. Il ne faut donc surtout pas se lier les mains par une *surspécification* prématurée du problème à résoudre — règle de conduite dont tout programmeur expérimenté connaît la valeur. Les éléments de structure, espace affine (ou variété), produit scalaire, orientation, base, origine, etc., doivent être considérés comme les éléments disponibles d'un décor, que l'on met en place ou pas, selon les exigences de la pièce à jouer.

L'exemple du *produit vectoriel* est intéressant à cet égard. Cette opération est une spécialité[32], pour ne pas dire une exclusivité, de la dimension 3. Le produit vectoriel[33] $u \times v$ est le vecteur (1°) orthogonal à u et v, (2°) de norme égale à $|u||v| \sin \theta$, (3°) tel que le trièdre $\{u, v, u \times v\}$ soit direct. Il dépend donc de la métrique, mais contrairement au produit scalaire, il dépend aussi de l'orientation: changer celle-ci changerait le signe de $u \times v$. En fait, $\times$ ne peut même pas être *défini* sans une orientation. L'intervention du produit vectoriel dans certaines formules, notamment la force de Laplace $J \times B$, fait donc problème. Encore une fois, on a là deux niveaux superposés de *conventions* arbitraires, une sur la mesure des longueurs (le produit scalaire), une sur l'orientation, pour rendre compte de quelque chose d'*objectif* (la force). Ce n'est qu'en déposant soigneusement les couches de peinture superflues que nous y verrons clair.

Cela dit, pourquoi le singulier, "la" structure, dans la définition ci-dessus, selon laquelle un espace euclidien est un triplet $\{A_3, \cdot, \mathrm{Or}\}$? Même en se restreignant à la dimension 3, n'y a-t-il pas autant d'espaces euclidiens que de façons de choisir le produit scalaire et l'orientation, c'est-à-dire que de couples $\{\cdot, \mathrm{Or}\}$? C'est bien le cas, mais tous ces triplets sont *équivalents* en un sens assez fort, ce qui justifie le singulier. Plus précisément, si nous prenons un autre couple[34] $\{\circ, \mathbb{O}\mathrm{r}\}$, il existe une transformation linéaire L telle que $u \circ v = Lu \cdot Lv$ (revoir l'Exercice 6). Elle n'est pas unique,[35] et on peut en particulier changer L en $-L$, de sorte que $\det(L)$

---

32. Une opération binaire dotée des propriétés du produit vectoriel ne peut exister qu'en dimensions 3 et 7 [Ec, SY].

33. L'emploi du symbole $\wedge$ au lieu de la "croix de Gibbs" $\times$ est fortement déconseillé. C'est un gallicisme anachronique, et gênant, dans la mesure où $\wedge$ sert à désigner une opération beaucoup plus importante et générale, le "produit extérieur", défini plus loin, qui est une notion purement affine.

34. Distingué par les caractères silhouettés. La norme correspondante, soit $|Lv|$, sera notée $|v|$, avec des barres dans ce même style.

35. À toute transformation unitaire U correspond une transformation UL qui pourrait ici se substituer à L. En particulier, la "symétrie centrale" $U = x \to -x$ est unitaire, et

soit positif si $\mathbb{or} = \mathrm{Or}$, négatif sinon. Dans ce cas, l'image par L d'une base orthogonale directe au sens de $\{\cdot, \mathrm{Or}\}$ est une base orthogonale directe au sens de $\{\circ, \mathbb{or}\}$. Toutes les structures euclidiennes se correspondent donc par transformation linéaire (on dit qu'elles sont "linéairement équivalentes"), ce qu'on peut aussi exprimer dans le langage des groupes, en disant que l'action du groupe GL_3 des transformations linéaires inversibles sur ces structures est transitive (une seule orbite). C'est ce qui permet de parler de "l'espace vectoriel euclidien de dimension n", au singulier, confondant comme de coutume des objets identiques à un isomorphisme près. Plus loin, nous verrons comment les opérateurs grad, rot, div se comportent sous l'action de GL_3. En attendant,

EXERCICE 7. Vérifier que $L(u \barwedge v) = Lu \times Lv$, où $\barwedge$ est le produit vectoriel qui va avec $\{\circ, \mathbb{or}\}$. Montrer que $u \barwedge v = \det(L)\,(L^{a}L)^{-1}\,(u \times v)$. ◊

On s'attend à ce qu'il soit maintenant question du "produit mixte", souvent défini par

$$\mathrm{vol}(u, v, w) = (u \times v) \cdot w, \tag{1}$$

avec vol pour volume. Il s'agit bien d'un 3-volume au sens vu plus haut (son signe dépend de l'orientation du trièdre $\{u, v, w\}$), et donc il ne dépend pas autant qu'il en a l'air de la métrique. Il serait même, sans elle, défini à une constante multiplicative près, et le choix de métrique ne fait que fixer cette constante. (EXERCICE 8: Trouver deux produits scalaires différents donnant le même produit mixte.) Ce produit mixte est aussi, au signe près, la mesure du parallélépipède construit sur u, v et w : Le signe est ± 1 selon l'orientation du trièdre. Plus généralement, en dimension n, à tout espace euclidien correspond un espace jaugé, obtenu en oubliant de quelle métrique provient la mesure volumique, et en affectant cette mesure du signe donné par l'orientation du système de n vecteurs considéré.

REMARQUE.– On a $\mathrm{vol}(u, v, w) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, relativement à toute base orthonormale directe. ◊

EXERCICE 9. Montrer que $\mathbb{vol}(u, v, w) = \det(L)\,\mathrm{vol}(u, v, w)$, où $\mathbb{vol}$ est le volume associé à $\{\circ, \mathbb{or}\}$ par la formule $\mathbb{vol}(u, v, w) = (u \barwedge v) \circ w$. ◊

Une dernière notion nous sera utile plus loin, celle d'aire vectorielle. Soit T un triangle muni d'une orientation externe, c'est-à-dire un sens de traversée, que l'on

---

change l'orientation, en dimension 3. La "réflexion" par rapport au "miroir" $M_u = \{x : u \cdot x = 0\}$, où u est un vecteur fixe non nul), soit $x \to x - 2\,(u \cdot x/|u|^2)\,u$, a les mêmes propriétés.

peut matérialiser par le vecteur normal n de longueur 1. L'aire vectorielle, notée $\vec{T}$, est le vecteur aire(T) n. La notion s'étend à toute surface à orientation externe: On la coupe en petits triangles, on somme leurs aires vectorielles, et on passe à la limite. Noter que le flux d'un champ uniforme J à travers une surface S d'aire vectorielle $\vec{S}$ est $J \cdot \vec{S}$, ce qui nous resservira.

EXERCICE 10. Montrer qu'une surface fermée a une aire vectorielle nulle.

EXERCICE 11. Quel rapport y a-t-il entre $\vec{T}$ et $\vec{\mathbb{T}}$, ce dernier symbole désignant l'aire vectorielle de T vis-à-vis de $\{\circ, \mathbb{Or}\}$?

1.2.3.3. *Mesure, espaces L^2 et $\mathbb{L}^2$*

Le produit scalaire qui donne à E_n sa structure euclidienne permet de définir une *mesure* des parties de E_n (de certaines parties seulement, en fait) qui s'appellera longueur, aire ou volume selon la dimension. La mesure du parallélotope engendré par p vecteurs $\{v_1, ..., v_p\}$ ancrés en x, c'est-à-dire de l'ensemble $\{x + \sum_i \lambda^i v_i : 0 \le \lambda^i \le 1, i = 1, ..., p\}$ est par définition la racine carrée du *déterminant de Gram* des v_i, dont les termes sont les produits scalaires $v_i \cdot v_j$ pour i et j allant de 1 à p. D'où, par les méthodes de la théorie de la mesure [Ha], la longueur d'une ligne, l'aire d'une surface, etc., et plus généralement la mesure d'une variété de dimension $p \ge 1$. Pour $p = n$, on a ainsi la *mesure de Lebesgue* sur E_n. Toutes les parties de E_n ne sont pas mesurables, mais les ouverts, les fermés, les intersections [resp. réunions] dénombrables d'ouverts [resp. de fermés], le sont, ainsi que les intersections et réunions dénombrables de telles parties, et ainsi de suite, ce qui fait que les parties non mesurables, bien que très nombreuses relativement, échappent à l'observation. (On démontre qu'il en existe grâce à l'axiome du choix, mais on ne peut en exhiber aucune de façon explicite, constructive.) La mesure est additive, en ce sens que $\mathrm{mes}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathrm{mes}(A_i)$ pour toute famille dénombrable[36] de parties mesurables disjointes A.

EXERCICE 12. Quel rapport y a-t-il entre la mesure de Lebesgue et le 3-volume?

EXERCICE 13. Quel rapport y a-t-il entre les mesures de Lebesgue m et $\mathbb{m}$ induites par $\cdot$ et par $\circ$?

---

36. Le terme technique est "σ–additive", où σ connote "dénombrable". Il n'y a pas additivité sans quelque restriction de cette nature. Sinon, puisque la mesure d'un point est en général nulle, tout ensemble devrait être de mesure nulle.

Sur cette base peut se développer une théorie de l'intégration [Bk], où l'on a un ensemble X équipé d'une mesure, et où l'intégrale de la fonction qui vaut 1 sur une partie A de X et 0 ailleurs est par définition la mesure de A. L'intégrale d'une fonction constante par morceaux en découle par additivité, et l'objet de la théorie est ensuite de passer à la limite pour intégrer des fonctions[37] aussi générales que possible.

Les fonctions réelles intégrables sur X forment un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}^1(X)$. Deux fonctions *égales presque partout*, i.e., qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle (deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un seul point, par exemple) ayant la même intégrale, par construction, on s'intéresse plutôt aux classes d'équivalence, dans $\mathcal{L}^1(X)$, de fonctions p.p. égales ("p.p." est l'abréviation consacrée pour "presque partout"), de nouveau un espace vectoriel (le quotient de $\mathcal{L}^1(X)$ par rapport à cette relation d'équivalence), que l'on note $L^1(X)$. L'intérêt de cette manœuvre est que $L^1(X)$ est alors un *espace normé,* la norme d'une classe étant par définition l'intégrale $\int_X |f|$ de n'importe quelle fonction f prise dans cette classe. (On a bien, de façon évidente, $\int_X |f + g| \leq \int_X |f| + \int_X |g|$, ainsi que $\int_X |\lambda f| = |\lambda| \int_X |f|$, et $\int_X |f| = 0$ seulement si $|f| = 0$ p.p., c'est-à-dire lorsque f appartient à la même classe que la fonction nulle.) De plus, au prix de très peu d'hypothèses sur la mesure, $L^1(X)$ est *complet*, autrement dit, toute suite de Cauchy (de classes de) fonctions converge vers une certaine (classe de) fonction(s). La notion de fonction, comme on le voit ici, s'en trouve quelque peu brouillée, mais ce n'est pas trop grave, car on démontre que *toute fonction continue*, et a fortiori régulière, *est seule dans sa classe d'équivalence* (autrement dit, deux fonctions continues p.p. égales sont égales). De ce fait, on se permet souvent de dire "fonction" là où on devrait dire, en toute rigueur, "classe de fonctions p.p. égales".

On note L^p l'espace des fonctions f telles que $|f|^p$, où $p \geq 1$, soit dans L^1, muni de la norme $[\int_X |f|^p]^{1/p}$. Le cas $p = 2$ est important, car on peut définir un produit scalaire sur l'espace L^2 des (classes de ...) fonctions de carré sommable:

---

37. L'intégrale se note $\int_X f$, simplement, et $\int_A f$ si l'intégration est restreinte à une partie A de X. La mesure sur A, dans ce cas, est celle induite par la mesure existant sur X. Des écritures telles que $\int_X f\, dX$, ou pire $\int_X f\, dV$, etc., sont à déconseiller lorsque le domaine d'intégration porte avec lui une mesure, de façon naturelle, comme c'est presque toujours le cas. Sinon, une écriture telle que $\int f(x)\, dm(x)$, où m est la mesure, se justifie (à condition que la variable liée x apparaisse bien *deux* fois! "$\int_X f(x)\, dm$" serait incorrect). Dans ce qui suit, la mesure est toujours (quelle que soit la dimension, sauf 0) celle induite par la structure euclidienne. Lorsqu'on aura affaire aux deux structures euclidiennes $\cdot$ et $\circ$ à la fois, on usera d'un procédé graphique ad hoc, l'opposition entre $\int$ et $\iint$, pour les distinguer.

$(f, g) = \int_X f\,g$, par définition. L^2 étant complet, c'est donc un *espace de Hilbert*, avec tout le confort que cela procure, en particulier, l'existence du *théorème de représentation de Riesz* que l'on va utiliser tout de suite.

Associé à l'espace euclidien E_n, on a donc un espace de Hilbert, noté $L^2(E_n)$, formé des fonctions de carré intégrable, et pour tout domaine D de E_n, un espace $L^2(D)$, obtenu par restriction à D. Il est commode de noter $|f|_D$ la norme $[\int_D |f|^2]^{1/2}$, au prix d'un léger abus de notation. Le Th. de Riesz dit que toute application linéaire l de type $L^2(D) \to \mathit{RÉEL}$ qui se trouve être continue, c'est-à-dire qui satisfait $l(g) \leq C\,|g|_D$ pour une constante C indépendante[38] de g, peut se représenter sous la forme $l(g) = \int_D f_l\,g$, où f_l appartient à $L^2(D)$. Prendre garde ici que f_l, contrairement à l, dépend de la structure euclidienne, par l'intermédiaire de la mesure.

EXERCICE 14. $L^2(D)$ lui-même dépend-il de la structure euclidienne?

Ceci est encore plus flagrant dans le cas de l'espace $\mathbb{L}^2(D)$ des champs de vecteurs de carré sommable. À deux champs de vecteurs v et w correspond la fonction $x \to v(x) \cdot w(x)$, que nous noterons $v \cdot w$, et u appartient à $\mathbb{L}^2(D)$, par définition, lorsque $|u|$ appartient à $L^2(D)$. Le produit scalaire $(v, w) = \int_D v \cdot w$ fait de $\mathbb{L}^2(D)$ un espace de Hilbert. Toute application linéaire continue se représente alors par $l(v) = \int_D u_l \cdot v$, où u_l appartient à $\mathbb{L}^2(D)$, et dépend du produit scalaire $\cdot$.

1.2.4. *Un peu d'homologie*

1.2.4.1. *Chaînes*

Il est souvent commode de décrire une variété M comme un assemblage de plusieurs variétés, même si M est en fait d'un seul tenant. La frontière d'un triangle, par exemple. En outre il arrive souvent que chacun de ces morceaux ait été, pour une raison ou pour une autre, muni d'une orientation, qui peut ne pas coïncider avec celle que l'on veut attribuer à la variété composite. Le concept de chaîne va permettre de traiter ce genre de situations, et de préciser le concept de variété "régulière par morceaux" dont on s'est contenté jusqu'ici.

Une p-*chaîne* est une famille finie $\mathcal{M} = \{M_i : i = 1, ..., k\}$ de p-variétés orientées et connexes, que nous appellerons ci-dessous les *composantes* de la chaîne,

---

38. Par convention, et pour alléger l'écriture, toutes les constantes numériques qui interviennent dans une définition, une démonstration, etc., sont notées C (au lieu de C_1, C_2, etc., dans l'ordre d'apparition). Le symbole C peut donc changer de signification d'un endroit à l'autre.

chacune lestée d'un poids μ^i pris dans un certain anneau de coefficients, tel que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ (disons $\mathbb{R}$, bien que les coefficients soient des entiers relatifs, dans la plupart des exemples à venir). Il est commode de noter une telle chaîne comme une "somme formelle" $\sum_i \mu^i M_i = \mu^1 M_1 + ... + \mu^k M_k$, ainsi nommée parce que les signes + ne signifient pas "additionner" au sens courant. En revanche, les chaînes elles-mêmes peuvent être additionnées, la somme de $\sum_i \mu^i M_i$ et de $\sum_i \nu^i N_i$ s'obtenant en prenant pour ensemble des composantes la réunion des familles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, et en attribuant à chaque composante la somme des poids qu'elle avait dans chacune des deux chaînes. (On convient que $\mu M + \mu' M' = (\mu - \mu')M = (\mu' - \mu)M'$ si M et M' sont la même variété avec des orientations opposées.) Si tous les poids obtenus ainsi sont nuls, on a la chaîne nulle, notée 0 (quelles que soient ses composantes). Tout ceci revient à manipuler les sommes formelles telles que $\sum_i \mu^i M_i$ selon les règles de l'algèbre, ce qui est la raison d'être de cette notation. Les chaînes *tordues* sont définies de la même façon, à ceci près que leurs composantes ont une orientation externe. (Chaînes ordinaires et tordues ne se mélangent pas et ne s'additionnent pas.)

Remarque. Le concept de chaîne répond à des besoins pratiques en Électricité. Prenons par exemple le cas d'une boucle d'induction faite d'un fil enroulé k fois sur lui-même, mais d'épaisseur négligeable. Il sera commode de la représenter par une courbe fermée unique, orientée dans le sens de parcours du courant (ou le contraire) et portant le poids k (ou $-k$). À l'inducteur formé de plusieurs boucles analogues correspondra alors une chaîne, au sens précédent. En dépit de cet exemple, il ne faut pas trop chercher d'interprétation concrète de l'idée de chaîne: Les chaînes sont des objets algébriques, dont l'utilité va se révéler peu à peu. ◊

On peut donc faire des chaînes en réunissant des variétés, on peut aussi en faire en disséquant des variétés: Par exemple, une ligne peut être tronçonnée en petits segments, comme cela arrive en théorie de l'intégration. Une région de l'espace peut devoir être représentée par un pavage de tétraèdres, comme dans la méthode des éléments finis. Etc. De nouveau, l'orientation de chacune de ces composantes peut lui être donnée indépendamment. Chaque composante de chaîne peut à son tour être assimilée à une chaîne. On peut donc faire un sort particulier aux composantes de chaînes de plus bas niveau, les composantes "atomiques", que l'on n'aura pas besoin de disséquer. Ce sont les *cellules* définies ci-dessous.

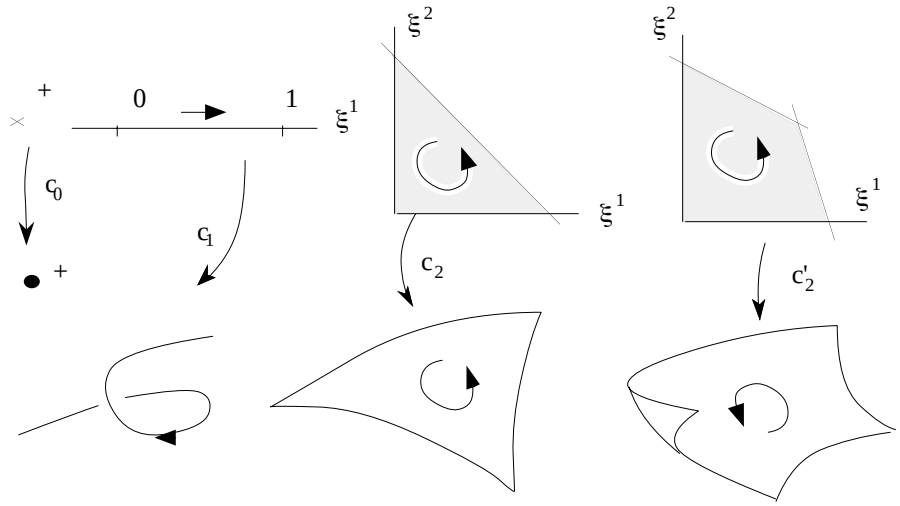

Figure 8. *Quelques cellules, en dimensions 0, 1, 2.*

Introduisons d'abord des "cellules de référence" dans $\mathbb{R}^n$, comme illustré par la Fig. 8. Ce sont des segments, triangles, polygones, polyèdres, etc., plus généralement des *parallélotopes convexes* de la forme

$$K_p^{\alpha} = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \ \xi^l \geq 0 \ \ \forall\, l = 1, ..., p, \quad \sum_{j = 1, ..., p} \alpha^i_j \, \xi^j \leq 1 \ \ \forall\, i = 1, ..., k\},$$

où les coefficients α^i_j, tous ≥ 0, forment une matrice rectangulaire à k lignes et p colonnes, dont aucune ligne n'est combinaison linéaire des autres. Chaque cellule de référence a une orientation interne naturelle, comme le suggère la Fig. 8, obtenue en rangeant les vecteurs de base dans l'ordre habituel.

Ceci étant, une p-*cellule* dans A_n, avec $0 \geq p \geq n$, est par définition une application c d'un certain K_p^{α} dans A_n, injective (donc l'image $c(K_p^{\alpha})$ est sans points doubles), avec pour chaque $\xi \in K_p^{\alpha}$ une dérivée $Dc(\xi)$ de rang maximal, c'est-à-dire p. (Il y a donc en tout point une tangente, si $p = 1$, un plan tangent, si $p = 2$, etc. Ces propriétés qualifient c comme un *plongement*, au sens de la Note 21.) On se servira du même symbole c pour l'application et pour son image géométrique $c(K_p^{\alpha})$. Par définition, le *bord* ∂c d'une cellule c est la restriction de l'application c à la frontière (au sens topologique) de K_p^{α}. On voit que ∂c est un assemblage de $(p - 1)$-cellules, qui elles mêmes s'intersectent selon tout ou partie de leur propre bord.

Ainsi, une 0-cellule est un point. Une 1-cellule est une courbe simple paramétrée. La 2-cellule la plus simple est un plongement du triangle $\{\xi : \xi^1 \geq 0, \xi^2 \geq 0, \xi^1 + \xi^2 \leq 1\}$. La définition fait place aux images de polygones, et en trois dimensions, de polyèdres convexes. Remarquer que chaque cellule hérite de sa référence une orientation: Par exemple, pour $p = 2$, les vecteurs $\partial_s c(s, t)$, $\partial_t c(s, t)$ ancrés au point $c(s, t)$, indépendants (puisque Dc est de rang maximal), forment, pris dans cet ordre, une base qui oriente c.

Nous aurons plus loin besoin de la notion de *cellule ouverte*, c'est-à-dire privée de son bord, définie comme la restriction de l'une des c ci-dessus à l'intérieur de sa cellule de référence.

On peut maintenant revenir, pour la préciser, sur la notion de *variété régulière par morceaux* de dimension p: c'est une partie M de A_n telle que (1°) Il existe une famille $C = \{c_i : i = 1, ..., k\}$ de p-cellules dont l'union est M, (2°) La cellule ouverte correspondant à c_i ne rencontre aucune autre cellule, (3°) Les intersections $c_i \cap c_j$ sont elles-mêmes des variétés régulières par morceaux, (4°) Lorsque plusieurs cellules se rencontrent en un point, il existe dans M un voisinage de ce point homéomorphe[39] à une boule de $\mathbb{R}^p$.

La définition est récursive, du fait de la clause 3. Mais les $c_i \cap c_j$ étant de dimension $p - 1$ au plus, la récursion s'arrête sans problème à $p = 0$. La clause 4 est plus rébarbative, mais il n'y a pas moyen de l'éviter: Une p-variété doit "ressembler, localement, à $\mathbb{R}^p$", ce qui exclut, par exemple, l'assemblage de deux courbes ayant un point commun, à moins que ce point ne soit à l'extrémité de chacune d'elles, ou encore l'assemblage de *trois* courbes issues d'un même point, etc.

Les variétés régulières par morceaux sont donc, dit de façon informelle, des collages de cellules (avec identification des points mis en coïncidence). Supposons maintenant une telle variété M orientable (ce qui n'est pas forcé) et orientée. Alors, chaque cellule hérite de M une orientation interne qui peut ou non être la même que celle héritée de la cellule de référence. D'où une *chaîne*, associée à M, dont les composantes sont les cellules, avec poids ± 1, et la définition précise du concept de dissection évoqué plus haut. Elle n'est pas unique, ne serait-ce que par la possibilité de changer l'orientation de chaque composante, si l'on change en même temps le signe de son poids.

---

39. Rappelons que X et Y sont *homéomorphes* s'il existe une application bijective de l'un sur l'autre qui soit continue ainsi que son inverse.

1.2.4.2. *Bord, cycles et bords*

Considérons maintenant une variété[40] M orientée de dimension $p + 1$. Sa frontière ∂M est un assemblage de p-variétés, que l'on peut supposer chacune orientée pour son propre compte. Assignons à chacune d'elles le poids ± 1, selon que l'orientation coïncide ou non avec celle induite par M (selon le mécanisme décrit plus haut, Fig. 7). On obtient ainsi une p-chaîne, que l'on notera ∂M — même notation, mais sens nouveau: ∂ est ici un *opérateur*, des $(p + 1)$-variétés vers les p-chaînes, que l'on prolonge aux $(p + 1)$-chaînes par linéarité: $\partial(\sum_i \mu^i M_i) = \sum_i \mu^i \partial M_i$, par définition. L'opérateur linéaire ainsi obtenu s'appelle *bord*. Une chaîne dont le bord est la chaîne nulle s'appelle *cycle* (p-cycle, s'il faut préciser la dimension) et si une p-chaîne est le bord d'une $(p + 1)$-chaîne, on dit, avec un rare à-propos, qu'elle est un *bord* (un p-bord, dans ce cas). Les bords sont des cycles, à cause de la propriété fondamentale

$$\partial \circ \partial = 0, \tag{2}$$

que l'on démontrerait aisément — mais mieux vaut étudier un exemple concret, tel que celui de la Fig. 9, et la démonstration formelle, laissée en exercice, n'apprend rien de plus.

Bien que variété et chaîne soient des objets de nature différente, on ne s'interdira pas les abus de langage naturels, "bord" et la notation ∂M s'appliquant aussi bien à la variété frontière qu'à toute chaîne associée: une variété M "est un cycle" si $\partial M = 0$, etc.

Un bord, donc, est un cycle. Quand un cycle est-il un bord? Cela dépend de la variété ambiante. Dans A_n, la réponse est "toujours": Une surface fermée enclot un domaine tridimensionnel, dont elle est le bord. Une courbe fermée (même si elle fait un nœud, aussi compliqué soit-il) est toujours le bord d'une surface, que l'on peut de plus, si étonnant que cela puisse paraître, choisir *sans points doubles*, appelée *surface de Seifert* [ST] (cf. [Ar], p. 224). Mais dans le cas d'un tore solide, par exemple, les cercles méridiens sont des bords, alors que les cercles parallèles sont des cycles qui ne bordent pas: aucun des disques de A_3 bordés par un parallèle n'est en effet entièrement contenu dans le tore.

Qu'un cycle soit ou non un bord a à voir avec la topologie de la variété considérée. Que les chaînes soient des objets algébriques prend alors tout son intérêt, car cela permet d'aborder des questions de topologie avec toute la puissance des méthodes algébriques, ce qui est le principe même de l'*homologie* [Hn], et de la topologie algébrique en général.

40. Désormais, "régulière par morceaux" est sous-entendu.

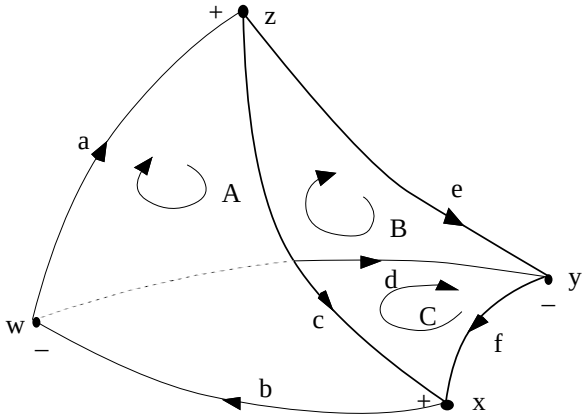

Figure 9. *Surface* S, *orientée, formée de trois facettes sur quatre d'un tétraèdre courbe, et représentée par la chaîne* A – B – C. *L'orientation de* S *est celle du triangle marqué* A, *au premier plan. (Noter les signes* – : *Les orientations de* B *et* C *ne s'accordent pas avec celle de* S.) *On a* $\partial A = a + b + c$, $\partial B = e + a - d$, $\partial C = b + d + f$, *où* a, b, c, d, e, f *sont les courbes frontières, arbitrairement orientées comme indiqué. Donc* $\partial S = \partial(A - B - C) = c - e - f$: *Observer la façon dont les "coutures"* a, b, c *reçoivent automatiquement le poids* 0 *dans cette* 1*-chaîne, car elles apparaissent chacune deux fois avec des poids opposés. Ensuite, puisque* $\partial c = x - z$, $\partial e = -y - z$ et $\partial f = x + y$, *du fait des orientations attribuées (arbitrairement) à* w, x, y, z, *on a* $\partial\partial S = \partial(c - e - f) = 0$, *par le même processus d'annulation par paires. Le lecteur est invité à se construire un exemple analogue concernant des chaînes tordues.*

1.2.4.3. *Topologie de l'espace des chaînes*

Anticipons un peu: il va être question plus loin de fonctions de type *CHAÎNE* $\rightarrow$ *RÉEL* dont l'interprétation physique sera, selon la dimension, force électromotrice, flux, intensité, etc. Lorsqu'on "modifie un peu" une surface Σ, plongée dans une région conductrice, on s'attend à ce que l'intensité du courant qui la traverse "change un peu" dans l'opération. La seule façon de préciser cela est de munir l'ensemble des surfaces possibles d'une topologie, et de définir "intensité" comme une fonction I sur cet espace topologique, à valeurs réelles. La propriété physique ci-dessus se traduira alors par "I est continue", une affirmation mathématique maintenant (vraie ou fausse). Il sera commode de topologiser non seulement l'ensemble des p-variétés mais aussi celui des p-chaînes.

La construction de ces topologies est techniquement compliquée, et il suffira pour la suite de savoir qu'elle est possible, d'une façon qui reflète bien la notion physique qu'on entend modéliser. On peut donc se dispenser de lire ce qui suit, qui donne l'idée pour les cellules d'abord, puis généralise aux chaînes.

On aura une topologie si l'on réussit à définir une distance $d(S, S')$ entre deux surfaces. On dira alors que "la suite (de surfaces) S_n tend vers S" si la suite des distances $d(S_n, S)$ tend vers 0. Ceci peut être fait pour les cellules de base assez aisément (attention dans ce qui suit à ne pas confondre l'application s et son image $s(K_p^\alpha)$). Si s et s' sont deux p-cellules définies sur la même cellule de référence K_p^α, le fait de poser $d(s, s') = \sup\{\xi \in K_p^\alpha : |s(\xi) - s'(\xi)|\}$ donne une distance et la notion de proximité associée à cette distance correspond bien à la notion physique qu'on veut saisir.[41] Toutefois, avec cette distance, on pourrait avoir $d(s, s') > 0$ alors même que les images $s(K_p^\alpha)$ et $s'(K_p^\alpha)$ coïncident: sa topologie est encore trop fine.

On remarque alors que l'application $s' \circ s^{-1}$, régulière, envoie s sur s', selon une correspondance biunivoque qui respecte l'orientation. Ceci s'appelle un "difféomorphisme préservant l'orientation" (DPO), qui serait l'unité dans le cas $s = s'$ (mais pas dans le cas où l'on a seulement $s(K_p^\alpha) = s'(K_p^\alpha)$), et le nombre $d(s, s')$ mesure l'écart de ce DPO par rapport à l'unité. Mais puisque $s' \circ s^{-1}$ n'est que l'*un* des DPO possibles, prenons-les tous, et prenons pour distance la borne inférieure des distances associées. Cette idée s'applique aussi bien si l'on remplace les images de s et s' par deux variétés régulières M et N de même dimension, et se réalise comme suit. Soit $D > 0$ un réel arbitraire. S'il existe entre M et N un DPO ϕ (ce qui est une relation d'équivalence entre variétés), poser $d_\phi(M, N) = \sup\{x \in M : |x - \phi(x)|\}$. Alors, fixer $d(M, N)$ au minimum de $d_\phi(M, N)$ par rapport à tous les ϕ, s'il y en a, ou à D, s'il n'y en a pas ou si D est de toute façon inférieur au minimum. D'où une distance entre variétés, qui correspond bien à ce qu'on souhaitait.

EXERCICE 16. Longueur, aire, volume, sont-ils continus par rapport à d ?

La chose est plus difficile pour les chaînes. L'idée est que la suite de chaînes $c_n = \sum_{i = 1, .., k} \mu^i_n M_{i, n}$ doit converger vers la chaîne $c = \sum_{i = 1, .., k} \mu^i M_i$ si chaque suite $\{M_{i, n} : n \in \mathbb{N}\}$ converge vers M_i, au sens de la distance précédente, et si en même temps les suites de poids $\{\mu_{i, n} : n \in \mathbb{N}\}$ convergent vers chacun des μ^i. Mais connaître certaines suites convergentes ne fait pas une topologie. (Même si on les connaissait *toutes*, on n'aurait pas une topologie unique pour autant, sauf à se

41. D'autres distances seraient possibles, comme par exemple, notant d_0 celle qu'on vient de définir, $d_1(c, c') = d_0(c, c') + \sup\{\xi \in K_p^\alpha : |Dc(\xi) - Dc'(\xi)|\}$. EXERCICE 15: Trouver une bonne raison de ne pas retenir celle-là.

restreindre aux topologies "métrisables", c'est-à-dire dérivant d'une distance. Voir [Sc], [Yo] ou, plus accessible, [Jä], pour ces notions. Un contre-exemple, où deux topologies distinctes ont les mêmes suites convergentes, se trouve dans [GO], p. 161.)

Par ailleurs, plus une topologie est fine, c'est-à-dire plus elle a d'ouverts, moins elle a de suites convergentes. Souhaitant que les suites précédentes convergent, mais sans plus, on prendra donc la topologie la plus fine qui (1°) soit compatible avec la structure d'espace vectoriel, en particulier, soit telle que tout voisinage de 0 contienne un voisinage convexe, (2°) rende convergentes les suites du type décrit ci-dessus. Ceci définit bien une topologie (cf. [Sw], notion de "topologie initiale"), non métrisable. On notera par la suite C_p et $\tilde{C}_p$ les espaces de p-chaînes ordinaires et tordues, respectivement, munis de cette topologie.

REMARQUE.– Bien que la distance euclidienne soit intervenue au passage, les espaces C_p et $\tilde{C}_p$ sont des constructions purement affines. (Il est clair que leur topologie ne dépend pas de la structure euclidienne particulière qui a servi à définir d.) ◊

REMARQUE.– On peut se demander si l'application ∂, linéaire de C_{p+1} dans C_p (ou de $\tilde{C}_{p+1}$ dans $\tilde{C}_p$) est continue. C'est bien le cas. (EXERCICE 17: Montrer qu'elle transforme les suites convergentes de p-chaînes en suites convergentes de $(p-1)$ -chaînes, en prouvant d'abord, dans le cas de deux variétés, que $d(\partial M, \partial N) \leq d(M, N)$.) ◊

1.3. Analyse vectorielle

1.3.1. *Champs, scalaires et vectoriels*

Le mot "champ" a une double signification en physique. Il désigne d'une part un phénomène, d'autre part sa représentation mathématique.

Par exemple, les aiguilles des boussoles s'écartent plus ou moins du Nord géographique selon le coin de France où l'on se trouve: on rend compte de ce phénomène en disant qu'il existe, à la surface du sol, un "champ magnétique". Si l'on en restait là, ce ne serait rien de plus qu'un mot. On va plus loin dès lors que l'on *modélise* cette situation, c'est-à-dire que l'on choisit un objet mathématique pour en rendre compte. Puisque, d'expérience, le champ (physique) se caractérise par une direction et une intensité (mesurable par le couple plus ou moins grand exercé sur l'aiguille), on est fondé à le représenter par un *champ de vecteurs* bidimensionnels, dont on a déjà dit (§ 1, p. 10) que c'était "une fonction de type $A_2 \to TA_2$",

c'est-à-dire l'assignation d'un vecteur lié $\{x, v\}$ à chaque point x de l'espace affine A_2. De plus, on suppose cette fonction continue, voire différentiable jusqu'à un certain degré, bref un champ régulier, au moins "par morceaux", comme plus haut pour les variétés.

Noter que le simple fait d'assimiler le territoire national à une certaine partie de A_2 (le domaine de définition du champ de vecteurs) est déjà une modélisation, dont on voit bien à la fois la justification et les limites. Une fois ce premier choix fait, d'autres se présentent: Par exemple, on pourrait modéliser le champ géomagnétique par deux *champs scalaires*, c'est-à-dire deux fonctions réelles de la position, une pour la déclinaison, une pour l'intensité, donc deux fonctions de type $A_2 \to \mathbb{R}$, ou si l'on préfère, une fonction de type $A_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. D'autres possibilités viendront à l'esprit. Toutes ont en commun d'associer à chaque point d'un certain espace (mathématique; A_2 dans cet exemple, et plus généralement, une variété de dimension finie) un objet géométrique (vecteur, couple de réels, ...) dépendant de ce point de façon régulière. Ces fonctions de type *VARIÉTÉ* $\to$ *OBJET_GÉOMÉTRIQUE* forment le type *CHAMP*.

Il y a donc une distinction à faire, tout à fait essentielle, entre un champ physique et l'objet de type *CHAMP* dont on se sert pour le représenter. Ce dernier étant à notre discrétion, le choix qu'on en fait peut être plus ou moins heureux. C'est ainsi que Maxwell, au début, s'efforça de représenter le champ électromagnétique par des *CHAMPS* de quaternions, selon la mode du temps [Cr, Wt]. C'est à Heaviside que l'on doit leur remplacement[42] par des champs, pardon, des *CHAMPS*

---

42. Au prix d'une longue lutte contre le mandarinat, alors mené par Tait (cf. [Dr], [ST]). Maxwell mort en 1879, Heaviside procéda révisions ultérieures du *Traité* [Mx], qu'il enrichit d'innovations essentielles (l'interprétation de $\partial_t D$, l'emploi de grad, rot, div, les courants magnétiques [Br]), ainsi que d'autres plus anecdotiques (les vecteurs en gras), voire douteuses (les *quatre* équations de Maxwell, prétendument), mais durables. En particulier [Dr], il fait disparaître les facteurs 4π, les potentiels et les quaternions, un casus belli du point de vue de Tait, qui ouvre le feu après la 3^e édition du traité (les détails qui suivent sont repris de [St]), suscitant de Gibbs une réponse courtoise et ferme, teintée d'un humour dont l'attaque semble avoir été dépourvue. Heaviside réagit sans mâcher ses mots ("Abstrusity of Quaternions and Comparative Simplicity Gained by Ignoring Them", 1893). Knott prend le parti de Tait, en récusant la considération de dimensions supérieures à 3, qu'il compare à une tentative de "résoudre la question irlandaise par une discussion sur la vie sociale des Martiens". Gibbs réplique avec dignité et quelque agacement, affirmant par ailleurs que "The first duty of the physical vector analyst (...) is to present the subject in such a form as to most easily acquired, and most useful when acquired." La polémique s'étale dans huit lettres à *Nature* de 91 à 93. Kelvin porte le coup de grâce en 1901 en se passant totalement des quaternions. "From Knott's point of view", écrit Stephenson [St], "anything which could be done in vector analysis had already been done using quaternions, so that vector

de vecteurs. Une analyse détaillée de la façon dont ceux-ci jouent leur rôle va nous amener à leur préférer d'autres objets mathématiques encore, à savoir les formes différentielles.

1.3.2. *Circulations, flux, etc.*

Que sont les formes différentielles? Rien d'autre que *les objets mathématiques destinés à être intégrés*. Par exemple, dans une expression comme $\int_V f(x)\,dx$, ou $\iint_S f(x, y)\,dx \wedge dy$, la forme différentielle est "ce qu'il y a sous le signe somme", c'est-à-dire "$f(x)\,dx$" ou "$f(x, y)\,dx \wedge dy$" (le sens du symbole $\wedge$ sera explicité plus loin). Si l'on adopte ce point de vue, les deux intégrales ci-dessus apparaissent comme des machines à fabriquer des nombres réels (la valeur de l'intégrale) à partir de deux ingrédients: la variété sur laquelle on intègre (le volume V ou la surface S) et la forme différentielle que l'on intègre.

Or c'est précisément de telles "machines", c'est-à-dire d'applications de type *VARIÉTÉ* $\times$ *FORME_DIFFÉRENTIELLE* $\rightarrow$ *RÉEL*, que l'électromagnétisme a besoin, comme on va le voir. Nous procéderons ainsi: D'abord énumérer une série d'intégrales, telles que circulation, flux, etc., utiles en physique, puis les interpréter comme des applications de ce type, ou plutôt, généralisant par linéarité, de type *CHAÎNE* $\times$ *FORME_DIFFÉRENTIELLE* $\rightarrow$ *RÉEL*. Ce faisant, la structure euclidienne s'avérera inutile, alors qu'elle semblait nécessaire, a priori, pour parler d'intégrale, puisque la mesure, comme on l'a vu, provient du produit scalaire.

Plus précisément, on va décrire une série d'opérations d'intégration sur des variétés de dimension p, où l'intégrande est construit à partir soit d'une fonction soit d'un champ de vecteurs. Ces intégrales seront définies sur des cellules d'abord, puis étendues aux chaînes, par linéarité, et donc en particulier aux variétés ("régulières par morceaux", rappelons-le, est sous-entendu).

D'abord, $p = 0$. L'"intégrale" d'une fonction régulière φ "sur" le point x est par définition[43] $\varphi(x)$. Si le point est orienté, c'est-à-dire si on lui a attribué un signe $\varepsilon(x) = \pm 1$, l'intégrale est $\varepsilon(x)\varphi(x)$.

Ensuite, $p = 1$. Soit c une cellule de dimension 1. Au point $x = c(t)$, posons $\tau(x) = \partial_t c(t)/|\partial_t c(t)|$, d'où un champ de vecteurs tangents unitaires, qui

---

analysis was an interloper". Knott est oublié aujourd'hui, mais pas sans postérité.

43. C'est bien une intégrale au sens général, mais (le cas $p = 0$ est spécial à cet égard) à condition de se référer à la *mesure du dénombrement*, pour laquelle la mesure d'une partie A est égale au nombre de points distincts de A, si ce nombre est fini, à $+\infty$ sinon. En particulier, elle vaut 1 pour un ensemble réduit à un point.

oriente c. Un champ de vecteurs u étant donné, le produit scalaire $\tau \cdot u$ définit une fonction réelle sur l'image de c, que l'on peut intégrer, au sens classique, par rapport à la mesure des longueurs. On appelle *circulation* de u, le long de c ainsi orientée, l'intégrale $\int_c \tau \cdot u$ de cette fonction.

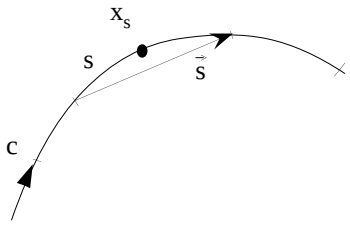

Figure 10. *Segment générique* s *d'une subdivision, avec son point* x_s *et son vecteur* $\vec{s}$ *joignant les extrémités, orienté dans le même sens que la courbe.*

REMARQUE.– Il est intéressant d'obtenir cette intégrale comme limite de sommes de Riemann (Fig. 10), comme en théorie élémentaire de l'intégration. Pour cela, c est coupée en petits morceaux, et on associe à chacun de ces segments curvilignes s un point x_s et un vecteur $\vec{s}$ comme l'indique la figure. La somme de Riemann correspondant à cette subdivision est alors $\sum_s u(x_s) \cdot \vec{s}$. L'intégrale $\int_c \tau \cdot u$ est la limite de ces sommes lorsqu'on raffine la subdivision. (Attention, ceci n'est pas une nouvelle définition de la circulation $\int_c \tau \cdot u$, mais une conséquence de la définition précédente, compte tenu des acquis de la théorie de l'intégration des fonctions.) ◊

EXERCICE 18. Montrer que si u est un champ de vecteurs régulier, l'application $c \to \int_c \tau \cdot u$ est bien continue. (Penser au Th. de Stokes.) ◊

Dans le cas $p = 2$, soit Σ une cellule de dimension 2 pourvue d'un sens de traversée. On peut choisir la paramétrisation $\{s, t\} \to \Sigma(s, t)$ de telle sorte que les vecteurs $\eta(s, t) = \partial_s\Sigma(s, t) \times \partial_t\Sigma(s, t)$ pointent dans le sens de traversée, et poser $n(x) = \eta(s, t)/|\eta(s, t)|$ au point $x = \Sigma(s, t)$, d'où un champ de vecteurs normaux unitaires, qui confère à Σ son orientation externe. Un champ de vecteurs u étant donné, le produit scalaire $n \cdot u$ définit une fonction réelle sur l'image de Σ, que l'on peut intégrer, cette fois par rapport à la mesure des aires. L'intégrale $\int_\Sigma n \cdot u$ de cette fonction s'appelle *flux* de u *à travers* Σ ainsi orientée.

REMARQUE.– Les sommes de Riemann sont cette fois $\sum_T \vec{T} \cdot u(x_T)$, où $\vec{T}$ est l'aire vectorielle de chaque triangle d'une subdivision de la surface (Fig. 11). ◊

EXERCICE 19. Montrer que si u est un champ de vecteurs régulier, l'application $\Sigma \to \int_\Sigma n \cdot u$ est bien continue. ◊

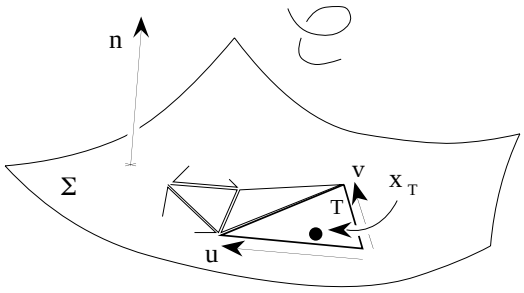

Figure 11. *Triangle générique* T *d'une subdivision, avec son point* x_T *et son aire vectorielle* $\vec{T}$*, de même orientation externe que la surface. Rappelons que* $\vec{T}$ = n aire(T). *Vérifier que* $\vec{T} = {}^1/_2\, u \times v$*, compte tenu de l'orientation ambiante indiquée par l'icône.*

Reste le cas $p = 3$, où l'intégrale $\int_V f$ d'une fonction f sur l'image V d'une cellule de dimension 3 est l'intégrale au sens usuel, par rapport à la mesure des volumes. Si V a une orientation externe, c'est-à-dire un signe $\varepsilon(V) = \pm 1$, l'intégrale est $\varepsilon(V) \int_V f$. Noter que l'orientation interne de V ne joue aucun rôle ici, ce qui s'accorde bien avec l'usage que l'on fait de ce type d'intégration: Physiquement, $\int_V f$ s'interprète en général comme la quantité dans V d'une substance (masse, charge, etc.) dont f est la *densité*, et la masse totale dans V, par exemple, ne dépend en rien du sens des tire-bouchons dans cette région. En revanche, une orientation *externe* de V peut être très utile lorsque $\int_V f$ s'interprète comme, par exemple, une quantité de chaleur produite dans V, ou au contraire absorbée, par unité de temps, le signe servant alors à codifier le sens des échanges (absorption ou production, "source" ou "puits").

On passe des cellules aux chaînes par linéarité. En dimension 0, où une 0-chaîne est une collection finie de points avec poids[44] $\{x_i, \mu_i\}$, l'intégrale de φ sur cette chaîne est $\sum_i \mu_i(x)\, \varphi_i(x)$. En dimension 1, la circulation de u le long de $c = \sum_i \mu_i\, c_i$ est $\sum_i \mu_i \int_{c_i} \tau \cdot u$. Le flux de u à travers la 2-chaîne tordue (attention!) $\Sigma = \sum_i \mu_i\, \Sigma_i$ est $\sum_i \mu_i \int_{\Sigma_i} n \cdot u$. L'intégrale de f sur la 3-chaîne tordue $\sum_i \mu_i\, V_i$ est $\sum_i \mu_i \int_{V_i} f$. Les variétés ayant été définies comme chaînes basées sur des cellules orientées, avec des poids $\mu^i = \pm 1$ qui jouent le rôle d'indicateurs d'orientation relative ($\mu^i = 1$ si l'orientation propre à la cellule est celle induite par la variété, -1

44. En toute rigueur, une 0-chaîne ordinaire est une collection finie de points *orientés*, c'est-à-dire de couples $\{x_i, \varepsilon_i\}$, où $\varepsilon_i = \pm 1$, chacun avec un poids μ_i. Mais c'est la même chaîne que celle formée par les couples $\{x_i, +\}$ avec poids $\varepsilon_i\mu_i$. De même, une 3-chaîne tordue est faite de couples $\{V_i, \varepsilon_i\}$ avec poids μ_i, mais on laisse le poids absorber le signe.

si ces orientations s'opposent), on a obtenu au passage la notion d'intégrale sur une variété, à orientation interne pour $p = 0$ ou 1, externe pour $p = 2$ ou 3.

Ainsi les intégrales les plus fréquentes en physique concernent des variétés à orientation interne de dimension ≤ 1, ou externes de dimension ≥ 2. Cette asymétrie peut paraître bizarre.[45] Mais puisque l'on travaille dans le cadre d'un espace euclidien *orienté,* cette orientation ambiante permet de passer des chaînes ordinaires aux chaînes tordues et vice-versa, ce qui rétablit la symétrie. Par exemple, ce qu'on appellera plus loin le flux "embrassé par" une surface S, intérieurement orientée, s'obtient en attribuant un sens de traversée à S grâce à la règle d'Ampère, puis en prenant le flux à travers S, comme précédemment. On a donc trouvé, au total, *huit* types d'intégrale, c'est-à-dire d'applications de type $CHAÎNE \to RÉEL$. Comment être sûr que c'est tout? Et n'y aurait-il pas une façon plus simple d'y arriver?

1.3.3. *Formes différentielles*

Effectivement, ces applications appartiennent à une catégorie d'objets que l'on peut définir plus directement sur un espace affine, sans recourir à une structure euclidienne.

DÉFINITION.–. *Une forme différentielle ordinaire* [resp. *tordue] de degré* p, *est une application* ω *sur l'espace vectoriel des* p*-chaînes ordinaires* [resp. *tordues], à valeurs réelles, linéaire et continue* (par rapport à la topologie introduite plus haut).

Il s'agit donc d'un élément du dual topologique de C_p [resp. de $\tilde{C}_p$], ce qui incite à mobiliser les ressources de l'analyse fonctionnelle et à introduire une topologie[46] aussi sur ce dual, que l'on notera, ainsi équipé, $\mathcal{F}^p$ [resp. $\tilde{\mathcal{F}}^p$]. Ainsi, les espaces C_p et $\mathcal{F}^p$ [resp. $\tilde{C}_p$ et $\tilde{\mathcal{F}}^p$] sont-ils mis *en dualité* par l'application bilinéaire

---

45. La remarque n'est pas nouvelle, on la trouve déjà en germe chez Darrieus [Da]. Firestone [Fi] a signalé l'opposition en physique entre deux types de champs ("across vs. through" variables) correspondant à ce qu'on décrit ici: ceux dont on prend la circulation *le long* d'une courbe (orientation interne), ceux dont on prend le flux *à travers* une surface (orientation externe). Voir [KB] et Tonti [Tn] pour des approfondissements de cette idée. En fait, la dichotomie "le long de"–"à travers" ne suffit pas à elle seule à classifier les objets auxquels on est amené à recourir.

46. Pour mémoire (car nous n'aurons pas besoin de ces détails par la suite), il s'agit de la topologie dite "forte" [Yo] ou "$*$-forte" [Sc], celle de la convergence uniforme sur les parties bornées de C_p [resp. de $\tilde{C}_p$]. Un ensemble B de p-chaînes est *borné,* au sens de C_p, s'il est *absorbé* par tout voisinage V de 0, c'est-à-dire si $\lambda B \subset V$ pour un certain $\lambda > 0$.

bicontinue $\{c, \omega\} \to \int_c \omega$, de type p-*CHAÎNE* × p-*FORME* → *RÉEL*. La notation habituelle pour de tels produits de dualité[47] étant $\langle c ; \omega \rangle$, nous nous servirons de cette construction comme variante de $\int_c \omega$, avec exactement la même signification.[48] Un produit de dualité doit être non dégénéré, en ce sens que $\langle c' ; \omega \rangle = 0$ pour tout c' implique $\omega = 0$, et $\langle c ; \omega' \rangle = 0$ pour tout ω' implique $c = 0$. Il en est bien ainsi, par définition de ω dans le premier cas, et parce que si c n'est pas nulle, on peut toujours construire un champ, scalaire ou vectoriel, d'intégrale non nulle sur c, d'où une forme ω pour laquelle $\langle c ; \omega \rangle$ ne serait pas nul, dans le deuxième cas.

Les huit formes d'intégrales ci-dessus correspondent aux huit types possibles de formes différentielles. On les notera, par ordre d'apparition, ${}^0\varphi$ (valeur de φ), ${}^1u$ (circulation de u), ${}^2\tilde{u}$ (flux de u), ${}^3\tilde{\varphi}$ (intégrale de φ, au sens ordinaire), et ${}^0\tilde{\varphi}$, ${}^1\tilde{u}$, ${}^2u$, ${}^3\varphi$. Ce n'est qu'une notation provisoire, qui sera abandonnée plus loin. Il faut interpréter le pré-exposant p, accompagné éventuellement du tilde, comme un *opérateur,* par lequel on transforme les champs scalaires ou vectoriels en formes différentielles. (Par exemple, le 1 et le tilde dans ${}^1\tilde{u}$ signifient que $\langle \gamma ; {}^1\tilde{u} \rangle$, où γ est une courbe munie d'un sens de contournement (i.e., une orientation externe), s'obtient ainsi: Utiliser l'orientation ambiante Or pour définir un champ de vecteurs tangent τ le long de γ, selon la recette expliquée plus haut (Fig. 2), puis poser $\langle \gamma ; {}^1\tilde{u} \rangle = \int_\gamma \tau \cdot u$.) Cet opérateur dépend de la structure euclidienne, et l'on jouera sur le style, ${}^{\mathbf{p}}$ et $\sim$ contre ^{p} et $\sim$, pour distinguer la structure $\{\circ, \mathbb{Or}\}$ de $\{\cdot, \mathrm{Or}\}$.

Cela dit, il faut nous demander ce que l'introduction du concept de forme différentielle fait gagner par rapport aux champs, scalaires, ou vectoriels. En bref, la réponse est, *du point de vue mathématique, pas grand chose,* du moins en dimension 3, *mais du point de vue de la modélisation, beaucoup.*

D'abord, puisque la construction de formes associées à un champ de vecteur ne fournit que des formes de degré $p = 1$ ou $n - 1$, les formes différentielles de degré intermédiaire, en dimension $n > 3$, sont des objets réellement nouveaux. Mais pour qui travaille en dimension 3, l'argument est de peu de poids.

47. À ne pas confondre avec un produit scalaire. Mais il y a un rapport: si l'on a un produit scalaire, on peut s'en servir pour mettre l'espace vectoriel en dualité avec lui-même.

48. L'avantage est l'égalité de statut entre formes et chaînes. De même que ω s'identifie à l'application $c \to \langle c ; \omega \rangle$, on peut identifier maintenant la chaîne c à l'application $\omega \to \langle c ; \omega \rangle$, c'est-à-dire à un élément du dual de $\mathcal{F}^p$. Ne pas en déduire que ce dernier, c'est-à-dire le *bidual* de C_p, se restreint à C_p. Il y a beaucoup plus de *courants,* comme on appelle les éléments de ce dual [Rh], que de chaînes. (Voir dans [Rm], p. 220, comment de Rham justifie cette terminologie.)

Ensuite, on pourrait penser à bien d'autres fonctionnelles linéaires sur l'espace des chaînes, pour $p = 1$ ou 2, que celles associées à un champ de vecteurs. Par exemple, si γ est une courbe fixe, avec orientation externe, le *nombre d'intersections* de γ avec une surface S à orientation interne, comptées algébriquement (± 1 selon que les orientations s'accordent ou non), noté $S \wedge \gamma$, fournit une application que l'on peut prolonger en une application linéaire sur l'espace des 2-chaînes. Mais elle n'est pas continue (Fig. 12).

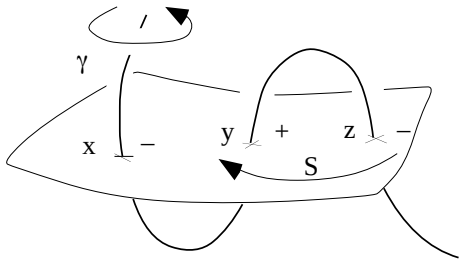

Figure 12. *Les orientations de* γ *et* S *s'accordent au point* y, *s'opposent en* x *et* z, *d'où ici* $S \wedge \gamma = -1 + 1 - 1 = -1$. *Si l'on déplace* S *de telle sorte que l'intersection avec* z, *par exemple, disparaisse,* $S \wedge \gamma$ *passe à* 0. *L'application* $S \to S \wedge \gamma$ *n'est donc pas continue sur* C_2.

EXERCICE 20. Donner un exemple de fonctionnelle linéaire non continue sur C_3.

Serait-ce alors que toute forme différentielle de degré 1 ou 2, en dimension 3, provient d'un champ de vecteurs (et d'une densité si le degré est 3) ? Effectivement. (La démonstration est assez difficile, et sera omise.[49]) Il existe un champ de vecteurs Ω, *représentatif* de la p-forme ω, tel que $\omega = {}^1\Omega$, dans le cas $p = 1$, et $\omega = {}^2\tilde{\Omega}$ dans le cas $p = 2$. Dans le cas $p = 3$, le champ représentatif Ω est scalaire, et $\omega = {}^3\check{\Omega}$, c'est-à-dire $\langle V ; \omega \rangle = \int_V \Omega$ pour tout volume V.

---

49. Elle s'appuie sur le théorème de représentation de Riesz. En gros: Soit ω, par exemple, une 1-forme, et v un champ de vecteurs. On construit à partir de v une 1-chaîne, exactement de la même façon qu'on représente un champ, graphiquement, par un nombre fini de flèches, c'est-à-dire de segments orientés s_i, dont chacune est une représentation approchée de v dans une région de volume μ_i. À v correspond donc ainsi la chaîne $c_\gamma = \sum_i \mu_i s_i$, où γ représente le "grain" de la représentation graphique. L'application $l(v)$ est prise égale à la limite de $\langle c_\gamma ; \omega \rangle$ pour $\gamma = 0$, d'où un champ de Riesz Ω tel que $\int_{E_3} \Omega \cdot v = l(v)$, et on montre que la circulation de Ω le long de la courbe c n'est autre que $\langle c ; \omega \rangle$. La continuité de ω sur C_1 intervient de façon cruciale dans cette preuve, en particulier pour montrer que l est continue sur $\mathbb{L}^2(D)$ pour tout domaine D borné de E_3. Bien entendu, le champ Ω dépend de la structure euclidienne.

La nouveauté par rapport aux cas examinés ci-dessus est que ces champs représentatifs peuvent être moins réguliers: Pour que la circulation $c \to \int_c \tau \cdot u$ [resp. le flux $\Sigma \to \int_\Sigma n \cdot u$] soit continue sur C_1 [resp. C_2], il suffit que la composante tangentielle [resp. normale] de u soit continue au passage de toute surface S. (EXERCICE 21. Le vérifier dans les conditions de la Fig. 13.) C'est ainsi que les "conditions de transmission" concernant des champs tels que E ou J vont s'imposer de façon naturelle.

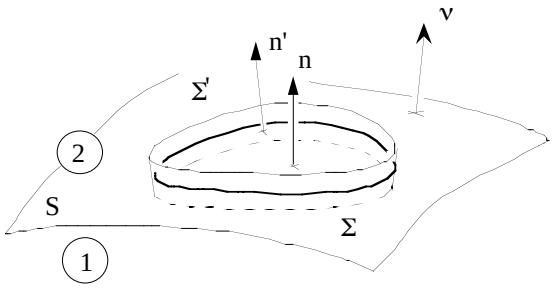

Figure 13. *L'interface* S *sépare deux régions où le champ de vecteurs* u *est régulier, tout en pouvant être discontinu au passage de* S. *Supposons que seule la composante normale* $n \cdot u$ *est continue, autrement dit le* saut $[n \cdot u]$ *au passage de* S *(i.e., la différence entre les valeurs de* $n \cdot u$ *dans la région* 1 *et la région* 2) *est nul. Dans ces conditions (invoquer le Th. de Stokes dans la région balayée par* Σ), *le flux de* u *à travers* Σ *ne subit pas de changement brusque lorsqu'on passe de* Σ, *dans la région* 1, *à* Σ', *dans la région* 2, *d'où la continuité du flux par rapport aux variations de* Σ.

EXERCICE 22. Montrer que la continuité par morceaux du champ scalaire Ω suffit à la continuité de ${}^3\tilde{\Omega}$.

En résumé, donc, la notion de forme différentielle, en dimension 3, étend et délimite la portée des notions de circulation, flux, etc., et aide à préciser la régularité des fonctions et champs de vecteurs en cause. Il s'agit là d'avantages marginaux, et le véritable intérêt de la notion se situe ailleurs: Les entités physiques auxquelles on a affaire, étant indépendantes de la structure euclidienne, sont mieux modélisées, plus directement, par des formes différentielles que par les champs représentatifs de celles-ci. On va maintenant développer cet argument, à l'aide de deux exemples.

Considérons une charge électrique Q (en coulombs), que l'on fait se mouvoir le long d'une courbe c, orientée par son champ de vecteurs tangents τ. Il s'agit d'une charge d'épreuve, avec Q assez petit pour ne rien changer au champ électromagnétique $\{E, B\}$ ambiant, et d'un déplacement *virtuel*, ce qui nous permet de considérer le champ comme figé à sa valeur à l'instant t. Un certain travail (virtuel) est mis en

jeu dans ce déplacement, égal à Q fois une quantité que l'on appelle *force électromotrice* (f.é.m.) *le long de* c, au temps t, exprimée en volts (c'est-à-dire en joules par coulomb). Aucune unité de longueur, aucun élément de la structure euclidienne, n'étant impliqués dans cette description, comment se fait-il que l'on trouve de tels éléments dans l'expression mathématique de cette f.é.m., à savoir la circulation $\int_c \tau \cdot E$ du champ électrique, et dans l'unité de mesure de E (le volt par *mètre)* ?

Parce que le champ E n'est pas l'observable physique, mais une entité dérivée, polluée en quelque sorte par la structure métrique, le véritable objet d'intérêt n'étant pas E lui-même mais sa circulation. Or si l'on change le produit scalaire, substituant comme plus haut $\circ$ à $\cdot$ (on rappelle que $u \circ v = Lu \cdot Lv$), et changeant du même coup la mesure des longueurs et le sens du mot "unitaire", la circulation de ce même E devient[50] $\int_c \tau \circ E = \int_c \tau \cdot L^a L\, E$, une autre valeur, sans signification physique. Mais ce calcul montre aussi qu'il existe un champ $\mathbb{E}$ tel que $\int_c \tau \circ \mathbb{E} = \int_c \tau \cdot E$, à savoir $\mathbb{E} = (L^a L)^{-1} E$. Conclusion: *Le champ de vecteurs* dont les circulations sont les f.é.m., c'est-à-dire celui *qui code les données physiques, dépend de la métrique,* alors que les données elles-mêmes n'en dépendent pas. Ce champ ne fait donc que *représenter* l'objet mathématique pertinent, qui est l'application $c \to$ <f.é.m. le long de c>, c'est-à-dire une forme différentielle de degré 1, que nous allons désormais noter e. Ainsi, rassemblant en une formule toutes les notations équivalentes utilisées jusqu'ici, on a

$$e = {}^1E = {}^1\mathbb{E} = c \to \langle c\,;\, e\rangle, \quad \text{où} \quad \langle c\,;\, e\rangle \blacksquare \int_c e = \int_c \tau \cdot E = \int_c \tau \circ \mathbb{E}. \tag{3}$$

Cette 1-forme (ordinaire) est le bon objet mathématique avec lequel représenter le champ électrique, car il contient toute l'information à son sujet, sans aucun élément de structure superflu: Les forces électromotrices le long des courbes spatiales sont en effet tout ce que l'on peut mesurer[51] concernant le champ électrique. (Il est bien

---

50. Pour ce type de calcul, assez périlleux, le mieux est de travailler sur les sommes de Riemann. Celles de $\int \tau \circ E$ sont de la forme $\sum_s v_s \circ E(x_s)$, et on a pour chaque terme, omettant les indices, $v \circ E = Lv \cdot LE = v \cdot L^a LE$, d'où le résultat.

51. La valeur du champ en un point n'est pas directement mesurable, mais n'en a pas moins un sens si le champ est assez régulier: Si l'on prend pour courbe c le segment $c_\lambda = [x, x + \lambda v]$, où v est un vecteur en x, la limite, notons-la $\langle e_x\,;\, v\rangle$, de $\langle c_\lambda\,;\, e\rangle/\lambda$ lorsque λ tend vers 0 dépend linéairement de v. L'application $v \to \langle e_x\,;\, v\rangle$, notée e_x, ou encore $e(x)$, est donc un élément du dual de l'espace des vecteurs tangents en x. On appelle cela un *covecteur* (en x). La 1-forme e peut ainsi être considérée comme un *CHAMP* de covecteurs, à savoir l'application $x \to e_x$. En coordonnées, les covecteurs d^i définis par $v \to v^i$, où v^i est la i^e composante de v au point x, forment une base pour les covecteurs en x. (Ce d^i est ce que l'on voit souvent noté dx^i, mais la notation d^i est meilleure, et recommandée.)

connu qu'un voltmètre mesure la circulation de E le long du chemin conducteur formé par ses fils de branchement [Ro].)

Au point que l'on peut se passer complètement de E, et introduire e directement, en raisonnant ainsi: le champ électrique (physique) est totalement décrit (quant à ses effets observables) par l'application, de type $1\text{-}CHAÎNE \to RÉEL$ que nous appelons e.m.f., dont l'expérience montre qu'elle est linéaire continue. Mais cela n'est autre que la définition d'une 1-forme. Cette forme e est ainsi la description mathématique la plus économique du phénomène champ électrique.

REMARQUE.– La dualité chaîne–forme prend ainsi un sens très concret: les 1-chaînes modélisent les *capteurs*, plus ou moins complexes, grâce auxquels on mesure le champ. La 1-forme représente le champ lui-même. Le produit de dualité, en volts, est le résultat de la mesure. $\Diamond$

On a annoncé deux exemples. Le second pourrait être le champ magnétique, qui rend compte des effets non pris en compte par e, à savoir les forces exercées sur des charges *en mouvement*. On verra plus loin comment le modéliser par une 2-forme ordinaire. Mais dans l'immédiat, un exemple concernant une 2-forme tordue sera plus instructif.

Considérons donc la densité de courant, classiquement un champ de vecteurs J, dont le rôle est d'indiquer, pour toute surface Σ extérieurement orientée par un champ normal unitaire n, la quantité de charge $\int_\Sigma n \cdot J$ qui la traverse par unité de temps. (Remarquer à nouveau que cette *intensité* est en ampères, alors que la dimension du vecteur représentatif J est A/m^2.) Cette application, $\Sigma \to$ <intensité à travers Σ>, une 2-forme tordue (à savoir, $\tilde{J}^2$), est tout ce que l'on peut connaître et éventuellement mesurer concernant le courant électrique, et la métrique ne joue aucun rôle ici. Pourtant, que l'on change $\cdot$ en $\circ$, ce qui change la mesure des aires, et le flux de J devient[52] $\int_\Sigma \mathbb{n} \circ J = |\det(L)| \int_\Sigma n \cdot J$. Le champ de vecteurs doit donc aussi être changé, en $\mathbb{J} = |\det(L)|^{-1} J$, pour obtenir la même intensité, c'est-à-dire pour avoir $\tilde{\mathbb{J}}^2 = \tilde{J}^2$. À nouveau, des vecteurs représentatifs différents, mais la même 2-forme tordue, qui s'avère ainsi être l'invariant physiquement significatif. On la notera j.

Ce mode de notation sera systématique: e, h, d, b, j, a, etc., dénoteront les formes différentielles que les vecteurs traditionnels E, H, D, B, J, A, etc., représentent.

Remarquer que $\langle \partial_i, d^j \rangle = \delta_i^{\ j}$, où les ∂_i sont les vecteurs de base en x.

52. Considérer à nouveau les sommes de Riemann, qui sont ici $\sum_T \mathbb{T} \circ J(x_T)$. D'après l'Exer. 11, $\mathbb{T} \circ J = L\,\mathbb{T} \cdot LJ = L^a L\,\mathbb{T} \cdot J = |\det(L)|\ T \cdot J$. D'où $\int_\Sigma \mathbb{n} \circ J = |\det(L)| \int_\Sigma n \cdot J$.

1.3.4. *Le théorème de Stokes*, grad, rot, div

Le statut du "théorème" de Stokes, dans notre approche, se réduit à celui d'une simple définition:

DÉFINITION.– *La* dérivée extérieure $d\omega$ *de la* $(p-1)$-*forme* ω *est la* p-*forme* $c \to \int_{\partial c} \omega$.

En langage ordinaire, donc: Pour intégrer $d\omega$ sur la p-chaîne c, intégrer ω sur son bord ∂c. (Ceci s'applique aux formes ordinaires ou tordues de la même façon.) Noter que d est bien définie, $d\omega$ étant continue grâce à la continuité de ∂ de C_{p-1} dans C_p. En symboles: $\int_{\partial c}\omega = \int_c d\omega$, qui est la forme canonique du théorème, ou de façon équivalente,

$$(4) \qquad <\partial c\ ;\ \omega> = <c\ ;\ d\omega> \quad \forall\, c \in C_p \text{ et } \omega \in \mathcal{F}^{p-1}$$

(avec des tildes sur C et $\mathcal{F}$ s'il s'agit de chaînes et de formes tordues), qui révèle mieux ce qui se passe: d est l'opérateur *dual* de ∂ [Yo]. Comme corollaire à (2), on a

$$(5) \qquad d \circ d = 0.$$

Une forme ω est dite *fermée* si $d\omega = 0$, et *exacte* s'il existe une forme α telle que $\omega = d\alpha$. (On dit qu'on a affaire à un *cocycle* ou un *cobord*, synonymes plus rébarbatifs en apparence, mais qui s'avèrent en fait plus faciles à mémoriser.) L'intégrale d'un cocycle sur un bord, ou d'un cobord sur un cycle, est nulle.

REMARQUE.– Dans A_n, tout cocycle est un cobord, i.e., toute forme fermée est exacte: c'est le *Lemme de Poincaré* (voir p. ex. [Sc], p. 140). Mais un cocycle peut ne pas être un cobord dans une variété plus générale: c'est l'aspect dual du "tout cycle n'est pas un bord" vu plus haut. Étudier les formes différentielles est donc une autre approche, duale par rapport à l'homologie, des questions de topologie globale. On l'appelle *cohomologie* [Jä, MT]. ◊

En dimension 3, le d est la version affine des opérateurs différentiels classiques grad, rot, div, qui eux dépendent de la structure euclidienne. Voyons cela.

D'abord, le gradient: Une fonction régulière φ étant donnée, on définit grad φ comme le champ de vecteurs tel que, pour toute cellule c de dimension 1 avec champ tangent τ,

$$(6) \qquad \int_c \tau \cdot (\text{grad}\ \varphi) = \int_{\partial c} \varphi,$$

le membre de droite étant bien sûr $\varphi(c(1)) - \varphi(c(0))$. Par linéarité, ceci s'étend aux 1-chaînes, et on y reconnaît (4). La relation entre gradient et dérivée extérieure, par conséquent, est donnée par ${}^1(\mathrm{grad}\,\varphi) = d\,{}^0\varphi \equiv d\varphi$, ce dernier terme étant ce qu'on appelle la *différentielle* de φ. (Le pré-exposant 0 peut être omis, car il n'y a qu'une façon de transformer une fonction en 0-forme, quelle que soit la métrique éventuelle.) Le champ de vecteurs $\mathrm{grad}\,\varphi$ représente la 1-forme $d\varphi$.

Ainsi défini,[53] $\mathrm{grad}\,\varphi$ dépend de la métrique. Si le produit scalaire $\circ$ est substitué à $\cdot$, le champ de vecteurs $\mathbf{grad}\,\varphi$ dont la circulation, au sens de $\circ$, égale le second membre de (6) est autre, à savoir $\mathbf{grad}\,\varphi = (L^aL)^{-1}\,\mathrm{grad}\,\varphi$, comme on l'a déjà vu.

Montant en degré, on définit rot et div de la même façon, de sorte que

(7) $${}^1(\mathrm{grad}\,\varphi) = d\,{}^0\varphi, \quad {}^2(\mathrm{rot}\,u) = d\,{}^1u, \quad {}^3(\mathrm{div}\,v) = d\,{}^2v.$$

Comme ${}^0\varphi$, ${}^1u$, ${}^2v$ sont ici des formes ordinaires, on pourrait penser que l'orientation ambiante importe peu ici, mais il n'en est rien, car les *représentants* de ces formes se transforment avec l'orientation, de façon quelquefois surprenante, comme on va le voir.

Concernant rot, (7) dit que le rotationnel $\mathrm{rot}\,u$ d'un champ régulier u est le champ de vecteurs tel que, pour toute surface S à orientation interne,

(8) $$\int_S n \cdot \mathrm{rot}\,u = \int_{\partial S} \tau \cdot u.$$

Ici, τ correspond à l'orientation induite sur ∂S, et on doit faire appel à l'orientation ambiante pour obtenir n, en invoquant la règle d'Ampère. Changer cette orientation change le signe de $\mathrm{rot}\,u$. Le rotationnel ressemble au produit vectoriel, à cet égard. Si de plus le produit scalaire change, $\mathbf{rot}$ et rot se correspondent comme suit:

PROPOSITION 1. *Avec* $u \circ v = Lu \cdot Lv$ *et* $\mathbb{O}r = \mathrm{sign}(\det(L))\,\mathrm{Or}$, *on a*

(9) $$\mathbf{rot}\,u = (\det(L))^{-1}\,\mathrm{rot}(L^aL\,u).$$

Démonstration. Du fait du caractère hybride de (8), où l'intégration porte sur une surface à orientation externe à gauche, et une ligne à orientation interne à droite, le calcul est délicat, donc soyons prudents. D'une part (Note 50), $\int_{\partial S} \tau \circ u =$

---

53. Attention, définir le gradient de φ comme le *vecteur* $\{\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi\}$ des dérivées partielles ne donne la même chose que si les vecteurs de base sont orthonormés. Autrement, il s'agit des composantes du *covecteur* $\sum_i \partial_i\varphi\, d^i$, et donc d'un autre sens donné au mot "gradient", ce gradient-là n'étant autre que $d\,{}^0\varphi$.

$\int_{\partial S} \tau \cdot L^a L\, u = \int_S n \cdot \mathrm{rot}\,(L^a L u)$. D'autre part (Note 52), posant $\mathbb{J} = \mathbb{rot}\, u$, nous savons que $\int_S \mathbb{n} \circ \mathbb{J} = |\det(L)| \int_S n \cdot \mathbb{J}$, et par conséquent ... Oui mais, les deux normales n et $\mathbb{n}$ étaient du même côté de la surface dans la Note 52, alors qu'ici (revoir la Fig. 2) elles pointent dans des directions opposées lorsque $\mathbb{O}\mathbb{r} \neq \mathrm{Or}$. La formule correcte est donc $\int_S \mathbb{n} \circ \mathbb{rot}\, u = \det(L) \int_S n \cdot \mathbb{rot}\, u = \int_S n \cdot \mathrm{rot}(L^a L\, u)$, d'où (9). ◊

Quant à la divergence, (7) définit $\mathrm{div}\, v$ comme la fonction telle que, pour tout volume V avec normale unitaire sortante n sur ∂V,

$$\int_V \mathrm{div}\, v = \int_{\partial V} n \cdot v. \tag{10}$$

Pas de problèmes dus à l'orientation cette fois, car les deux intégrales représentent des formes de même nature (tordues). De plus, $\mathbb{div}\, v = \mathrm{div}\, v$, car le même facteur $|\det(L)|$ apparaît des deux côtés de $\int_V \mathbb{div}\, v = \int_{\partial V} \mathbb{n} \circ v$. (Le style silhouetté $\int$ rappelle à quelle mesure on a affaire. Du côté gauche, celle des volumes est ici $|\mathbb{vol}|$, et $\mathbb{vol} = \det(L)$ d'après l'Exer. 11.)

REMARQUE.– Compte tenu de l'interprétation physique de div, son invariance n'est pas une surprise: Si l'on représente par v le champ des vitesses au sein d'un fluide, $\mathrm{div}\, v$ est le taux de variation du volume occupé par une même portion de fluide au cours de son mouvement, et bien que les volumes dépendent de la métrique, les *rapports* de volumes n'en dépendent pas (Exer. 11). ◊

EXERCICE 23. Montrer que le rotationnel du champ $x \to a \times ox$, où o est un point origine quelconque, et a un vecteur fixe, est égal à $2a$. Montrer que la divergence du champ $x \to ox$ est égale à 3.

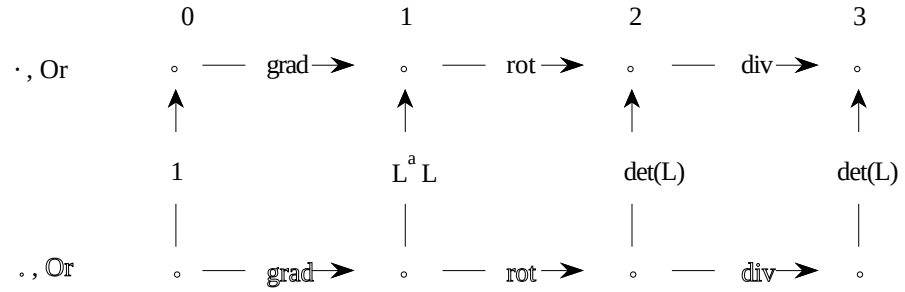

Figure 14. *Relations entre les vecteurs ou scalaires représentatifs d'une même forme différentielle ordinaire, en dimension 3, pour deux structures euclidiennes distinctes. S'il s'agit de formes tordues, le même diagramme convient, à condition de remplacer* $\det(L)$ *par* $|\det(L)|$.

Pour référence, on a rassemblé sur la Fig. 14 tous les résultats qui précèdent. Il s'agit d'un "diagramme commutatif", qui permet de lire des relations telles que $L^{a}L\,\mathbb{grad} = \mathrm{grad}$, etc., en enchaînant les opérateurs rencontrés lorsqu'on passe, par l'un des deux chemins possibles, d'un point au point diagonalement opposé dans l'un des carrés. (Les flèches verticales *figure*nt des isomorphismes et peuvent donc être suivies dans les deux sens.)

Comme exemple de ce que l'on peut faire avec de tels diagrammes, démontrons quelque chose que le lecteur a probablement déjà anticipé, à savoir l'invariance de la loi de Faraday par rapport à un changement de métrique et d'orientation. Soient B et E deux champs de vecteurs, dépendant du temps, tels que $\partial_t B + \mathrm{rot}\, E = 0$, puis posons $\mathbb{B} = B/\det(L)$ et $\mathbb{E} = (L^{a}L)^{-1}E$, de telle sorte que $\mathbb{B}$ et $\mathbb{E}$ représentent les mêmes formes différentielles b et e (et donc le même champ physique) dans la structure $\{\circ, \mathbb{O}r\}$ que B et E dans $\{\cdot, \mathrm{Or}\}$. On voit bien alors que $\partial_t \mathbb{B} + \mathbb{rot}\, \mathbb{E} = 0$. Nous nous tournons maintenant vers la loi physique unique exprimée par ces deux écritures.

1.4. Champs et formes en électromagnétisme

1.4.1. *L'induction magnétique, en tant que* 2*-forme*

La forme différentielle $b \equiv {}^{2}B \equiv {}^{\mathbf{2}}\mathbb{B}$ que représentent B et $\mathbb{B}$ rend compte de l'effet du champ électromagnétique sur des charges *mobiles*, comme suit. Considérons une boucle de courant de I ampères, que l'on fait se mouvoir — virtuellement, là aussi — de manière à balayer une surface S (Fig. 15). Le travail mis en jeu est alors $I \int_S n \cdot B$, comme l'explique la légende (règle du "flux coupé"). L'expérience établit la linéarité et la continuité du facteur $\int_S n \cdot B$, dit *flux magnétique*, par rapport à S. D'où une 2-forme, à nouveau la description la plus économique du champ magnétique (physique), que nous notons b, et appelons *induction magnétique.*

En dépit de la présence de n dans l'expression du travail virtuel, b n'est pas une forme tordue, mais bien une forme ordinaire — comme il se doit, puisque l'orientation ambiante ne saurait influencer le signe du travail virtuel. Ce qui compte est la direction du courant dans la boucle, donnant à c son orientation interne, et l'orientation interne de S est celle qui fait que $\partial S = c' - c$ ("position finale moins position initiale" dans le mouvement virtuel). L'intervention du champ normal n, par conséquent, résulte du souhait de représenter b par le flux d'un champ de vecteurs, le B tel que ${}^{2}B = b$. Pas étonnant dans ces conditions que B doive changer de signe avec l'orientation ambiante. En fait, il ne pourrait jouer son rôle de représentant de b *sans* cette orientation.

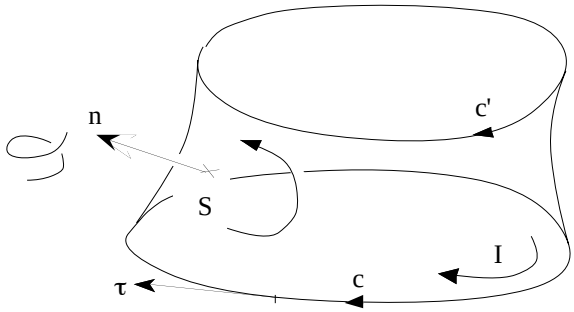

Figure 15. *Conventions graphiques pour l'analyse du travail virtuel dû à* B *sur une boucle de courant, dans un mouvement virtuel de la position* c *à la position* c'. *La normale* n *est celle associée par la règle d'Ampère à l'orientation interne de la surface* S *balayée, cette orientation étant choisie telle que* $\partial S = c' - c$. *Le travail virtuel de la force de Laplace* $J \times B$, *avec* $J = I\,\tau$, *est alors* I *fois le flux* $\int_S n \cdot B$.

Si l'on tient à ce que b soit représenté par un objet géométrique indépendant de l'orientation ambiante, il faut que cet objet porte avec lui, en quelque sorte, une telle orientation. On définit donc un *champ* de vecteurs *axial* comme un couple {v, Or}, constitué d'un champ de vecteurs et d'une orientation, ou plus exactement, puisque le couple {–v, –Or} va représenter la même 2-forme, comme la classe d'équivalence {{v, Or}, {–v, –Or}}. (On définit les champs scalaires axiaux de la même façon. On dit plus volontiers "pseudo-fonctions" dans ce cas.) Par souci de symétrie, on qualifie alors de "polaires" les champs de vecteurs tout court.[54] Les vecteurs axiaux permettent de représenter b sans orientation ambiante, mais ils supposent une métrique, dont nous allons voir qu'elle est en fait tout aussi superflue, donc leur utilité est très limitée. Il n'y a aucune objection de principe à leur emploi pour autant, pourvu qu'on les voie bien pour ce qu'ils sont, des outils mathématiques de représentation, et non les objets physiques eux mêmes. La table suivante (Fig. 16) peut alors être utile. (Voir [B2] pour les détails omis ici.)

54. Ce qui est une source inépuisable de confusion, car on risque prendre "polaire" et "axial" pour des adjectifs qualificatifs, alors que "vecteur axial" et "vecteur", tout court, sont en fait des objets de types différents. Le discours des physiciens à ce propos tend souvent à attribuer les propriétés de "polarité ou "axialité" aux phénomènes naturels, ce qui est consternant.

Nature du champ représentatif pour une forme différentielle	ordinaire *ou* tordue	*de degré*
fonction	polaire axiale	*0*
champ	polaire axial	*1*
champ	axial polaire	*2*
fonction	axiale polaire	*3*

Figure 16. *Nature des champs représentatifs en 3D* avec *produit scalaire mais* sans *orientation.*

Nous sommes maintenant en mesure d'apprécier la différence entre j et b, entre le flux du courant et le flux magnétique. La densité de courant j, une 2-forme tordue, est destinée à être intégrée sur des surfaces équipées d'une direction de traversée: le champ représentatif J (Fig. 16) est indépendant de l'orientation ambiante. L'induction magnétique b, une 2-forme ordinaire, est destinée à être intégrée sur des surfaces à orientation interne, dont le bord a donc un certain sens de parcours: le champ représentatif B doit changer de signe si l'on change l'orientation ambiante. Le courant, manifestement, *traverse* une surface, donc l'intensité est l'une de ces "through variables" de la Note 45. Mais penser au flux magnétique comme *traversant* la surface est incorrect. (Il faut plutôt penser au sens de la f.é.m. induite, comme on va le voir immédiatement.) D'où l'expression à l'emploi de laquelle on s'oblige ici, flux *embrassé par* une surface.[55]

1.4.2. *Faraday et Ampère*

On peut maintenant aborder l'expérience de Faraday: les variations du flux embrassé par une surface bordée par une boucle conductrice créent une f.é.m. dans celle-ci. Une assertion mathématique destinée à rendre compte de cette expérience avec le minimum de concepts établira donc une relation entre l'intégrale de b sur une surface S et celle de e sur son bord ∂S. Cette relation est

---

55. On voit bien là que l'opposition "across vs. through", outre qu'elle serait difficile à rendre en français, n'est qu'un mauvais substitut à l'opposition entre 1-formes et 2-formes tordues. En fait, entre surfaces et lignes d'une part, et deux types d'orientation d'autre part, c'est *quatre* entités vectorielles différentes que l'on rencontre en électromagnétisme, et le vocabulaire courant n'est pas assez riche (sans doute, en aucune langue) pour rendre compte de cette diversité. Une remarque analogue s'applique aux notions de variables "intensives" et "extensives" en Thermodynamique. Il s'agit en réalité de l'opposition entre 0-formes et 3-formes tordues.

(11) $\partial_t \int_S b + \int_{\partial S} e = 0 \quad \forall\, S \in C_2,$

c'est-à-dire pour toute 2-chaîne (ordinaire) et donc en particulier toute surface orientée. Les deux membres de (11) ont pour dimension physique le volt, et celle de $\int_S b$ est le *weber* (on rappelle que V = Wb/s). Que ∂S ait une orientation interne (d'où celle de S) est tout à fait conforme à la physique en jeu: Il y a deux façons d'insérer un galvanomètre dans le circuit formé par ∂S, donnant deux lectures de signes contraires de la f.é.m., et elles correspondent aux deux orientations. Appliquant le théorème de Stokes, ou plutôt, de la façon dont nous avons présenté les choses, la définition même de d, on trouve la version locale, infinitésimale, de (11):

(12) $\partial_t b + de = 0,$

version épurée — ni métrique, ni orientation — de $\partial_t B + \mathrm{rot}\, E = 0$.

Quant au "théorème d'Ampère", son expression est analogue, à ceci près que les formes différentielles en jeu sont tordues:

(13) $-\partial_t \int_\Sigma d + \int_{\partial\Sigma} h = \int_\Sigma j \quad \forall\, \Sigma \in \tilde{C}_2,$

c'est-à-dire, pour toute 2-chaîne tordue, et en particulier, toute surface Σ à orientation externe. Sa forme infinitésimale est

(14) $-\partial_t d + dh = j,$

de nouveau, la version purement affine de $-\partial_t D + \mathrm{rot}\, H = J$. Puisque j est une forme tordue, d doit aussi en être une, et h de même,[56] ce qui suggère que son représentant H ne va pas se comporter comme E en cas de changement de la structure euclidienne sous-jacente. Effectivement, on a $\mathbb{H} = |\det(L)|\,(L^a L)^{-1} H$ dans la notation employée plus haut. Si l'on n'avait qu'un produit scalaire mais pas d'orientation ambiante, le représentant H de h devrait être un vecteur axial, de même nature donc que B. Les représentants D et J seraient polaires, comme E.

À ce stade, nous pouvons annoncer la stratégie qui mènera à une forme discrétisée de (11) et (13): Au lieu d'exiger la validité de ces relations pour *toutes* les chaînes S ou Σ, on se contentera de l'assurer pour une famille *finie* de 2-chaînes, celles engendrées par les 2-cellules d'un maillage approprié, d'où un système d'équations différentielles. Mais d'abord, il nous faut traiter des lois de comportement liant b et d à h et e.

---

56. Une *force magnétomotrice* (m.m.f.), par conséquent, est une valeur réelle (avec pour unité l'ampère) attachée à une ligne γ, extérieurement orientée (et plus généralement, à une 1-chaîne tordue), à savoir le nombre $\int_\gamma h$.

1.4.3. *L'opérateur de Hodge*

Car on a là, en apparence, un sérieux problème: Puisque b et h, ou d et e, sont des objets de types distincts, de simples relations de proportionnalité entre eux, comme $b = \mu h$ ou $d = \varepsilon e$, où μ et ε seraient des facteurs scalaires, n'auraient aucun sens. Pour préserver cette façon d'écrire, comme il est bien sûr souhaitable, il nous faut considérer μ et ε comme des *opérateurs*, de type 1-*FORME* $\rightarrow$ 2-*FORME*, l'une des deux formes étant ordinaire et l'autre tordue.

Essayons donc de décrire l'opérateur qui fait passer de e à d. Cela revient à savoir évaluer $\int_\Sigma d$, pour toute surface Σ à orientation externe, lorsqu'on connaît l'intégrale $\int_c e$ pour toute ligne c, ainsi que le facteur scalaire ε dans la relation $D = \varepsilon E$. (Noter que cet ε peut dépendre de la position. Nous le supposons régulier par morceaux.) Comment faire?

La réponse est presque évidente lorsque Σ est un petit[57] morceau de plan. Construire alors un segment c orthogonal à Σ, et rencontrant Σ en un point de régularité de ε. Associer à c le vecteur $\vec{c}$ de même longueur qui va dans le sens de traversée de Σ, orienter c dans le sens de $\vec{c}$, considérer l'aire vectorielle $\vec{\Sigma}$ de Σ, et remarquer que $\vec{\Sigma} = [\text{aire}(\Sigma)/\text{longueur}(c)]\,\vec{c}$. Prenant le produit scalaire du membre de gauche avec D et de celui de droite avec εE, on trouve, en négligeant des termes d'ordre supérieur,

$$\int_\Sigma d = \varepsilon(x)\,\text{aire}(\Sigma)/\text{longueur}(\vec{c})\int_c e, \tag{15}$$

ce qui répond à la question.

Reste à lever la restriction sur la taille de Σ, ce qui se fait à nouveau à l'aide de sommes de Riemann: Découper Σ en petits triangles T, et les munir chacun d'un segment c_T, le rencontrant en x_T, avec $\vec{c}_T = \vec{T}$. Définir ensuite $\int_\Sigma d$ comme la limite des sommes[58] $\sum_T \varepsilon(x_T)\int_{c_T} e$. On peut alors définir l'opérateur ε, avec réemploi du symbole, comme l'application $e \rightarrow d$ que l'on vient de construire, de $\mathcal{F}^1$ dans $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^2$. Une définition analogue donne μ, de type $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^1 \rightarrow \mathcal{F}^2$, et les

---

57. Pour pallier l'absence de rigueur que ce mot trahit, on devrait traiter c et Σ comme des "p-vecteurs" (p = 1 et 2 respectivement), qui sont les infinitésimaux correspondant aux p-chaînes. Voir [B4] pour cette approche.

58. Les points de singularité de ε, où $\varepsilon(x_T)$ n'est pas défini, peuvent toujours être évités dans ce processus, à moins que Σ ne coïncide avec une surface de singularité, telle qu'une interface matérielle. Mais dans ce cas, on peut opérer sur une surface voisine de Σ, se retrouvant ainsi dans le cas régulier, et étendre la forme d à Σ par continuité.

opérateurs ε^{-1} et μ^{-1} allant dans l'autre direction. (Plus tard, on substituera ν à μ^{-1}.)

REMARQUE.– On laisse de côté le cas du matériau anisotrope, avec un tenseur (symétrique) ε^{ij} à la place du scalaire ε. En bref: Parmi toutes les métriques possibles, en choisir une qui ramène ε^{ij} à l'unité, et appliquer ce qui précède, en comprenant "orthogonalité", "longueur" et "aire" au sens de la nouvelle métrique. (Celle-ci peut alors dépendre de la position, ce qui déborde un peu du cadre euclidien où nous nous plaçons. Voir [B5] pour les détails.) ◊

REMARQUE.– Dans le cas $\varepsilon = 1$, ou $\mu = 1$, ce que nous venons de définir s'appelle *opérateur de Hodge* en géométrie différentielle classique [Bu, Sc], et se note $*$. Il change les p-formes, ordinaires ou tordues, en $(n - p)$-formes, tordues ou ordinaires, avec $** = \pm 1$, le signe dépendant de p et n. Il est facile (EXERCICE 24) de montrer que la construction ci-dessus équivaut à poser $*^1u = {}^2\tilde{u}$, d'où la définition ad-hoc suivante: $*^0\varphi = {}^3\tilde{\varphi}$, $*^1u = {}^2\tilde{u}$, $*^2u = {}^1\tilde{u}$, $*^3\varphi = {}^0\tilde{\varphi}$, conforme à celle qu'on trouve dans les ouvrages cités lorsque $n = 3$. Remarquer que $** = 1$ dans ce cas. ◊

On aura noté l'importance de la métrique dans la définition du Hodge: aire, longueur, orthogonalité, y contribuent. (L'orientation ambiante, en revanche, n'y joue aucun rôle.) Nous pouvons donc maintenant distinguer, parmi les équations de Maxwell, les deux principales, purement affines,

$$\partial_t b + de = 0, \tag{16}$$

$$-\partial_t d + dh = j, \tag{17}$$

et les deux lois de comportement

$$b = \mu h, \tag{18}$$

$$d = \varepsilon e, \tag{19}$$

où ε et μ, des opérateurs comme on vient de le décrire, sont les seuls éléments métriques de la théorie. Mieux, on peut démontrer que la donnée d'un opérateur de Hodge *détermine*, en dimension 3, un produit scalaire [B5], ce qui justifie le point de vue plus radical que ε et μ encodent l'information métrique [CT], et que les propriétés électromagnétiques du vide nous révèlent la structure métrique de l'espace.

1.4.4. *Les équations de Maxwell: Discussion*

Avec des conditions initiales sur e et h au temps $t = 0$, et sous quelques conditions concernant l'énergie totale du champ, sur lesquelles nous allons revenir, le système ci-dessus constitue un "problème bien posé", au sens mathématique du mot

(existence d'une solution, unicité, continuité du résultat par rapport aux données). Quelques points restent à préciser.

1.4.4.1. *Loi d'Ohm, conditions aux limites, conditions de transmission*

D'abord, rappelons que j est censé être donné. Mais introduire le loi d'Ohm à ce stade ne pose aucun problème: on remplace j dans (17) par $j^s + \sigma e$, où j^s est une 2-forme tordue donnée (le courant source) et σ un troisième opérateur de Hodge, analogue à ε et μ.

Deuxième point, les conditions aux limites, s'il s'en trouve. En dehors des "conditions aux limites absorbantes" [MR], non traitées ici, il y en a de quatre sortes, comme suit.

D'abord, les "parois électriques", c'est-à-dire les surfaces de conducteurs parfaits, dans lesquels $E = 0$, d'où la condition $n \times E = 0$ sur une telle paroi. Quant à la forme e, cela signifie que $\int_c e = 0$ pour toute courbe c contenue dans la surface. Ceci motive la définition suivante, donnée ici en dimension n pour la généralité: S étant une variété de dimension $n - 1$ (ou hypersurface), notons $C_p(S)$ l'espace des p-chaînes dont toutes les composantes appartiennent à S. Alors,

DÉFINITION.– *La* trace $t_S\omega$ *de la* p-*forme* ω *est la restriction de* ω *à* $C_p(S)$,

c'est-à-dire l'application $c \to \int_c \omega$ restreinte aux p-chaînes basées sur des p-variétés contenues dans S. Cela suppose bien sûr $p < n$. La condition au bord d'une paroi électrique S^e est donc $t_{S^e}\omega = 0$, que nous écrirons plutôt, pour la clarté, "$t\, e = 0$ sur S^e". Symétriquement, la condition $t\, h = 0$ sur S^h correspond à une "paroi magnétique" S^h.

Le Th. de Stokes montre que d et t commutent: $d\, t\, \omega = t\, d\, \omega$ pour toute forme ω de degré $n - 2$ au plus. Donc $t\, e = 0$ implique $t\, d\, e = 0$, d'où $\partial_t(t\, b) = 0$ d'après (16), c'est-à-dire, $t\, b = 0$ si l'on avait $b = 0$ à l'origine des temps. Pour l'interprétation physique de cette relation, observer que $t\, b = 0$ sur S^b signifie $\int_S b = 0$ pour toute surface S contenue dans S^b, on encore, en termes du champ B représentatif, $\int_S n \cdot B = 0$, ce qui implique $n \cdot B = 0$ sur tout S^b, donc pas de flux à travers S^b. Nous venons de prouver à nouveau, dans le langage des formes, que les parois électriques, i.e., parfaitement conductrices, sont aussi imperméables au champ magnétique. On peut voir de la même façon qu'un mur magnétique est aussi une "paroi isolante" ($t\, j = 0$, c'est-à-dire $n \cdot J = 0$, et $t\, d = 0$, c'est-à-dire $n \cdot D = 0$). Si j est donné avec $t\, j = 0$ à la frontière du domaine d'intérêt (ce qui est le cas le plus souvent), alors $t\, h = 0$ sur S^h implique $t\, d = 0$ ("paroi diélectrique"). Dans les problèmes de courants de Foucault, où d est négligé, mais j donné en partie

seulement, $t\,h = 0$ sur S^h implique $t\,j = 0$, donc pas de courant à travers l'interface.

Les conditions $t\,b = 0$ ou $t\,d = 0$ étant plus faibles que $t\,e = 0$ ou $t\,h = 0$, on peut vouloir les imposer indépendamment. Beaucoup de combinaisons sont ainsi possibles. En règle générale (mais il y a des exceptions en cas de topologie non triviale, cf. [B3]), le problème est bien posé dans un domaine D de surface S si S se subdivise en $S = S^e \cup S^h \cup S^{eh}$, avec $t\,e = 0$ sur S^e (paroi électrique), $t\,h = 0$ sur S^h (paroi magnétique), et les *deux* conditions $t\,d\,e = 0$ et $t\,d\,h = 0$ sur S^{eh}, ce qui correspond à $t\,b = 0$ et $t\,d = 0$ pris ensemble (frontière à la fois magnétique et diélectrique, ou dans le cas des courants de Foucault, paroi isolante).

REMARQUE.– On sera peut-être surpris de ne pas retrouver ici l'opposition classique entre conditions de Dirichlet et conditions de Neumann. En fait, une condition de Neumann n'est que la composition d'une condition de Dirichlet avec l'opérateur de Hodge et l'opérateur trace [B6]. Prenons par exemple la condition $n \times \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\,E = 0$, qui s'applique aux parois électriques pour un problème formulé en termes du seul champ E. Elle n'est autre, à une intégration en temps près, que la traduction en notation standard de $t\,h = 0$, c'est-à-dire la condition de Dirichlet $n \times H = 0$. En bref, les conditions de Neumann en e sont des conditions de Dirichlet en h, et vice-versa. L'opposition Dirichlet/Neumann n'est donc pertinente que si l'on élimine soit e soit h de manière à formuler le problème entièrement en termes de l'autre champ, rompant ce faisant la symétrie inhérente aux équations de Maxwell (ce que nous ne ferons pas sans y être forcés!) ◊

Troisième point, quid des équations manquantes (ou ressenties comme telles par qui prend un peu trop au sérieux le mythe des "quatre" équations de Maxwell), à savoir $\mathrm{div}\,B = 0$ et $\mathrm{div}\,D = Q$, où Q est la densité de charge? Ce ne sont pas réellement des équations, mais des conséquences des autres équations, ou tout au plus, des contraintes que les conditions initiales doivent satisfaire, comme on va le voir.

Définissons d'abord q, la charge électrique, dont Q est le champ scalaire représentatif. Puisque j rend compte de son flux, la conservation de la charge implique $d_t \int_V q + \int_{\partial V} j = 0$ pour tout volume V, une loi intégrale dont la forme infinitésimale est

$$\partial_t q + d\,j = 0. \tag{20}$$

Supposons q et j tous les deux nuls avant $t = 0$. Plus tard, donc, $q(t) = -\int_0^t (dj)(s)\,ds$. Noter que q, au même titre que $d\,j$, est une forme tordue, comme il

se doit pour quelque chose qui rend compte de la densité d'une substance. ("Densité" est d'ailleurs un synonyme usité pour "forme tordue" [Bu].)

Maintenant, si l'on admet qu'il n'existe aucun champ électromagnétique avant que ses sources (charge et courant électriques, i.e., q et j) n'aient pris des valeurs non nulles, tous les champs sont nuls jusqu'à $t = 0$, et donc en particulier, d'après (21), $d(t) = d(0) + \int_0^t [dh(s) - j(s)]\, ds$, d'où, grâce à (5), $d\, d(t) = -\int_0^t (dj)(s)\, ds \equiv q(t)$, à tout instant, d'où la relation $d\, d = q$ comme *conséquence* de la loi d'Ampère (17). [Ce n'est pas le même d. Regardez bien.] Pour b, le même calcul montre que $d\, b = 0$.

Les "conditions de transmission", classiquement $[n \times E] = 0$, $[n \cdot B] = 0$, etc., aux interfaces matérielles, ne sont pas non plus des équations, au sens de contraintes additionnelles que les inconnues e, b, etc., auraient à satisfaire. Elles sont satisfaites a priori, du simple fait d'avoir requis la continuité de ces formes différentielles par rapport aux chaînes sur lesquelles elles agissent (cf. Fig. 13). Autrement dit, ce sont déjà des propriétés de *tous* les candidats au statut de solution. De telles propriétés ne sont pas des *équations*, car on entend par là les conditions que satisfont seuls, parmi tous les candidats, le ou les élus.

1.4.4.2. *Produit extérieur, énergie*

Quatrième point, la notion d'énergie. La signification physique des intégrales du type $\int B \cdot H$, ou $\int J \cdot E$, est bien connue, et il est facile de montrer, à l'aide des relations de la Fig. 15, que ces deux quantités sont indépendantes de la métrique. On doit donc pouvoir les exprimer en termes purement affines. C'est ce que permet de faire le *produit extérieur,* une opération qui crée une $(p + q)$-forme $\omega \wedge \eta$ à partir d'une p-forme ω et d'une q-forme η. Nous ne le décrirons en détail que dans le cas d'une 2-forme b et d'une 1-forme h, ordinaire et tordue respectivement. (Les autres cas utiles s'en déduisent aisément par analogie.)

Le résultat de l'opération, c'est-à-dire la 3-forme (tordue) $b \wedge h$, est connu si l'on connaît les intégrales $\int_V b \wedge h$ pour tous les volumes V. De même que pour l'opérateur de Hodge, la chose est facile lorsque V est un petit parallélépipède, comme sur la Fig. 17, qui donne la recette à suivre. Observer que si $b = {}^2B$ et $h = {}^2\tilde{H}$, celle-ci donne bien $\int_V b \wedge h = B \cdot H\, \mathrm{vol}(V)$, d'où $\int b \wedge h = \int B \cdot H$, sur tout l'espace (grâce aux sommes de Riemann, comme d'habitude), ce qui montre bien la relation entre le produit extérieur, ainsi défini, et l'énergie.

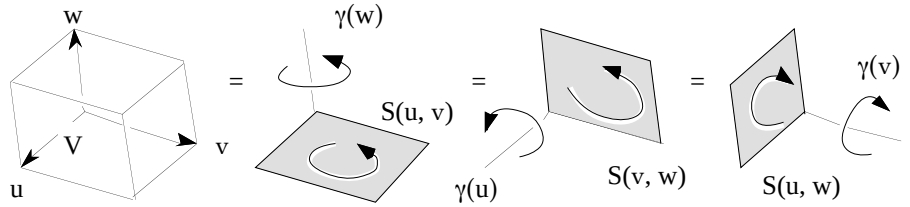

Figure 17. *Il y a trois façons, comme on le voit ici, d'obtenir le volume* V, *construit sur les trois vecteurs* u, v, w, *par extrusion d'une surface* S *selon un segment* γ. *Une définition naturelle de l'intégrale de* $b \wedge h$ *est alors* $\int_V b \wedge h = (\int_{S(u,\,v)} b)\,(\int_{\gamma(w)} h) + (\int_{S(v,\,w)} b)\,(\int_{\gamma(u)} h) + (\int_{S(w,\,u)} b)\,(\int_{\gamma(v)} h)$. *Noter que les orientations de* S *et* γ *doivent s'accorder (si l'orientation de* V *est +, comme on le suppose ici), mais sont à part cela arbitraires.*

REMARQUE.– Partant de l'égalité $\int b \wedge h' = \int B \cdot H'$, poser $b = \mu h$ donne $\int \mu\, h \wedge h' = \int \mu\, H \cdot H' = \int \mu\, H' \cdot H = \int \mu\, h' \wedge h$, une propriété de *symétrie* de l'opérateur de Hodge que l'on n'avait pas remarquée jusqu'à présent. Noter aussi que $\int \mu\, h \wedge h = \int \mu\, |H|^2 > 0$, sauf si $h = 0$. Des intégrales telles que $\int \mu\, h \wedge h'$, ou $\int \nu\, b \wedge b'$, peuvent donc être conçues comme des *produits scalaires* sur les espaces de formes différentiellles, ce qui fait de ceux-ci (après complétion, de manière à ce que toute suite de Cauchy ait une limite), des espaces de Hilbert. Les normes correspondantes, c'est-à-dire les racines carrées de $\int \mu\, h \wedge h$, ou $\int \nu\, b \wedge b$, et autres constructions similaires en e et en d, seront notées $|h|_\mu$, $|b|_\nu$, etc. ◊

D'autres produits extérieurs possibles sont ${}^0\varphi \wedge \omega = {}^0(\varphi\omega)$, par définition (et quel que soit le degré de ω), ${}^1u \wedge {}^1v = {}^2(u \times v)$ et ${}^2u \wedge {}^1v = {}^3(u \cdot v)$, par définition toujours. (EXERCICE 25: Compléter cette série de définitions pour tenir compte du cas où l'un des facteurs, ou les deux, sont des formes tordues.) Il est instructif aussi de calculer les dérivées extérieures de ces produits, à l'aide du Th. de Stokes, et d'écrire les équivalents des formules standards d'intégration par parties, telles que

$$\int_\Omega H \cdot \mathrm{rot}\, E - E \cdot \mathrm{rot}\, H = \int_{\partial\Omega} n \cdot (E \times H),$$

$$\int_\Omega D \cdot \mathrm{grad}\, \Psi + \Psi \cdot \mathrm{div}\, D = \int_{\partial\Omega} \Psi\, n \cdot D.$$

Ce sont, respectivement,

$$\int_\Omega (de \wedge h - e \wedge dh) = \int_{\partial\Omega} e \wedge h, \tag{21}$$

$$\int_\Omega (d\psi \wedge d + \psi \wedge d\, d) = \int_{\partial\Omega} \psi\, d. \tag{22}$$

Maintenant, considérons un champ "physiquement admissible", c'est-à-dire un quatuor de formes b, h, d, e, qui peuvent ne pas satisfaire les équations de Maxwell dans leur ensemble, mais doivent être chacune du degré et type (ordinaire ou tordue) qui conviendraient à cet égard.

DÉFINITION.– *Les quantités suivantes*

$$(23) \qquad {}^1\!/_2 \int \mu^{-1} b \wedge b, \quad {}^1\!/_2 \int \mu\ h \wedge h, \quad {}^1\!/_2 \int \varepsilon\ e \wedge e, \quad {}^1\!/_2 \int \varepsilon^{-1}\ d \wedge d,$$

s'appellent, respectivement, énergie magnétique, coénergie magnétique, énergie électrique *et* coénergie électrique. *L'intégrale* $\int j \wedge e$ *est la* puissance *cédée par le champ*.

Cette dernière définition, motivée par l'expression même de la force de Laplace (le courant étant Qv, la partie $v \times B$ de $E + v \times B$ ne travaille pas dans le mouvement réel des charges, la puissance mise en jeu est donc $Qv \cdot E$, donc $J \cdot E$,), est une assertion concernant les échanges d'énergie entre le champ et la matière, à partir de laquelle on pourrait justifier l'emploi du mot "énergie" dans la définition ci-dessus [B1]. La définition implique les relations suivantes:

$$ {}^1\!/_2 \int \mu^{-1} b \wedge b + {}^1\!/_2 \int \mu\ h \wedge h \geq \int b \wedge h,$$

$$ {}^1\!/_2 \int \varepsilon^{-1} d \wedge d + {}^1\!/_2 \int \varepsilon\ e \wedge e \geq \int d \wedge e,$$

avec égalité si et seulement si $b = \mu h$ et $d = \varepsilon e$. On peut donc exprimer les lois de comportement à l'aide de ces relations, en spécifiant qu'il doit y avoir égalité pour les champs que l'on recherche.

Nous pouvons maintenant préciser dans quelles circonstances les équations (16)–(18), avec conditions initiales et aux limites, forment un problème "bien posé": lorsqu'on cherche des solutions d'énergie finie. En l'absence de cette restriction, il y a des solutions non nulles dans le cas $j = 0$ (et donc, non-unicité), telles que par exemple les ondes planes.

Les intégrales dans (23) portent sur l'espace entier, ou tout au moins, sur toute la région où le champ n'est pas nul. On pourrait souhaiter n'intégrer que sur un certain domaine Ω, et rendre compte des échanges d'énergie entre cette région et le reste de l'espace. L'exercice est facile:

PROPOSITION 2 (Th. de Poynting): *Si le champ* $\{b, h, e, d\}$ *vérifie les équations de Maxwell* (16)–(19), *on a*

$$d_t [{}^1\!/_2 \int_\Omega \mu^{-1} b \wedge b + {}^1\!/_2 \int_\Omega \varepsilon\ e \wedge e] + \int_{\partial\Omega} e \wedge h = -\int_\Omega j \wedge e$$

pour tout domaine fixe Ω.

Démonstration. Prendre le produit extérieur de (16) et (17), à droite, par e et $-h$, ajouter, invoquer (21) et Stokes. $\Diamond$

Comme on le voit, toutes les égalités et inégalités dont on pourrait avoir besoin en vue d'une fomulation variationnelle de la théorie de Maxwell ont leur exacte contrepartie dans le langage des formes différentielles. Nous ne poursuivrons pas dans cette voie, toutefois, car ce qui suit n'est pas dans l'esprit des techniques variationnelles. Fermons plutôt cette Section sur une revue rapide des formes différentielles qui interviennent dans la théorie, et des rapports qu'elles entretiennent.

1.4.4.3. *La "maison de Maxwell"*

Au quatuor déjà évoqué et aux sources j et q, il convient d'ajouter le *potentiel électrique* ψ et le *potentiel vecteur magnétique* a, 0-forme et 1-forme ordinaires respectivement, telles que $b = d a$ et $e = -\partial_t a + d\psi$, ainsi que le *potentiel magnétique* φ (0-forme tordue) et la 1-forme tordue τ tels que $h = d\varphi + \tau$, forme dont le vecteur représentatif est le T de la "méthode T–Ω" de Carpenter [Cp]. Aucune de ces entités n'est aussi fondamentale que celles qui figurent dans (16)–(19), mais toutes peuvent jouer un rôle auxiliaire utile dans tel ou tel cas. On peut ajouter à la liste le *courant magnétique* k et la *charge magnétique* m (2- et 3-formes ordinaires respectivement), par souci de symétrie, bien que, semble-t-il [GT], il ne leur corresponde aucune réalité physique.

Pour référence, la Fig. 18 dispose toutes ces entités selon un diagramme unique, chacune "logée" selon son degré et sa nature en tant que forme différentielle. Puisque l'on est amené à considérer des dérivées et primitives en temps, on doit regrouper les formes en quatre familles, que figurent les quatre piliers verticaux du diagramme. Chaque pilier symbolise la structure constituée par les formes des quatre degrés possibles et les opérateurs d d'un degré (autrement dit, étage) à l'autre, formes ordinaires à gauche et formes tordues à droite. Différentiation ou intégration en temps lient chaque pilier avec son homologue en avant ou en arrière de lui, du même côté de la figure. Les poutres horizontales symbolisent les lois de comportement.

Comme on le voit, chaque objet a sa niche propre dans l'édifice: b, une 2-forme, au niveau 2 du côté "formes ordinaires", la 1-forme a telle que $b = d a$ juste au-dessus, etc. Les dissonances que l'on peut percevoir (nécessité d'intégrer τ en temps avant de le "loger", asymétrie de la loi d'Ohm ...) tiennent moins au

diagramme lui-même qu'à des faiblesses de la nomenclature courante ou (plus préoccupant) à quelque irrégularité dans la loi d'Ohm.[59] Les relations mentionnées jusqu'ici se lisent sur le diagramme, à quelques inversions de signe près. L'équation $\partial_t b + d e = -k$, par exemple, s'obtient en rassemblant dans la niche de k les contributions de ses deux voisines, en suivant les flèches, et la sienne propre. Remarquer comment les règles de la Fig. 16, concernant la nature "polaire" ou "axiale" des champs représentatifs, s'appliquent.

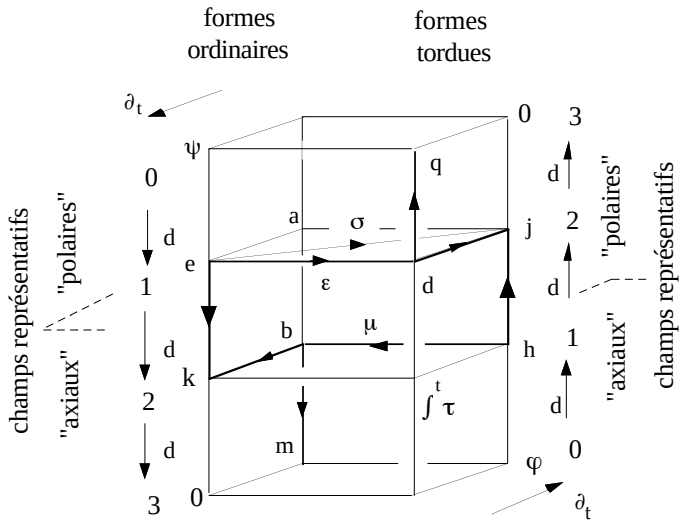

Figure 18. *Structures sous-jacentes au système des équations de Maxwell. Pour mieux mettre en évidence leur symétrie, la loi de Faraday est ici écrite* $\partial_t b + d e = -k$, *avec* $k = 0$. *(La 2-forme* k *représenterait le flux de charge magnétique, si de telles charges existaient. On aurait alors* $d b = m$, *où la 3-forme* m *représente cette charge, liée à son courant par la loi de conservation* $\partial_t m + d k = 0$.)

Mais le plus important ici reste sans doute la nette séparation, dans ce diagramme, entre les relations "verticales", purement affines, et les lois "horizontales", où la métrique intervient. Si ce n'était filer la métaphore un peu loin, on dirait qu'un changement de la métrique encodée dans les opérateurs ε et μ (qui peut provenir d'un simple changement des constantes physiques, sous l'effet de variations de température, de l'état de contrainte, etc.) secouerait la maison horizontalement sans en abattre les piliers.

59. Voir là-dessus **ICS Newsletter, 3,** 2 (1996), p. 7, **3 ,** 3 (1996), p. 14, et **4 ,** 1 (1997), pp. 17-8.

Ceci suggère une règle à suivre quant à la discrétisation des équations de Maxwell: Dans toute la mesure du possible, préserver les structures de la Fig. 18, en particulier s'assurer que la métrique n'intervient en rien dans la discrétisation des lois verticales.

1.5. Discrétisation des équations de Maxwell

Il est toujours bon de garder en mémoire un exemple caractéristique de la famille de problèmes que l'on cherche à modéliser. Ici nous avons surtout en vue les équations de Maxwell sous leur forme la plus générale, incluant les problèmes de propagation des ondes, mais les considérations heuristiques seront basées sur le cas beaucoup plus simple des champs statiques. L'exemple suivant est susceptible d'illustrer l'un ou l'autre cas, selon que la source du champ varie ou non avec le temps, et se prête de plus à d'autres variations utiles.

1.5.1. *Un problème modéle*

Dans une cavité fermée à parois métalliques parfaitement conductrices (Fig. 19), où il n'y a eu aucune activité électromagnétique antérieure, supposons que l'on entretienne à partir de l'instant $t = 0$, par des moyens qu'il n'y a pas lieu de préciser, un flux de charge électrique porté par une antenne intérieure. Un champ électromagnétique se crée, qui se propage à la vitesse de la lumière vers les parois, lesquelles se comportent, sitôt atteintes, comme des antennes réémettrices. Des corps diélectriques ou magnétiques présents dans la cavité peuvent aussi jouer ce rôle, d'où une évolution complexe, que seule la simulation numérique est en mesure de prédire.

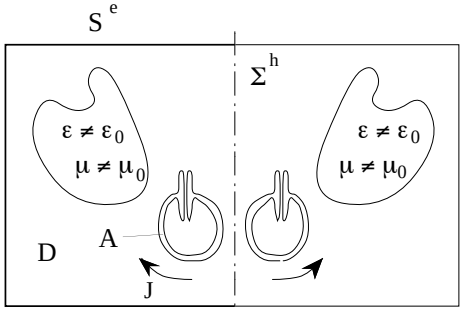

Figure 19. *Situation et notations (à imaginer en dimension 3). Le domaine de calcul* D *est la partie droite de la cavité. Sa frontière* S *comporte une partie* S^e *sur le bord métallique ("paroi électrique", au sens vu plus haut) et une partie* Σ^h *dans le plan de symétrie. La région* A*, partie gauche de l'antenne, est le support d'un courant de densité* J *donnée (que l'on retrouve par symétrie de l'autre côté), dont quelque générateur, non représenté et non inclus dans la modélisation, est responsable.*

Pour plus de généralité, supposons un plan de symétrie vertical, et un courant symétriquement distribué par rapport à ce même plan, de manière à avoir à la fois une "paroi électrique" et une "paroi magnétique" dans le modèle. Le calcul sera ainsi réduit à un domaine spatial D coïncidant avec une moitié de la cavité, celle de gauche, mettons. Notant S^e et Σ^h, comme sur la Fig. 19, les deux parts de sa surface, écrivons les équations à résoudre dans D:

$$\begin{aligned} &\partial_t b + d\,e = 0, && -\partial_t d + d\,h = j, \\ &d = \varepsilon\, e, && b = \mu\, h, \\ &t\,e = 0 \quad \text{sur } S^e, && t\,h = 0 \quad \text{sur } \Sigma^h. \end{aligned} \tag{24}$$

Les coefficients ε et μ sont réels, indépendants du temps, mais pas forcément égaux à leurs valeurs ε_0 et μ_0 dans le vide, et peuvent donc dépendre de la position x. (On peut même avoir affaire à des tenseurs, comme on l'a vu plus haut.) La densité de courant j est donnée, et on suppose $j(t) = 0$ pour $t \le 0$. Tous les champs, de plus, sont censés être nuls avant $t = 0$, d'où les conditions initiales $e(0) = 0$ et $h(0) = 0$. Remarquer qu'on ne suppose pas $d\,j = 0$: des charges électriques peuvent donc s'accumuler en certains endroits de l'antenne, en accord avec la loi de conservation de la charge, $\partial_t q + d\,j = 0$.

Pas plus que précédemment nous ne cherchons à prouver que ce problème est bien posé.[60] (Il l'est, sous des hypothèses raisonnables concernant j, si e et h sont supposés d'énergie finie à tout moment.)

Deux autres exemples seront utiles. Supposons que j a atteint une valeur stationnaire depuis assez longtemps pour que tous les champs soient désormais statiques. La partie magnétique du champ, c'est-à-dire le couple $\{b, h\}$, peut alors s'obtenir en résolvant, dans D,

$$\begin{aligned} &d\,b = 0, && d\,h = j, \\ &b = \mu\, h, \\ &t\,b = 0 \quad \text{sur } S^e, && t\,h = 0 \quad \text{sur } \Sigma^h. \end{aligned} \tag{25}$$

C'est aussi un problème bien posé (celui de la magnétostatique) à condition que $d\,j =$

60. Sa pertinence en tant que modèle a été mise en doute [SS], sous prétexte que l'hypothèse d'une densité de courant donnée dans l'antenne, tout à fait standard dans ce type de problèmes, revient à négliger la réaction de l'antenne au champ qu'elle crée. Ceci est bien sûr vrai — et bien d'autres simplifications pourraient aussi être discutées — mais l'objection révèle un malentendu sur ce qu'est la *modélisation*. (Voir dans [Um] la réponse à [SS].)

0. Quant à la partie électrique du champ, qui n'a pas de raison de s'annuler puisque la densité asymptotique de charge $q = q(\infty) = -\int_0^\infty dj(t)\,dt$ ne s'annule pas, sauf exception, on la trouvera en résolvant

$$\begin{aligned} d\,d &= q, & d\,e &= 0, \\ & & d &= \varepsilon\, e, \\ t\,e &= 0 \ \text{ sur } S^e, & t\,d &= 0 \ \text{ sur } \Sigma^h \end{aligned} \tag{26}$$

(modèle de l'électrostatique). On peut reconnaître dans (26), à peine caché par la notation inhabituelle, l'exemple le plus standard qui soit de problème aux limites elliptique.[61]

EXERCICE 26. Justifier les conditions aux limites dans (25) et (26).

Donnons enfin un exemple de problème de courants de Foucault en régime harmonique, en supposant une conductivité $\sigma \geq 0$ dans D et $\sigma = 0$ dans A. Cette fois, tous les champs sont de la forme $u(t, x) = \mathrm{Re}[\exp(i\omega t)\, U(x)]$, avec U complexe (noté en PETITES CAPITALES). Le courant donné dans A, maintenant noté J^s (s pour "source"), est solénoïdal, les courants de déplacement sont négligés, et on applique la loi d'Ohm, $J = J^s + \sigma E$, où σ est interprété comme un opérateur de Hodge, mais semi-défini positif seulement (la conductivité peut s'annuler dans une partie de D). Le problème est alors, avec les mêmes conditions aux limites que ci-dessus,

$$d\,H = \sigma E + J^s, \quad H = \nu B, \quad d\,H = -i\omega B,$$

et l'on peut éliiner B et H, d'où une équation du deuxième ordre en E:

$$i\omega\sigma E + d\,\nu\,d\,E = -i\omega J^s, \tag{27}$$

avec les conditions aux limites $t\,E = 0$ sur S^e et $t\,\nu\,d\,E = 0$ sur Σ^h.

Rien n'empêche σ et μ d'être complexes également. (On suppose toutefois qu'ils ont la symétrie hermitienne, en tant qu'opérateurs.) Un μ complexe peut parfois servir à modéliser, même si c'est de façon assez grossière, l'hystérésis ferromagnétique. Et puisque le vrai σ peut être remplacé par $\sigma + i\omega\varepsilon$, on n'est pas

---

61. Il suffit de changer de symboles pour trouver l'équation de la chaleur stationnaire, celle du flux en régime établi d'un liquide dans un milieu poreux, etc. Remarquer en particulier comment le modèle de l'électrocinétique, avec loi d'Ohm, peut s'écrire $d\,j = 0$, $j = \sigma e$, $d\,e = 0$, plus des conditions aux limites (non homogènes, pour introduire les termes source).

tenus de laisser tomber les courants de déplacement, après tout. Donc (27) peut être conçu comme la forme la plus générale des équations de Maxwell en régime harmonique, à la pulsation ω, en présence éventuellement de matériaux dissipatifs. En particulier, (28) peut servir de modèle pour le problème du four micro-ondes. Noter que (28), du point de vue mathématique, est une équation de Fredholm, comme on le voit en supprimant le second membre et en remplaçant σ par $i\omega\varepsilon$ (où ω peut être complexe): Il reste alors un problème aux valeurs propres, correspondant aux fréquences de résonance de la cavité: trouver ω tel que $d \star d E = \omega^2 \varepsilon E$ ait une solution E non nulle.

1.5.2. *Maillage primal*

Définissons ce qu'on va appeler "pavage cellulaire". Ce n'est guère différent d'un maillage pour éléments finis, mais un peu plus général, et on aura besoin de définitions précises. On travaillera dans l'espace euclidien E_n, mais bien entendu $n = 3$ est le cas utile. Les cellules dont il va être question sont celles introduites plus haut[62] (Fig. 8) avec cette importante précision qu'il s'agit ici des cellules "ouvertes", c'est-à-dire ne contenant pas leurs frontières. (La seule exception est pour $p = 0$, les points, qui sont des cellules à la fois ouvertes et fermées.) La cellule fermée correspondante sera notée avec une barre supérieure (comme la fermeture topologique).

Nous dirons que le pavage est *fermé* si R est fermé. (On en a un exemple en dimension 2 à gauche de la Fig. 20, où $R = \overline{D}$.) Un pavage n'est pas forcément fermé, on peut au contraire vouloir omettre certaines cellules afin d'exprimer certaines conditions aux limites. D'où la notion de "fermeture relative": C étant une partie fermée de R, on dira qu'un pavage de R est *fermé relativement à* C s'il peut être obtenu en retirant d'un pavage fermé toutes les cellules dont l'image se trouve dans C. Le cas dont nous aurons à traiter, celui d'un pavage de $R = \overline{D} - S^e$ qui est fermé modulo S^e, est représenté à droite de la Fig. 20. L'idée est de "paver $\overline{D}$ d'abord, puis retirer toutes les cellules de la paroi électrique".

---

62. Il s'agit donc de cellules régulières, mais ceci n'est pas strictement nécessaire, et "régulières par morceaux" suffit. On s'en tiendra tacitement à cette condition moins stricte par la suite.

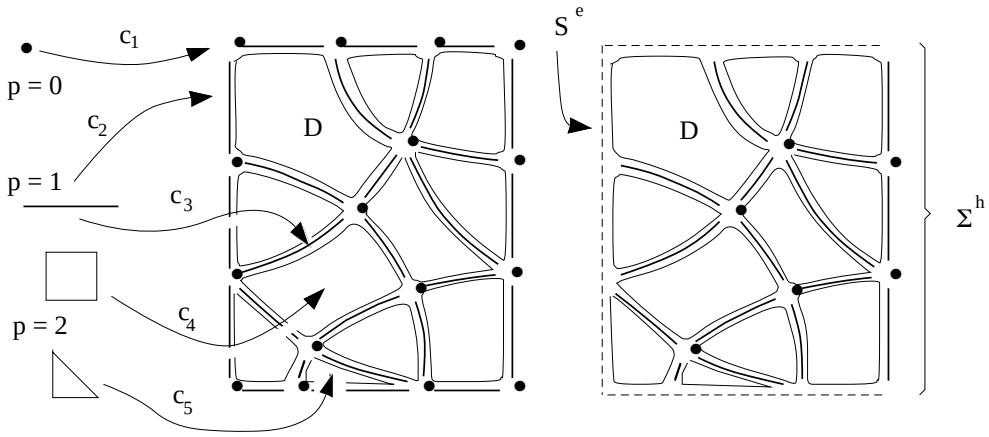

***Figure* 20**. *Gauche: Quelques* p*-cellules, contribuant à un pavage cellulaire fermé de* D *(à imaginer en dimension 3). Droite: Un pavage réduit, cette fois "fermé relativement à"* S^e*, en vue de la modélisation qui va suivre, où les cellules de* S^e *porteraient des degrés de liberté nuls si on les gardait, de sorte qu'on peut les éliminer d'emblée.*

Chaque cellule a sa propre orientation. Celles-ci sont arbitraires et indépendantes. En dimension 3, nous noterons $\mathcal{N}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{V}$ les ensembles de p-cellules orientées et N, A, F, V leurs cardinaux. (La notation générique, rarement nécessaire, sera S_p pour l'ensemble des p-cellules et S_p pour le nombre de celles-ci.)

À deux cellules σ et c, de dimensions respectives p et p + 1, on attribue un *nombre d'incidence,* égal à ± 1 si σ est une face de c, et à 0 sinon. Quant au signe, rappelons que chaque cellule oriente sa propre frontière, de sorte que l'orientation propre à σ peut coïncider ou non avec celle induite par c. Le signe est + ou – en conséquence. La Fig. 21 illustre ce point. (Revoir aussi la Fig. 9.)

Rassemblant ces nombres en tableaux, on obtient des matrices rectangulaires **G**, **R**, **D**, appelées *matrices d'incidence* du pavage. Par exemple (Fig. 21), le nombre d'incidence de l'arête a sur la facette f est noté $\mathbf{R}_f^a$, et constitue un élément de la matrice **R**, dont les lignes et colonnes sont indexées sur les facettes et les arêtes respectivement. L'élément $\mathbf{G}_a^n$ de **G** est – 1 dans le cas représenté, parce que n, positivement orienté, est au départ de l'arête a (Fig. 7, gauche). Et ainsi de suite. Les symboles **G**, **R**, **D** sont bien sûr choisis de manière à évoquer grad, rot, div, bien que nous ayons encore du chemin à faire pour comprendre le

rapport entre les uns et les autres. Une chose toutefois devrait être claire dès à présent: contrairement à grad, rot, div, les matrices d'incidence sont *indépendantes de la métrique*, donc l'analogie ne peut être totale. Les matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{D}$ sont plus proches de ce point de vue de l'opérateur d, et le symbole générique $\mathbf{d}$, indexé par la dimension s'il le faut ($\mathbf{d}_0 = \mathbf{G}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{R}$, $\mathbf{d}_3 = \mathbf{D}$) conviendrait mieux, mais la valeur mnémonique de $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{D}$ justifie leur emploi.

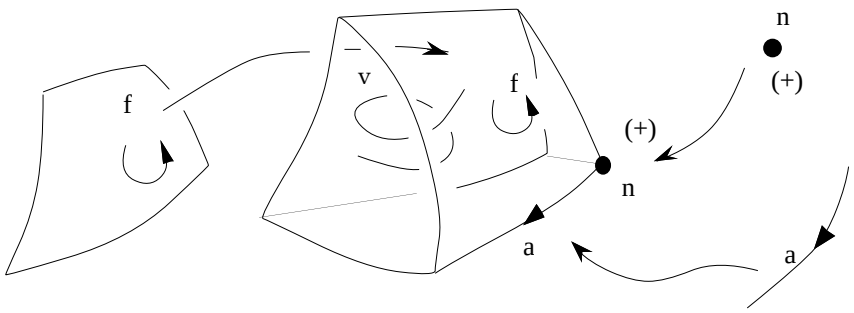

Figure 21. *Côtés: Cellules orientées isolées. Milieu: Les mêmes, plus une 3-cellule, censées faire partie d'un pavage, avec indication des orientations relatives. Celles de* v *et* f *s'accordent, mais pas celles de* f *et* a, *ni de* a *et* n, *d'où* $\mathbf{G}_a^{\,n} = -1$, $\mathbf{R}_f^{\,a} = -1$, et $\mathbf{D}_v^{\,f} = 1$.

De même que rot o grad = 0 et div o rot = 0, on a $\mathbf{GR} = 0$ et $\mathbf{DR} = 0$. En effet, pour une arête a et un volume v, l'élément {v, a} de $\mathbf{DR}$ est $\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{D}_v^{\,f} \mathbf{R}_f^{\,a}$. Les termes non nuls, dans cette sommation par rapport aux facettes, apparaissent lorsque la facette contient a tout en étant une face de v, ce qui n'arrive que si a appartient à $\bar{v}$. Mais dans ce cas, il y a exactement deux facettes f et g se rencontrant le long de l'arête a (Fig. 22) et donc deux termes non nuls. Comme la Fig. 22 le montre, ils sont de signes opposés, quelles que soient les orientations propres des cellules, d'où le résultat, $\mathbf{DR} = 0$. Par un argument analogue, $\mathbf{GR} = 0$, et plus généralement, $\mathbf{d} \circ \mathbf{d}_p = 0$.

REMARQUE.– La question naturelle est alors, "dans ces conditions, le noyau de $\mathbf{R}$ est-il égal au codomaine de $\mathbf{G}$?", et la réponse est "oui", dans la mesure où $\bar{D} - S^e$ est topologiquement simple, simplement connexe en l'occurrence. (Voir la Remarque p. 1.18 au sujet de l'homologie. Cette fois, aller plus loin nous entraînerait dans la *co*homologie.) Sous la même restriction, $\ker(\mathbf{D}) = \mathrm{cod}(\mathbf{R})$. Ceci sera important plus loin. ◊

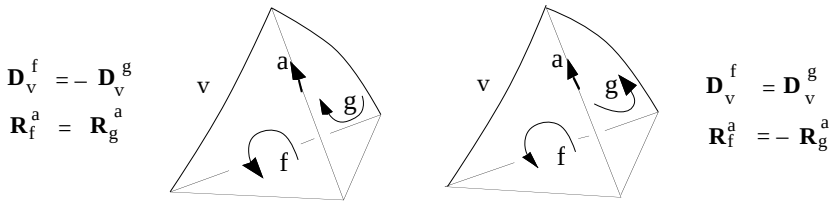

Figure 22. *La relation* $\mathbf{DR} = 0$, *et son indépendance par rapport aux orientations propres aux cellules. On voit que* $\mathbf{D}_v^f \mathbf{R}_f^a + \mathbf{D}_v^g \mathbf{R}_g^a = 0$ *dans les deux cas de figure.*

Ce n'est pas par hasard que cette démonstration du fait que $\mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$ ressemble à celle faite plus haut à propos de $\partial \circ \partial = 0$ (légende de la Fig. 9). La même observation fondamentale, "le bord du bord est 0" [KW, TW], y est à l'œuvre. En fait, les matrices d'incidence ci-dessus encodent la définition des bords de chaque cellule, en tant que chaîne. Par exemple, f étant conçue comme la 2-chaîne basée sur la facette f avec le poids 1, on a $\partial f = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f^a \, a$. Donc si S est la 2-chaîne $\sum_f w^f f$ avec poids w^f (ce que nous appellerons une chaîne *primale*, ou "*m*-surface", usant de *m* comme mnémonique pour le maillage sous-jacent), son bord est la 1-chaîne

$$\partial S = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{R}_f^a \, w^f \, a.$$

Plus généralement, si l'on note par $\boldsymbol{\partial}_p$, en gras,[63] la transposée de la matrice $\mathbf{d}_{p-1}$ ci-dessus, le bord de la p-chaîne $c = \sum_{\sigma \in S_p} w^\sigma \, \sigma$ est la (p – 1)-chaîne $\partial c = \sum\{s \in S_{p-1} : (\boldsymbol{\partial}_p \mathbf{w})^s \, s\}$, où $\mathbf{w}$ est le tableau des poids w^σ. Ainsi, $\boldsymbol{\partial}$ est à ∂ ce que $\mathbf{d}$ est à d. De plus, la dualité entre d et ∂ se retrouve entre leurs homologues en dimension finie $\mathbf{d}$ et $\boldsymbol{\partial}$.

1.5.3. *Maillage dual*

Le maillage *dual* de D est aussi un pavage cellulaire, mais pas exactement de la même région, et avec orientation *externe* de chaque cellule. Expliquons.

À chaque p-cellule c du maillage primal, attribuons une (n – p)-cellule unique, dite *duale* de c, notée $\tilde{c}$, rencontrant c en un unique point x_c. D'où une correspondance biunivoque entre cellules de dimensions complémentaires. Par exemple,

63. On se sert des caractères gras pour tout ce qui est lié à la discrétisation, matrices d'incidence, tableaux de degrés de liberté, etc. Le tilde connote les objets duaux, comme dans $\tilde{c}$, duale de c.

la facette f est percée par l'arête duale $\tilde{f}$ (une ligne), le nœud n est à l'intérieur du volume dual ñ, et ainsi de suite. Puisque les espaces tangents à c et $\tilde{c}$ en x_c sont complémentaires, l'orientation interne de c fournit à $\tilde{c}$ une orientation externe (Fig. 23). Des matrices d'incidence $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ peuvent être définies comme précédemment, le signe de chaque entrée étant + ou – selon que les orientations externes des cellules en cause s'accordent ou non.

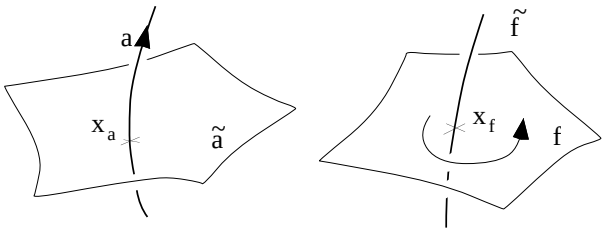

Figure 23. *Les orientations internes de l'arête* a *et de la facette* f, *respectivement, donnent à* ã *un sens de traversée et à* $\tilde{f}$ *un sens de contournement.*

De plus, on demande que si c est une face de c' la duale $\tilde{c}'$ soit une face de $\tilde{c}$, et vice-versa. Ceci a deux conséquences; D'abord, il n'est pas vraiment besoin de nouveaux symboles tels que $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ pour les matrices d'incidence. Considérons en effet une arête a et une facette f telles que $\mathbf{R}_f^a = 1$, c'est-à-dire à orientations accordées: Alors l'arête duale $\tilde{f}$ est une face de la facette duale ã, dont les orientation externes s'accordent aussi, par conséquent. Donc ce qu'on aurait à écrire $\tilde{\mathbf{R}}_{\tilde{a}}^{\tilde{f}}$ est en fait égal à $\mathbf{R}_f^a$. Même égalité si $\mathbf{R}_f^a = -1$, et même raisonnement pour les autres types de cellules, dont on conclut que les matrices d'incidence duales $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ ne sont autres que les transposées $\mathbf{D}^t$, $\mathbf{R}^t$, $\mathbf{G}^t$ des primales.

Deuxième conséquence, il n'y a aucun vide entre les cellules duales, qui forment donc un pavage cellulaire d'une région connexe $\tilde{R}$, dont l'intérieur $\tilde{D}$ coïncide presque avec D (Fig. 24). Une part de sa frontière est pavée par des cellules duales: Nous l'appelons $\tilde{S}^e$, compte tenu de sa parenté avec S^e (pas si évidente sur ce dessin, mais qui s'affirmerait si l'on raffinait le maillage). L'autre partie est notée $\tilde{\Sigma}^h$. Ce pavage cellulaire est donc fermé modulo $\tilde{\Sigma}^h$, alors que le primal l'était mod. S^e.

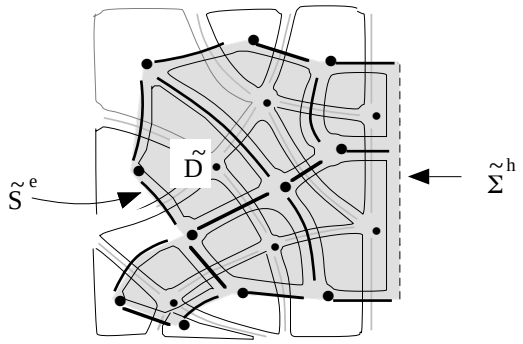

Figure 24. *Un pavage dual, superposé au primal précédent.*

Le maillage m étant donné, tous ses duaux concevables ont la même structure combinatoire (mêmes matrices d'incidence), mais peuvent différer en ce qui concerne leurs propriétés métriques, ce qui laisse beaucoup de latitude pour construire des maillages duaux. Deux parmi ces possibilités sont particulièrement importantes, l'une menant au "dual barycentrique" et l'autre au "dual de Voronoi–Delaunay". Nous allons les présenter comme cas particuliers de deux procédures un peu plus générales, dites "construction en étoile" et "construction orthogonale" de maillages en dualité. Pour ce faire nous nous restreindrons à des maillages primaux polyèdres (ceux n'ayant que des polyèdres pour 3-cellules), ce qui n'est pas trop contraignant en pratique.

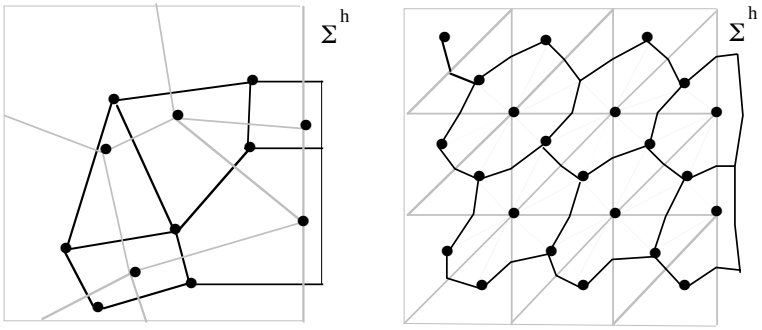

Figure 25. *Gauche: Dual orthogonal. (Mêmes conventions graphiques que pour la Fig. 24, légèrement simplifiées.) Droite: Construction en étoile d'un maillage dual (assez proche ici d'un maillage barycentrique, mais pas identique). Remarquer l'arête duale isolée, et le tracé arbitraire des cellules duales au-delà de* Σ^h.

La construction orthogonale consiste à faire en sorte que chaque cellule duale rencontre orthogonalement son homologue dans le primal (parties gauches des Figs 7 et 9). Un cas particulier est le maillage de Voronoi–Delaunay, à la condition que les sommets duaux soient bien à l'intérieur des volumes primaux. Malheureusement, comme la Fig. 26 l'illustre, l'orthogonalité peut être impossible à assurer, si le maillage primal est imposé. Si l'on part d'un maillage primal *simplicial* (i.e., à volumes tétraèdres) tel que toutes les sphères circonscrites aient leurs centres à l'intérieur des tétraèdres, tout va bien. (On prend ces centres commes nœuds duaux.) Mais cette propriété, souhaitable à beaucoup d'égards, n'est pas garantie par les générateurs de maillage courants.

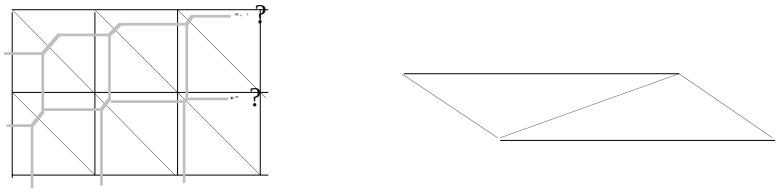

Figure 26. *Gauche: Même un maillage primal très régulier peut ne pas avoir de dual orthogonal décent. Droite: Probablement le cas le plus simple de maillage n'admettant aucun dual orthogonal.*

D'où l'intérêt de la construction en étoile, plus générale, car elle s'applique à tout maillage primal à cellules étoilées. Une partie A de A_n est dite *étoilée* si elle contient un point a, que nous appelerons un *centre*, tel que tout le segment $[a, x]$ appartienne à A si x appartient à A. Choisissons un tel centre dans chaque cellule primale (le centre d'un sommet est lui-même), et joignons-le aux centres de toutes les faces de la cellule. On obtient de cette façon des sous-cellules simpliciales, que l'on réarrange ainsi pour construire le dual: Pour chaque cellule primale c, assembler toutes les sous-cellules de dimension $k \leq n - p$ qui ont un de leurs sommets au centre de c, et chaque autre sommet au centre d'une cellule dont c est une face. Les Figs 7 et 9, à droite, donnent l'idée. Lorsque toutes les cellules primales sont des simplexes, prendre leurs barycentres comme centres donne naissance par ce procédé au *dual barycentrique* déjà évoqué.

REMARQUE.– La recette ne dit rien sur les duales des cellules de Σ^h, dont les formes en dehors de D peuvent être définies à loisir (sous les conditions de dualité). Rien là de préoccupant: Ces choix sont aussi arbitraires, ni plus ni moins, que ceux des centres des cellules, et contribuent de la même façon à l'erreur d'approximation, que l'on peut réduire à volonté par raffinement.[64] ◊

64. Un *raffinement* d'un maillage est un autre maillage de la même région, dont la restriction à toute cellule originale constitue un pavage cellulaire de celle-ci.

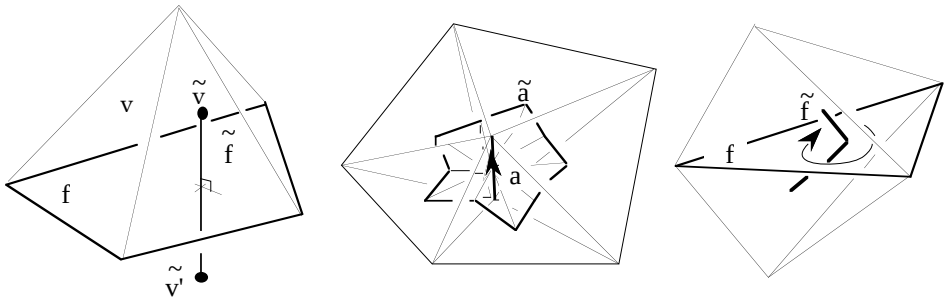

Figure 27. *Gauche: Une facette* f *et son arête duale* $\tilde{f}$ *en construction orthogonale (*$\tilde{v}$ *et* $\tilde{v}'$ *sont les sommets duaux intérieurs aux volumes* v *et* v' *séparés par* f). *De* $\tilde{v}$, *toutes les facettes bordant* v *peuvent être vues à angle droit, mais rien d'autre n'est requis:* $\tilde{v}$ *n'est ni le barycentre de* v *ni le centre de sa sphère circonscrite, lorsque celle-ci existe. Droite: Une facette duale et une arêtre duale, dans le cas d'un primal simplicial et de son dual barycentrique. Observer le jeu des orientations, qu'une seule icône suffit à représenter pour chaque paire de cellules associées.*

REMARQUE.– Si, comme suggéré plus haut ("paver $\bar{D}$ d'abord ..."), le maillage primal provient d'un pavage fermé par élimination de certaines cellules, les sous-cellules de ce dernier forment un raffinement commun au primal et au dual. L'existence de ce "complexe simplicial" sous-jacent commun sera un avantage plus tard, lorsqu'on voudra construire des éléments finis sur un pavage polyèdre quelconque. ◊

1.5.4. *Une panoplie de discrétiseur*

Nous appliquons maintenant la stratégie évoquée plus haut: Satisfaire les équations d'équilibre (11) et (13) pour une certaine famille *finie* de surfaces.

Donnons-nous d'abord une représentation finie des champs. Soit par exemple b. En tant que 2-forme, sa vocation est d'être intégrée sur les surfaces à orientation interne. On peut donc considérer les intégrales $\mathbf{b}_f = \int_f b$, pour toutes les facettes primales f, comme un échantillonnage de b, et prendre le tableau $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_f : f \in \mathcal{F}\}$ de ces "degrés de liberté" (DdL), indexé sur les facettes primales, comme représentation finie approchée de b. Ceci ne nous dit rien sur les valeurs, même approchées, de b en un point, mais l'objectif n'est pas là, car on ne mesure pas de telles valeurs. Ce qu'on mesure de b, ce sont les flux, et ce mode de représentation nous donne effectivement les flux embrassés par toutes les m-surfaces. Chaque facette joue ainsi le rôle d'un capteur, donnant une information sur b. Plus les facettes sont

petites et nombreuses, et mieux le champ est connu. (On peut souhaiter connaître une valeur approchée du flux pour d'autres surfaces que les m-surfaces, connaissant $\mathbf{b}$, et c'est ce à quoi les éléments finis serviront.)

On serait donc satisfait d'une méthode qui donnerait les quatre tableaux de DdL significatifs, à savoir

– les f.é.m. le long des arêtes, $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_a : a \in \mathcal{A}\}$,

– les flux embrassés par les facettes, $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_f : f \in \mathcal{F}\}$,

– les f.m.m. "autour" des arêtes duales, $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_f : f \in \mathcal{F}\}$,

– les courants de déplacement à travers les facettes duales, $\mathbf{d} = \{\mathbf{d}_a : a \in \mathcal{A}\}$,

à partir de la donnée des courants $\mathbf{j} = \{\mathbf{j}_a : a \in \mathcal{A}\}$ imposés à travers les facettes duales, que l'on calcule par intégration de j.

À cet égard, travailler sur les formes intégrales (11) et (13) des équations va s'avérer beaucoup plus simple que de passer par les "formes faibles" de leurs versions infinitésimales (12) et (14). En fait, ce simple changement de point de vue (qui est l'essence de la "méthode FIT" de Weiland [Wi] ou de la "méthode cellulaire" de Tonti [To, Mt]) va en quelque sorte nous imposer *la* discrétisation correcte, comme suit.

1.5.4.1. *Équations de réseau, Hodge discret*

Supposons la chaîne S dans (11) auusi simple que possible dans le contexte actuel, c'est-à-dire réduite à une seule facette primale f. L'intégrale de e sur la chaîne ∂f est alors la somme des intégrales le long des arêtes formant ∂f avec pour poids les signes indiquant si l'orientation de chaque arête est ou non conforme à celle induite par f sur son bord, et ces poids sont précisément les nombres d'incidence. L'équation (11) appliquée à f donne donc

$$\partial_t \mathbf{b}_f + \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f^a \, \mathbf{e}_a = 0.$$

Il y a une équation de cette sorte pour chaque facette du maillage primal et donc — puisque nous avons écarté les facettes de S^e, sachant à l'avance que le flux y serait nul — une pour chaque flux inconnu. Prises ensemble, sous forme matricielle, ces équations différentielles s'écrivent

$$\partial_t \mathbf{b} + \mathbf{R}\,\mathbf{e} = 0, \tag{29}$$

et forment le premier groupe des *équations de réseau* que l'on est en train de construire.

L'autre s'obtient par un raisonnement analogue sur chaque facette duale $\tilde{a}$ (la plus simple des surfaces à orientation externe possibles dans (13), si l'on se restreint aux surfaces constructibles à partir du couple de maillages). On a

$$-\partial_t \mathbf{d}_{\tilde{a}} + \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{R}_f^{\tilde{a}}\, \mathbf{h}_f = \mathbf{j}_{\tilde{a}}$$

pour tout a dans $\mathcal{A}$, et donc, sous forme matricielle,

$$-\partial_t \mathbf{d} + \mathbf{R}^t \mathbf{h} = \mathbf{j}, \tag{30}$$

le second groupe des équations de réseau.

Il reste à trouver des analogues discrets aux lois de comportement $b = \mu h$ et $d = \varepsilon e$, c'est-à-dire des *lois de comportement de réseau,* sous la forme

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}\, \mathbf{h}, \tag{31}$$

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{e}, \tag{32}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont des matrices carrées symétriques appropriées. Comprendre comment construire de telles matrices est notre prochain souci. Il est bien clair qu'aucune construction *canonique* ne peut exister, en tout cas rien de comparable au passage de (11) et (13) à (29) et (30) tel qu'on vient de l'accomplir, car les propriétés métriques des deux réseaux doivent intervenir (l'équation (15) donne un indice à cet égard). De fait, si l'équivalent exact de (29) et (30) peut être retrouvé, à la notation près, dans la plupart des algorithmes proposés (y compris ceux basés sur la méthode de Galerkine, cf. p. ex. [LS]), une grande variété de propositions ont été avancées en ce qui concerne $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\mu}$. Ces "matrices de Hodge" sont donc l'ingrédient essentiel, et en touver de "bonnes", en un sens qu'il va nous falloir découvrir, est le cœur du problème.

Nous l'aborderons ainsi: D'abord — pour ne pas traîner trop longtemps — *une* solution au problème sera donnée, particulièrement simple, qui produit des matrices $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\mu}$ *diagonales,* une qualité dont on appréciera les avantages en examinant quelques exemples, ce qui nous mènera à la fin de la présente Section. La suivante s'ouvrira sur une méthode générique d'analyse d'erreur, de laquelle un *critère* concernant ce qui fait une bonne paire $\boldsymbol{\varepsilon}$–$\boldsymbol{\mu}$ émergera, critère que les matrices diagonales ci-dessous s'avéreront satisfaire. Des éléments finis s'introduiront de façon naturelle au cours de ce processus, et cela permettra de trouver d'autres solutions au problème, conformes au critère.

La solution simple est disponible si l'on a pu obtenir un maillage dual par construction orthogonale (Figs 7 et 9, côté gauche). Si les scalaires ε et μ sont uniformes, on pose $\boldsymbol{\varepsilon}^{a\,a'} = 0$ si $a \neq a'$, $\boldsymbol{\mu}^{f\,f'} = 0$ si $f \neq f'$, et (cf. (15))

(33) $$\boldsymbol{\varepsilon}^{aa} = \varepsilon\ \text{aire}(\tilde{a})/\text{longueur}(a), \qquad \boldsymbol{\mu}^{f\,f} = \mu\ \text{aire}(f)/\text{longueur}(\tilde{f}),$$

ce qui donne effectivement des matrices diagonales. (L'inverse de $\boldsymbol{\mu}$ sera notée $\boldsymbol{\nu}$.) La justification heuristique [To] est que *si* tous les champs étaient constants par morceaux (relativement au maillage primal), les formules (33) correspondraient exactement à la définition (15) de l'opérateur de Hodge. (Un meilleur argument sera donné plus loin.) Dans le cas de coefficients ε et μ non uniformes, les formules à appliquer sont du type

(34) $$\boldsymbol{\mu}^{f\,f} = \mu_1\mu_2\ \text{aire}(f)/[\mu_2\ \text{longueur}(\tilde{f}_1) + \mu_1\ \text{longueur}(\tilde{f}_2)],$$

où $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ sont les parties de $\tilde{f}$ appartenant aux deux volumes adjacents à f (Fig. 28).

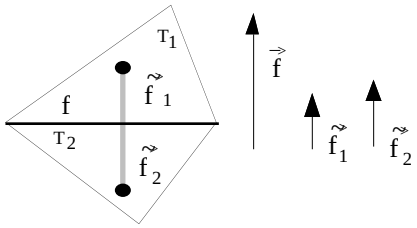

Figure 28. *Le cas d'une perméabilité scalaire* μ *discontinue* (μ_1 *et* μ_2 *dans les volumes primaux* T_1 *et* T_2, *séparés par la facette* f). *On note* $\bar{f}$ *l'aire vectorielle de* f *et* $\tilde{f}^{>}_1$, $\tilde{f}^{>}_2$ *les vecteurs le long des deux parties de* $\tilde{f}$. *Soient* u *et* v *des vecteurs arbitraires,* u *normal et* v *tangent à* f, *et soit* $H = u + v$ *dans* T_1. *Les conditions de transmission à travers* f *déterminent un unique champ uniforme* $B_2 = \mu_1 u + \mu_2 v$ *dans* T_2. *Alors* $\mathbf{b}_f = \mu_1\ \bar{f} \cdot u$ *et* $\mu_2\,\mathbf{h}_f = \mu_2\ \tilde{f}^{>}_1 \cdot u + \mu_1 \tilde{f}^{>}_2 \cdot u$. *Comme les trois vecteurs* $\bar{f}$, $\tilde{f}^{>}_1$ et $\tilde{f}^{>}_2$ *sont parallèles,* u *disparaît du quotient* $\mathbf{b}_f/\mathbf{h}_f$, *et il reste* (34).

REMARQUE.– Plus tard, lorsque les éléments d'arêtes et de facettes w^a et w^f auront rejoint la panoplie, on aura une autre solution, directement suggérée par la méthode de Galerkine, consistant à poser $\boldsymbol{\varepsilon}^{a\,a'} = \int_D \varepsilon\, w^a \wedge w^{a'}$ et $\boldsymbol{\nu}^{f\,f'} = \int_D \mu^{-1} w^f \wedge w^{f'}$. On usera d'expressions comme "le $\boldsymbol{\nu}$ de Galerkine" ou encore "la matrice de masse" (des éléments d'arêtes, en l'occurrence), ou "le hodge diagonal" pour se référer à ces différentes réalisations de matrices de Hodge. ◊

1.5.4.2. *La boîte à outils*

À ce stade, la plupart des caractéristiques de la "maison de Maxwell" de la Fig. 9 ont trouvé leur équivalent discret (Fig. 29), sauf la différentiation en temps et le produit extérieur. Il suffit de penser à ce que serait la généralisation à quatre dimensions des idées ci-dessus pour voir comment traiter les dérivées par rapport au temps: Avec δt pour pas de temps, soient $\mathbf{b}^k$, $\mathbf{h}^k$ les valeurs de $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}$ aux instants $k\,\partial t$ pour $k = 0, 1, ...$, etc., $\mathbf{j}^{k+1/2}$, $\mathbf{d}^{k+1/2}$, $\mathbf{e}^{k+1/2}$ celles de $\mathbf{j}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ aux instants $(k + {}^1\!/_2)\,\delta t$. On approche alors $\partial_t \mathbf{b}$ au temps $(k + {}^1\!/_2)\,\delta t$ par $(\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^k)/\delta t$, et $\partial_t \mathbf{d}$ au temps $k\,\delta t$ par $(\mathbf{d}^{k+1/2} - \mathbf{d}^{k-1/2})/\delta t$.

Quant au produit extérieur, à $\int_D b \wedge h$ correspond la somme $\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b}_f\, \mathbf{h}_f$, que nous noterons $\mathbf{(b, h)}$, avec des parenthèses en gras. De même à l'intégrale $\int_D d \wedge e$ correspond la somme $\sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{d}_a\, \mathbf{e}_a$, notée $\mathbf{(d, e)}$. À partir de là, on peut définir des "énergies discrètes", formes quadratiques par rapport aux DdL, ${}^1\!/_2\,\mathbf{(\nu b, b)}$, ${}^1\!/_2\,\mathbf{(\mu h, h)}$, ${}^1\!/_2\,\mathbf{(\varepsilon e, e)}$, ${}^1\!/_2\,\mathbf{(\varepsilon^{-1} d, d)}$, toutes quantités qui ont, effectivement, la dimension d'une énergie (mais $\mathbf{(j, e)}$ est une puissance, comme $\int_D j \wedge e$).

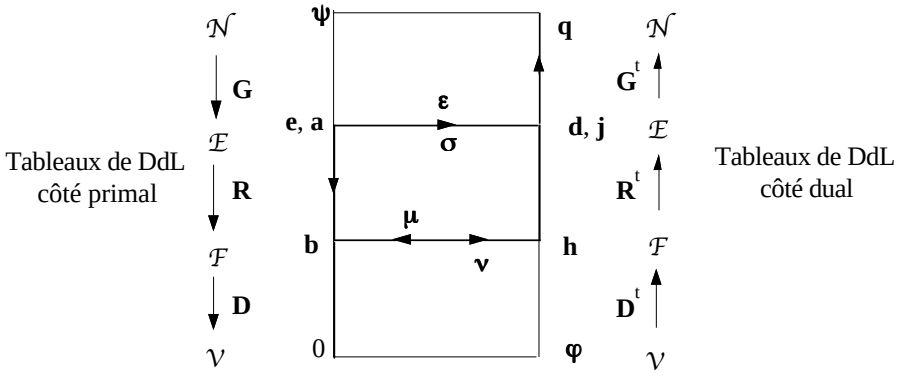

Figure 29. *"Boîte à outils" pour les équations de Maxwell.*

Quelques raccourcis notationnels seront utiles: $|\mathbf{b}|_\nu$, ou $|\mathbf{e}|_\varepsilon$, etc., pour les racines carrées de $\mathbf{(\nu b, b)}$ ou $\mathbf{(\varepsilon e, e)}$, etc., qui serviront de normes sur les différents espaces de tableaux de DdL, par analogie avec les $|b|_\nu$ ou $|e|_\varepsilon$ introduits plus haut.

PROPOSITION 3. Si les équations (5–8) sont satisfaites, on a

(35) $$d_t[{}^1\!/_2\,\mathbf{(\nu b, b)} + {}^1\!/_2\,\mathbf{(\varepsilon e, e)}] = -\,\mathbf{(j, e)}.$$

Démonstration. Prendre le produit scalaire (au sens de $(\ ,\ )$) de (29) et (30) par $\mathbf{h}$ et $-\mathbf{e}$, additionner, et utiliser l'égalité $(\mathbf{R}\,\mathbf{e},\ \mathbf{h}) = (\mathbf{e},\ \mathbf{R}^{t}\mathbf{h})$. $\Diamond$

REMARQUE.– L'analogue de $\int_S h \wedge e$, où S est une m-surface, est

$$\sum \{f \in \mathcal{F}(S),\ a \in \mathcal{A} :\ \mathbf{R}_f^{\,a}\ \mathbf{h}_f\ \mathbf{e}_a\},$$

où $\mathcal{F}(S))$ désigne le sous-ensemble des facettes contenues dans S. (Observer comme cette somme s'annule si S est la frontière du domaine.) En exploitant cette remarque, le lecteur n'aura pas de peine à modifier (35) pour en faire l'analogue discret du Th. de Poynting (EXERCICE 27). Malgré ces correspondances formelles, énergie et énergie discrète sont a priori sans rapports. Pour en établir, il nous faudra des "interpolants", autrement dit des éléments finis, afin de pouvoir passer des degrés de liberté aux champs. Par exemple, les éléments de facette w^f permettront d'associer à $\mathbf{b}$ la 2-forme $b = \sum_f \mathbf{b}_f\, w^f$. Si $\boldsymbol{\nu}$ est le hodge de Galerkine, alors $\int_D \nu\, b \wedge b = (\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{b},\ \mathbf{b})$. Mais une telle égalité a priori entre énergies continue et discrète est une exception, une exclusivité de la méthode de Ritz–Galerkine. Avec les autres hodges discrets, même la *convergence* de l'énergie discrète vers l'énergie continue, lorsqu'on raffine le maillage, n'est pas garantie. $\Diamond$

1.5.4.3. *Jouer avec la boîte: Maxwell complet*

Nous avons maintenant ce qu'il faut pour discrétiser n'importe quel problème dérivant des équations de Maxwell. En remplaçant, dans (24), rot par $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^t$, ε et ν par $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\nu}$, et ∂_t par le quotient différentiel entier ou demi-entier, selon la nature des formes différentielles en jeu, on obtient

$$(37) \qquad (\mathbf{b}^{k+1} - \mathbf{b}^{k})/\delta t + \mathbf{R}\,\mathbf{e}^{k+1/2} = 0, \quad -\boldsymbol{\varepsilon}\,(\mathbf{e}^{k+1/2} - \mathbf{e}^{k-1/2})/\delta t + \mathbf{R}^{t}\,\boldsymbol{\nu}\,\mathbf{b}^{k} = \mathbf{j}^{k}$$

(où $\mathbf{j}^k$ est le tableau des intensités à travers les facettes duales, à l'instant[65] $k\delta t$), avec les conditions initiales

$$(38) \qquad \mathbf{b}^{0} = 0, \quad \mathbf{e}^{-1/2} = 0.$$

Dans le cas le plus simple où les maillages primal et dual sont de simples réseaux rectangulaires, avec des volumes en forme de briques, (37)(38) est le célèbre schéma de Yee [Ye]. Ce que nous venons de trouver est donc la généralisation naturelle du schéma de Yee à des réseaux *cellulaires*.

---

65. Pour traiter la loi d'Ohm plus commodément, on peut remplacer $\mathbf{j}(k\,\delta t)$ par $(\mathbf{j}^{k+1/2} + \mathbf{j}^{k-1/2})/2$.

On peut s'attendre à des propriétés numériques analogues. Effectivement,

PROPOSITION 4. Le *schéma* (37)(38) *est stable pour* δt *assez petit, pourvu que* $\boldsymbol{\varepsilon}$ *et* $\boldsymbol{\mu}$ *soient symétriques définies positives.*

Démonstration. Pour une telle démonstration, on peut supposer $\mathbf{j} = 0$ et des valeurs initiales non nulles dans (38), avec $\mathbf{D}\mathbf{b}^0 = 0$. Éliminant $\mathbf{e}$ de (37), on trouve que

$$\mathbf{b}^{k+1} - 2\mathbf{b}^k + \mathbf{b}^{k-1} + (\delta t)^2 \mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu}\mathbf{b}^k = 0. \tag{39}$$

Puique $\mathbf{DR} = 0$, la propriété $\mathbf{D}\mathbf{b}^k = 0$ est un "invariant de boucle", et on peut donc travailler dans le sous-espace correspondant, $\ker(\mathbf{D})$. Introduisons les vecteurs propres (généralisés) $\mathbf{v}_i$ tels que $\mathbf{R}\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}\mathbf{R}^t \mathbf{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{\mu}\mathbf{v}_i$, qui satisfont $(\boldsymbol{\mu}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_i^j$. Dans cette base "$\mu$-orthogonale", $\mathbf{b}^k = \boldsymbol{\mu}\sum_i \eta_i^k \mathbf{v}_i$, et (39) devient

$$\eta_i^{k+1} - (2 - \lambda_i(\delta t)^2)\eta_i^k + \eta_i^{k-1} = 0$$

pour tout i. Les η_i^k, et donc les $\mathbf{b}^k$, restent bornés si les équations caractéristiques de chacune de ces récurrences ont des racines imaginaires, ce qui se produit (Fig. 29) si $0 < \lambda_j \delta t < 2$ pour tout j. ◊

Dans le cas du schéma de Yee classique, les valeurs propres pouvaient se calculer à la main, d'où la relation bien connue [Ye] entre la plus grande valeur possible de δt et la taille des briques. Pour un réseau cellulaire quelconque, on n'a pas de formule explicite, mais la règle heuristique est la même: δt doit être assez petit pour qu'un signal se propageant à la vitesse de la lumière (relative au milieu étudié) ne traverse pas plus d'une cellule pendant ce laps de temps.

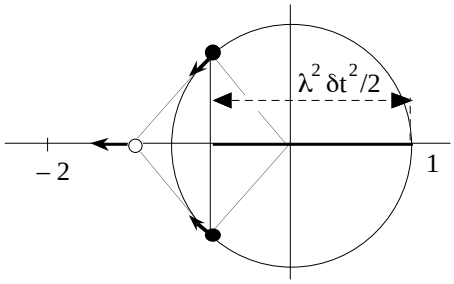

Figure 30. *Le point blanc est l'affixe de la somme des racines de l'équation caractéristique* $r^2 - (2 - \lambda_i(\delta t)^2)r + 1 = 0$. *L'instabilité se manifeste lorsqu'il quitte l'intervalle* $[-2, 2]$.

Cette stricte condition de stabilité rend le schéma impraticable s'il n'est pas explicite, ou quasi-explicite: $\boldsymbol{\varepsilon}$ doit donc être diagonal, ou à la rigueur, diagonal par blocs avec seulement un petit nombre de blocs de taille supérieure à 1, et $\boldsymbol{\nu}$ doit être creuse. Si tel est le cas, chaque pas de temps ne demandera qu'un petit nombre de produits matrice-vecteur, plus éventuellement la résolution de quelques petits systèmes linéaires, ce qui compense le nombre élevé de pas de temps. Ces deux conditions sont satisfaites avec la construction orthogonale (cf. (33)(34)), mais on a déjà signalé les problèmes que celle-ci pose. D'où l'intérêt porté aux méthodes de "condensation diagonale", qui visent à remplacer le $\boldsymbol{\varepsilon}$ de Galerkine par une matrice diagonale sans compromettre la convergence du schéma [C&, HL, EJ]. (Voir [BK] pour une réinterprétation géométrique, sans coordonnées, de [HL].)

REMARQUE.– Manifestement, il y a une autre version du schéma, en $\mathbf{h}$ et $\mathbf{d}$, pour laquelle ce qui compte est que $\boldsymbol{\mu}$ soit diagonale et $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}$ creuse. Malheureusement, le mode de condensation de masse qui réussit pour les éléments d'arête ne s'applique pas aux éléments de facettes [BK]. ◊

Il y a bien sûr d'autres questions que la stabilité à envisager, mais nous ne nous y attarderons pas. Pour la *convergence* (qui sera traitée plus loin en détrail, mais seulement en statique), voir [MS, NW, BK]. Les propriétés de *dispersion* ne sont simples que pour un réseau régulier. Quant à la *conservation* de certaines quantités, il serait agréable de pouvoir dire, dans le cas $\mathbf{j} = 0$, "l'énergie discrète totale est conservée", mais c'est seulement *presque* le cas. Les quantités conservées, comme on le vérifiera aisément, sont $^1/_2\,(\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{h}^{k+1},\ \mathbf{h}^k) + {}^1/_2\,(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{e}^{k+1/2},\ \mathbf{e}^{k+1/2})$ et $^1/_2\,(\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{h}^k,\ \mathbf{h}^k) + {}^1/_2\,(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{e}^{k-1/2},\ \mathbf{e}^{k+1/2})$, toutes les deux indépendantes de k. Leur demi-somme, que l'on peut écrire de façon plus suggestive

$$W_k = {}^1/_2\,(\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{h}^{k+1/2},\ \mathbf{h}^k) + {}^1/_2\,(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{e}^k,\ \mathbf{e}^{k+1/2}),$$

si l'on abrège $[\mathbf{h}^k + \mathbf{h}^{k+1}]/2$ et $[\mathbf{e}^{k-1/2} + \mathbf{e}^{k+1/2}]/2$ en $\mathbf{h}^{k+1/2}$ et $\mathbf{e}^k$, est conservée. Ce n'est *pas* l'énergie discrète, même s'il s'en faut de peu.

1.5.4.4. *Jouer avec la boîte: Problèmes sationnaires*

Divers modèles discrets peuvent se déduire de (33)(34) par les manœuvres habituelles (négliger le terme $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}$, supprimer les termes en ∂_t), mais il est plus instructif de les obtenir directement. Prenons par exemple le modèle (25) de la magnétostatique: Remplaçons les formes b et h par les tableaux de DdL $\mathbf{b}$ et $\mathbf{h}$, le d par la matrice appropriée (celle que suggère dans chaque cas la Fig. 29), μ par $\boldsymbol{\mu}$, et il vient

(40) $\mathbf{D}\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\mu}\,\mathbf{h}, \quad \mathbf{R}^t\mathbf{h} = \mathbf{j},$

qui inclut automatiquement les conditions aux limites, du simple fait d'avoir écarté[66] les cellules "passives" de la frontière. La condition $\mathbf{G}^t\mathbf{j} = 0$ est nécessaire à l'existence d'une solution, mais c'est la contrepartie discrète (d'après la Fig. 29) de $\mathrm{d}\, j = 0$, c'est-à-dire de $\mathrm{div}\, J = 0$. On la réalise de façon sûre en construisant un tableau $\mathbf{h}^j$ tel que $\mathbf{R}^t\mathbf{h}^j = \mathbf{j}$, et en réécrivant $\mathbf{R}^t\mathbf{h} = \mathbf{R}^t\mathbf{h}^j$ la dernière équation (40).

REMARQUE.– De tels tableaux existent, car $\ker(\mathbf{G}^t) = \mathrm{cod}(\mathbf{R}^t)$, par transposition de $\mathrm{cod}(\mathbf{G}) = \ker(\mathbf{R})$, et en trouver un n'exige pas de résoudre un système linéaire, mais seulement l'extraction d'un "arbre couvrant" du graphe[67] formé par les volumes et les facettes [Rn]. Par transposition de $\mathrm{cod}(\mathbf{R}) = \ker(\mathbf{D})$, on a aussi $\ker(\mathbf{R}^t) = \mathrm{cod}(\mathbf{D}^t)$, et donc $\mathbf{R}^t(\mathbf{h} - \mathbf{h}^j) = 0$ implique l'existence d'un tableau $\boldsymbol{\varphi}$ de DdL associés aux volumes, tel que $\mathbf{h} = \mathbf{h}^j + \mathbf{D}^t\boldsymbol{\varphi}$. ◊

La convergence de (40) sera étudiée à la prochaine Section. Lorsqu'elle a lieu, tous les schémas équivalents à (40) que l'on peut trouver par diverses manipulations algébriques sont donc du même coup convergents — et il y en a beaucoup. D'abord, si $\mathbf{h}^j$ est l'un des tableaux tels que $\mathbf{R}^t\mathbf{h}^j = \mathbf{j}$, on a $\mathbf{h} = \mathbf{h}^j + \mathbf{D}^t\boldsymbol{\varphi}$, et (40) devient

(41) $\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}\mathbf{D}^t\boldsymbol{\varphi} = -\,\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}\mathbf{h}^j.$

Ce schéma, qui correspond à $-\,\mathrm{div}(\mu(\mathrm{grad}\,\Phi + H^j)) = 0$, la formulation en potentiel scalaire de la magnétostatique, n'est intéressant que si $\boldsymbol{\nu}$ est diagonale, ou quasi-diagonale au sens discuté plus haut, car sinon $\boldsymbol{\mu}$ est pleine. Il requiert donc la construction orthogonale, et n'est pas applicable dans le cas du $\boldsymbol{\nu}$ de Galerkine. Il a été très étudié [BR, He, Sü], et porte le nom de schéma "bloc centré" [KH, WW] dans certains secteurs du génie numérique, à cause de la localisation des nœuds à l'intérieur des volumes, ou "blocs". L'unicité de $\boldsymbol{\varphi}$ est facile à démontrer,[68] ce qui implique l'unicité — pas si évidente, a priori — de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{h}$ dans (40).

---

66. On peut aussi (et c'est ainsi que des conditions aux limites non homogènes seraient traitées) garder toutes les cellules et donc travailler avec les matrices d'incidence $\mathbf{R}$ et $\mathbf{D}$ complètes, et des tableaux de DdL plus grands. Les conditions aux limites servent alors à attribuer leurs valeurs aux cellules passives, dont les DdL passent ainsi au second membre, et il reste un système linéaire par rapport aux DdL actifs.

67. L'histoire des relations entre graphes et réseaux électriques remonte loin, au moins à Veblen [Fr]. Voir le classique [Sy].

68. Elle vient de $\ker(\mathbf{D}^t) = 0$. En effet, $\mathbf{D}^t\boldsymbol{\psi} = 0$ signifie que $\sum_v \mathbf{D}_v^{\,f}\boldsymbol{\psi}_v = 0$ pour toutes les facettes primales f. Pour certaines facettes (celles dans S^h), il n'y a qu'un volume v tel que $\mathbf{D}_v^{\,f} \neq 0$, ce qui force $\boldsymbol{\psi}_v = 0$ pour tout v dans cette situation. Retirant tous ces v, et recommençant, on trouve $\boldsymbol{\psi} = 0$ au bout du compte.

Symétriquement, il y a un schéma correspondant à la formulation en potentiel vecteur (c'est-à-dire rot(ν rot A) = J):

(42) $\qquad \mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu}\, \mathbf{R}\, \mathbf{a} = \mathbf{j},$

obtenu en posant $\mathbf{b} = \mathbf{R}\mathbf{a}$, où le tableau de DdL $\mathbf{a}$ est indexé sur les arêtes (actives). (Si $\boldsymbol{\nu}$ est le hodge de Galerkine, (42) est ce que l'on obtient par la méthode variationnelle en représentant a par éléments d'arêtes.) L'existence dans (42) provient de $\mathbf{G}^t\mathbf{j} = 0$. Pas d'unicité cette fois, car ker($\mathbf{R}$) ne se réduit pas à 0, mais toutes les solutions $\mathbf{a}$ donnent le même $\mathbf{b} = \mathbf{R}\mathbf{a}$, et donc le même $\mathbf{h} = \boldsymbol{\nu}\mathbf{b}$.

REMARQUE.– Faut-il "jauger" $\mathbf{a}$ dans cette méthode, c'est-à-dire lui imposer une condition supplémentaire, telle que $\mathbf{G}^t(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}) = 0$ par exemple, qui le rende unique? La question continue d'être débattue. Tout dépend de la méthode employée pour résoudre (42), et de la façon d'assurer $\mathbf{G}^t\mathbf{j} = 0$. Avec les méthodes itératives de type gradient conjugué, et si l'on a pris la précaution d'écrire $\mathbf{j} = \mathbf{R}^t\mathbf{h}^j$, mieux vaut ne pas jauger [Ba, Rn]. ◊

Ce n'est pas tout. Si l'on s'abstient d'éliminer $\mathbf{h}$ dans la réduction de (40) à (42), tout en faisant $\mathbf{b} = \mathbf{R}\mathbf{a}$, on trouve un modèle intermédiaire à deux équations,

(43) $$\begin{vmatrix} -\boldsymbol{\mu} & \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^t & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{j} \end{vmatrix},$$

souvent qualifié de système *mixte*. (À nouveau, ceci est de peu d'intérêt si $\boldsymbol{\mu}$ est pleine, et donc il vaut mieux que $\boldsymbol{\nu}$ soit diagonale si l'on envisage cette approche.) La même manipulation dans l'autre sens (éliminer $\mathbf{h}$ par $\mathbf{h} = \mathbf{h}^j + \mathbf{D}^t\boldsymbol{\varphi}$, mais garder $\mathbf{b}$) donne

(44) $$\begin{vmatrix} -\boldsymbol{\nu} & \mathbf{D}^t \\ \mathbf{D} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{h}^j \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Il y a une intéressante variation sur (44), connue sous le nom de méthode "mixte-hybride", qui est une sorte de "décomposition de domaines ultime", en ce sens que tous les volumes sont découplés en "doublant" les DdL de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{h}$ (deux valeurs distinctes, une de chaque côté, pour chaque facette n'appartenant pas à Σ^h). Soient $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{h}$ les tableaux de DdL ainsi agrandis, et $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{R}$, les matrices élargies correspondantes. Les contraintes sur $\boldsymbol{b}$, exprimant l'égalité entre le flux amont et le flux aval, ont la forme $\mathbf{N}\boldsymbol{b} = 0$, où $\mathbf{N}$ est faite de blocs 1×2 indexés sur les facettes, de forme $\pm\{1, -1\}$. Maintenant, introduisons un tableau $\boldsymbol{\lambda}$ de multiplicateurs de Lagrange

$\boldsymbol{\lambda}_f$, et ajoutons $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{N}\boldsymbol{b})$ au lagrangien sous-jacent à (44). Ceci produit une nouvelle discrétisation (toujours équivalente à (40), si l'on dérive $\mathbf{b}$ et $\mathbf{h}$ de $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{h}$ de la seule façon possible):

$$\begin{vmatrix} -\boldsymbol{\nu} & \boldsymbol{D}^{\,t} & \mathbf{N}^t \\ \boldsymbol{D} & 0 & 0 \\ \mathbf{N} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{h}^{\,j} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Remarquer que le $\boldsymbol{\nu}$ agrandi est bloc-diagonal (tout comme son inverse $\boldsymbol{\mu}$), d'où la possibilité d'aisément éliminer $\boldsymbol{b}$. Ce qui reste alors est un système symétrique en $\boldsymbol{\varphi}$ et $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D}^{\,t} & \boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}\mathbf{N}^t \\ \mathbf{N}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D}^{\,t} & \mathbf{N}\boldsymbol{\mu}\mathbf{N}^t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{D}\ \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{h}^{\,j} \\ \mathbf{N}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{h}^{\,j} \end{vmatrix} .$$

La vertu de cette manipulation est que $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D}^{\,t}$ est *diagonale*, égale à $\mathbf{K}$ disons, de sorte qu'on peut éliminer $\boldsymbol{\varphi}$, ce qui mène à un système en $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\mathbf{N}[\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D}^{\,t}\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\mu}]\,\mathbf{N}^t\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}[\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{D}^{\,t}\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}]\,\boldsymbol{h}^{\,j}. \tag{45}$$

Pour compliqué qu'il paraisse, ce système est en fait très maniable, avec une matrice creuse, et un compte d'opérations plus favorable que (42) dans tous les cas. La méthode, de plus, est applicable lorsque $\boldsymbol{\mu}$ n'est pas diagonale, contrairement à (41).

REMARQUE.– Dans $(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{N}\boldsymbol{b})$, chaque $\boldsymbol{\lambda}_f$ multiplie un terme $(\mathbf{N}\boldsymbol{b})_f$ qui a la dimension d'une charge magnétique. Les $\boldsymbol{\lambda}_f$ peuvent donc s'interpréter comme les DdL d'un potentiel magnétique [B8]. Résoudre (45) donnant accès au potentiel magnétique et donc à h, de cette façon, et à b en revenant à (44), on a là un moyen d'obtenir deux solutions *complémentaires* en magnétostatique [B9] en résolvant *un seul* système linéaire. ◊

Il y a encore un schéma mixte-hybride dual de (45), obtenu de la même façon en partant de (43), et en découpant le domaine en volumes *duaux* indépendants, d'où trois DdL par facette, pour $\mathbf{b}$ et $\mathbf{h}$, et deux multiplicateurs de Lagrange pour forcer leur égalité. Ceci mène à un système analogue à (45), mais avec deux fois plus d'inconnues, donc sans grand intérêt.

Les systèmes (41), (42), (43), (44) et (45) donnent tous, répétons-le, la même solution $\{\mathbf{b}, \mathbf{h}\}$. Lequel résoudre effectivement est donc une question d'algorithmique, où taille, creux, conditionnement, sont les paramètres à considérer. Les seuls candidats sérieux sont les systèmes à *une* matrice carrée semi-définie positive, c'est-à-dire

(41), (42) et (45). Une énumération des termes extra-diagonaux (qui est une bonne estimation a priori de la complexité du calcul lorsqu'on applique une méthode de type gradient conjugué) montre que (45) vaut mieux que (42), en général. Le schéma bloc-centré (41) bat à la fois (42) et (45) mais suppose une matrice diagonale au départ, donc n'est pas praticable[69] si $\boldsymbol{\mu}$ vient de la méthode de Galerkine. D'où l'intérêt soutenu [CR, KH, M&, H&] que suscite la méthode mixte-hybride (45).

Chacun des schémas ci-dessus pourrait être présenté comme la version discrète d'autant de formulations indépendantes, variationnelles, mixtes, mixtes-hybrides, etc., et l'exploitation de ce filon a produit une abondante littérature. Réaffirmons que tous ces schémas sont algébriquement équivalents, en ce qui concerne $\mathbf{b}$ et $\mathbf{h}$, et donc qu'*une* analyse d'erreur suffit: celle de (42) par exemple, qui est standard, ou celle qu'on va présenter plus loin, sur le système symétrique (40). C'est un des avantages qu'il y a à travailler au niveau discret comme on vient de le faire ici.

1.5.4.5. *Jouer avec la boîte: Divers*

C'est avantageux aussi du point de vue de la modélisation, comme quelques exercices vont le montrer. Par exemple, la version discrète du problème (27) des courants de Foucault s'obtient par simple transcription:

$$\text{(46)} \qquad i\omega\, \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{e} + \mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu}\, \mathbf{R}\, \mathbf{e} = -i\omega\, \mathbf{j}^s.$$

En général, σ s'annule en dehors d'une région fermée $C = D - \Delta$ du domaine de calcul, C pour "conducteur". (Dans ce cas on suppose que A, le support de j^s, est contenu dans Δ.) La matrice du système a alors un noyau non trivial, $\ker(\boldsymbol{\sigma}) \cap \ker(\mathbf{R})$, et l'unicité de $\mathbf{e}$ est perdue. On peut la retrouver en imposant la contrainte $\mathbf{G}^t\, \boldsymbol{\varepsilon}_\Delta\, \mathbf{e} = 0$, où $\boldsymbol{\varepsilon}_\Delta$ dérive de $\boldsymbol{\varepsilon}$ par annulation des termes relatifs aux arêtes de C. Physiquement, cela revient à supposer une densité nulle de charge électrique en dehors du conducteur $C = \mathrm{supp}(\sigma)$. (Attention, le champ électrique obtenu de cette façon peut être largement fictif dans A, où cette condition n'est pas satisfaite. Mais le champ électrique dans C sera correct.) Mathématiquement, l'effet de cette contrainte est de forcer l'inconnue $\mathbf{e}$ à appartenir à un sous-espace sur lequel la matrice $i\omega\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu}\, \mathbf{R}$ est régulière.

Dans certaines applications, toutefois, la conductivité est non-nulle dans tout D, mais peut prendre des valeurs d'ordres de grandeur très différents, et cette matrice, bien que régulière, est mal conditionnée. On trouvera alors dans la boîte à outils ce

---

69. À moins de biaiser le calcul des termes de la matrice de masse, grâce à des formules ad-hoc d'intégration numérique. C'est l'une des techniques de la condensation diagonale.

qu'il faut pour "régulariser" un problème "raide" de ce genre. Voir [CW] pour un exemple de cette procédure, dont certains aspects sont traités en détail dans [B7]. En bref, cela consiste à ajouter au premier membre de (46) un terme, fonction de $\mathbf{e}$, qui s'annule pour l'une des solutions $\mathbf{e}$ de (46), ce qui sélectionne celle-ci, en ajoutant à la matrice $\mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu} \mathbf{R}$ ce qu'il faut, en quelque sorte, pour la rendre régulière (et donc, pour bien conditionner la matrice globale, si petit que σ puisse être à certains endroits). Le système modifié est

$$(47) \qquad i\omega\, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{e} + \mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu} \mathbf{R}\, \mathbf{e} + \sigma \mathbf{G} \boldsymbol{\delta} \mathbf{G}^t \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e} = -i\omega\, \mathbf{j}^s,$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est une matrice à la Hodge, indexée par les sommets, diagonale, dont les coefficients sont $\boldsymbol{\delta}^{nn} = \int_{\tilde{n}} 1/\mu\sigma^2$. Ceci est justifié dans [B7], avec en particulier les considérations d'analyse dimensionnelle qui mènent à ce choix de $\boldsymbol{\delta}$. Notre seul but ici est de souligner que tout cela peut se faire au niveau discret.

REMARQUE.– On *pourrait* motiver cette procédure en partant de l'équation suivante, obtenue ici en faisant fonctionner la boîte à outils dans l'autre sens (du "discret" au "continu"), mais que l'on peut considérer comme une régularisation naturelle de (27):

$$(48) \qquad i\omega\sigma E + \mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\ E) - \sigma\, \mathrm{grad}(\delta\ \mathrm{div}(\sigma E)) = -i\omega\, j^s,$$

où l'on a posé $\delta = 1/(\mu\sigma^2)$. (On retourne aux vecteurs représentatifs ici, pour mettre en évidence l'emploi d'une variante de la formule $-\Delta = \mathrm{rot}\ \mathrm{o}\ \mathrm{rot} - \mathrm{grad}\ \mathrm{o}\ \mathrm{div}$, laquelle s'appliquerait dans le cas $\mu = \sigma = 1$ dans (48).) C'est une très ancienne idée [Le]. Une part de sa popularité récente provient du fait qu'elle permet l'emploi d'éléments finis *vectoriels nodaux* (la forme discrète est alors bien sûr très différente de (47)), parce que E dans (48) a plus de régularité, a priori, que le représentant de e dans (27). Même si l'on a de bonnes raisons de préférer de tels éléments, l'avantage n'est qu'apparent, car la solution du problème discret peut converger vers autre chose que la solution de (27) dans certains cas (par exemple, si la frontière présente des angles obtus, cf. [CD], où la solution de (48) a alors *trop* de régularité pour satisfaire (27)). Il convient donc de se méfier de cette approche. ◊

Beaucoup considèrent le noyau de $\mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu} \mathbf{R}$ comme un problème aussi quant au calcul des valeurs résonnantes d'une cavité, c'est-à-dire des valeurs propres de

$$(49) \qquad \mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu} \mathbf{R}\, \mathbf{e} = \omega^2 \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{e},$$

car $\omega = 0$ est valeur propre de multiplicité N (le nombre de nœuds actifs). Que ce soit ou non un problème se discute, mais si tel est le cas, il y a là aussi ce qu'il faut dans la panoplie pour faire face. D'abord, la régularisation, comme ci-dessus:

(50) $$[\mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu}\, \mathbf{R} + \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{G}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}^t\, \boldsymbol{\varepsilon}]\, \mathbf{e} = \omega^2\, \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{e},$$

avec cette fois $\boldsymbol{\delta}^{nn} = \int_{\tilde{n}} 1/\mu\varepsilon^2$. Zéro n'est plus valeur propre dans (50), mais de nouveaux modes propres apparaissent, ceux de $\boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{G}\boldsymbol{\delta}\mathbf{G}^t\, \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{e} = \omega^2\, \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{e}$ sous la contrainte $\mathbf{e} = \mathbf{G}\boldsymbol{\psi}$. Comme remarqué dans [WK], il y a là un phénomène de "complémentarité spectrale" entre les opérateurs rot o rot et – grad o div. Les nouveaux modes,[70] ou "fantômes" [Wl], doivent être repérés et éliminés, ce qui est en principe facile (il suffit d'évaluer la norme $|\mathbf{G}^t\, \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{e}|_\delta$), ou simplement repoussés vers la droite en insérant un facteur scalaire approprié devant le terme de régularisation. Deuxième solution [T&]: Restreindre la recherche de $\mathbf{e}$ à un espace complémentaire de $\ker(\mathbf{R}^t \boldsymbol{\nu}\, \mathbf{R})$, ce que l'on peut faire par des techniques d'arbre couvrant [AR, Mu]. Ceci touche aux *décompositions de Helmholtz discrètes*, une autre des ressources de la boîte, dont on ne peut traiter ici [R&].

1.6. Analyse des erreurs d'approximation

Abordons maintenant l'analyse d'erreur du schéma symétrique de la magnétostatique,

(51) $$\mathbf{D}\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{h} = \boldsymbol{\nu}\, \mathbf{b}, \quad \mathbf{R}^t \mathbf{h} = \mathbf{j}.$$

Le réseau primal est noté m, le dual $\tilde{m}$, et on indexera par m, en cas de besoin, toute entité dépendant de $\{m, \tilde{m}\}$. Par exemple, γ_m désignera la plus petite borne supérieure des diamètres de toutes les cellules de dimension ≥ 1, primales ou duales, ou "grain" du maillage. Ou encore, $\{\mathbf{b}_m, \mathbf{h}_m\}$ est la solution $\{\mathbf{b}, \mathbf{h}\}$ de (51) calculée avec $\{m, \tilde{m}\}$. Etc.

Une première façon de présenter notre objectif serait "étudier $\{\mathbf{b}_m, \mathbf{h}_m\}$ lorsque γ_m tend vers 0". Mais cela manque de précision, car les *formes* des cellules jouent un rôle important. Il y a, dès la dimension 2, des contre-exemples [BA] montrant que si l'on tolère un aplatissement excessif des triangles au fur et à mesure que $\gamma_m \to 0$, les champs $\{b_m, h_m\}$ reconstitués (par les techniques qu'on verra plus loin) à

70. Il ne s'agit pas des fameux "modes parasites" qui sévissaient avant l'apparition des éléments d'arêtes [B0]. Les modes parasites se présentent lorsqu'on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres $\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot}\ E) = \omega^2\, \varepsilon\, E$ à l'aide d'éléments nodaux vectoriels. Alors (sauf conditions aux limites exceptionnelles) la matrice de $\mathrm{rot}(\nu\ \mathrm{rot})$ est régulière (car l'espace d'approximation ne contient pas de gradients, contrairement à ce qui se passe avec les éléments d'arêtes), mais aussi — et pour la même raison, cf. [B2] — mal conditionnée, ce qui est la source des ennuis. Il serait souhaitable de ne pas tenir pour synonymes les deux expressions ("parasites" et "fantômes", "spurious modes" et "ghost modes"), pour ne pas ajouter à la confusion sur ce point délicat.

partir des DdL calculés $\{\mathbf{b}_m, \mathbf{h}_m\}$ peuvent ne pas converger vers la solution $\{b, h\}$. D'où la définition suivante: On dira qu'une famille $\mathcal{M}$ de paires $\{m, \tilde{m}\}$ de maillages en dualité est *uniforme* s'il existe un catalogue fini de formes de cellules tel que toute cellule de tout $\{m, \tilde{m}\}$ appartenant à $\mathcal{M}$ se déduise par similitude de l'une de ces cellules de référence. La notation "$m \to 0$" signifiera alors, par convention, que l'on considère une suite de maillages, de grain tendant vers 0, d'une famille uniforme $\mathcal{M}$. Notre objectif se reformule alors ainsi: Montrer que l'erreur, évaluée selon un critère à préciser, commise lorsqu'on substitue $\{\mathbf{b}_m, \mathbf{h}_m\}$ à $\{b, h\}$, tend vers 0 lorsque $m \to 0$.

Les conséquences pratiques sont bien connues. Si, pour un maillage donné, la solution n'est pas satisfaisante, on peut recommencer le calcul avec un maillage de grain plus petit, obtenu par raffinement, ou par remaillage, selon une procédure qui assure l'uniformité de la famille formée par tous les maillages potentiels. Un théorème de convergence est alors une sorte de garantie de bonne fin, dont on se contente en général, faute de mieux.[71]

Heureusement, il existe des méthodes de raffinement de maillage qui garantissent l'uniformité, même au sens fort de la définition ci-dessus. (C'est un sujet de recherches actif, cf. [Bä, Be, CS, Mb].) Une façon de découper les tétraèdres à cet effet est indiquée Fig. 31. Comme on le voit, au plus cinq formes différentes de tétraèdre peuvent apparaître pour chacun de ceux présents dans le maillage grossier de départ. (En pratique, tous les volumes ne sont pas découpés simultanément, mais des règles analogues de découpage des tétraèdres de jonction existent, qui garantissent le même résultat, la génération d'un nombre a priori borné de formes différentes.)

EXERCICE 28. Soit $\gamma_m(c)$ le diamètre de la cellule c, de dimension ≥ 1, de sorte que $\gamma_m = \max_c \gamma_m(c)$. Soit par ailleurs $\delta_m = \min_c \gamma_m(c)$. L'uniformité, au sens précédent, entraîne-t-elle que $0 < \alpha \leq \delta_m / \gamma_m$, où α serait indépendant de m ?

---

71. "Mieux" serait, par exemple, une estimation d'erreur a posteriori, que l'on peut parfois obtenir (par exemple, pour les problèmes tels que (51), avec des techniques de complémentarité [B1]). Mais le plus souvent, la convergence et sa vitesse (i.e., savoir que l'erreur se comporte en $C\gamma_m{}^{\alpha}$, pour un certain coefficient α) sont tout ce qu'on a.

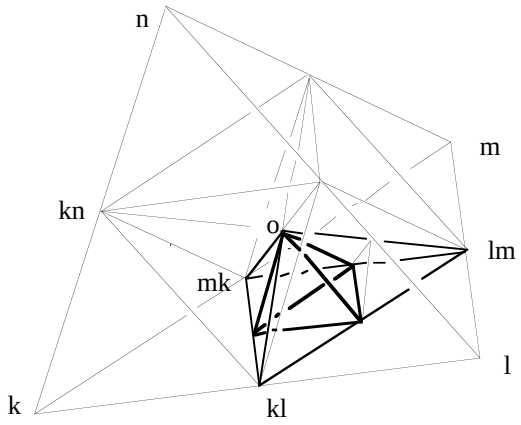

Figure 51. *Règle de subdivision pour un tétraèdre* T = {k, l, m, n}. *(Les milieux des arêtes sont notés* kl, mn, etc., *et* o *est le barycentre.) Une première dichotomie des arêtes engendre quatre petits tétraèdres, de même forme que* T, *et un octaèdre central, qui à son tour peut être découpé en huit "octants" tels que* O = {o, kl, lm, mk}, *de quatre formes différentes au plus. Maintenant, un octant tel que* O *se découpe ainsi: diviser la facette en face de* o *en quatre triangles congruents, et les joindre à* o, *d'où un tétraèdre semblable à* T, *et trois autres autour de lui. Ceux-ci, à leur tour, se divisent en deux, comme indiqué ici pour celui au dessous de l'arête* {o, lm}. *L'un de ces deux morceaux est semblable à* O *et l'autre à l'octant* {o, kn, kl, mk} *voisin.*

On se permettra donc l'hypothèse d'uniformité, bien qu'elle soit plus forte que nécessaire, en fait. Dans le même mouvement, on supposera aussi que les hodges sont construits selon une règle uniforme, les coefficients de la ligne f de $\boldsymbol{\nu}$, ou de la ligne a de $\boldsymbol{\varepsilon}$, ne dépendant que des formes des cellules voisines de f ou a, à un facteur multiplicatif commun près.

1.6.1. *Consistance*

Nous allons comparer la solution calculée $\{\mathbf{b}_m, \mathbf{h}_m\}$ à des tableaux de même type, définis en fonction du vrai champ {b, h} comme les flux et f.m.m. de celui-ci, soit $r_m b = \{\int_f b : f \in \mathcal{F}\}$ et $r_m h = \{\int_{\tilde{f}} h : f \in \mathcal{F}\}$. Ceci définit implicitement deux opérateurs, tous deux notés r_m (mais le contexte lèvera toute ambiguïté): L'un agit sur les 2-formes pour donner un tableau de flux de facettes, l'autre sur les 1-formes tordues pour donner un tableau de f.m.m. d'arêtes duales.

Puisque $db = 0$, le flux embrassé par la surface de tout volume tri-dimensionnel est nul. C'est vrai en particulier de tout volume primal, et donc $\sum_f \mathbf{D}_v^f \int_f b = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$. De même, $dh = j$ implique la relation $\sum_f \mathbf{R}_f^a \int_{\tilde{f}} h = \int_{\tilde{a}} j$, par intégration sur la facette duale $\tilde{a}$, pour tout $a \in \mathcal{A}$. Sous forme matricielle, on a donc

$$\mathbf{D}\, r_m\, b = 0, \quad \mathbf{R}^t\, r_m\, h = \mathbf{j}, \tag{52}$$

puisque les éléments du tableau $\mathbf{j}$ sont précisément les intensités à travers les facettes duales. Comparant avec (51), on voit que

$$\mathbf{D}\,(\mathbf{b}_m - r_m\, b) = 0, \quad \mathbf{R}^t\,(\mathbf{h}_m - r_m\, h) = 0, \tag{53}$$

ainsi que

$$(\mathbf{h}_m - r_m\, h) - \boldsymbol{\nu}\,(\mathbf{b}_m - r_m\, b) = (\boldsymbol{\nu}\, r_m - r_m\, \nu)b \equiv \boldsymbol{\nu}\,(r_m\, \mu - \boldsymbol{\mu}\, r_m)h. \tag{54}$$

Utilisant la notation annoncée plus haut, $(\mathbf{b}, \mathbf{h})$ pour une somme telle que $\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b}_f \mathbf{h}_f$, et $|\mathbf{h}|_\mu$ pour la racine carrée de $(\mathbf{h}, \boldsymbol{\mu}\,\mathbf{h})$, ou "$\mu$-norme" de $\mathbf{h}$, et autres constructions similaires, nous allons calculer la μ-norme du premier membre de (54).

Ce faisant, il apparaît des termes carrés, $|\mathbf{b}_m - r_m\, b|_\nu^2$ et $|\mathbf{h}_m - r_m\, h|_\mu^2$, et deux fois le terme rectangle $(\mathbf{b}_m - r_m\, b,\ \mathbf{h}_m - r_m\, h)$. Mais grâce à (53), celui-ci est nul, car $\mathbf{D}\,(\mathbf{b}_m - r_m\, b) = 0$ implique $\mathbf{b}_m - r_m\, b = \mathbf{R}\mathbf{a}$ pour un certain $\mathbf{a}$, et

$$(\mathbf{R}\mathbf{a},\ \mathbf{h}_m - r_m\, h) = (\mathbf{a},\ R^t\,(\mathbf{h}_m - r_m\, h)) = 0.$$

Il reste donc, égalant le résultat aux ν-norme et μ-norme des termes de droite dans (54),

$$|\mathbf{b}_m - r_m\, b|_\nu^2 + |\mathbf{h}_m - r_m\, h|_\mu^2 = |(\boldsymbol{\nu}\, r_m - r_m\, \nu)b|_\mu^2 \equiv |(\boldsymbol{\mu}\, r_m - r_m\, \mu)h|_\nu^2$$
$$\equiv (\boldsymbol{\nu}\, r_m b - r_m\, h,\ r_m\, b - \boldsymbol{\mu}\, r_m h). \tag{55}$$

Les deux termes du premier membre, qui ont la dimension d'une énergie, sont le genre d'estimateur que l'on pouvait souhaiter quant à l'écart entre les flux calculés $\mathbf{b}_m$ et les flux effectifs $r_m\, b$ [resp. les f.m.m. calculées et effectives]: ce sont en effet les erreurs "en énergie [et coénergie] discrète". On va donc essayer de borner ce premier membre par une fonction de γ_m, et on se tourne pour cela vers le second membre, par exemple sa deuxième expression, en termes de h.

Par définition de r_m, la composante d'indice f du tableau $r_m(\mu h)$ est le flux de $b = \mu h$ embrassé par f. Quant à $\boldsymbol{\mu}\, r_m h$, c'est ce qu'on obtient en appliquant l'opérateur de Hodge discret au tableau des f.m.m. d'arêtes duales. Les tableaux $r_m \mu h$ et $\boldsymbol{\mu}\, r_m h$ sont donc a priori différents, pour un h donné, ce qui contraste avec les égalités $\mathbf{D} r_m b = r_m db$ et $\mathbf{R}^t r_m h = r_m dh$, qui résultent du Th. de Stokes. Le mot qui exprime ce genre de phénomène en mathématiques est "conjugaison": Les opérateurs $\mathbf{D}$ et d sont conjugués par l'intermédiaire de r_m, et il en va de même de $\mathbf{R}^t$ et d. En revanche, $\boldsymbol{\mu}$ et μ ne sont *pas* conjugués via r_m, et c'est bien sûr la source de l'erreur d'approximation lorsqu'on passe du continu au discret.

Il peut arriver toutefois que $\boldsymbol{\mu}\, r_m$ et $r_m \mu$ coïncident pour *certains* champs h. C'est le cas, par exemple, pour les champs uniformes par morceaux, relativement au maillage, lorsque $\boldsymbol{\mu}$ est le hodge diagonal introduit plus haut: on se souvient que sa définition était *motivée* par le désir d'assurer cette égalité pour les champs de cette forme. Autre exemple, on verra plus loin que $r_m \nu$ et $\boldsymbol{\nu}\, r_m$ coïncident, lorsque $\boldsymbol{\nu}$ est le hodge de Galerkine, sur les champs à divergence nulle de la forme $\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{b_f} w^f$, où les w^f sont les éléments de facettes. Dans ce cas, compte tenu que tout champ peut être considéré comme uniforme à une échelle assez petite, on peut espérer qu'il y ait "conjugaison asymptotique", en ce sens que le second membre de (55) va tendre vers 0 avec m, pour b et h assez réguliers. Cette propriété, que nous réécrivons de façon informelle, mais suggestive,

(56) $$\boldsymbol{\mu}\, r_m - r_m \mu \to 0 \text{ quand } m \to 0, \quad \boldsymbol{\nu}\, r_m - r_m \nu \to 0 \text{ quand } m \to 0$$

(les deux sont équivalents), s'appelle *consistance* de l'approximation de μ et ν par $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\nu}$. La consistance, donc, entraîne la conjugaison asymptotique espérée, et par conséquent, assure que l'erreur en énergie discrète, au premier membre de (55), tend vers 0.

Il nous faut maintenant disposer d'un *critère* de consistance, que l'on va d'abord découvrir, par la démarche heuristique exposée ci-après, puis vérifier dans quelques cas importants. (Tous les C ci-dessous représentent des constantes indépendantes de m, pas forcément les mêmes d'une ligne à l'autre, comme on l'a déjà expliqué. La Fig. 52 donne le sens de $\vec{f}$ et de $\tilde{f}$. La norme d'un vecteur v ordinaire est $|v|$.)

Il s'agit donc d'évaluer le second membre de (55). Sous son avatar le plus à droite, c'est une somme de termes, un pour chaque f, de la forme

$$[\sum_{f'} \boldsymbol{\nu}^{f f'} \int_{f'} n \cdot B - \int_{\tilde{f}} \nu\, \tau \cdot B]\, [\int_f \mu\, n \cdot H - \sum_{f''} \boldsymbol{\mu}^{f f''} \int_{\tilde{f}''} \tau \cdot H],$$

ce que nous abrégerons en [B, f] [H, f]. Envisageons le cas le plus simple, où le coefficient ν serait uniforme, et les conditions aux limites telles que la solution

{B, H} soit uniforme sur tout le domaine. On aurait alors

$$[B, f] = \sum_{f'} \boldsymbol{\nu}^{f f'} \int_{f'} n \cdot B - \int_{\tilde{f}} \nu \, \tau \cdot B = [\sum_{f'} \boldsymbol{\nu}^{f f'} \vec{f}\,' - \nu \tilde{f}^{>}] \cdot B,$$

$$[H, f] = [\int_{f} \mu \, n \cdot H - \sum_{f''} \boldsymbol{\mu}^{f f''} \int_{\tilde{f}''} \tau \cdot H] = [\mu \, \vec{f} \, - \sum_{f''} \boldsymbol{\mu}^{f f''} \tilde{f}^{>}''] \cdot H,$$

et l'erreur de consistance serait nulle si chacun des termes entre crochets était nul, c'est-à-dire sous la condition géométrique suivante:

$$\sum_{g \in \mathcal{F}} \boldsymbol{\nu}^{f g} \vec{g} = \nu \tilde{f}^{>} \quad \forall f \in \mathcal{F}, \tag{57}$$

dont on voit facilement (EXERCICE 29) qu'elle entraîne $\mu \vec{f} = \sum_g \boldsymbol{\mu}^{f g} \tilde{g}^{>}$, et donc la nullité de l'autre crochet, [H, f]. Tel est le critère de consistance cherché. Il est manifestement vérifié (y compris, EXERCICE 30, lorsque μ n'est que constant par morceaux) par le hodge diagonal de la Section 3 (formules (33) et (34)), et de façon beaucoup moins évidente — mais cela sera prouvé plus loin — par le hodge de Galerkine dans le cas d'un maillage dual barycentrique.

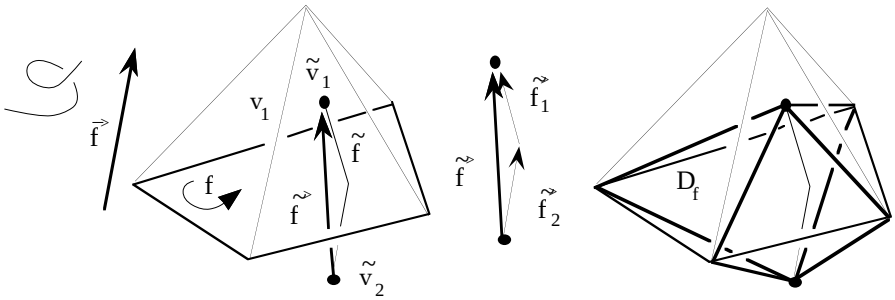

Figure 52. *Comme plus haut (Fig. 28),* $\vec{f}$ *dénote l'aire vectorielle de la facette* f, *et* $\tilde{f}^{>}$ *le vecteur qui joint les extrémités de l'arête duale* $\tilde{f}$. *(On suppose une orientation ambiante ici. On pourrait s'en passer en considérant* $\vec{f}$ *et* $\tilde{f}^{>}$ *comme des vecteurs axiaux.) Si* ν *n'est pas le même des deux côtés de* f, *interpréter* $\nu \tilde{f}^{>}$ *comme* $\nu_2 \tilde{f}^{>}_2 + \nu_1 \tilde{f}^{>}_1$, *où* $\tilde{f}^{>}_1$ *et* $\tilde{f}^{>}_2$ *sont comme indiqué. La région* D_f *est délimitée par les nœuds duaux* $\tilde{v}_2$ *et* $\tilde{v}_1$ *et le bord de* f. *Remarquer que les vecteurs* $\vec{f}$ *et* $\tilde{f}^{>}$ traversent f *dans la même direction, mais ne sont proportionnels que dans le cas de la construction orthogonale (Fig. 28): le critère (57) peut alors être satisfait par un hodge diagonal.*

Ce critère est-il suffisant? Voici un premier résultat dans ce sens:

PROPOSITION 5. *Dans le cas de la construction orthogonale, la relation* (57), *qui se réduit alors à*

(58) $\boldsymbol{\nu}^{f\,f}\,\vec{f} = \nu\,\tilde{f}^{>}$,

entraîne la consistance.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}(x)$ la projection de $B(x)$ sur la direction normale à f. C'est une fonction continue (contrairement à B lui-même) dans la réunion des deux volumes (au plus) séparés par f, et on a donc $|\mathcal{B}(y) - \mathcal{B}(x)| \le C\,|y - x|$ pour tout couple de points x et y appartenant à cette région. Rappelons par ailleurs que, en toute généralité, l'intégrale $\int_A \varphi$ d'une fonction continue est égale à $\varphi(a) \int_A 1$ pour un certain point a inclus dans A. On a donc, dans le cas où ν est constant,[72]

$$\begin{aligned}[B, f] &= \boldsymbol{\nu}^{f\,f} \int_f n \cdot B - \int_{\tilde{f}} \nu\,\tau \cdot B \\ &= \boldsymbol{\nu}^{f\,f}\,\text{aire}(f)\,\mathcal{B}(x_f) - \nu\,\text{longueur}(\tilde{f})\,\mathcal{B}(x_{\tilde{f}}) \\ &= \boldsymbol{\nu}^{f\,f}\,\text{aire}(f)\,(\mathcal{B}(x_f) - \mathcal{B}(x_{\tilde{f}})),\end{aligned}$$

pour deux points x_f et $x_{\tilde{f}}$ dont la distance n'excède pas γ_m, et donc $[B, f] \le C\,\gamma_m\,\boldsymbol{\nu}^{f\,f}\,\text{aire}(f)$. De même, $[H, f] \le C\,\gamma_m\,\boldsymbol{\mu}^{f\,f}\,\text{longueur}(\tilde{f})$, et donc

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} [B, f]\,[H, f] \le C\,\gamma_m^{\,2} \sum_{f \in \mathcal{F}} \text{aire}(f)\,\text{longueur}(\tilde{f}) \le C\,\gamma_m^{\,2},$$

puisque $\sum_f \text{aire}(f)\,\text{longueur}(\tilde{f}) = 3\,\text{volume}(D)$. ◊

Pour faire mieux, c'est-à-dire pour traiter le cas d'un hodge non diagonal, il y a beaucoup de difficultés techniques, et on ne fera pas la démonstration en détail. Le cheminement est le suivant. D'abord, puisqu'on suppose B régulier par morceaux,[73] on peut écrire $B(x) = B_f + \mathcal{B}(x)$ dans la réunion des deux volumes séparés par f, avec un vecteur constant B_f et un reste $\mathcal{B}(x)$ (vectoriel, cette fois!) qui satisfait $|\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y)| \le C\,|x - y|$. La contribution de la partie B_f à $[B, f]$, qui est $B_f \cdot (\sum_{f'} \boldsymbol{\nu}^{f\,f'}\,\vec{f}\,' - \nu\,\tilde{f}^{>})$, est nulle grâce à (57) — et ceci est le point central, qui confirme (57) dans son statut de critère de consistance. Quant à la contribution du reste à $[B, f]$, elle s'écrit

(59) $$\sum_{f'} \boldsymbol{\nu}^{f\,f'}\,\vec{f}\,' \cdot \mathcal{B}(x(f')) - \nu\,\tilde{f}^{>} \cdot \mathcal{B}(x(\tilde{f})),$$

où les points $x(f')$ et $x(\tilde{f})$ appartiennent à f' et $\tilde{f}$ respectivement. Leur distance n'excède donc pas $2\gamma_m$. D'après (57), le terme (59) se réécrit

72. Sinon, remplacer ν longueur$(\tilde{f})$ par ν_1 longueur$(\tilde{f}_1) + \nu_2$ longueur$(\tilde{f}_2)$ dans la deuxième ligne du calcul. C'est le même théorème de la moyenne de la théorie de l'Intégration qui est invoqué, mais la mesure est celle "avec poids ν".

73. C'est en fait un *résultat* de la théorie des équations aux dérivées partielles, au prix de très peu d'hypothèses de régularité sur D, sur les interfaces matérielles, etc.

$$\sum_{f'} \boldsymbol{\nu}^{f\,f'} \vec{f}\,' \cdot [\mathcal{B}(x(f')) - \mathcal{B}(x(\tilde{f}))],$$

et se borne donc par $C\gamma_m \sum_{f'} |\boldsymbol{\nu}^{f\,f'}|$ aire(f'). Au prix d'une hypothèse d'uniformité plus forte (celle de l'Exer. 28, c'est-à-dire $0 < \alpha \leq \delta_m/\gamma_m$, qui n'est pas trop restrictive en pratique), et si $\boldsymbol{\nu}$ est symétrique définie positive et localement définie, ce qui lui assure une structure bande (pas plus de k termes non nuls par ligne, où k ne dépend pas de m), on peut montrer que les $\boldsymbol{\nu}^{f\,f'}$ sont en γ_m^{-1}. Les aires étant $O(\gamma_m^{\,2})$, le terme (59), et donc $[B, f]$, est borné par $C\gamma_m^{\,2}$. Grâce à l'hypothèse de l'Exer. 28, à nouveau, le nombre de facettes (impossible à évaluer sinon) est en γ_m^{-3}, et donc il suffit de montrer que $[H, f] = O(\gamma_m^{\,2})$, comme $[B, f]$, pour en finir. Malheureusement, la matrice $\boldsymbol{\mu}$ étant pleine, l'argument sur la proximité des points $x(\tilde{f}')$ et $x(f)$ ne vaut plus. On doit traiter séparément la contribution à $[H, f]$ des facettes voisines de f (qui est en $\gamma_m^{\,3}$, par les mêmes arguments) et celle des autres facettes. Pour cela, on montre d'abord que les $\boldsymbol{\mu}^{f\,f'}$ sont en $\gamma_m^{\,d(f,\,f')}$, où $d(f, f')$ est la "distance combinatoire" de f et de f', c'est-à-dire le nombre minimum de volumes qu'il faut chaîner pour les joindre. La contribution des f' éloignées de f peut alors se borner par la somme d'une série convergente, et s'avère être effectivement en $\gamma_m^{\,2}$, d'où finalement la consistance.

On voit sur cette esquisse que la démonstration de consistance suppose des hypothèses précises sur le maillage, la matrice, etc., qu'il vaut mieux prendre en compte cas par cas, mais aussi que la propriété (57), qui exprime la *compatibilité* du hodge avec les propriétés *métriques* des deux réseaux, y joue le premier rôle. Et donc, bien qu'elle ne soit, au sens strict, ni nécessaire ni suffisante, nous prendrons la condition (57) comme critère de consistance, un critère qui est satisfait, par construction (Fig. 28 et formules (12)(13)), dans la "méthode cellulaire" [To] et dans FIT [Wd], mais qui laisse place à beaucoup d'autres possibilités. Nous verrons plus loin comment et pourquoi il est satisfait aussi dans la méthode de Galerkine.

1.6.2. *Stabilité*

Donc, s'il y a consistance, c'est-à-dire si le second membre de (55) tend vers 0 avec m, l'énergie discrète, soit

$$|p_m b - \mathbf{b}|_\nu^2 = \sum_{f,\,g \in \mathcal{F}} \boldsymbol{\nu}^{f\,g} [\int_f n \cdot B - \mathbf{b}_f] [\int_g n \cdot B - \mathbf{b}_g],$$

tend vers 0 au moins aussi vite que $\gamma_m^{\,2}$. Dans le cas d'un hodge diagonal, cela signifie que

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \boldsymbol{\nu}^{f\,f} [\int_f n \cdot B - \mathbf{b}_f]^2$$

tend vers 0. Or le véritable flux $p_m b \equiv \int_f n \cdot B$ est en $\gamma_m^{\,2}$. Sachant que $\mathbf{v}^{f\,f}$ est en $\gamma_m^{\,-1}$, et le nombre de facettes en $\gamma_m^{\,-3}$, on voit que l'erreur sur le flux embrassé par f, soit $|p_m b - \mathbf{b}_f|$, est en $\gamma_m^{\,3}$, en moyenne. Le flux lui-même étant en $\gamma_m^{\,2}$, on est tenté de conclure que "l'erreur *relative* sur le flux embrassé par f tend vers 0 (en γ_m ou mieux) pour chaque facette f", ce dont certains semblent se satisfaire. Mais à y regarder de plus près, le raisonnement est très approximatif ("en moyenne" ??) et l'assertion qu'il est censé prouver n'a aucun sens: "La" facette f ? Mais f est une entité liée au maillage m, qui donc n'est pas identifiable indépendamment, et aucune proposition de la forme "tel nombre associé à f tend vers 0 avec m" ne peut être logiquement cohérente.

En revanche, prouver quelque chose comme "pour toute surface *fixe* S (donc indépendante de m), l'écart entre le flux réel et le flux calculé tend vers 0 avec m" serait d'un véritable intérêt. Mais cela suppose que nous sachions calculer le flux embrassé par S à partir du tableau $\mathbf{b}$ des DdL, pour toute S. Il nous faut donc une 2-forme, qui va être notée $p_m\mathbf{b}$, construite à partir de $\mathbf{b}$, et telle que $\langle p_m\mathbf{b} ; f\rangle = \mathbf{b}_f$. On pourra alors comparer $\langle p_m\mathbf{b} ; S\rangle$ à $\langle b ; S\rangle$, et donc $p_m\mathbf{b}$ à b. Autrement dit, il faut reconstruire un champ à partir des DdL, afin de le comparer au vrai: On ne peut comparer que des objets de même nature.

Les mêmes considérations valant pour h, nous sommes donc à la recherche d'une application notée génériquement p_m, qui transforme un tableau de DdL, par exemple $\mathbf{b}$ ou $\mathbf{h}$, en une forme différentielle de degré et nature appropriés, avec

$$r_m p_m \mathbf{b} = \mathbf{b}, \quad r_m p_m \mathbf{h} = \mathbf{h}. \tag{60}$$

Il n'est pas question que $p_m r_m b = b$ et $p_m r_m h = h$, en général. Mais il faut que l'"erreur de troncature" $p_m r_m - 1$ tende vers 0 avec m en un sens raisonnable, et le plus simple de ce point de vue est de requérir

$$|p_m r_m b - b|_\nu \to 0 \quad \text{et} \quad |p_m r_m h - h|_\mu \to 0 \quad \text{quand } m \to 0 \tag{61}$$

pour tout b ou h assez régulier. On peut espérer alors que $|p_m\mathbf{b} - b|_\nu$ et $|p_m\mathbf{h} - h|_\mu$ tendent vers 0 (convergence "en énergie"). Comme on va le prouver tout de suite, c'est effectivement le cas s'il existe une constante α telle que

$$\alpha\,|p_m\mathbf{b}|_\nu \le |\mathbf{b}|_\nu, \quad \alpha\,|p_m\mathbf{h}|_\mu \le |\mathbf{h}|_\mu, \tag{62}$$

pour tout $\mathbf{b}$ ou $\mathbf{h}$. Puisque $|\mathbf{b}|_\nu$ et $|\mathbf{h}|_\mu$ dépendent du hodeg discret choisi, (62) est une propriété du schéma d'approximation, que l'on appelle *stabilité*.

PROPOSITION 6. *S'il y a consistance,* au sens de (66), *la convergence résulte de* (61) *et*

(62).

Démonstration. Par consistance, le premier membre de (55) tend vers 0, donc $|\mathbf{b}_m - r_m b|_\nu \to 0$, et $|p_m \mathbf{b}_m - p_m r_m b|_\nu \to 0$, d'après (62). D'après (61), donc, $p_m \mathbf{b}_m \to 0$, en énergie, grâce à l'inégalité triangulaire. De même pour h. ◊

C'est le résultat connu sous le nom de "théorème de Lax": *consistance + stabilité = convergence*.

1.6.3. *Convergence*

1.6.3.1. *Magnétostatique: Une solution d'attente*

Plus loin, nous allons trouver une méthode générale de construction de p_m, grâce aux éléments de Whitney. Mais en attendant, on peut d'ores et déjà proposer un tel opérateur de prolongement dans le cas particulier qui nous occupe, où le tableau $\mathbf{b}$ satisfait $\mathbf{D}\mathbf{b} = 0$, si le maillage primal est simplicial. L'idée est de rechercher un champ représentatif $\underline{B}$ uniforme dans chaque tétraèdre, avec des flux de facette $\underline{B} \cdot \vec{f}$ égaux aux $\mathbf{b}_f$ donnés. (On aura alors div $\underline{B} = 0$.) Ceci, qui n'est pas possible pour des volumes quelconques, le devient dans le cas des tétraèdres, qui n'ont que quatre facettes, et de tableaux $\mathbf{b}$ tels que $\mathbf{D}\mathbf{b} = 0$, car cette relation réduit à trois par tétraèdre le nombre d'équations indépendantes dans le système $\underline{B} \cdot \vec{f} = \mathbf{b}_f$, autant que d'inconnues (trois composantes de $\underline{B}$ par tétraèdre). Il y a donc une solution $\underline{B}$ unique, et l'on pose $p_m \mathbf{b} = \underline{B}$.

On a alors $p_m r_m b \to b$, si $db = 0$ (EXERCICE 31). Quant à la condition de stabilité (62), on a $|p_m \mathbf{b}|_\nu^2 = \int_D \nu\, |\underline{B}|^2$, une forme quadratique par rapport aux flux de facettes, que l'on peut donc noter $(\mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{b})$, où $\mathbf{N}$ est une matrice carrée définie positive. Supposons d'abord *un* tétraèdre seulement dans le maillage, et considérons le quotient à la Rayleigh $(\mathbf{b}, \nu\mathbf{b})/(\mathbf{b}, \mathbf{N}\mathbf{b})$. Sa borne inférieure α_T par rapport à $\mathbf{b}$, strictement positive, ne dépend que de la *forme* du tétraèdre, pas de sa taille. Sommant par rapport à T, on trouve que le α de (62) est la borne inférieure des α_T, qui est strictement positive grâce à l'uniformité postulée (tant sur le maillage que sur ν). On peut donc conclure, concernant le schéma (51), que $p_m \mathbf{b}_m$ converge vers b, en énergie, si l'on a consistance.

Il n'y a pas de construction analogue du côté de h, mais ce n'est pas grave: Si $p_m \mathbf{b}_m \to b$, alors $\nu\, p_m \mathbf{b}_m \to h$, de sorte que $\nu\, p_m \boldsymbol{\mu}$ peut servir de prolongement du côté dual. C'est une approximation "non conforme", faute de continuité de la forme

$\nu\, p_m \boldsymbol{\mu} \mathbf{h}$: Son champ représentatif H n'a pas la continuité tangentielle requise d'un champ magnétique (en particulier, il n'a pas de rotationnel), mais l'essentiel est qu'il converge en énergie.

Il reste que nous n'avons pas là l'application p_m souhaitée, de validité générale, car $\mathbf{Db} = 0$ n'est ici qu'un heureux hasard.

1.6.3.2. *Maxwell complet: Une esquisse*

Avant d'aborder ce problème, discutons brièvement de la convergence dans le cas des équations de Maxwell en évolution (éqs (37) et (38)).

D'abord, par interpolation linéaire entre les valeurs des tableaux de DoF, telles que le schéma les donne, on obtient des tableaux fonctions du temps, qui convergent, lorsque t tend vers 0, vers la solution des équations différentielles (29) et (30). Pas de difficultés sur ce point.

Ensuite, la linéarité des équations permet de passer du domaine temporel au fréquentiel, par transformation de Laplace. Au lieu d'étudier (29) et (30), on peut donc examiner le comportement de la solution de

$$(63) \qquad -p\,\mathbf{D} + \mathbf{R}^t \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad p\,\mathbf{B} + \mathbf{R}\,\mathbf{E} = 0,$$

$$(64) \qquad \mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}\,\mathbf{H},$$

lorsque $m \to 0$. Ici, $p = \xi + i\omega$, avec $\xi > 0$, et les petites capitales dénotent des transformées de Laplace, qui sont donc des tableaux de DdL à valeurs complexes. Si l'on peut prouver la convergence uniforme par rapport à ω (ce que la condition $\xi > 0$ permet), la convergence de (29)(30) s'ensuit, par transformation de Laplace inverse. Le principal problème est donc de comparer $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$, donnés par (36)(37) avec $r_m E$, $r_m B$, $r_m H$, $r_m D$, où les petites capitales, à nouveau, dénotent des transformées de Laplace, mais celles des formes e, b, h, d cette fois.

La façon de procéder est la même qu'en statique. Établir d'abord que

$$(65) \qquad p\boldsymbol{\mu}(\mathbf{H} - r_m H) + \mathbf{R}(\mathbf{E} - r_m E) = p(r_m \mu - \boldsymbol{\mu}\, r_m)H,$$

$$(66) \qquad -p\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{E} - r_m E) + \mathbf{R}^t(\mathbf{H} - r_m H) = -p(r_m \varepsilon - \boldsymbol{\varepsilon}\, r_m)E.$$

Puis multiplier (65), au sens du produit $(\ ,\ )$, par $*(\mathbf{H} - r_m H)$, conjuguer (66) avant de le multiplier par $-(\mathbf{E} - r_m E)$, et additionner. Les termes en $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^t$ s'annulent, et les estimations en énergie suivent. La similitude entre les seconds membres de

(54) d'une part et de (65)(66) d'autre part montre que rien de nouveau n'est requis en fait de consistance. La stabilité, si $\xi > 0$, a lieu si elle avait lieu en statique. Ce qui fait un bon hodge discret en statique, par conséquent, suffit à en faire un pour les problèmes d'évolution.

Ceci est un gage de la fiabilité de la boîte à outils: Si les hodges discrets et les maillages sont compatibles au sens de (67), de sorte qu'il y ait consistance, si l'on peut passer des DdL aux champs, par l'opérateur p_m, de telle sorte que la relation de stabilité (62) entre énergie discréte et énergie continue ait lieu, la convergence suivra. Le problème frontal est donc maintenant la construction des p_m. Nous aurions besoin d'eux, de toute façon, pour déterminer les flux, f.e.m., etc., ailleurs que sur les cellules du maillage, mais là n'est pas la principale raison. C'est avant tout pour tester la *stabilité*, et par suite la convergence, du schéma associé à des hodges discrets donnés, qu'on a besoin des p_m, c'est-à-dire d'éléments finis, à savoir les éléments de Whitney qu'on va maintenant construire.

1.7. Les formes de Whitney

Résumons les attentes concernant la famille d'applications p_m. À chaque tableau de DdL doit correspondre une forme de degré et nature appropriés: une 1-forme $\mathrm{p}_m\mathbf{e}$ au tableau $\mathbf{e}$ basé sur les arêtes primales, une 2-forme $\mathrm{p}_m\mathbf{b}$ à $\mathbf{b}$ basé sur les facettes primales, etc. On doit avoir

(67) $$\mathrm{r}_m\mathrm{p}_m = 1, \quad \mathrm{p}_m\mathrm{r}_m \to 1 \text{ lorsque } m \to 0.$$

La stabilité (62) sera assurée automatiquement par uniformité. De plus, il est souhaitable que $\mathrm{d}\mathbf{b} = 0$ quand $\mathbf{D}\mathbf{b} = 0$, que $\mathrm{d}\mathbf{e} = 0$ quand $\mathbf{R}\mathbf{e} = 0$, etc., donc que l'on ait en toute généralité la propriété structurale

(68) $$\mathrm{d}\mathrm{p}_m = \mathrm{p}_m\mathbf{d},$$

à tous les niveaux, de même que l'on avait $\mathbf{d}\mathrm{r}_m = \mathrm{r}_m\mathrm{d}$. En un mot, le diagramme de la Fig. 33 doit être *commutatif*. Il est remarquable que cette simple condition suffise à engendrer les interpolants cherchés, de façon essentiellement unique. Ces interpolants sont les *formes de Whitney* [Wh], et on appellera *complexe de Whitney* la structure qu'elles forment prises ensemble.

1.7.1. *Des variétés aux chaînes*

On va aborder la question sous un angle inhabituel, mais naturel compte tenu de la façon dont nous avons défini les formes différentielles, comme applications de

type *VARIÉTÉ* → *RÉEL*. Par exemple, une 2-forme telle que b associe un nombre, le flux $\int_S b$, à une surface S. Partant du tableau $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_f : f \in \mathcal{F}\}$, il s'agit donc d'associer à S un nombre déduit de **b**. Si S se réduit à f, ce nombre est forcément $\mathbf{b}_f$. S'il se trouve que S est une chaîne $\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{c}^f f$ basée sur les facettes, ce nombre est forcément, par linéarité, $\sum_f \mathbf{c}^f \mathbf{b}_f$, que nous noterons $<\mathbf{c}, \mathbf{b}>$, avec des crochets en gras. Le problème sera donc résolu si nous savons associer à S, de façon naturelle, une 2-chaîne, disons $\sum_f w^f(S)\, f$, que l'on va noter, pour des raisons qui seront claires dans un moment, $p_m{}^t S$. "Naturelle" implique en particulier additivité par rapport à S et continuité, au sens de la topologie des chaînes. La question est donc devenue "quelle 2-chaîne approche le mieux S", ou "comment représenter S par une somme pondérée de facettes?". La figure 34, relative aux courbes (p = 1), donne l'idée.

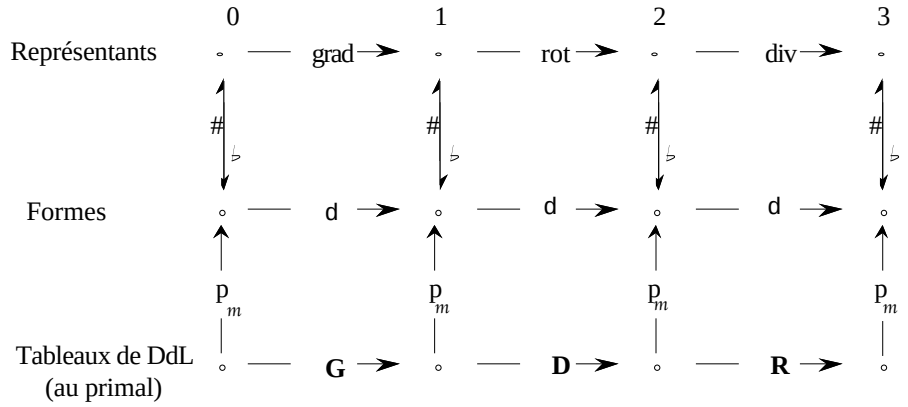

Figure 33. *Forme diagrammatique de (68), associée à une partie de la Fig. 14 (en haut). Les dièses et bémols représentent les isomorphismes entre formes différentielles et leurs représentants, scalaires ou vectoriels.*

Une fois connue l'application $p_m{}^t$, c'est-à-dire les poids $w^f(S)$ à attribuer à S, on connaît p_m: En effet, l'application $S \to w^f(S)$ constitue une 2-forme, associée à f, que l'on peut noter w^f, et $<p_m{}^t S ; \mathbf{b}> = \sum_f w^f(S)\, \mathbf{b}_f$, c'est-à-dire $<S ; \sum_f \mathbf{b}_f w^f>$. Donc $p_m \mathbf{b} = \sum_f \mathbf{b}_f w^f$. On voit que $<p_m{}^t S ; \mathbf{b}> = <S ; p_m \mathbf{b}>$, ce qui justifie la notation $p_m{}^t$: Il y a bien, en effet, transposition ici. La forme w^f s'appelle *forme de Whitney* associée à f. Le poids de S dans la chaîne $p_m{}^t S$ est $\int_S w^f \equiv <S ; w^f>$.

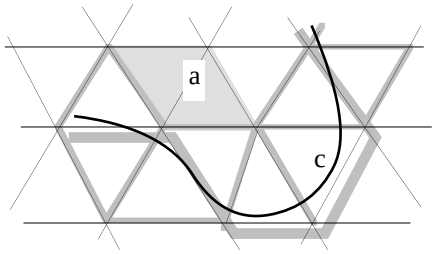

Figure 34. *Représentation de la courbe* c *par une somme pondérée d'arêtes primales, ou 1-chaîne. Les variations d'épaisseur tentent de suggérer les poids accordés aux différentes arêtes. Celles telles que* a*, dont le "domaine de contrôle" (en grisé) ne coupe pas* c*, ont un poids nul. (Les poids peuvent être positifs ou négatifs, selon l'orientation de l'arête par rapport à* c.) *Comment attribuer ces poids est le problème central quant à la construction des formes de Whitney.*

1.7.2 *Une formule génératrice*

Quelques conventions de notation d'abord. Le maillage primal est supposé simplicial, jusqu'à nouvel avis. Les résultats valent en dimension n de l'espace ambiant et pour toutes les dimensions simpliciales $p \leq n$, mais sont énoncés comme si l'on avait $n = 3$ et $p = 1$ ou 2, qui sont les cas utiles. De même pour les démonstrations, y compris celles par récurrence lorsqu'on passe de p, quelconque, à $p + 1$, mais dans lesquelles nous adapterons la notation à une valeur concrète de p, 1 ou 2, préférant donc $\mathbf{R}$, $\mathbf{D}$, ou $\mathbf{R}^t$, $\mathbf{D}^t$, à $\mathbf{d}$ ou $\boldsymbol{\partial}$. Il sera facile dans chaque cas de vérifier que la preuve a en fait valeur générale.

On note $\lambda^n(x)$ le poids barycentrique du point x par rapport au nœud n, lorsque x appartient à l'un des tétraèdres qui ont n en commun (dans les autres cas, $\lambda^n(x) = 0$). Par définition, $\lambda^a = \lambda^m + \lambda^n$, lorsque a est l'arête {m, n}, et $\lambda^f = \lambda^l + \lambda^m + \lambda^n$ pour la facette f = {l, m, n}, etc. Lorsque a = {m, n} et f = {l, m, n}, on note f – a le nœud restant, c'est-à-dire l. Ainsi λ^{f-a} signifie (dans ce cas) λ^l, et vaut $\lambda^f - \lambda^a$. Le segment orienté allant du point x au point y est noté xy, le triangle orienté formé par les points x, y, z, dans cet ordre, est xyz. Enfin, bien que le nœud n et sa position x_n soient des choses distinctes, nous écrirons à l'occasion ijx pour le triangle basé sur les points x_i, x_j, x, où x_i et x_j sont les points occupés par les nœuds i et j.

Il s'agit de "représenter une p-variété par une p-chaîne". Lorsque $p = 0$, la solution de ce problème est connue: Tout point x du domaine maillé est le

barycentre $x = \sum_n \lambda^n(x)\, x_n$, à poids $\lambda^n(x)$, des sommets du simplexe auquel il appartient. Son poids par rapport au nœud n est donc $\lambda^n(x)$, et la 0-chaîne qui le représente est $p_m{}^t x = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda^n(x)\, n$. Les 0-formes de Whitney w^n sont donc les λ^n, c'est-à-dire les "fonctions chapeau" de la méthode des éléments finis. On note que le prolongement standard p_m, qui associe au tableau $\boldsymbol{\varphi}$ la fonction $\varphi = \sum_{n \in \mathcal{N}} \boldsymbol{\varphi}_n\, w^n$, s'obtient bien par transposition comme annoncé: $\langle p_m{}^t x\, ;\, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \sum_n \lambda^n(x)\, \boldsymbol{\varphi}^n = \sum_n w^n(x)\, \boldsymbol{\varphi}^n = \langle x\, ;\, \sum_n w^n \boldsymbol{\varphi}^n\rangle = \langle x\, ;\, p_m \boldsymbol{\varphi}\rangle$. Autrement dit, les fonctions chapeau jouent un double rôle: ce sont les poids qui permettent de représenter les points à partir des positions des nœuds, ce sont aussi les interpolants qui donnent les fonctions à partir de leurs valeurs nodales.

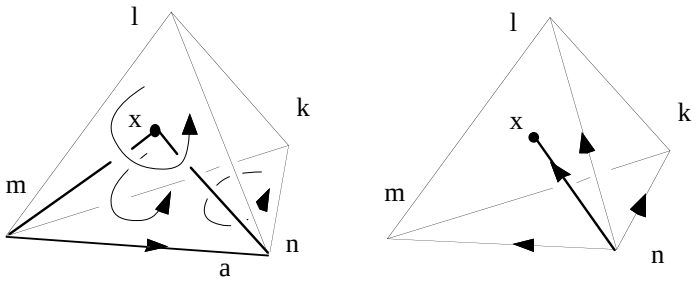

Figure 35. *À gauche: Avec l'arête* $a = \{m, n\}$ *et les facettes* $\{m, n, k\}$ *et* $\{m, n, l\}$ *orientées comme indiqué, la* 2*-chaîne à associer au triangle* $x \vee a$, *alias* mnx, *ne peut être que* $\lambda^k(x)\, mnk + \lambda^l(x)\, mnl$. *C'est bien ce que dit (69). À droite: même relation entre* $x \vee n$ *et la* 1*-chaîne* $\lambda^k(x)\, nk + \lambda^l(x)\, nl + \lambda^m(x)\, nm$.

Procédant par récurrence, soit à représenter une p-variété par une p-chaîne lorsqu'on sait le faire pour les variétés de dimension $p - 1$. Pour être concret (mais cela ne fait rien perdre en généralité), soit $p = 2$. On sait donc représenter un segment yz par une 1-chaîne $p_m{}^t yz = \sum_{a \in \mathcal{A}} \langle yz\, ;\, w^a\rangle$. Si l'on sait représenter un triangle xyz, on saura représenter une surface (il suffit de la découper en triangles au préalable). Par ailleurs, par linéarité, $p_m{}^t xyz = \sum_a \langle yz\, ;\, w^a\rangle\, p_m{}^t (x \vee a)$, où $x \vee a$ est le triangle de la Fig. 35, à gauche. La question se réduit donc à: par quelle 2-chaîne représenter $x \vee a$? La figure suggère la seule réponse possible: $x \vee a$ est "la moyenne" des deux facettes mnl et mnk, qui s'articulent le long de $a = \{m, n\}$, avec pour poids les poids barycentriques de x par rapport aux nœuds k et l. Tenant compte des orientations des facettes, et pour une position quelconque de x, on pose donc

$$p_m{}^t (x \vee a) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{R}_f^a\, \lambda^{f-a}(x)\, f. \tag{69}$$

On a alors, pour un petit triangle xyz,

$$p_m{}^t\, xyz = \sum_{a \in \mathcal{A}} \langle yz\,;\, w^a\rangle\, p_m{}^t\,(x \vee a)$$
$$= \sum_{a \in \mathcal{A},\ f \in \mathcal{F}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle yz\,;\, w^a\rangle\, f$$

que l'on veut égal à $\sum_{f \in \mathcal{F}} \langle xyz\,;\, w^f\rangle\, f$, d'où

$$\langle xyz\,;\, w^f\rangle = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle yz\,;\, w^a\rangle. \tag{70}$$

Comme cas particuliers de cette formule, on a aussi $0 = \langle xzx\,;\, w^f\rangle = \sum_a \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle zx\,;\, w^a\rangle$, et $0 = \langle xxy\,;\, w^f\rangle = \sum_a \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle xy\,;\, w^a\rangle$, d'où, additionnant le tout,

$$\langle xyz\,;\, w^f\rangle = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle yz + zx + xy\,;\, w^a\rangle$$
$$= \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle \partial(xyz)\,;\, w^a\rangle$$
$$= \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\ \langle xyz\,;\, dw^a\rangle$$

et par conséquent $w^f = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}(x)\, dw^a$.

Nous sommes donc conduits à la définition récursive suivante:

DÉFINITION.–. *La* forme *différentielle* de Whitney *associée au* $(p+1)$-*simplexe* σ *est*

$$w^\sigma = \sum_{s \in S_p} \mathbf{d}_\sigma{}^s\, \lambda^{\sigma - s}\, dw^s, \tag{71}$$

où s *parcourt l'ensemble* S_p *des* p-*simplexes. En particulier,* $w^n = \lambda^n$, *et*

$$w^e = \sum_{n \in \mathcal{N}} \mathbf{G}_a{}^n\, \lambda^{a-n}\, dw^n, \quad w^f = \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f{}^a\, \lambda^{f-a}\, dw^a, \tag{72}$$
$$w^v = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{D}_v{}^f\, \lambda^{v-f}\, dw^f.$$

EXERCICE 32. Vérifier que, sur un tétraèdre $\{k, l, m, n\}$, ces formules donnent

$$w^e = \lambda^m\, d\lambda^n - \lambda^n\, d\lambda^m$$

pour l'arête $a = \{m, n\}$,

$$w^f = 2(\lambda^l\, d\lambda^m \wedge d\lambda^n + \lambda^m\, d\lambda^n \wedge d\lambda^l + \lambda^n\, d\lambda^l \wedge d\lambda^m)$$

pour la facette $f = \{l, m, n\}$ et enfin, pour $v = \{k, l, m, n\}$.

$$w^v = 6(\lambda^k\, d\lambda^l \wedge d\lambda^m \wedge d\lambda^n + \text{... (trois termes analogues)}).$$

EXERCICE 33. Montrer que les champs de vecteurs représentatifs de w^a et w^f sont (avec ∇ pour grad)

$$W^a = \lambda^m \nabla \lambda^n - \lambda^n \nabla \lambda^m,$$

$$W^f = 2(\lambda^l \nabla\lambda^m \times \nabla\lambda^n + \lambda^m \nabla\lambda^n \times \nabla\lambda^l + \lambda^n \nabla\lambda^l \times \nabla\lambda^m).$$

EXERCICE 34. Montrer que $\nabla\lambda^n = \overline{klm}/(3\,\mathrm{vol}(klmn))$, où $\overline{klm}$ est l'aire vectorielle de la facette klm.

EXERCICE 35. Montrer que $w^{mnk}(x) = \overline{xl}/(3\,\mathrm{vol}(klmn))$.

EXERCICE 36. Montrer que $w^{m\,n}(x) = (\overline{kl} \times \overline{kx})/(6\,\mathrm{vol}(klmn))$.

EXERCICE 37. Montrer que la densité associée à w^v est 1/volume(klmn).

En dimension quelconque, le développement complet de la récurrence donne, pour un p-simplexe $s = \{n_0, n_1, ..., n_p\}$, orienté par l'ordre des sommets,

$$w^s = p! \sum_{i\,=\,0,\,...,\,p} (-1)^i\, w^{n_i}\, dw^{n_0} \wedge ... \langle i \rangle ... \wedge dw^{n_p},$$

où le $\langle i \rangle$ signifie "omettre le terme dw^{n_i}." C'est de cette façon que les formes de Whitney sont décrites dans [Wh].

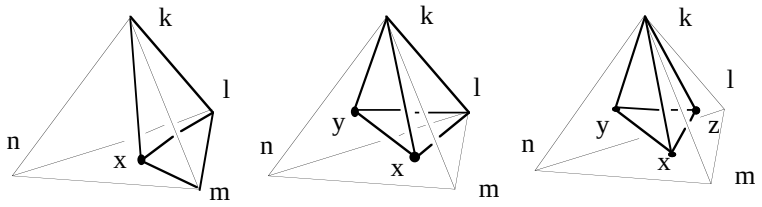

Figure 36. *De même que le poids barycentrique du point* x *par rapport au nœud* n *est* vol(klmx), *si le volume de* klmn *est pris pour unité, le poids du segment* xy *par rapport à l'arête* {m, n} *est* vol(klxy), *et celui du triangle* xyz *par rapport à la facette* {l, m, n} *est* vol(kxyz).

REMARQUE.– L'Exer. 32, en particulier, aidera à reconnaître dans (70) le développement d'un déterminant, celui formé par les coordonnées barycentriques des points x, y, z vis-à-vis des sommets l, m, n. D'où l'interprétation des poids suggérée par la Fig. 36. ◊

1.7.3. *Propriétés des formes de Whitney*

Dérivons maintenant quelques formules des définitions (71) et (72), à la fois pour leur intérêt propre et à titre de préparation pour le résultat central de la Prop. 9 ci-dessous, à savoir $dp_m = p_m \mathbf{d}$. On notera W^p, dorénavant, le sous-espace de $\mathcal{F}^p$ engendré par les formes de Whitney de degré p.

PROPOSITION 7. *Pour tout simplexe, il y a une relation entre les formes de Whitney attachées à ses faces: Par exemple, pour chaque* f,

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_f^{\ a} \lambda^{f-a} w^a = 0. \tag{73}$$

Démonstration. D'après (72), $\sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} \lambda^{f-a} w^a = \sum_{a,n} \lambda^{f-a} \lambda^{a-n} \mathbf{R}_f^{\ a} \mathbf{G}_{\mathbf{a}}^{\ \mathbf{n}} dw^n = 0$, grâce à la relation $\mathbf{RG} = 0$, parce que $\lambda^{f-a} \lambda^{a-n}$, qui est le même pour tous les a de ∂f contenant n, peut être mis en facteur. ◊

Comme corollaire, en se servant de $d(\lambda\,\omega) = d\lambda \wedge \omega + \lambda\, d\omega$, on obtient

$$w^f = -\sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{R}_{\mathbf{f}}^{\ \mathbf{a}} d\lambda^{f-a} \wedge w^a,$$

et autres variantes de (72). Vient maintenant le plus important.

1.7.3.1. *Une "suite exacte"*

PROPOSITION 8. Pour *chaque* p-*simplexe* s, *on a*

$$\text{(i)}\ \ \lambda^s dw^s = (p+1)\, d\lambda^s \wedge w^s, \quad \text{(ii)}\ \ d\lambda^s \wedge dw^s = 0. \tag{74}$$

Démonstration. C'est vrai pour $p = 0$. Supposons-le pour $p = 1$. Alors $dw^f = \sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} d\lambda^{f-a} \wedge dw^a = \sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} d\lambda^f \wedge dw^a \equiv d\lambda^f \wedge \sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} dw^a$ par (74-ii), d'où $d\lambda^f \wedge dw^f = 0$. Ensuite, $\lambda^f dw^f = \lambda^f(\sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} d\lambda^f \wedge dw^a) = d\lambda^f \wedge (\sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} \lambda^f dw^a) = d\lambda^f \wedge (w^f + 2\sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} d\lambda^a \wedge w^a) = d\lambda^f \wedge w^f - 2(d\lambda^f \wedge \sum_a \mathbf{R}_f^{\ a} d\lambda^{f-a} \wedge w^a) = 3\, d\lambda^f \wedge w^f$, ce qui prouve (74-i) pour $p = 2$. D'où (74-ii) pour $p = 2$ en prenant le d. ◊

Ensuite, encore une variante de (72), mais sans sommation cette fois. Pour toute arête a telle que $\mathbf{R}_f^{\ a} \neq 0$, on a

$$\mathbf{R}_f^{\ a} w^f = \lambda^{f-a} dw^a - 2\, d\lambda^{f-a} \wedge w^a. \tag{74}$$

Ceci se démontre par récurrence, en utilisant $\mathbf{G}_{a'}^{\ n} w^{a'} = \lambda^{a'-n} dw^n - d\lambda^{a'-n} w^n$, où $n = a \cap a'$, et l'identité $\mathbf{G}_{a'}^{\ n} \mathbf{G}_a^{\ n} = -\mathbf{R}_f^{\ a'} \mathbf{R}_f^{\ a}$. On peut maintenant conclure avec le résultat central concernant les propriétés structurales du complexe (cf. Fig. 33):

PROPOSITION 9. *On a*

$$dw^a = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{R}_f^{\ a}\, w^f,$$

et donc, par linéarité, $dp_m = p_m \mathbf{d}$.

Démonstration. Puisque les deux membres s'annulent en dehors de l'"étoile" de a, c'est-à-dire de la réunion st(a) des volumes contenant a, on peut faire comme si st(a) était la totalité du domaine maillé. Noter que $\sum_f \mathbf{R}_f^{\ a} \lambda^f = 1 - \lambda^a$ sur st(a). Donc, $\sum_f \mathbf{R}_f^{\ a} w^f = \sum_f [\lambda^{f-a}\, dw^a - 2\, d\lambda^{f-a} \wedge w^a] = (1 - \lambda^a)\, dw^a - 2\, d(1 - \lambda^a) \wedge w^a = (1 - \lambda^a)\, dw^a + \lambda^a \wedge dw^a \equiv dw^a$, grâce à (74-i). Ensuite, $d(p_m \mathbf{u}) = d(\sum_a \mathbf{u}_a w^a) = \sum_{a,f} \mathbf{R}_f^{\ a}\, \mathbf{u}_a w^f = \sum_f (\mathbf{R}\mathbf{u})_f w^f = p_m(\mathbf{d}\mathbf{u})$. ◊

Corollaire: $dW^{p-1} \subset W^p$, et si le maillage est tel que $\ker(\mathbf{d}_p) = \mathrm{cod}(\mathbf{d}_{p-1})$, comme c'est le cas lorsqu'on maille un domaine "contractile" [B1], c'est-à-dire de topologie simple, alors $\ker(d\,;\, W^p) = W^{p-1}$, autrement dit, les espaces de Whitney forment une *suite exacte.*

1.7.3.2. *"Partition de l'unité"*

Pour ce qui vient maintenant, nous retournons au formalisme vectoriel standard, en minimisant les changements de notation: W^a et W^f sont les champs de vecteurs associés aux formes de Whitney w^a et w^f, et l'on a $W^a = \lambda^m \nabla\lambda^n - \lambda^n \nabla\lambda^m$, etc. Fonctions et 0-formes étant la même chose, w^n reste w^n. On se débarrassera des flèches sur les vecteurs en convenant que f, par exemple, désigne soit la facette f, soit son aire vectorielle, ce qui sera sans ambiguïté dans le contexte. Même double emploi pour $\tilde{f}$.

Rappelons que la somme des fonctions barycentriques est égale à 1, de sorte que $\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n = 1$. Cette propriété de "partition de l'unité" se généralise comme suit:

PROPOSITION 10. *En tout point* x, *pour tout vecteur* v, *on a*

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} (v \cdot W^f(x))\, f = v. \tag{75}$$

C'est une conséquence de la construction ci-dessus, où nous avions $xyz = \sum_f \langle xyz\,;\, w^f(x)\rangle f$. Remplaçant w^f par W^f, xyz par son aire vectorielle v et f par son aire vectorielle, on trouve (75). (Il y a en fait une formule de ce type pour tous les degrés, et celle au degré 0 n'est autre que $\sum_{n \in \mathcal{N}} w^n = 1$.) Comme corollaire, obtenu en remplaçant f par g, v par $\nu W^f(x)$, et en intégrant par rapport à x, on a

$$\sum_{g \in \mathcal{F}} \boldsymbol{\nu}^{fg}\, g = \nu \tilde{f},$$

où les $\boldsymbol{\nu}^{fg} = \int \nu\, W^f \cdot W^g$ sont les entrées de la matrice de Galerkine $\boldsymbol{\nu}$, et $\nu\tilde{f}$ le vecteur de la Fig. 32, mais avec cette importante précision que le maillage dual est ici celui obtenu par la construction barycentrique. On montrera sans peine, en effet, que $\int \nu\, W^f = \nu\tilde{f}$ (EXERCICE 38), en travaillant séparément sur chaque tétraèdre (où ν est uniforme), sur le modèle suggéré par la Fig. 37. Maintenant, comparons cela avec la formule (57), la condition de compatibilité mise au jour par l'analyse d'erreur: Nous venons enfin de démontrer qu'elle est satisfaite par les hodges de Galerkine.

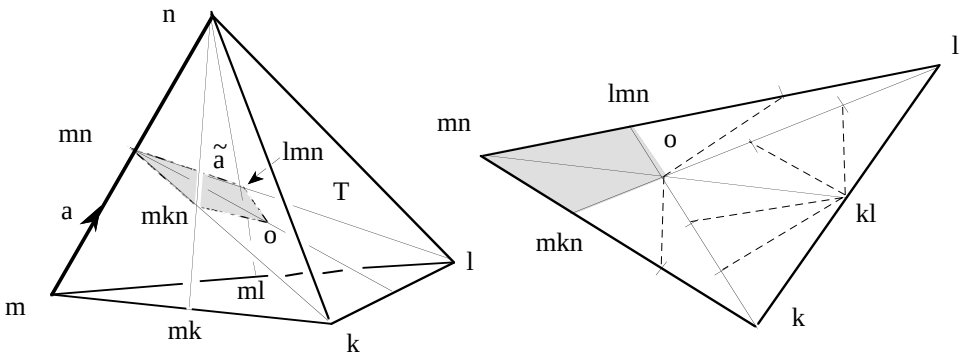

Figure 37. *Pourquoi* $\int_T w^a = \tilde{a}$ dans le cas du maillage dual barycentrique. *D'abord, la hauteur issue de* n *a pour longueur* $1/|\nabla w^n|$, *donc* $\int_T \nabla w^n = klm/3$. *Ensuite, la moyenne de* w^n *ou* w^m *est* 1/4. *Donc* $\int_T w^a = \int_T [w^m \nabla w^n - w^n \nabla w^m]$ *est un vecteur égal à* (klm/3 + kln/3)/4. *Comme le montre la figure (les 12 triangles de droite ont tous la même aire), ceci est précisément l'aire vectorielle de* ã.

1.7.3.3. *Formes de plus haut dégré*

Résumons: Les formes de Whitney ont été construites de telle façon que la propriété (75) de partition de l'unité ait lieu. Grâce à cette propriété, les matrices de masse formées à partir des éléments de Whitney satisfont une propriété de compatibilité avec le maillage barycentrique, la condition (57), que nous avons reconnue plus haut comme un critère de consistance. Nous pouvons donc ériger en principe que *les formes de Whitney de degré supérieur doivent,* elles aussi, *former des partitions de l'unité,* sur le modèle de (75).

Étant plus nombreuses, a priori, les formes de degré supérieur doivent correspondre à des partitions plus fines. Or nous avons un moyen de raffiner la partition (75): Il suffit de multiplier les deux membres par les λ^n, qui forment aussi une partition de l'unité. Le résultat est

(76) $$\sum_{f \in \mathcal{F},\, n \in \mathcal{N}} (\lambda^n W^f(x) \cdot v)\, f = v,$$

d'où la recette suivante: Associer à chaque arête, facette, etc., non plus une seule forme de Whitney, mais les produits[74] $\lambda^n w^a$, $\lambda^n w^f$, etc., où n parcourt $\mathcal{N}$. Au lieu des espaces de Whitney W^p, composés de formes de degré polynomial un au plus, nous obtenons ainsi des espaces plus grands, $W^p{}_2$, composés de formes de degré deux au plus. Comme nous allons le prouver dans un moment (en supposant le domaine contractile, mais ce n'est pas une restriction grave), le complexe qu'elles constituent a la propriété de suite exacte: Si par exemple $b = \sum_{n,\, f} \mathbf{b}_{n\, f}\, \lambda^n w^f$ satisfait $db = 0$ (donc si $\operatorname{div} B = 0$, où B est le représentant vectoriel), il existe des DdL $\mathbf{u}_{na}$ tels que $b = d(\sum_{n,\, a} \mathbf{u}_{n\, a}\, \lambda^n w^a)$. (Comment définir $W^p{}_k$, pour les degrés polynomiaux $k \geq 3$, avec naturellement $W^p{}_1 = W^p$, devrait maintenant être évident.)

Noter toutefois que, du fait de la Prop. 7, ces nouvelles formes ne sont pas linéairement indépendantes. Par exemple, l'espace engendré par les $\lambda^n w^a$, sur *un* tétraèdre, a pour dimension 20 et non 24, car la Prop. 7 impose une relation telle que (73) par facette. Sur l'ensemble du maillage, avec N nœuds, A arêtes, F facettes, les deux produits $\lambda^m w^a$ et $\lambda^n w^a$ pour chaque arête $a = \{m, n\}$ et les trois produits $\lambda^{f-a} w^a$ pour chaque facette f donnent un total de $2A + 3F$ générateurs de $W^1{}_2$. Mais avec une relation par facette, soit F en tout, la dimension de $W^1{}_2$ se réduit à $2(A + F)$.

REMARQUE.– De même, les espaces engendrés par les $\lambda^n w^n$, les $\lambda^n w^f$ et les $\lambda^n w^v$ ont pour dimensions respectives $N + E$, $3(F + V)$ et $4V$. La formule générale est $\dim(W^p{}_2) = (p + 1)(S_p + S_{p+1})$, où S_p est le nombre de p-simplexes. Noter que $\sum_p (-1)^p \dim(W^p{}_2) = \sum_p (-1)^p S_p \equiv \chi$, la constante d'Euler–Poincaré du domaine maillé. ◊

Du fait de cette redondance, ces formes posent un problème quant à l'interprétation des degrés de liberté. Avec les éléments d'arêtes standards, le DdL $\mathbf{u}_{a'}$ est l'intégrale de la 1-forme $u = \sum_a \mathbf{u}_a w^a$ sur l'arête a'. Autrement dit, la matrice (carrée) des $\langle a' : w^a \rangle$ est la matrice unité. Arêtes et éléments d'arêtes sont *en dualité,*[75] en ce sens précis. Mais ici, nous ne pouvons espérer trouver une famille de 1-chaînes en dualité avec les $\lambda^n w^a$. Les candidats les plus naturels à cet égard, à savoir les "petites arêtes" notées $\{n, a\}$ sur la Fig. 38, ne font pas l'affaire, car la matrice $\mathbf{A}^{n\,a}{}_{n'\,a'}$ des circulations $\langle \{n', a'\} ; \lambda^n w^a \rangle$ n'est pas l'unité. Si au moins elle était régulière, on trouverait en l'inversant une autre famille de chaînes, combinaisons linéaires des

74. Bien entendu, seuls les produits non nuls sont à prendre en considération.

75. Tout comme les vecteurs et covecteurs de base ∂_i et d^j de la Note 51.

{n, a}, en dualité avec les $\lambda^n w^a$, Mais régulière elle n'est pas, à cause des relations (73).

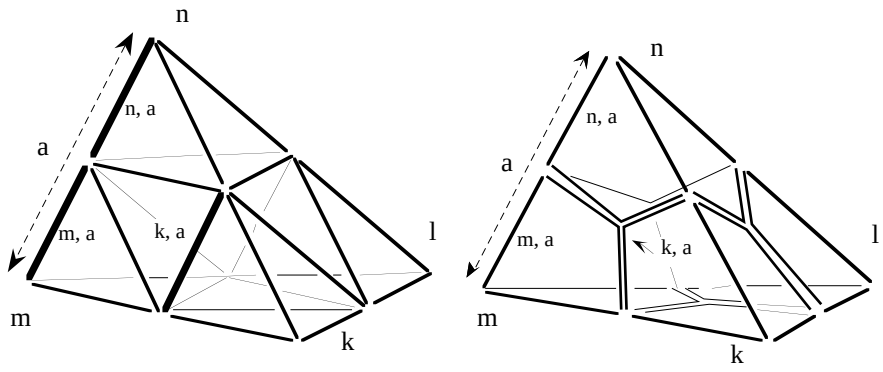

Figure 38. *Gauche: "Petites arêtes", en relation biunivoque avec les forme* $\lambda^n w^a$*, et leur indexation. Droite: Une autre façon de les définir.*

EXERCICE 39 En dimension 2, et pour un maillage formé d'un seul triangle {l, m, n}, calculer la matrice 9×9 des circulations des $\lambda^n w^a$ sur les petites arêtes (une ligne pour chaque forme). Vérifier qu'elle est de rang huit. [Penser à orienter les petites arêtes de manière à profiter au maximum des symétries.]

EXERCICE 40. Il y a donc — à un facteur multiplicatif près — une chaîne, basée sur les "petites arêtes", sur laquelle toutes les $\lambda^n w^a$ ont une circulation nulle. Laquelle?

EXERCICE 41. Que sont les "petites facettes" et les "petits volumes"?

On peut tourner la difficulté en supprimant simplement un élément de type $\lambda^{f-a} w^a$ pour chaque facette et la petite arête correspondante. La matrice **A** est alors régulière et on peut trouver des chaînes en dualité avec les 1-formes retenues (ou vice-versa). Mais la symétrie est perdue, ce qui n'est jamais souhaitable. Mieux vaut donc raisonner en termes de *blocs* de DdL, un bloc de un par demi-arête et un bloc de trois par facette. On peut alors diagonaliser *par blocs* la matrice des circulations, avec une claire correspondance biunivoque entre blocs de chaînes et blocs de formes. Simplement, la dimension de l'espace (des formes ou des chaînes) engendré par un bloc de trois est *deux* et non trois, et les trois DdL d'un tel bloc ne sont significatifs qu'à une constante additive près. L'essentiel est préservé: Une forme de W^1_2 dont toutes les circulations s'annulent est nulle.

REMARQUE.– Les "petites arêtes" peuvent être définies différemment, par exemple [Ka] comme sur la Fig. 38, droite, avec l'avantage de mieux mettre en évidence les chaînes sur lesquelles toutes les formes $\lambda^n w^a$ s'annulent: ce sont les sommes (au sens de l'addition des chaînes) des trois petites arêtes, convenablement orientées, portées par chaque face. Le lecteur n'aura pas de peine à imaginer ce que sont les "petites facettes" et "petits volumes" dans cet esprit. ◊

Reste à faire la preuve de la propriété de suite exacte concernant les W^p_2 : Montrer que $db = 0$ pour un b de W^p_2 entraîne l'existence, localement au moins, d'un u dans W^{p-1}_2 tel que $b = du$. On fera la démonstration dans le cas $p = 2$, et en usant des symboles rot et div au lieu de d pour plus de lisibilité. Le domaine est supposé contractile (topologie triviale), ce qui n'est pas une restriction puisque seule l'existence *locale* de u, c'est-à-dire au voisinage de tout point, est en question (comme pour le Lemme de Poincaré). D'abord, deux points techniques:

LEMME 1. *Si* $\sum_{n \in \mathcal{N}} \beta_n \lambda^n(x) = \beta_0$ *pour tout* x, les β étant des nombres réels, *alors* $\beta_n = \beta_0$ *pour tous les nœuds* $n \in \mathcal{N}$.

Démonstration. Car $\sum_n \lambda^n = 1$ est la seule relation entre les λ^n. ◊

LEMME 2. *Si* $u \in W^1$, *alors* $2\,\mathrm{rot}(\lambda^n u) - 3\,\lambda^n \mathrm{rot}\, u$ *est dans* W^2.

Démonstration. Si $u = w^a$ et $n = f - a$, c'est une conséquence de (74). Si n est l'une des extrémités de a, si $a = \{m, n\}$ par exemple, le calcul suivant suffit: $2\,d\lambda^n \wedge (\lambda^m d\lambda^n - \lambda^n d\lambda^m) = -2\,\lambda^n d\lambda^n \wedge d\lambda^m = \lambda^n dw^a$. ◊

Cela étant,

PROPOSITION 11. Si la *suite des* W^p *est exacte, celle des* W^p_2 *est exacte.*

Démonstration (au niveau $p = 2$). Soit $b = \sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda^n b_n$, avec tous les b_n dans W^2, et $\mathrm{div}\, b = 0$. D'après le lemme 1.1 (cas où $u \in W^2$), $3\,\mathrm{div}(\lambda^n b_n) - 4\,\lambda^n \mathrm{div}\, b_n \in W^3$. Si $\mathrm{div}\, b = 0$, on a donc $\sum_{n \in \mathcal{N}} \lambda^n \mathrm{div}\, b_n = c$, où $c \in W^3$. Appliquant le Lemme 1, tétraèdre par tétraèdre, on voit que $\mathrm{div}\, b_n$ est le même champ pour tous les n. Il y a donc un $\underline{b}$ dans W^2 tel que $\mathrm{div}(b_n - \underline{b}) = 0$ pour tout n, et puisque le complexe des W^p est exact, il y a un u_n dans W^1 tel que $b_n = \underline{b} + \mathrm{rot}\, u_n$. Donc $b = b_0 + \underline{b} + \sum_n \lambda^n \mathrm{rot}\, u_n$. Par le Lemme 2, il y a donc un certain $\underline{\underline{b}}$ dans W^2 tel que $b = \underline{\underline{b}} + {}^2/_3\,\mathrm{rot}(\sum_n \lambda^n u_n)$, et $\mathrm{div}\, \underline{\underline{b}} = \mathrm{div}\, b = 0$. Donc b est bien le rotationnel d'un élément de W^1_2. ◊

REMARQUE.– En fait, comme on peut le démontrer en y mettant un peu plus de soin, les complexes W^p_1 et W^p_2 ont *la même cohomologie*, quelles que soient la topologie du domaine et les conditions aux limites. ◊

1.7.4. *Formes sur d'autres éléments que les simplexes*

L'idée qui nous a guidés jusque là, *approcher les* p-*variétés par des* p-*chaînes basées sur les* p-*cellules du maillage,* est très productive, comme on va le voir.

1.7.4.1. *Hexaèdres*

Premier exemple, l'élément" isoparamétrique" sur les hexaèdres [E&] peut être compris de cette façon. Une explication en 2D suffira (Fig. 39), la généralisation étant facile. Considérons un quadrangle convexe basé sur les points x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{11}, et cherchons quels poids $w^n(x)$ leur donner pour représenter un point x sous la forme $x = \sum_n w^n(x)\, x_n$, où n parcourt l'ensemble $\{00, 10, 01,11\}$, de façon raisonnable. (Il y a *plusieurs* façons, puisqu'on dispose de quatre points là où trois suffiraient.) Si x est sur la frontière, les poids sont évidents. Par exemple, si $x = (1 - \xi)x_{00} + \xi x_{10}$, point que nous notons $x_{\xi 0}$, les poids sont $\{1 - \xi, \xi, 0, 0\}$. Pour $x \equiv x_{\xi 1} = (1 - \xi)x_{01} + \xi x_{11}$, on prendra $\{0, 0, 1 - \xi, \xi\}$. Maintenant, tout point x appartient au segment $[x_{\xi 0}\, x_{\xi 1}]$ pour une *unique* valeur $\xi(x)$ du poids ξ, et dans ce cas x est le barycentre $(1 - \eta)x_{\xi 0} + \eta x_{\xi 1}$, pour un certain $\eta = \eta(x)$, donc il est naturel de distribuer les poids précédents dans les mêmes proportions:

$$x = (1 - \eta(x))(1 - \xi(x))\, x_{00} + (1 - \eta(x))\xi(x)\, x_{10} + \eta(x)(1 - \xi(x))\, x_{01} + \eta(x)\xi(x)\, x_{11}, \tag{77}$$

ce qui met en évidence les poids: $w^{00} = (1 - \eta)(1 - \xi)$, etc. Ils forment manifestement une partition de l'unité.

Cherchant dans ce que nous avons fait un moyen de généraliser aux dimensions supérieures, nous remarquons, associé à l'application trilinéaire[76] $x \to \{\xi(x), \eta(x), \zeta(x)\}$ d'un hexaèdre vers le cube unité dans l'espace $\xi\eta\zeta$, un "système de projections". Les projections successives (auxquelles on peut procéder dans n'importe quel ordre) envoient un point $x \equiv x_{\xi\eta\zeta}$ vers ses images $x_{0\eta\zeta}$ et $x_{1\eta\zeta}$ sur les facettes[77] en regard $\xi = 0$ et $\xi = 1$, puis, récursivement, envoient chacune de ces images sur deux arêtes en regard, etc., jusqu'à ce que l'on aboutisse à un nœud. Au cours de ce

---

76. Ainsi appelée parce que ξ, η et ζ, bien que polynômes de degré 3 par rapport aux coordonnées cartésiennes de x prises ensemble, sont des fonctions affines de chacune d'elles prise séparément.

77. Attention, les p-faces ne sont pas forcément "planes", pour $p > 1$, en dimension supérieure à 2.

processus, le poids $\langle x ; w^n \rangle$ de x est déterminé par récurrence, selon des formules telles que (en supposant ici pour l'exemple que n appartient à la facette $\xi = 0$):

$$\langle x_{\xi\eta\zeta} ; w^n \rangle = (1 - \xi) \langle x_{0\eta\zeta} ; w^n \rangle .$$

Le poids final de x par rapport à n est alors le produit des facteurs, tels que ici $1 - \xi$, ramassés en cours de route. (Ils mesurent la proximité de chaque projection relativement à la face vers laquelle va être faite la prochaine projection.) Le dernier facteur dans ce produit est 1, obtenu lorsque la projection atteint n. Remarquer, ce qui évidemment est essentiel, que les mêmes facteurs sont trouvés, à l'ordre près, quelle que soit la suite de projections menant à un nœud, et donc que le poids de x par rapport à ce nœud est bien défini.

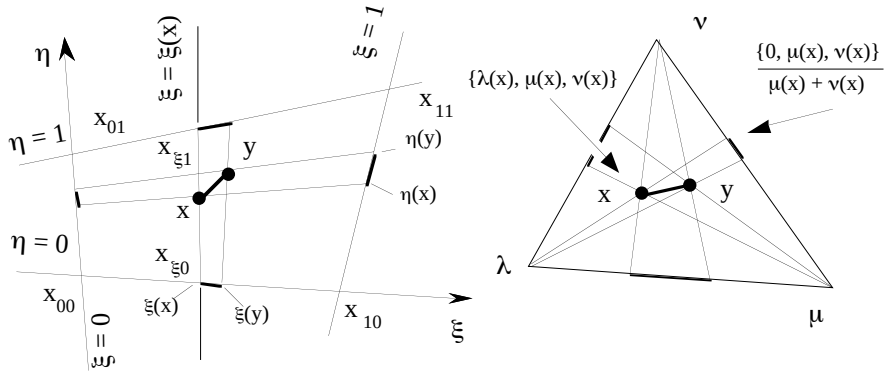

Figure 39. *Le système des projections, en dimension deux, pour le quadrilatère et pour le triangle.*

Le passage de $p = 0$ à $p = 1$ devrait maintenant paraître évident. Au lieu d'un point, nous avons un vecteur v ancré en x, assez petit pour que le segment xy (où $y = x + v$) appartienne à un unique hexaèdre. Les projections ci-dessus envoient x et y sur les facettes, arêtes, etc. Arrêtant la récursion un étage plus haut que précédemment, au niveau des arêtes, on trouve des projections $x_a y_a$ de xy sur toutes les arêtes. Le poids $\langle xy ; w^a \rangle$ est le produit des poids de x cueillis au passage, mais le dernier facteur est maintenant le rapport algébrique $x_a y_a / a$ (dont le sens est clair), au lieu de 1. D'où l'expression analytique des formes de Whitney correspondantes, par exemple, dans le cas de la Fig. 40, $w^a = \eta\zeta \, d\xi$ pour l'arête indiquée. (Remarquer qu'il y a bien "partition de l'unité": On a $xy = \sum_a \langle xy ; w^a \rangle a$, par construction.) Les représentants de ces formes, $W^a = \eta\zeta \nabla\xi$

pour l'arête a de la Fig. 40, ont été proposés comme éléments d'arêtes pour l'hexaèdre dans [vW].

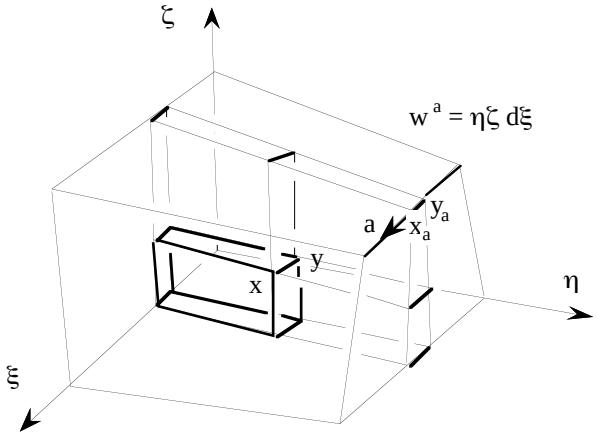

Figure 40. *Le poids* $w^a(xy)$ *est le volume relatif (dans l'espace* $\xi\eta\zeta$*) de l'"arrière pays" de* xy *vis-à-vis de l'arête* a.

Une démarche analogue mène aux éléments de facettes: Le dernier poids pour un petit triangle xyz est cette fois $x_f y_f z_f$ /f, c'est-à-dire le rapport des aires (notion affine, et non pas métrique) des images de $x_f y_f z_f$ et de f dans le cube de référence, avec le signe + si les orientations s'accordent et –1 sinon. D'où les formes de Whitney: $w^f = \xi\, d\eta \wedge d\zeta$ si f est la facette $\xi = 1$, dont le champ représentatif est $W^f = \xi\, \nabla\eta \times \nabla\zeta$.

On peut se demander si les poids tels que $\langle xy ; w^a \rangle$ ont là aussi une interprétation géométrique. Effectivement: $\langle xy ; w^a \rangle$ est le volume relatif, dans l'hexaèdre de référence $H = \{\{\xi, \eta, \zeta\} : 0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1, 0 \le \zeta \le 1\}$, de la région "en arrière" de xy par rapport à l'arête a. Cela peut sembler très différent de ce qui se passait pour le tétraèdre, mais on peut repérer dans le tétraèdre un système de projections (Fig. 41) qui révèle l'analogie.

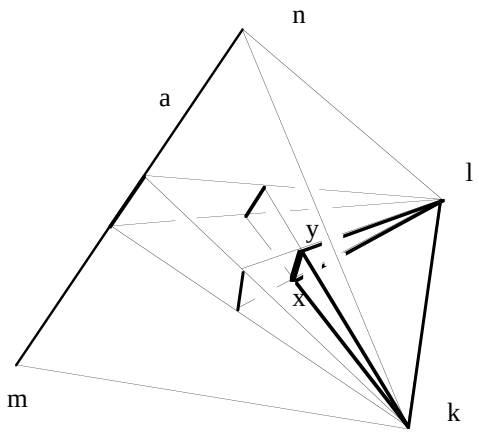

Figure 41. *Là aussi, le poids* $w^a(xy)$ *est le volume relatif de l'arrière-cour.*

1.7.4.2. *Prismes*

Ainsi, aux coordonnées cartésiennes et barycentriques correspondent deux systèmes de projections voisins, qui rendent évidente l'allocation des poids. On peut associer les deux systèmes, employant l'un d'eux selon $p < n$ dimensions, et l'autre pour les $n - p$ dimensions restantes. Pour $n = 3$, cela donne une possibilité nouvelle, à savoir le prisme (Fig. 42).

Avec une telle variété de volumes, l'adaptation à des formes complexes (du domaine maillé, ou de certains sous-domaines) devient plus facile [D&], et on peut profiter de la simplicité du réseau hexaédrique dans les régions à ε et μ uniformes. Encore faut-il que les traces de ces différentes formes de Whitney soient les mêmes sur toute facette commune à deux volumes élémentaires, quelle que soit la forme de ceux-ci. Mais c'est bien le cas, du fait de la récursivité de la méthode d'allocation des poids: Si un segment[78] xy est tout entier contenu dans une facette séparant, par exemple, un tétraèdre et un prisme, les poids $\langle xy ; w^a \rangle$ pour les arêtes a de cette facette (triangulaire, dans cet exemple) ne dépendent pas de la configuration en dehors d'elle. Les traces coïncident donc, d'où la *continuité tangentielle* des champs représentatifs construits à partir de tels mélanges d'éléments d'arêtes.

78. Même remarque pour un point x, ou un triangle xyz.

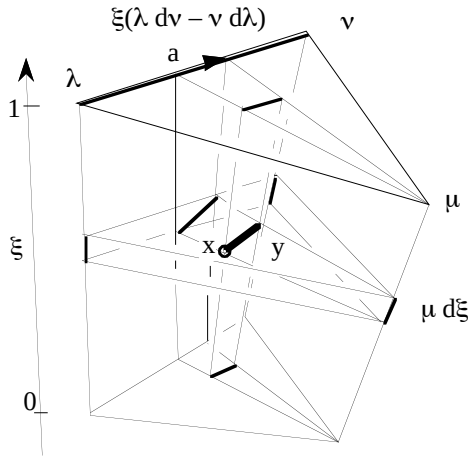

Figure 42. *Système projectif et éléments d'arêtes pour un prisme. Remarquer la commutativité des projections.*

1.7.4.3. *Volumes dégénérés*

On peut souhaiter encore plus de variété, toutefois, et des éléments d'arêtes ont été proposés pour les *pyramides* [CZ, GH]. Une façon systématique de procéder à cet effet consiste à recourir à des versions "dégénérées" de l'hexaèdre ou du prisme, obtenues en confondant un ou plusieurs couples de nœuds ou d'arêtes.

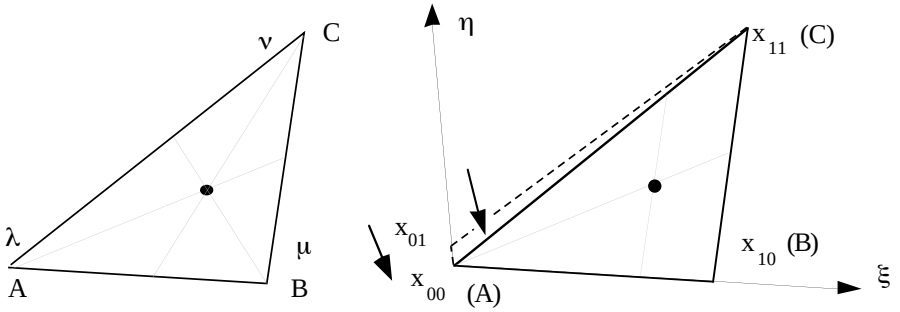

Figure 43. *Systèmes projectifs pour le même triangle, selon les coordonnées barycentriques à gauche, et par dégénérescence du système quadrilatéral à droite.*

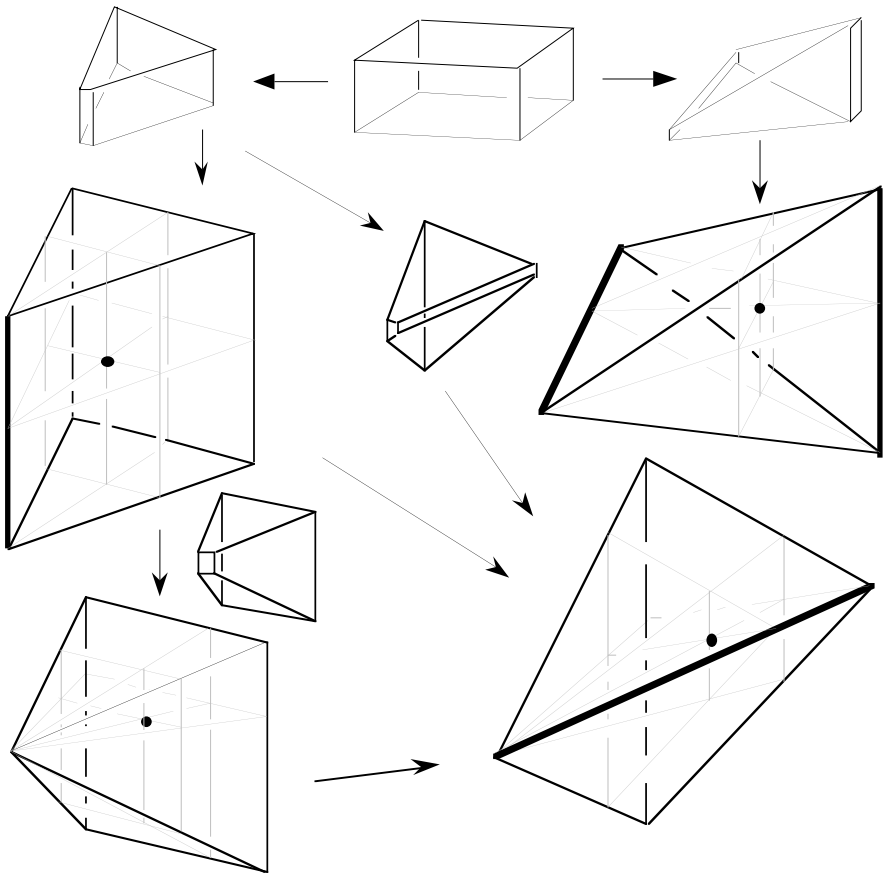

Figure 44. *Systèmes projectifs pour quatre dégénérescences de l'hexaèdre. (On se limite à celles qui conservent la planéité des facettes de l'hexaèdre originel.) En trait épais, les arêtes fusionnées.*

Pour comprendre l'idée, commençons par le cas du quadrilatère dégénéré, en dimension 2 (Fig. 43). Avec les notations de la figure, où $\{\lambda, \mu, \nu\}$ sont les coordonnées barycentriques dans le triangle de gauche, l'application $\{\mu, \nu\} \rightarrow \{\eta, \xi\}$, où $\eta = \nu/(\mu + \nu)$ et $\xi = \mu + \nu$, envoie l'intérieur du triangle dans celui du

quadrilatère de droite. Lorsque, déformant ce dernier, x_{10} vient se confondre avec x_{00}, le système projectif du quadrilatère donne à la limite un nouveau système projectif sur le triangle.

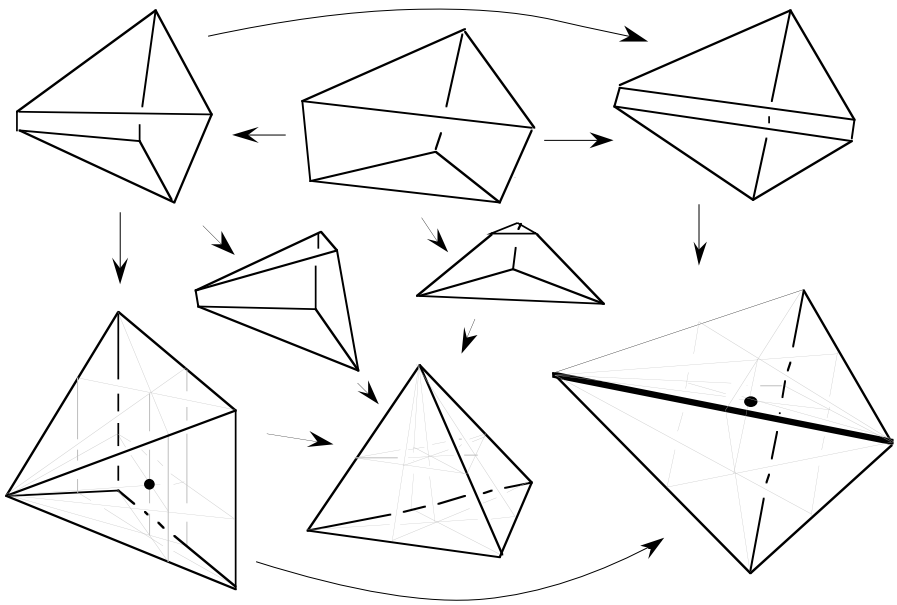

Figure 45. *Systèmes projectifs pour trois dégénérescences du prisme. (On se limite à celles qui conservent la planéité des facettes du prisme originel.) Noter que la pyramide elle-même dégénère de deux façons différentes vers le tétraèdre.*

Les poids attribués aux sommets, et par conséquent les éléments nodaux, sont les mêmes dans les deux systèmes, car $\xi\eta = \nu$ pour le point C (cf. (77)), $\xi(1 - \eta) = \mu$ pour B, et la somme $(1 - \xi)(1 - \eta) + (1 - \xi)\eta$, attribuée à A par fusion de x_{00} et x_{01}, est bien égale à λ. En revanche, les éléments d'arêtes diffèrent: Pour AC, $\eta\, d\xi \equiv -(1 - \lambda)^{-1}\nu\, d\lambda$ à droite au lieu de $\lambda\, d\nu - \nu\, d\lambda$ à gauche, $-(1 - \lambda)^{-1}\mu\, d\lambda$ pour AB, et $d\nu + (1 - \lambda)^{-1}\nu\, d\lambda$ pour BC.

EXERCICE 42. La singularité au point A est-elle un problème?

En dimension 3, le principe est le même: lorsque deux arêtes fusionnent, par dégénérescence d'un hexaèdre ou d'un prism, l'élément de Whitney de l'arête fusionnée est la somme de ceux des arêtes avant fusion, exprimée si on le souhaite dans un système de coordonnées adapté au solide dégénéré. Les Figs 44 et 45 montrent sept dégénérescences, toutes celles que l'on peut obtenir à partir d'un hexaèdre ou d'un prisme à facettes planes sous la contrainte de ne pas faire apparaître de facettes gauches dans le processus. Comme on le voit, le seul solide nouveau est la pyramide, et l'on retrouve le tétraèdre quatre fois et le prisme une fois.

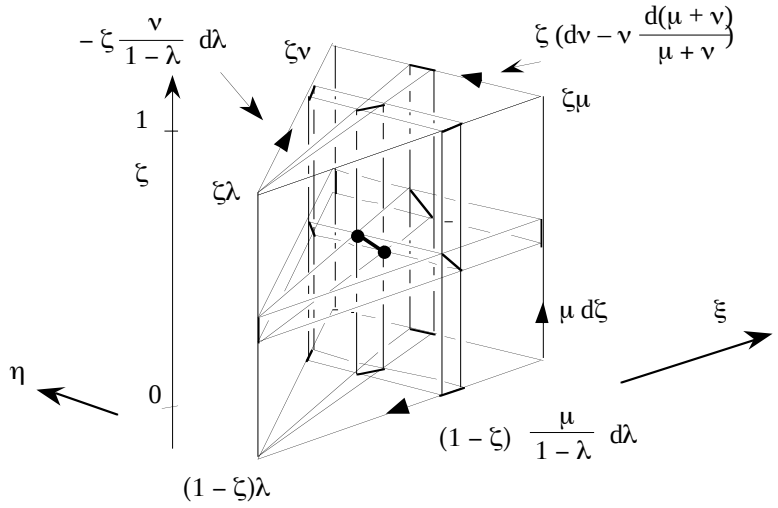

Figure 46. *Éléments nodaux et d'arêtes pour le système projectif du prisme de la Fig. 44. On passe du système de coordonnées initial* $\{\xi, \eta, \zeta\}$ *au système* $\{\zeta, \lambda, \mu, \nu\}$ *adapté au prisme par les formules* $\xi = \mu + \nu$, $\eta = \nu/(\mu + \nu)$, *avec* $\lambda + \mu + \nu = 1$.

Mais comme le cas bidimensionnel le laissait prévoir, on trouve ainsi de *nouveaux* éléments de Whitney concernant le prisme et le tétraèdre, correspondant à des sytèmes projectifs différents. En particulier, on a maintenant *cinq* systèmes projectifs distincts sur le tétraèdre (et deux sur la pyramide et le prisme), de sorte que la continuité tangentielle des éléments d'arêtes n'est plus automatique. Il faut donc

veiller à un assemblage correct, où les systèmes de projection s'accordent sur chaque facette.

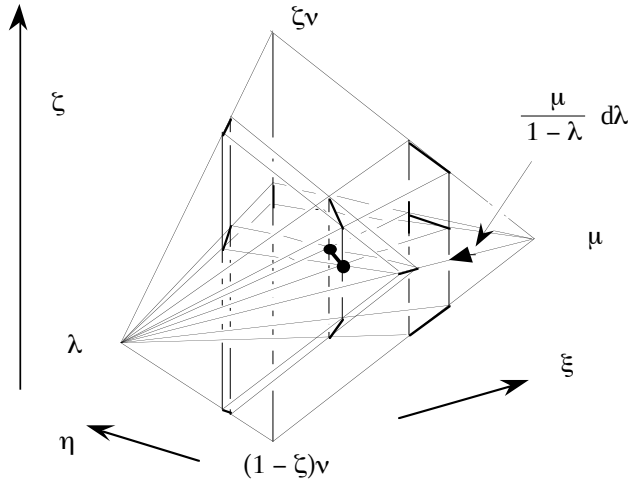

Figure 47. *Dégénérescence du prisme de la Fig. 46. Deux arêtes disparaissent, et un nouvel élément* $(\mu(1-\lambda)^{-1}\,d\lambda)$ *apparaît par fusion. On a conservé ici le système de coordonnées* $\{\zeta, \lambda, \mu, \nu\}$ *de la Fig. 46.* (EXERCICE 43: *Établir les formules de passage aux coordonnées barycentriques relatives au tétraèdre, que l'on notera par exemple* $\underline{\kappa}$, $\underline{\lambda}$, $\underline{\mu}$, $\underline{\nu}$, *avec* $\lambda = \underline{\lambda}$ *et* $\mu = \underline{\mu}$, *et calculer les éléments d'arêtes.)*

L'avantage qu'il y a à disposer de la pyramide est donc diminué par la nécessité de prévoir une bibliothèque d'éléments plus riche (au moins deux facettes triangulaires de la pyramide ne se raccordent pas avec le tétraèdre standard) et des règles d'assemblage difficiles à mettre en œuvre. Il n'y a guère de problèmes, en revanche, pour trouver la forme analytique des nouveaux éléments de Whitney, en procédant comme sur les Figs 46 et 47.

1.7.4.4. *Volumes étoilés, volumes duaux*

Il existe enfin un moyen de construire des formes de Whitney sur n'importe quel polyèdre étoilé. Supposons chaque p-cellule d'un maillage primal *m*, quel que soit p, pourvue d'un "centre" au sens vu plus haut, c'est-à-dire un point par rapport auquel

elle est étoilée. Joignons alors les centres de manière à obtenir un raffinement simplicial, $\underline{m}$ disons, de m, où le nouvel ensemble $\underline{S}_p$ de p-simplexes contient l'ancien S_p. Selon une convention analogue, soient $\mathbf{u}$ et $\underline{\mathbf{u}}$ les tableaux de DdL indexés sur S_p et $\underline{S}_p$, avec $\underline{\mathbf{u}}_s = \mathbf{u}_s$ pour tout s de S_p. Pour définir $p_m\mathbf{u}$, connaissant $p_{\underline{m}}\underline{\mathbf{u}}$ grâce aux formes de Whitney simpliciales, prenons simplement le *plus petit* des $p_{\underline{m}}\underline{\mathbf{u}}$, au sens de la norme de l'énergie, pour tous les $\underline{\mathbf{u}}$ compatibles avec $\mathbf{u}$.

On peut contester aux nouveaux interpolants ainsi obtenus le nom de "formes de Whitney", puisqu'ils dépendent de la métrique, mais ils n'en sont pas moins aux cellules de m, à tous égards, ce que sont les formes de Whitney aux cellules d'un maillage simplicial.

Ceci s'applique en particulier au réseau dual dans toute construction en étoile, d'où des formes de Whitney "duales". (En fait, comme on l'avait observé plus haut, il y a un raffinement simplicial commun aux deux maillages, primal et dual, et l'on peut donc agréger les formes de Whitney relatives à ce sous-maillage de deux façons: relativement au dual, et relativement au primal. Mais il est facile de voir que les formes ainsi obtenues sur le primal, lorsque celui-ci est simplicial, ne sont autres que ses propres formes de Whitney.)

Ainsi se remplit enfin l'un des tiroirs de la boîte à outils, dont on avait jusqu'ici tant bien que mal dissimulé le vide, tout à fait apparent malgré tout à certains endroits, sur la Fig. 33 par exemple.

1.8. Solution des exercices

1. L'ensemble des vecteurs réels n'est *pas* un sous-espace de V^c, car le produit d'un vecteur réel $\{v, 0\}$ par un nombre complexe quelconque (i par exemple, ce qui donne $\{0, v\}$) n'est pas un vecteur réel en général.

2. Soit p une application linéaire de V dans V telle que $p \circ p = p$, et soit $U = p(V)$ son image. Pour chaque v de V, posons $w = v - p(v)$. On a $p(w) = 0$, donc l'ensemble des w, en tant qu'image réciproque d'une application linéaire, est un sous-espace vectoriel de V, soit W, et on a bien $V = U + W$.

3. C_n^p (i.e., le nombre de façons de choisir p vecteurs distincts parmi les n vecteurs d'une base).

4. Soit $a : A \to A'$ une application affine de A dans A', espaces affines de dimension n et m. Soit $\{x_i : i = 0, ..., n\}$ une base affine de A. Par définition, $a(\sum_{i=0,...,n} \theta_i x_i) = \sum_{i=0,...,n} \theta_i a(x_i) = a(x_0) + \sum_{i=1,...,n} \theta_i (a(x_i) - a(x_0))$. Soit L l'application linéaire qui à $x_i - x_0$ associe $a(x_i) - a(x_0)$. Alors $a(x) = a(x_0) + \sum_{i=1,...,n} \theta_i L(x_i - x_0) = a(x_0) + L(\sum_{i=1,...,n} \theta_i (x_i - x_0)) = a(x_0) + L(x - x_0)$.

5. Soient $\{x_i : i = 0, ..., n\}$ une base affine de A et $\{x'_i : i = 0, ..., m\}$ une base affine de A'. Si $\sum_{i=0,...,m} \theta'_i x'_i$ est l'image de $\sum_{i=0,...,m} \theta_j x_j$ par l'application affine a, il y a une matrice $\{a_i^j\}$, de taille $(m + 1) \times (n + 1)$, telle que $\theta'_i = \sum_{j=0,...,m} a_i^j \theta_j$. La somme de chaque colonne de cette matrice doit être égale à 1.

6. Prendre une base $\{w_i\}$, poser $a_{ij} = w_i \cdot w_j$, d'où une matrice $\mathbf{A}$, qui a une factorisation de Cholesky, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,{}^t\mathbf{S}$. Notant $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ la somme $\sum_i u^i v^i$, on a $u \cdot v = (\mathbf{Au}, \mathbf{v}) = (\mathbf{Su}, \mathbf{Sv})$, et donc $u \cdot v = Su \cdot_w Sv$, si nous notons S la transformation linéaire qui s'exprime par la matrice $\mathbf{S}$ dans la base des w_i, et $\cdot_w$ le produit scalaire "naturel" dans cette base, à savoir $u \cdot_w v = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$. L'application S étant régulière, on en déduit le résultat demandé, en ramenant tous les produits scalaires à la "référence" $\cdot_w$. (Variante: prendre une base orthonormale relativement à $\cdot$, i.e., telle que $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, par Gram–Schmidt.)

7. Remarquer d'abord que $|u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$. On a, par définition, $|u \barwedge v| = |L(u \barwedge v)|$, donc $|u \barwedge v|^2 = |Lu \times Lv|^2 = |Lu|^2 |Lv|^2 - (Lu \cdot Lv)^2 = |u|^2 |v|^2 - (u \circ v)^2$, donc c'est la bonne longueur. L'orthogonalité (au sens de "$\circ$") de $u \barwedge v$ à u et v vient de $(u \barwedge v) \circ u = L(u \barwedge v) \cdot Lu = (Lu \times Lv) \cdot Lu = 0$. Pour montrer que la direction attribuée à $u \barwedge v$ est correcte, on va évaluer le déterminant du trièdre Lu, Lv, Lw, dans une certaine base. (Comme l'argument ne dépend pas de la base choisie, on fera l'abus de notation $\det(u, v, w)$ pour $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.). On a $\det(Lu, Lv, Lw) = \det(L) \det(u, v, w)$, donc $\det(u, v, u \barwedge v) = \det(Lu, Lv, L(u \barwedge v))/\det(L) = \det(Lu, Lv, Lu \times Lv))/\det(L)$, dont le signe est celui de $\det(L)$: Autrement dit, le trièdre $\{u, v, u \barwedge v\}$ est bien direct au sens de $\mathbb{O}\mathbb{r}$.

8. Prendre une base $\{w_1, w_2, w_3\}$, orthonormale vis à vis du premier produit scalaire. Soit $u = \sum_i u^i w_i$ dans cette base. Définir le second produit scalaire par $u \circ v = \lambda\, u^1 v^1 + \lambda\, u^2 v^2 + \lambda\, u^3 v^3 / \lambda^2$.

9. Prendre une base orthonormale directe au sens de $\{\cdot, Or\}$. On a $(u \barwedge v) \circ w = L(u \barwedge v) \cdot Lw = (Lu \times Lv) \cdot Lw = \det(Lu, Lv, Lw)$, égal par linéarité à $\det(L) \det(u, v, w)$, donc $\mathbb{vol}(u, v, w) = \det(L)\, \mathrm{vol}(u, v, w)$.

10. Il suffit de le vérifier pour la surface d'un tétraèdre. Soient u, v et w trois vecteurs, issus d'un même point, le définissant. Au signe et à un facteur 2 près,

l'aire vectorielle de la surface est la somme

$$u \times v + v \times w + w \times u - (v - u) \times (w - u),$$

qui est bien nulle.

11. D'après l'Exer. 9, $L^a L(u \times v) \cdot w = \det(L)\,(u \times v) \cdot w \quad \forall\, w$, et donc $u \times v = \det(L)\,(L^a L)^{-1}(u \times v)$, donc on pourrait croire que $\vec{\mathbb{T}} = \det(L)\,(L^a L)^{-1}\,\vec{T}$. Mais par définition de l'aire vectorielle, $\vec{T}$ définit le sens de traversée du triangle, qui ne dépend pas de la structure euclidienne, donc $\vec{\mathbb{T}}$ et $\vec{T}$ pointent du même côté, et la bonne réponse est $\vec{\mathbb{T}} = |\det(L)|\,(L^a L)^{-1}\,\vec{T}$.

12. Soit $\mathbf{S}$ la matrice des composantes de u, v, w dans une base orthogonale. Le déterminant de Gram est le déterminant de $\mathbf{S}^t\,\mathbf{S}$, et donc sa racine carrée est |vol(u, v, w)|. Donc la mesure de Lebesgue des parallélépipèdes coïncide avec |vol|. La seule difficulté ici est la polysémie du mot "volume", qui peut signifier (1°) une région tridimensionnelle, (2°) la mesure de Lebesgue d'une telle région, (3°) Un 3-volume au sens vu plus haut.

13. Il suffit d'observer que la mesure d'un parallélépipéde est la valeur absolue de son 3-volume, et de se référer aux Exers 9 et 12: $\mathbb{m} = |\det(L)|\,m$.

14. Ça dépend. Pour ce qui est de sa composition, non, du fait de l'Exer. 12: Distinguant par $\int$ et $\int$ l'intégration par rapport aux deux mesures m et $\mathbb{m}$, on voit que $\int_D |f|^2 \le C \int_D |f|^2$, et vice-versa. Une fonction est ou n'est pas dans $L^2(D)$ indépendamment du produit scalaire sur E_n. De même pour la *topologie* de $L^2(D)$. Mais la structure géométrique de $L^2(D)$, en particulier la notion d'orthogonalité, dépend du produit scalaire sous-jacent.

15. Une surface Σ, assez régulière pour être représentée par une seule cellule, étant donnée, considérer Σ' obtenue en introduisant des ondulations, des bosses, etc., de faible amplitude mais nombreuses. L'intensité change peu, et $d_0(\Sigma, \Sigma')$ est petit — mais pas $d_1(\Sigma, \Sigma')$: Pour cette distance, qui donne une topologie "plus fine", l'intensité ne serait pas une fonction continue. (Plus la topologie de X est fine, moins il y a de fonctions continues de type $X \to Y$. Plus la topologie de Y est fine, plus il y en a.)

16. Le volume, oui. Mais ni l'aire ni la longueur. Contre-exemple: les courbe de paramétrisation $c_k(t) = x + t(y - x) + (k^{-1} \sin kt)\,u$, où u est un vecteur orthogonal au segment [x, y]. La limite pour k infini est [x, y], mais la longueur (indépendante de k) est $C\,|y - x|$, avec $C > 1$.

17. La restriction à ∂M d'un DPO ϕ étant un DPO qui envoie ∂M sur ∂N, on a $d(\partial M, \partial N) \leq \inf_\phi \sup\{x \in \partial M : |\phi(x) - x|\} \leq \inf_\phi \sup\{x \in M : |\phi(x) - x|\} = d(M, N)$, d'où le résultat voulu par linéarité.

18. Il suffit de démontrer que $|\int_c \tau \cdot u - \int_{c'} \tau \cdot u| \leq C\, d(c, c')$, où la constante C ne dépend que de u, lorsque c et c' sont deux 1-cellules. Soit χ_t le segment orienté qui joint $c(t)$ à $c'(t)$. Observer que $|\chi_t| \leq d(c, c')$. Considérer la chaîne $c + \chi_1 - c' - \chi_0$. Fermée, elle borde une surface S. Observer que l'aire de S est majorée par longueur(c) × d(c, c'). D'où l'inégalité $|\int_c \tau \cdot u - \int_{c'} \tau \cdot u| \leq C\, d(c, c')$ longueur(c), où C est un majorant de $|\text{rot } u|$ dans une région bornée contenant c et c'. (Il n'est pas nécessaire que rot u soit uniformément borné.)

REMARQUE.– Même en supposant u uniformément borné, i.e., $|u(x)| \leq |u|_\infty$ dans tout l'espace, la démonstration "on a $|\int_c \tau \cdot u| \leq |u|_\infty$ longueur(c), donc ..." n'est pas correcte, d'après l'Exer. 14. ◊

19. Comme pour l'Exer. 18, majorer la différence $\int_\Sigma n \cdot u - \int_{\Sigma'} n \cdot u$ par $C\, d(\Sigma, \Sigma')$ aire(Σ), où C majore $|\text{div } u|$.

20. L'application $V \to$ **si** $o \in V$ **alors** 1 **sinon** 0, où o est un point fixe.

21. Reprendre l'Exer. 19, en faisant $\int_\Sigma n \cdot u - \int_{\Sigma'} n \cdot u = \int_\Sigma n \cdot u - \int_S n \cdot u + \int_S n \cdot u - \int_{\Sigma'} n \cdot u$.

22. Cette fois l'argument $|\int_V \Omega| \leq C\, \text{vol}(V)$, où C majore $|\Omega|$, est correct. (En fait, il suffit que Ω soit intégrable, au sens de Lebesgue.)

24. Passer par des sommes de Riemann: $\int_\Sigma *^1 u \sim \sum_T \int_{c_T} {}^1 u \sim \sum_T \vec{c}_T \cdot u = \sum_T \vec{T} \cdot u \sim \int_\Sigma n \cdot u$.

25. Mêmes scalaires ou vecteurs représentatifs, mais le produit est tordu si un et un seul des facteurs l'est.

28. Non. La Fig. 48 donne un contre-exemple. Bien entendu, $\delta_m > 0$ pour *un* maillage m, mais on pourrait raffiner sans limite avec une seule forme (le triangle rectangle) et un nombre arbitraire de niveaux de subdivision.

29. $\sum_{f'} \boldsymbol{\mu}^{ff'} \nu \tilde{f}^{>'} = \sum_{f'f''} \boldsymbol{\mu}^{ff'} \boldsymbol{\nu}^{f'f''} \tilde{f}'' = \sum_{f''} (\sum_{f'} \boldsymbol{\mu}^{ff'} \boldsymbol{\nu}^{f'f''}) \vec{f}'' = \vec{f}$, d'où le résultat demandé si μ est uniforme. On voit que la formule qui fait pendant à (7) est en fait $\sum_g \boldsymbol{\mu}^{fg} \nu \tilde{g}^{>'} = \vec{f}$, si l'on interprète $\nu \tilde{g}^{>'}$ comme dans la légende de la Fig. 32.

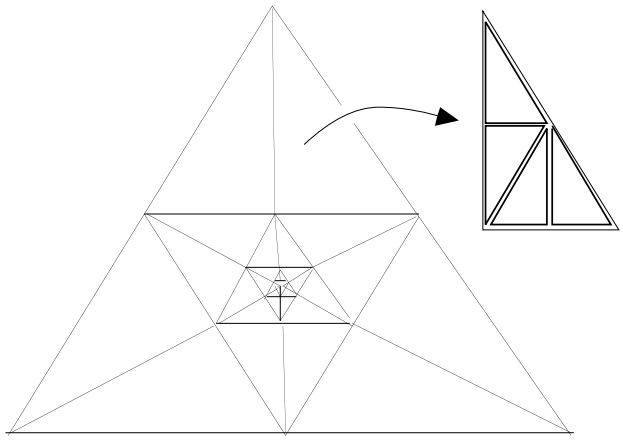

Figure 48. *Une seule forme de triangle dans le maillage de gauche, qui peut en comporter un nombre arbitraire. Par subdivision (à droite), on obtient une famille $\mathcal{M}$ de maillages uniformes m pour laquelle le rapport δ_m/γ_m n'a pas de borne inférieure strictement positive.*

30. Les vecteurs $\vec{f}$ et $\tilde{f}'$ sont parallèles, du fait de la construction orthogonale, et l'on a $\vec{f}/\text{aire}(f) = \tilde{f}'/\text{longueur}(\tilde{f})$. Si ν est constant, on a donc bien $\boldsymbol{\nu}^{ff}\vec{f} \equiv \nu\ \text{longueur}(\tilde{f})/\text{aire}(f)\,\vec{f} = \nu\tilde{f}'$. Si ν est seulement constant par morceaux, on a $\nu\tilde{f} = \nu_1\tilde{f}_1 + \nu_2\tilde{f}_2$, et puisque tous ces vecteurs sont parallèles, le critère se réduit à $\nu_1\,\text{longueur}(f_1) + \nu_2\,\text{longueur}(f_2) = \boldsymbol{\nu}^{ff}\,\text{aire}(f)$, d'où (34).

31. Soit B le représentant de b. On trouve un majorant de $|B - \underline{B}|$ sur un tétraèdre T en évaluant $\nabla\lambda \cdot \int_T (B - \underline{B})$, où λ est une fonction affine telle que $|\nabla\lambda| = 1$. Pour cela, intégrer par parties dans $\int_T \nabla\lambda \cdot (B - \underline{B})$, et remarquer que $\int_f \lambda\, n \cdot \underline{B} = \lambda(x_f)\,\mathbf{b}_f$, où x_f est le barycentre de f. Faire un développement de Taylor de $n \cdot B$ autour de x_f, d'où une borne en $C\gamma_m^{\,4}$ pour $\int_{\partial T} \lambda\, n \cdot (B - \underline{B})$, d'où l'on déduit $|\int_T (B - \underline{B})| \le C\gamma_m^{\,4}$. Utiliser l'uniformité pour conclure que $|B - \underline{B}| \le C\gamma_m$.

32. Avec les orientations naturelles, $\mathbf{G}_a^{\,m} = -1$ et $\mathbf{G}_a^{\,n} = 1$, d'où w^a. Etc.

33. Il suffit de se souvenir que $d\lambda^n$ est représenté par $\nabla\lambda^n$ et que ${}^1u \wedge {}^1v = {}^2(u \times v)$.

34. A priori, $\nabla\lambda^n = \alpha\ \overline{klm}$. Puisque $\nabla\lambda^n \cdot \overline{kn} = 1$, et que $\overline{klm} \cdot \overline{kn} = 3\,\text{vol}(klmn)$, on a $\alpha = 1/(3\,\text{vol}(klmn))$.

35. Pour x dans la facette kmn, on a $\overline{xl} \cdot \overline{kmn} = 3\,\mathrm{vol}(klmn)$, et le flux de $w^{k\,m\,n}$ doit être égal à 1.

36. Pour x dans l'arête kmn, on a $\overline{kl} \times \overline{kx} \cdot \overline{mn} = 6\,\mathrm{vol}(klmn)$), et la circulation de $w^{m\,n}$ doit être égale à 1. Un champ de W^1 est donc de la forme $a \times x + b$ sur chaque tétraèdre, où a et b sont deux vecteurs fixes. C'est sous cette forme, proposée dans [Ne], que l'élément est entré dans la littérature de l'électrotechnique [BV]. Une remarque de Kotiuga ("A fundamental connection between homology groups and finite element interpolation will be recognized in the next few years" [Ko]) aida plus tard à y reconnaître une forme de Whitney, et à comprendre la vraie nature de ces interpolants [Bs].

37. Remarquer d'abord que $w^v = 6\, d\lambda^l \wedge d\lambda^m \wedge d\lambda^n$. On a ${}^1u \wedge {}^2v = {}^3(u \cdot v)$, et donc $d\lambda^l \wedge d\lambda^m \wedge d\lambda^n = \det(\nabla\lambda^l, \nabla\lambda^m, \nabla\lambda^n)$, soit 6 fois le volume.

39. On peut par exemple orienter comme sur la Fig. 49:

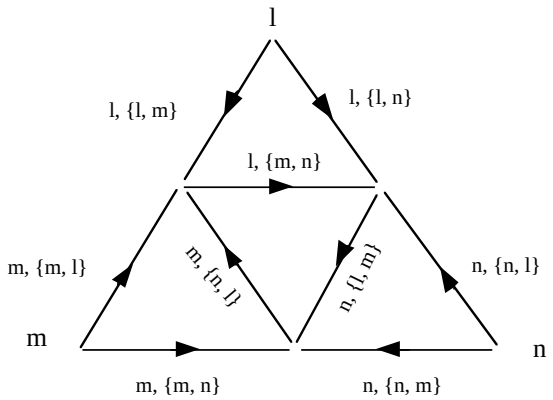

Figure 49. *Étiquetage et orientation des arêtes, en 2D.*

Il suffit alors de huit calculs (eux-mêmes largement répétitifs) pour dresser la Table ci-dessous:

$\lambda^l w^{lm}$	6	–2	0	0	0	0	–2	–1	1	1
$\lambda^m w^{ml}$	–2	6	0	0	0	0	1	2	–1	–1
$\lambda^m w^{mn}$	0	0	6	–2	0	0	1	–2	–1	1
$\lambda^n w^{nm}$	0	0	–2	6	0	0	–1	1	2	–1
$\lambda^n w^{nl}$	0	0	0	0	6	–2	–1	1	–2	1
$\lambda^l w^{ln}$	0	0	0	0	–2	6	2	–1	1	–1
$\lambda^l w^{mn}$	0	0	0	0	0	0	2	–1	–1	4
$\lambda^m w^{nl}$	0	0	0	0	0	0	–1	2	–1	4
$\lambda^n w^{lm}$	0	0	0	0	0	0	–1	–1	2	4

Figure 50. *Circulations d'arêtes, toutes multipliées par le même facteur 16. D'après les trois dernières lignes, la matrice est clairement de rang huit, comme prévu. À droite: un vecteur du noyau.*

40. Les chaînes annulant toutes les formes sont les multiples de celle dont les coefficients figurent dans la colonne de droite de la Fig. 50: Une fois la frontière du grand triangle moins quatre fois la frontière du petit.

41. On les voit à g. de la Fig. 38. Les 16 petites facettes sont tous les petits triangles visibles (20 en tout) *moins* les quatre au centre des grandes facettes. (Les quatre à l'intérieur forment le bloc de 4 associé au volume, qui engendre un espace de dimension 3.) Les quatre "petits tétraèdres" sont ceux de sommets k, l, m, n. (Les "petits nœuds", si l'on ose dire, sont les quatre primitifs plus les six au milieu des arêtes.)

42. Non, si l'on n'oublie pas que les 1-formes de Whitney sont destinées à être intégrées sur une ligne c pour trouver les coefficients de la chaîne approchante. Si c passe par le point A, l'intégrande en $(1 – \lambda)^{-1}$ est effectivement singulier, mais l'intégrale converge, de sorte que tous les poids sont bien définis.

43. Composer les formules de la Fig. 47 avec $\nu = \underline{\nu} + \underline{\kappa}$ et $\zeta = \underline{\nu}/(\underline{\nu} + \underline{\kappa})$, d'où $\xi = \underline{\mu} + \underline{\nu} + \underline{\kappa} = 1 - \underline{\lambda}$, $\eta = (\underline{\nu} + \underline{\kappa})/(1 - \underline{\lambda})$, $\zeta = \underline{\nu}/(\underline{\nu} + \underline{\kappa})$. Ainsi par exemple, l'élément $\mu(1 - \lambda)^{-1}\, d\lambda$ de la Fig. 47 s'écrit $\underline{\mu}(1 - \underline{\lambda})^{-1}\, d\underline{\lambda}$ en coordonnées barycentriques.

1.9. Références

[AR] ALBANESE R., RUBINACCI G., «Integral formulations for 3-D eddy-currents computation using edge-elements», *IEE Proc., Part A, 135*, 7, p. 457-62, 1988.

[Ar] ARMSTRONG M.A., *Basic Topology*, London, McGraw-Hill, 1979.

[BA] BABUŠKA I., AZIZ A.K., « On the angle condition in the finite element method», *SIAM. J. Numer. Anal., 13*, 2, p. 214-26, 1976.

[BR] BANK R.E., ROSE D.J., «Some Error Estimates for the Box Method», *SIAM J. Numer. Anal., 24*, 4, p. 777-87, 1987.

[Ba] BARBOTTE J., *Le calcul tensoriel*, Paris, Bordas, 1948.

[Bä] BÄNSCH E., « Local Mesh Refinement in 2 and 3 Dimensions», *Impact of Computing in Sci. & Engrg., 3*, p. 181-91, 1991.

[Ba] BARTON M.L., *Tangentially continuous vector finite elements for non-linear 3-D magnetic field problems*, Ph. D., Carnegie Mellon U., 1987.

[Be] BEY J., «Tetrahedral Grid Refinement», *Computing, 55*, 4, p. 355-78, 1995.

[Br] BORK A.M., « Maxwell, Displacement Current, and Symmetry», *Am. J. Phys., 31*, 3, p. 854-9, 1963.

[Bo] BOSSAVIT A., *Computational Electromagnetism*, Boston, Academic Press, 1998.

[Bs] BOSSAVIT A., « On Finite Elements for the Electricity Equation», dans *The Mathematics of Finite Elements* (J.R. Whiteman, dir.), Academic Press, London, 1982, p. 85-92.

[B0] BOSSAVIT A., « Solving Maxwell's Equations in a Closed Cavity, and the Question of Spurious Modes», *IEEE Trans., MAG-26*, 2, p. 702-5, 1990.

[B1] BOSSAVIT A., « Eddy-currents and forces in deformable conductors», in *Mechanical Modellings of New Electromagnetic Materials* (Proc. IUTAM Symp., Stockholm, April 1990, HSIEH R.K.T., ed.), Elsevier (Amsterdam), 1990, p. 235-42.

[B2] BOSSAVIT A., «On axial and polar vectors», *ICS Newsletter, 6*, 3, p. 12-14, 1999.

[B3] BOSSAVIT A., «Most general 'non-local' boundary conditions for the Maxwell equations in a bounded region», *COMPEL, 19*, 2, p. 239-45, 2000.

[B4] BOSSAVIT A., « 'Generalized Finite Differences' in computational electromagnetics», in *Progress in Electromagnetics Research, PIER 32* (TEIXEIRA F.L., ed.), EMW (Cambridge, Ma), 2001, p. 45-64. `http://www.emacademy.org/pier.html`

[B5] BOSSAVIT A., «On the notion of anisotropy in constitutive laws: some implications of the 'Hodge implies metric' result», *COMPEL, 20*, 1, p. 233-9, 2001.

[B6] BOSSAVIT A., « On the Representation of Differential Forms by Potentials in Dimension 3 », in *Scientific Computing in Electrical Engineering* (U. van Rienen, GÜNTHER M., HECHT D., eds), Springer-Verlag (Berlin), 2001, p. 97-104.

[B7] BOSSAVIT A., « Stiff Problems in Eddy-Current Theory and the Regularization of Maxwell's Equations », *IEEE Trans., MAG-37,* 5, p. 3542-5, 2001.

[B8] BOSSAVIT A., « Mixed-hybrid methods in magnetostatics », in *ISEF'01* (KRAWCZYK A., WIAK S., Eds), IOS Press (Amsterdam), 2002, p. 29-34.

[B9] BOSSAVIT A., « Mixed-Hybrid Methods in Magnetostatics: Complementarity in One Stroke », *IEEE Trans., MAG-39,* 3, p. 1099-102, 2003.

[BK] BOSSAVIT A., KETTUNEN L., « Yee-like schemes on a tetrahedral mesh, with diagonal lumping », *Int. J. Numer. Modelling, 12,* p. 129-42, 1999.

[BV] BOSSAVIT A., VÉRITÉ J.C., « A Mixed FEM-BIEM Method to Solve Eddy-Current Problems », *IEEE Trans., MAG-18,* 2, p. 431-5, 1982.

[Bk] BOURBAKI N., *Éléments de mathématique,* Intégration (Livre 6, Chaps. 1-4, A.S.I. 1175), Paris, Hermann, 1965.

[Bu] BURKE W.L., *Applied Differential Geometry,* Cambridge University Press (Cambridge, U.K.), 1985.

[CT] DI CARLO, A., TIERO A., « The Geometry of Linear Heat Conduction », in *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics* (SCHNEIDER W., TROGER H., ZIEGLER F., Eds), Longman (Harlow), 1991, p. 281-7.

[Cp] CARPENTER C.J., «Comparison of alternative formulations of 3-dimensional magnetic-field and eddy-current problems at power frequencies », *Proc. IEE, 124,* 11, p. 1026-34, 1977.

[Ca] CARTAN E., «La notion d'orientation dans les différentes géométries », *Bull. Soc. Math. France, 69,* p. 47-70, 1941.

[CR] CHAVENT G., ROBERTS J.E., « A unified presentation of mixed, mixed-hybrid finite elements and standard finite difference approximations for the determination of velocities in waterflow problems », *Adv. Water Resources, 14,* 6, p. 329-48, 1991.

[CW] CLEMENS M., WEILAND T., « Transient Eddy-Current Calculation with the FIT-Method », *IEEE Trans., MAG-35,* 3, p. 1163-6, 1999.

[C&] COHEN G., JOLY P., TORDJMAN N., «Construction and analysis of higher order elements with mass-lumping for the wave equation », in *Mathematical Aspects of Wave Propagation Phenomena,* SIAM (Philadelphia), 1993, p. 152-60.

[CD] COSTABEL M., DAUGE M., « Singularités des équations de Maxwell dans un polyèdre », *C.R. Acad. Sci. Paris, 324, I,* 9, p. 1005-10, 1997.

[CS] DE COUGNY H.L. , SHEPHARD M.S., «Parallel refinement and coarsening of tetrahedral meshes », *Int. J. Numer. Meth. Engng., 46,* 7, p. 1101-25, 1999.

[CZ] COULOMB J.L., ZGAINSKI F.X., MARÉCHAL Y., « A Pyramidal Element to Link Hexahedral, Prismatic and Tetrahedral Edge Finite Elements », *IEEE Trans., MAG-33,* 2, p. 1362-5, 1997.

[Cr] CROWE M.J., *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, 1967 (Dover edition, New York, 1985).

[Da] DARRIEUS G., « Les modèles mécaniques en électrotechnique, leur application aux problèmes de stabilité », *Bull. Soc. Fr. des Électriciens, 9,* p. 794-809, 1929.

[Dr] DARRIGOL O., «The Electrodynamic Revolution in Germany as Documented by Early German Expositions of 'Maxwell's Theory' », *Arch. Hist. Exact Sci., 45*, p. 189-250, 1993.

[D&] DULAR P., J.-HODY Y., NICOLET A., GENON A., LEGROS W., «Mixed Finite Elements Associated with a Collection of Tetrahedra, Hexahedra and Prisms», *IEEE Trans., MAG-30*, 5, p. 2980-3, 1994.

[Ec] ECKMANN B., «Topology, Algebra, Analysis—Relations and Missing Links », *Notices AMS, 46*, 5, p. 520-7, 1999.

[EJ] ELMKIES A., JOLY P., «Éléments finis d'arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas de dimension 3 », *CRAS, 325, Série I*, p. 1217-22, 1997.

[E&] ERGATOUDIS J.G., IRONS B.M., ZIENKIEWICZ O.C., « Curved, isoparametric, 'quadrilateral' elements for finite element analysis», *Int. J. Solids Struct., 4*, p. 31-42, 1968.

[Fi] FIRESTONE F.A., « A new analogy between mechanical and electrical systems», *J. Acoust. Soc. Am., 4*, p. 249-67, 1933.

[Fr] FRANKLIN P., «The electric currents in a network », *J. Math. Phys., 4*, p. 97-102, 1925.

[GO] GELBAUM B.R., OLMSTED J.M.H., *Counterexamples in Analysis*, San Francisco, Holden-Day, 1964.

[Ge] GEROCH R., *Mathematical Physics*, Chicago, The University of Chicago Press, 1985.

[GT] GOLDHABER A.S., TROWER W.P., « Resource Letter MM-1: Magnetic monopoles», *Am. J. Phys., 58,* 5, p. 429-39, 1990.

[GH] GRADINARU V., HIPTMAIR R., «Whitney elements on pyramids», *ETNA*, 8, p. 154-68, 1999.

[Ha] HALMOS P.R., *Measure theory*, Princeton, Van Nostrand, 1950.

[H&] HAMOUDA L., BANDELIER B., RIOUX-DAMIDAU F., « Mixed Formulation for Magnetostatics», in *Compumag 2001*, papier PE4-11.

[HL] HAUGAZEAU Y., LACOSTE P., « Condensation de la matrice masse pour les éléments finis mixtes de H{rot} », *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I* , p. 509-12, 1993.

[He] HEINRICH B., *Finite Difference Methods on Irregular Networks*, Berlin, Akademie-Verlag, 1987.

[Hn] HENLE A., *A Combinatorial Introduction to Topology*, New York, Dover, 1994.

[Hu] HUNT B.J., *The Maxwellians*, Ithaca & London, Cornell U.P., 1991.

[Jä] JÄNICH K., *Topology*, New York, Springer-Verlag, 1984.

[Ka] KAMEARI A., « Symmetric Second Order Edge Elements for Triangles and Tetrahedra », *IEEE Trans., MAG-35*, 3, p. 1394-7, 1999.

[KH] KAASSCHIETER E.F., HUIJBEN A.J.M., « Mixed-Hybrid Finite Elements and Streamline Computation for the Potential Flow Problem », *Numer. Meth. for PDEs, 8*, p. 221-66, 1992.

[KW] KHEYFETS A., WHEELER J.A., « Boundary of a Boundary and Geometric Structure of Field Theories », *Int. J. Theor. Phys., 25*, 6, p. 573-80, 1986.

[KN] KOBAYASHI S., NOMIZU K., *Foundations of Differential Geometry* (2 Vols.), New York, J. Wiley & Sons, 1963.

[KB] KOENIG H.E., BLACKWELL W.A., « Linear Graph Theory: A Fundamental Engineering Discipline », *IRE Trans. Edu., E-3*, p. 42-9, 1960.

[Ko] KOTIUGA, P.R., *Hodge Decompositions and Computational Electromagnetics* (Thèse), Montréal, Mc Gill University, 1984.

[LH] LAWVERE F.W., SCHANUEL S.H., *Conceptual Mathematics*, A first introduction to categories, Cambridge, Cambridge U.P., 1997.

[LS] LEE J.-F., SACKS Z., « Whitney Elements Time Domain (WETD) Methods », *IEEE Trans., MAG-31*, 3, p. 1325-9, 1995.

[Le] LEIS R., « Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien », *Math. Z., 106*, p. 213-24, 1968.

[LC] LI R., CHEN Z., WU W., *Generalized Difference Methods for Differential Equations*, Numerical Analysis of Finite Volume Methods, New York, M. Dekker, 1999.

[ML] MAC LANE S., *Categories for the Working Mathematician*, New York, Springer-Verlag, 1971.

[MT] MADSEN I., TORNEHAVE J., *From Calculus to Cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes*, Cambridge, Cambridge U.P., 1997.

[Ma] MATTIUSSI C., « An Analysis of Finite Volume, Finite Element, and Finite Difference Methods Using Some Concepts from Algebraic Topology », *J. Comp. Phys., 133*, p. 289-309, 1997.

[Mt] MATTIUSSI C., « The Finite Volume, Finite Element, and Finite Difference Methods as Numerical Methods for Physical Field Problems », *Advances in Imaging and Electron Physics, 113*, p. 1-146, 2000.

[Mb] MAUBACH J.M., « Local bisection refinement for N-simplicial grids generated by reflection », *SIAM J. Sci. Stat. 16*, 1, p. 210-27, 1995.

[Mx] MAXWELL J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Cambridge, Clarendon Press, 3^{d} ed., 1891 (Dover edition, New York, 1954).

[MR] MITTRA R., RAMAHI O., KHEBIR A., GORDON R., KOUKI A., « A review of absorbing boundary conditions for two and three-dimensional electromagnetic scattering problems », *IEEE Trans., MAG-25*, 4, p. 3034-8, 1989.

[MS] MONK P., SÜLI E., « A convergence analysis of Yee's scheme on nonuniform grids », *SIAM J. Numer. Anal., 31,* 2, p. 393-412, 1994.

[M&] MOSÉ R., SIEGEL P., ACKERER P., CHAVENT G., « Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity? », *Water Resources Research, 30,* 11, p. 3001-12, 1994.

[Mu] MUNTEANU I., «Tree-cotree condensation properties», *ICS News., 9,* 1, p. 10-4, 2004.

[Na] NASSE G., « L'espace vectoriel, domaine de représentation de l'électrotechnique », *Bull. EDF-DER, Série B,* 1, p. 5-26, 4, p. 5-38, 1968.

[Ne] NEDELEC J.C., « Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$ », *Numer. Math., 35,* p. 315-41, 1980.

[NW] NICOLAIDES R., D.-WANG Q., « Convergence analysis of a covolume scheme for Maxwell's equations in three dimensions », *Math. Comp., 67,* p. 947-63, 1998.

[R&] RAPETTI F., DUBOIS F., BOSSAVIT A., « Discrete vector potentials for non-simply connected three-dimensional domains », *C. R. Ac. Sc. Paris, 334,* 8, p. 717-20, 2002.

[Rn] REN Z., « Autogauging of vector potential by iterative solver—Numerical evidence », in *3d Int. Workshop on Electric and Magnetic Fields,* A.I.M. (31 Rue St-Gilles, Liège), p. 119-24, 1996.

[Rh] DE RHAM G., *Variétés différentiables,* Paris, Hermann, 1960.

[Rm] DE RHAM G., « Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples », *l'Enseignement Mathématique, 35,* p. 213-28, 1936.

[RF] ROHLIN V., FUCHS D., *Premier cours de topologie,* Moscou, Mir, 1981.

[Ro] ROMER R.H., «What do 'voltmeters' measure? Faraday's law in a multiply connected region», *Am. J. Phys., 50,* 12, p. 1089-93, 1982.

[Sc] SCHUTZ B., *Geometrical methods of mathematical physics,* Cambridge, Cambridge U.P., 1980.

[Sw] SCHWARTZ L., *Analyse (Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle),* Paris, Hermann, 1970.

[SS] SMYTH J.B., SMYTH D.C., «Critique of the paper 'The Electromagnetic Radiation from a Finite Antenna'», *Am. J. Phys., 45,* 6, p. 581-2, 1977.

[Sü] SÜLI E., «Convergence of finite volume schemes for Poisson's equation on nonuniform meshes», *SIAM J. Numer. Anal., 28,* 5, p. 1419-30, 1991.

[St] STEPHENSON R.J., «Development of vector analysis from quaternions», *Am. J. Phys., 34,* 2, p. 194-201, 1966.

[ST] SEIFERT H., THRELFALL W., *A Textbook of Topology,* Orlando, Academic Press, 1980. (Trad. de *Lehrbuch der Topologie,* 1934.)

[SY] SHAW R., YEADON F.J., «On $(a \times b) \times c$», *Am. Math. Monthly, 96,* 7, p. 623-9, 1989.

[SC] SILVESTER P., CHARI M.V.K., «Finite Element Solution of Saturable Magnetic

Field Problems», *IEEE Trans., PAS-89,* 7, p. 1642-51, 1970.

[SF] SILVESTER P.P., FERRARI R., *Finite Elements for Electrical Engineers,* Cambridge, Cambridge U.P., 1991.

[Sy] SYNGE J.L., «The fundamental theorem of electrical networks», *Quart. Appl. Math., IX,* 2, p. 113-27, 1951.

[Tf] TAFLOVE A., *Computational Electromagnetics,* The Finite Difference in Time Domain Method, Boston & London, Artech House, 1995.

[TW] TAYLOR E.F., WHEELER J.A., *Spacetime physics,* New York, Freeman, 1992.

[Tn] TONTI E., «Algebraic Topology and Computational Electromagnetism», in *4th Int. Workshop on Electric and Magnetic Fields* (Marseilles), A.I.M., 1998, p. 284-94.

[To] TONTI E., «A Direct Formulation of Field Laws: The Cell Method», *CMES, 2,* 2, p. 237-58, 2001.

[T&] TRAPP B., MUNTEANU I., SCHUHMANN R., WEILAND T., IOAN D., «Eigenvalue computation by means of a tree–cotree filtering technique», *IEEE Trans., MAG-38,* 2, p. 445-8, 2002.

[Um] UMAN M.A., «Reply to Smyth and Smyth», *Am. J. Phys., 45,* 6, p. 582, 1977.

[VW] VEBLEN O., WHITEHEAD J.H.C., *The foundations of differential geometry,* Cambridge, 1932.

[We] WEILAND T., «Computer Modelling of Two- and Three-Dimensional Cavities», *IEEE Trans., NS-32,* 5, p. 2738-42, 1985.

[Wl] WEILAND T., «Three Dimensional Resonator Mode Computation by Finite Difference Methods», *IEEE Trans., MAG-21,* 6, p. 2340-3, 1985.

[Wi] WEILAND T., «Maxwell's Grid Equations», in *Proc. URSI Int. Symp. on Electromagnetic Theory* (Sydney, Australia), 1992, p. 37-39.

[Wd] WEILAND T., «Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods», *Int. J. Numer. Modelling, 9,* p. 295-319, 1996.

[WW] WEISER A., WHEELER M.F., «On convergence of block-centered finite differences for elliptic problems», *SIAM J. Numer. Anal., 25,* 2, p. 351-75, 1988.

[vW] J.S. VAN WELIJ, «Calculation of Eddy Currents in Terms of H on Hexahedra», *IEEE Trans., MAG-21,* 6, p. 2239-41, 1985.

[Wh] WHITNEY H., *Geometric Integration Theory,* Princeton, Princeton U.P., 1957.

[WK] WHITE D.A., KONING J.M., «A Novel Approach for Computing Solenoidal Eigenmodes of the Vector Helmholtz Equation», *CEFC'00* (p. 328 du «digest of abstracts»).

[Wt] WHITTAKER E., *A History of the Theories of Æther and Electricity.* Thomas Publishers (Am. Inst. of Physics), 1987. (1^{e} éd., The Philosophical Library, 1951, 1954.)

[Ye] YEE K.S., «Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media», *IEEE Trans., AP-14,* 3, p. 302-7, 1966.

[Yo] YOSIDA K., *Functional Analysis,* Berlin, Springer-Verlag, 1965.