

Bazele Electrotehnicii

6. Teoremele fundamentale ale circuitelor electrice

Daniel Ioan

Universitatea Politehnica din Bucuresti
PUB - CIEAC/LMN

daniel@lmn.pub.ro

6.1. Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff

- Prima relatie a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in (n)} i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in (n)} \varepsilon_k i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^L a_{nk} i_k = 0, n = 1, 2, \dots, N \Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & +1 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a_{nk} & \dots \\ \dots & -1 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = 0$$

Factorul de semn devine element al matricei totale de incidenta laturi-noduri:

$$a_{nk} = \begin{cases} +1, & \text{cand latura } k \text{ paraseste nodul } n \\ -1, & \text{cand latura } k \text{ paraseste nodul } n \\ 0, & \text{cand latura } k \text{ nu concura la nodul } n \end{cases} \quad \mathbf{A}' = [a_{nk}]_{\substack{n=1, \dots, N \\ k=1, \dots, L}} \in \mathbb{Z}^{N \times L}$$

iar relatiile capata forma urmatoare, in care \mathbf{i} este vectorul curentilor circuitului:

$$\mathbf{A}' \mathbf{i} = 0; \quad \mathbf{i} = [i_1 \quad i_2 \quad \dots, i_k, \dots \quad i_L]^T \in \mathbb{R}^L$$

Ele nu sunt independente: suma liniilor este nula (+1 si -1 pe fiecare coloana).

Eliminad o linie se obtine *matricea (redusa) laturi-nooduri*:

$$\mathbf{A} = [a_{nk}]_{\substack{n=1, \dots, N-1 \\ k=1, \dots, L}} \in \mathbb{Z}^{(N-1) \times L} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{i} = 0$$

Aceasta este forma independenta a primei ecuatii Kirchhoff (sunt N-1 ecuatii liniare iar rangul amtriecei A este N-1).

Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

- A doua relatie a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k \in [o]} u_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in [o]} \varepsilon_k u_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^L b_{ok} u_k = 0, o = 1, 2, \dots, B' \Rightarrow \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 \dots & +1 & \dots & \dots -1 \dots \\ \dots & 0 & b_{nk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix} = 0$$

Factorul de semn devine element al matricei totale de incidenta laturi-bucle:

$$b_{ok} = \begin{cases} +1, & \text{cand latura } k \text{ apartine buclei } o \text{ si are acelasi sens cu aceasta} \\ -1, & \text{cand latura } k \text{ apartine buclei } o \text{ dar are sens opus fat de aceasta} \\ 0, & \text{cand latura } k \text{ nu apartine buclei } o \end{cases} \quad \mathbf{B}' = [b_{ok}]_{\substack{n=1, \dots, B' \\ k=1, \dots, L}} \in \mathbb{Z}^{B' \times L}$$

Relatiile lui Kirchhoff capata forma urmatoare, in care \mathbf{u} este vectorul tensiunilor circuitului:

$$\mathbf{B}' \mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots, u_k, \dots \quad u_L]^T \in \mathbb{R}^L$$

Ecuatiile acestui sistem nu sunt linear independente. Pentru a obtine un sistem minimal, linear independent trebuie eliminate din sistem o serie de ecuatii.

Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

- Forma independenta a ecuatiilor lui Kirchhoff pentru tensiuni:

Pentru a o obtine vom analiza graful circuitului presupus conex si vom construi un **arbore**, alcatuit dintr-o multime conexa de laturi ce cuprinde toate nodurile dar nu formeaza bucle. Laturile arborelui se numesc *ramuri* si ele sunt in numar de $N-1$.

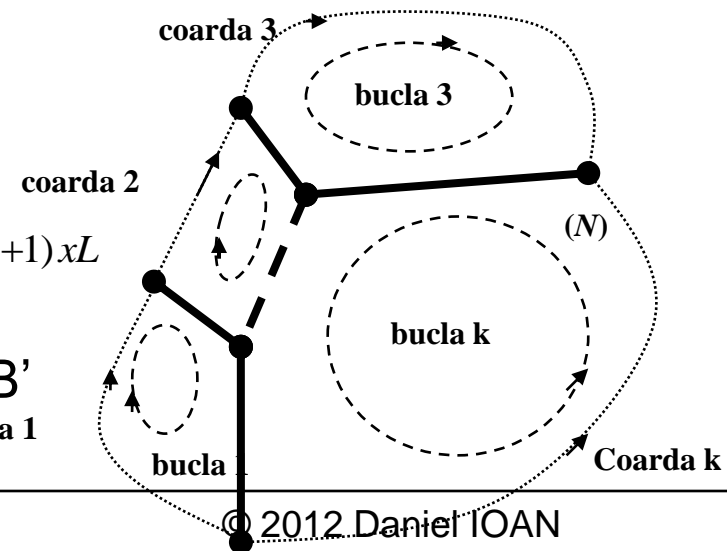
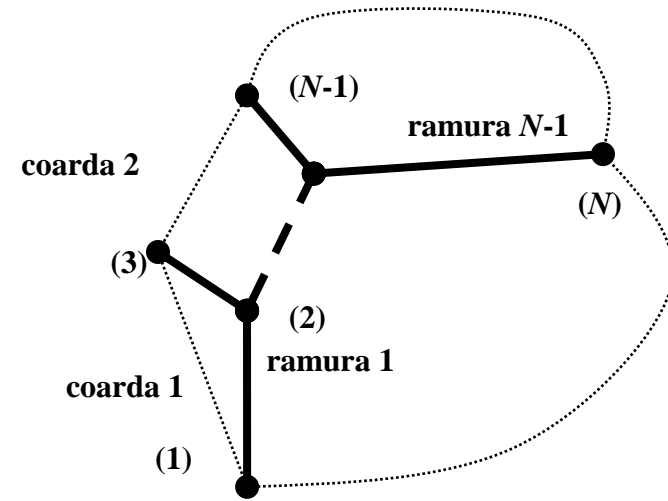
Prin **coarbore** intelegem subgraful complementar arborelui. Laturile lui se numesc *coarde* si sunt in numar de $B=L-N+1$. Fiecare coarda defineste o bucla formata din ea si in rest din ramuri.

Relatiile Kirchhoff pe aceste bucle:

$$\mathbf{Bu} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{B} = [b_{nk}]_{\substack{n=1, \dots, N-1 \\ k=1, \dots, L}} \in \mathbb{Z}^{(L-N+1) \times L}$$

sunt linear independente, iar matrice \mathbf{B} , parte din \mathbf{B}' se numeste *matricea (reduca) laturi-bucle*.



Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

- Daca laturile sunt numerotate in ordinea: ramuri, coarde, iar buclele sunt numerotate in ordinea coardelor generatoare, atunci

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} .. & .. & .. & 1 & ..0 & 0 \\ .. & .. & .. & 0 & ..1 & 0 \\ .. & .. & .. & 0 & ..0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{D} \quad \mathbf{I}]; \quad \mathbf{I} \in \mathbb{Z}^{(L-N+1) \times (L-N+1)} \text{ este mat. unitate}$$

In consecinta, matricea are rangul $L-N+1$ si ecuatiile sunt linear independente.

Vectorul tensiunilor se partajeaza in vectorii tensiunilor din arbore – coarboare:

$$-\mathbf{u} = [\mathbf{u}_a^T \mid \mathbf{u}_c^T]^T \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{u}_a = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^{N-1}; \quad \mathbf{u}_c = [u_N \quad u_{N+1} \quad \dots \quad u_L]^T \in \mathbb{R}^{L-N+1}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \mathbf{D}\mathbf{u}_a + \mathbf{u}_c = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_c = -\mathbf{D}\mathbf{u}_a$$

In consecinta, tensiunile coardelor sunt sume algebrice ale tensiunilor ramurilor, rezultate din relatiile Kirchhoff scrise pe buclele independente, care contin o singura coarda si in rest ramuri.

Relatia incadrata este o alta forma matriciala a ecuatiilor lui Kirchhoff pentru tensiuni.

Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

Relatii duale valabile pentru curenti se obtin folosind sectiunile grafului.

- **Sectiune** = multimea de laturi notata $\{s\}$, care este intersectata de o suprafata inchisa ce contine in interiorul sau unul sau mai multe noduri. Relatie lui Kirchhoff pentru curenti se poate aplica atat nodurilor cat si sectiunilor. Suma algebrica a curentilor din laturile unei sectiuni este nula.

$$\sum_{k \in \{s\}} i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k \in \{s\}} \varepsilon_k i_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^L c_{nk} i_k = 0, n = 1, 2, \dots, N-1 \Rightarrow \begin{bmatrix} +1 & 0 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & c_{nk} & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \dots \\ i_L \end{bmatrix} = 0$$

- Matricea totala de apartenenta laturi-sectiuni conduce la ecuatiile:

$$c_{sk} = \begin{cases} +1, & \text{cand latura } k \text{ paraseste sectiunea } s \\ -1, & \text{cand latura } k \text{ intrasectiunea } s \\ 0, & \text{cand latura } k \text{ nu apartine sectiunii } s \end{cases} \quad \mathbf{C}' = [c_{nk}]_{\substack{s=1, \dots, S \\ k=1, \dots, L}} \in \mathbb{Z}^{S \times L}; \quad \mathbf{C}' \mathbf{i} = 0$$

Consecinta a relatiilor Kirchhoff pentru curenti deoarece liniile matricei \mathbf{C}' sunt sume de linii ale matricei \mathbf{A} (corespunzatoare nodurilor din sectiuni).

Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

- Forma independenta a ecuatiilor lui Kirchhoff pentru sectiuni

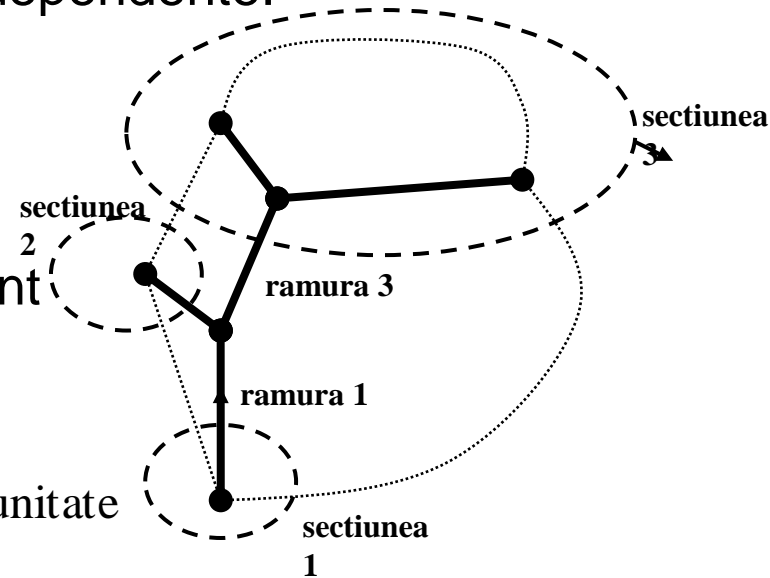
Fiecare ramura defineste o sectiune formata din ea si in rest din coarde.

Ecuatiile scrise pe aceste sectiuni sunt linear independente:

$$\mathbf{C}\mathbf{i} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{Z}^{(N-1) \times (L-N+1)}$$

Unde \mathbf{C} este matricea (redusa) de apartenenta laturi-sectiuni fundamentale. Daca sectiunile sunt numerotate in ordinea ramurilor generatoare:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & ..0 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & ..1 & 0 & .. & .. & .. \\ 0 & ..0 & 1 & .. & .. & .. \end{bmatrix} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{D}']; \quad \mathbf{I} \in \mathbb{Z}^{(N-1) \times (N-1)} \text{ mat. unitate}$$



O proprietate remarcabila a topologiei circuitelor cu u_i asociate in regula de la receptoare este: $\mathbf{D}' = -\mathbf{D}^T \Leftrightarrow d'_{ki} = -d_{ik}$ deoarece, daca ramura i apartine buclei generata de coarda k , atunci coarda k face parte din sectiunea generata de ramura i , dar cu orientare diferita. \mathbf{D} este numita si *matricea incidentelor esentiale*.

Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

Vectorul curentului contine vectorul curentilor din arbore urmat de cel al curentilor din coarboare:

$$\mathbf{i} = [\mathbf{i}_a^T \mid \mathbf{i}_c^T]^T \in \mathbb{R}^L; \quad \mathbf{i}_a = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_{N-1}]^T \in \mathbb{R}^{N-1} \quad \mathbf{i}_c = [i_N \quad i_{N+1} \quad \dots \quad i_L]^T \in \mathbb{R}^{L-N+1}$$

In consecinta, rezulta

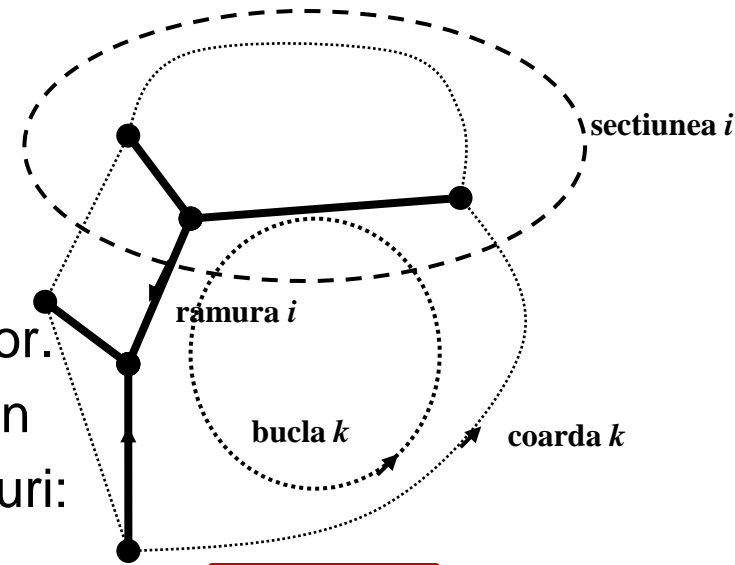
$$\mathbf{C}\mathbf{i} = 0 \Rightarrow \mathbf{i}_a - \mathbf{D}^T \mathbf{i}_c = 0 \Rightarrow \mathbf{i}_a = \mathbf{D}^T \mathbf{i}_c$$

o alta forma a ecuatiilor lui Kirchhoff pentru curenti, care afirma ca valorile curentilor din ramuri sunt sume algebrice ale curentilor coardelor.

Curentii si tensiunile unui circuit se exprima deci in functie de curentii din coarde si tensiunile de ramuri:

$$\mathbf{i} = [\mathbf{i}_a^T \mid \mathbf{i}_c^T]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^T \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{i}_c = [\mathbf{D} \quad \mathbf{I}]^T \mathbf{i}_c = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c$$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_a^T \mid \mathbf{u}_c^T]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ -\mathbf{D}\mathbf{u}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{u}_a = [\mathbf{I} \quad -\mathbf{D}]^T \mathbf{u}_a = \mathbf{C}^T \mathbf{u}_a \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{u}_a$$



Forma matriceala a ecuatiilor lui Kirchhoff (cont)

O alta forma matriciala a ecuatiilor lui Kirchhoff pentru tensiuni este:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 - v''_1 \\ v'_2 - v''_2 \\ \vdots \\ v'_L - v''_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_L \end{bmatrix}$$

valabila daca in toate laturile este aplicata regula de la receptoare (u si I au acelasi sens). Ea exprima tensiunile ca diferente de potential. Aici \mathbf{v} este vectorul potentialilor nodurilor de dimensiune $N-1$.

Constatam ca relatiile lui Kirchhoff au diverse forme matriciale echivalente. Acestea sunt exprimate folosind matricile topologice:

A – incidente laturi-noduri;

B – apartenente laturi-bucle

C – apartenente laturi sectiuni

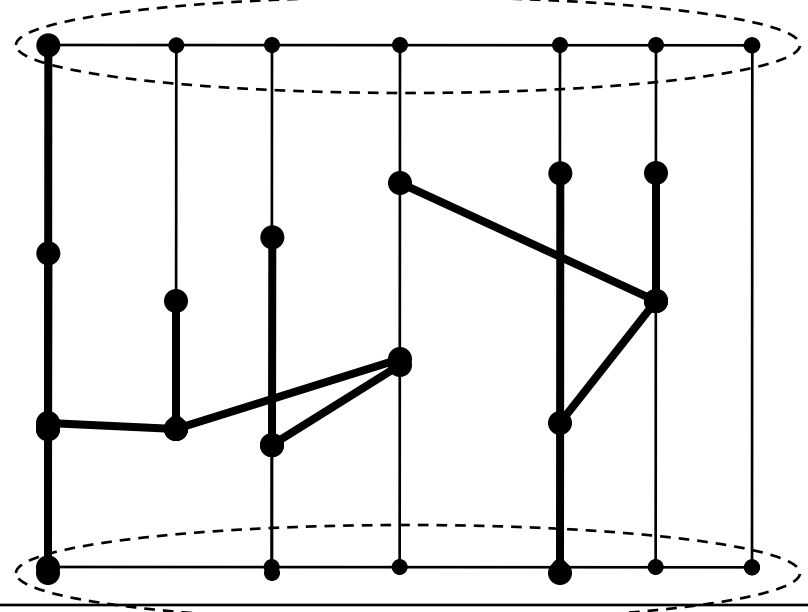
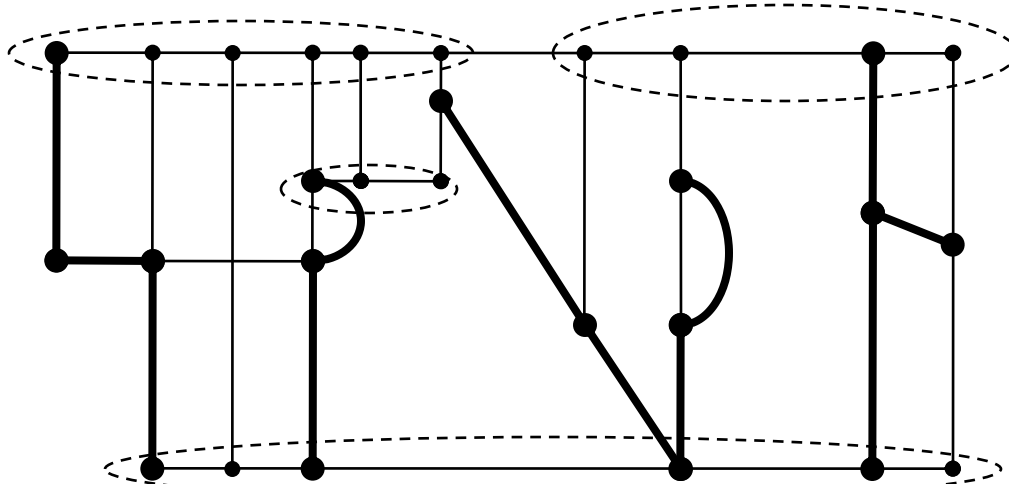
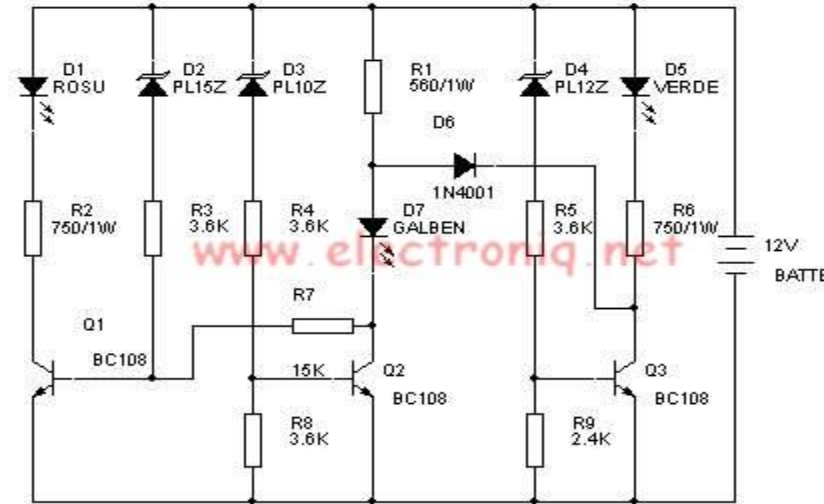
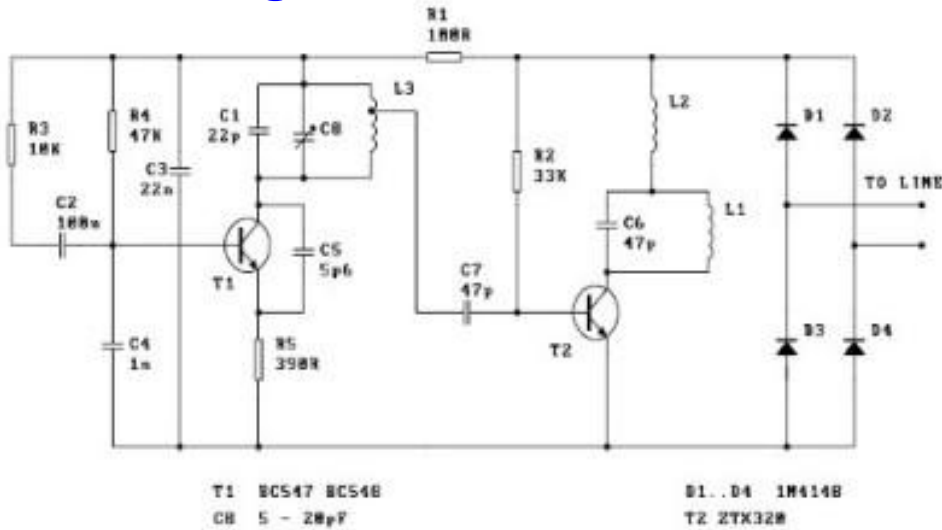
D – incidente esentiale (ramuri-bucle)

Chiar daca initial fiecare din aceste matrice a fost destinata unei ecuatii, in final constatam ca ea permite scrierea si a celeilalte ecuatii Kirchhoff duale.

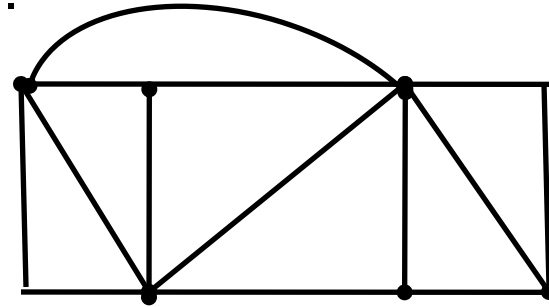
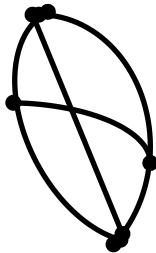
Formele matriceale ale ecuatiilor lui Kirchhoff. Recapitulare

Ecuatia Kirchhoff I pentru curenti:	Ecuatia Kirchhoff II pentru tensiuni:	Scrise cu matricea:
$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0$	$\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}$	A
$\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c$	$\mathbf{B}\mathbf{u} = 0$	B
$\mathbf{C}\mathbf{i} = 0;$	$\mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{u}_a$	C
$\mathbf{i}_a = \mathbf{D}^T \mathbf{i}_c$	$\mathbf{u}_c = -\mathbf{D}\mathbf{u}_a$	D

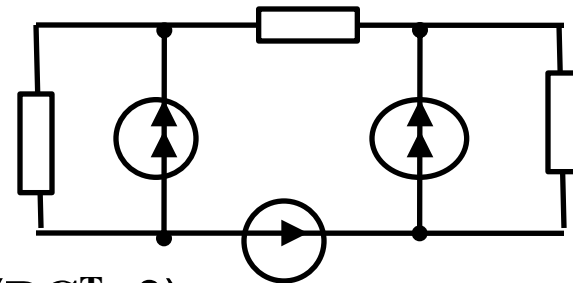
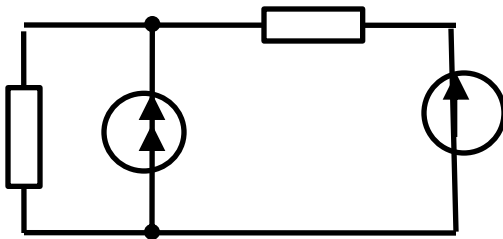
Circuite, grafuri, arbori



- Pentru grafurile din figura, identificati un arbore, alegeti tensiuni arbitrare in ramuri si curenti arbitrari in coarde. Completati apoi grafurile de curent si tensiune, aplicand teoremele lui Kirchhoff.



- Scrieti matricile topologice A, B, C, D pentru circuitele din figura.



- Aratati ca matricile B si C sunt ortogonale ($\mathbf{BC}^T=0$)
- Scrieti un algoritm pentru gasirea unui arbore intr-un graf
- Scrieti codul MATLAB de generarea a matricelor A, B, C, D, pornind de la descrierea tabelara de tip Spice (nod initial-final pentru fiecare laturi).
Indicatie: explicati de ce "diagonalizarea" matricei A duce la matricea C.

6.2. Teorema lui Tellegen. Conservarea puterilor.

- Se vor considera doua circuite electrice care au acelasi graf, implicit aceleasi matric etopologice A, B, C , si parametrii L, N . In aceste conditii, produsul dintre curentul si tensiunea din doua laturi corespondente ale celor doua circuite se numeste **pseudoputere**. Exista doua pseudoputeri pentru fiecare latura k :

$$\tilde{p}'_k = u'_k i''_k, \quad \tilde{p}''_k = u''_k i'_k$$

Ele sunt egale cu puterea transferata laturii, daca circuitele sunt identice:

$$p_k = u_k i_k = \tilde{p}'_k = \tilde{p}''_k$$

- Teorema lui Tellegen**: suma algebrica a (pseudo)puterilor din toate laturile unui circuit izolat este nula:

$$\sum_{k=1}^L {}^A \tilde{p}'_k = \sum_{k=1}^L {}^A u'_k i''_k = 0, \quad \sum_{k=1}^L {}^A \tilde{p}''_k = \sum_{k=1}^L {}^A u''_k i'_k = 0,$$

Factorul de semn este pozitiv in regula de la receptoare si negativ in regula de la generatoare. Daca se pastreaza regula pentru toate laturile, atunci produsul scalar dintre vectorului tensiunilor si cel al curentilor pentru intreg circuitul este nul. Demonstratie (consecinta directa a celor doua rel. K):

$$\mathbf{u}'^T \mathbf{i}'' = (\mathbf{A}^T \mathbf{v}')^T \mathbf{i}'' = (\mathbf{v}' \mathbf{A}^T) \mathbf{i}'' = \mathbf{v}' (\mathbf{A}^T \mathbf{i}'') = 0$$

- Daca in toate laturile tensiunea si curentul sunt orientate dupa regula de la receptoare, atunci suma puterilor laturilor este nula deci produsul scalar dintre vectorului tensiunilor si cel al curentilor pentru intreg circuitul este nul:

$$\mathbf{u}'^T \mathbf{i}'' = \mathbf{i}''^T \mathbf{u}' = \sum_{k=1}^L u'_k i''_k = 0, \quad \mathbf{u}''^T \mathbf{i}' = \mathbf{i}'^T \mathbf{u}'' = \sum_{k=1}^L u''_k i'_k = 0 \Rightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{i}$$

In circuite izolate vectorul curentilor este perpendicular pe cel al tensiunilor

In circuite care nu respecta regula de la receptoare suma algebrica a puterilor este nula → suma puterilor in laturile receptoare este egala cu suma puterilor din laturile generatoare (puterea consumata este egala cu puterea generata).

$$P_c = P_g, \quad \text{unde} \quad P_c = \sum_{k=1}^L p_k = \sum_{k=1}^L u_k i_k, \quad P_g = \sum_{k=1}^L p_k = \sum_{k=1}^L u_k i_k$$

REC REC GEN GEN

iar daca circuitul nu este izolat, suma algebrica a puterilor consumate de laturi este egala cu puterea transferata circuitului prin nodurile sale terminale:

$$\sum_{k=1}^L {}^A p_k = \sum_{k=1}^L {}^A u_k i_k = 0$$

Teorema pasivitatii. Bilantul puterilor

Un circuit multipolar alcatuit din elemente pasive /disipative este pasiv/disipativ.

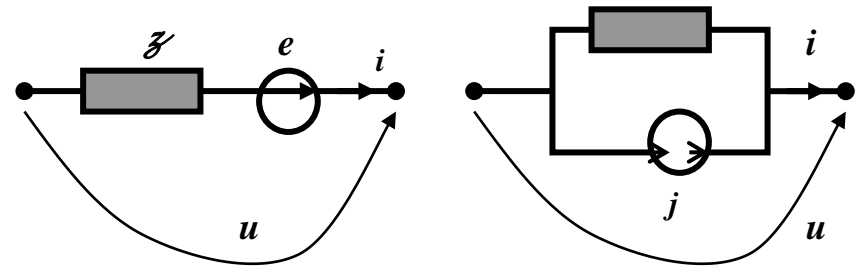
Enuntul teoremei pasivitatii este consecinta a teoremei lui Tellegen:

$$\int_0^t p_k(t') dt' = \int_0^t u_k i_k dt' > 0, k = 1, 2, \dots, L \Rightarrow \int_0^t p(t') dt' = \int_0^t \sum_{k=1}^n v_k i_k dt' = \int_0^t \sum_{k=1}^L u_k i_k dt' > 0$$

Fie un circuit cu m laturi surse reale de tensiune iar restul surse de curent:

$$u_k = \mathcal{Z}_k i_k - e_k, k = 1, 2, \dots, m$$

$$i_k = \mathcal{Y}_k u_k + j_k, k = m+1, \dots, L$$



Egalitatea:

$$\sum_{k=1}^L i_k u_k = \sum_{k=1}^m (i_k \mathcal{Z}_k i_k - i_k e_k) + \sum_{k=m+1}^L (u_k \mathcal{Y}_k u_k + u_k j_k) = p_c - p_g = 0 \Rightarrow p_c = p_g$$

$$p_c = \sum_{k=1}^m i_k \mathcal{Z}_k i_k + \sum_{k=m+1}^L u_k \mathcal{Y}_k u_k$$

se numeste **bilantul puterilor** din circuit.

$$p_g = \sum_{k=1}^m i_k e_k - \sum_{k=m+1}^L u_k j_k$$

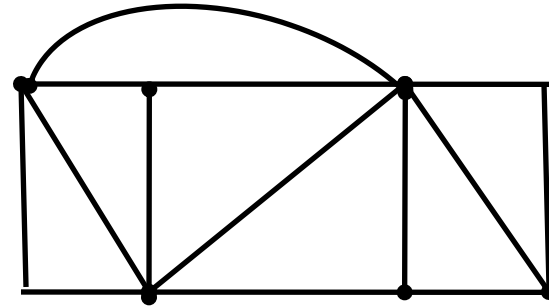
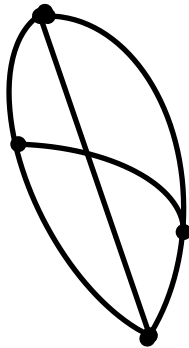
In fig. puterile surselor sunt conventional generate.

Bilantul puterilor in diverse regimuri.

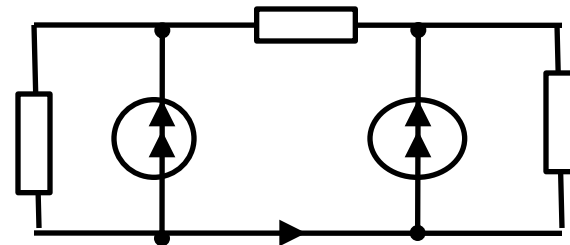
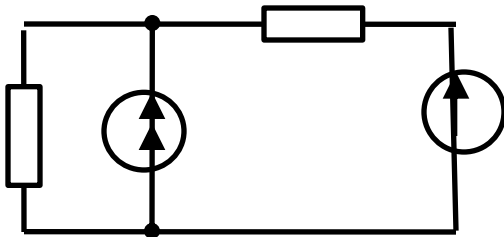
Regim	Putere consumata	Putere generata
C.C.	$p_c = \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \sum_{k=m+1}^L G_k u_k^2$	$p_g = \sum_{k=1}^m {}^A i_k e_k - \sum_{k=m+1}^L {}^A u_k j_k$
C.a.	$\underline{s}_c = \sum_{k=1}^m \underline{Z}_k I_k^2 + \sum_{k=m+1}^L \underline{Y}_k U_k^2$	$\underline{s}_g = \sum_{k=1}^m {}^A \underline{E}_k \underline{I}_k^* - \sum_{k=m+1}^L {}^A \underline{U}_k \underline{J}_k^*$

- Puterea consumata este o suma aritmetica, in schimb puterea generata este o suma algebrica (cu plus daca e-i au sens comun sau daca u-j au sens opus si minus in caz contrar).
- Se constata ca in regim sinusoidal se conserva atat puterea complexa cat si puterile activa si reactiva, care sunt partea reala respectiv imaginara a puterii complexe. Se conserva si puterea instantanee, dar nu se conserva puterea aparenta.
- In reprezentarea operatiionala $U(s)I(s)$ nu are semnificatia unei puteri, ci este in domeniul timpului convolutia dintre semnalul de tensiune si cel de curent. Bilantul este satisfacut de puterile instantanee.

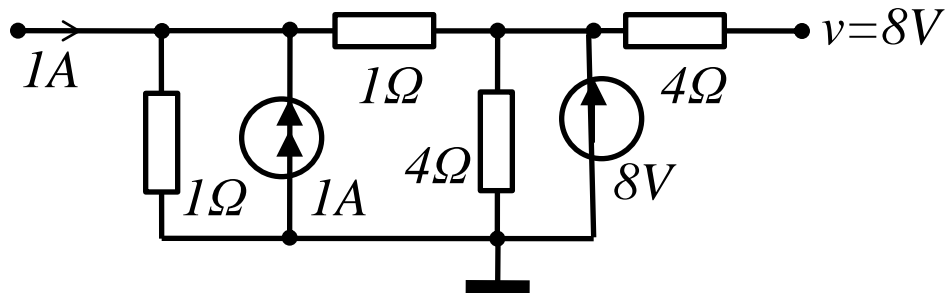
- Pentru grafurile din figura, identificati un arbore, alegeti tensiuni arbitrare in ramuri si curenti arbitrari in coarde. Completati grafurile de curent si tensiune, aplicand teoremele lui Kirchhoff si apoi verificati teorema lui Tellegen (conservarea puterilor)



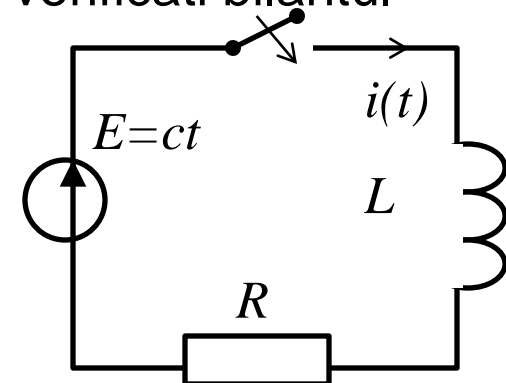
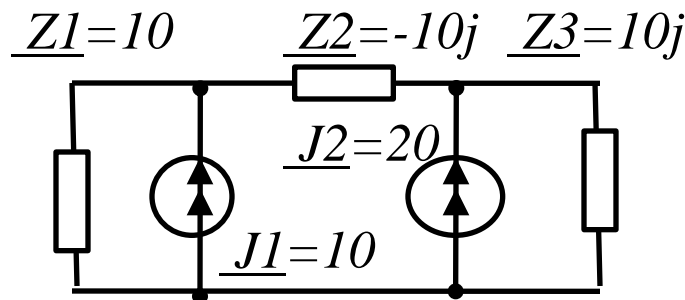
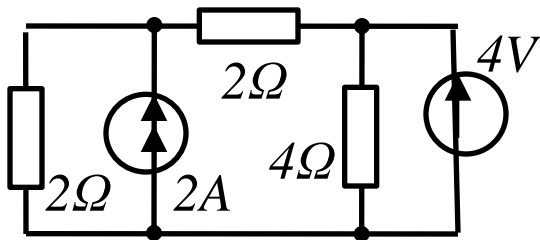
- Procedati ca in problema anterioara, in cazul circuitelor din figura. Folosind ecuatiile constitutive ale elementelor din laturi, detreminati parametrii lor: R , E , J si verificati apoi bilantul puterilor



- Verificati conservarea puterilor pentru circuitul neizolat cu doua terminale flotante din figura. Orice circuit neizolat devine izolat, daca se include in el sursele care alimenteaza nodurile terminale.



- Exprmiati puterile (activa, reactiva si complexa) consumate de un receptor de curent alternativ trifazat in functie de marimile (curenti/tensiuni) de linie si apoi in functie de cele de faza.
- Analizati circuitele de c.c., c.a. si tranzitoriu din figura si verificati bilantul puterilor.



6.3. Analiza sistematica a circuitelor. Formulara corecta

- Spre deosebire de capitolul anterior in care au fost analizate circuite cu topologii particulare, in analiza sistematica se considera topologii arbitrare.
- **Problema fundamentala** a analizei circuitelor are ca **date**:
 - Topologia circuitului (schema electrica sau graful circuitului descris geometric sau numeric)
 - Tipul si valoarea parametrilor definatorii ai fiecarei laturi: R, L, C, M
 - Tipul si parametrul fiecarei surse din circuit: $e_k(t)$, $j_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, L$
 - Valoarea conditiilor initiale corespunzatoare elementelor acumulatori de energie din circuit, respectiv curentii din bobine $i_{Lk}(0)$ si tensiunile condensatoarelor $i_{Rk}(0)$ la momentul initial $t=0$.
- **Necunoscutele** acestei probleme sunt
 - Curentii $i_k(t)$ si tensiunile $u_k(t)$ din laturile circuitului $k=1, 2, \dots, L$ pentru orice $t > 0$.
- **Solutia** trebuie sa satisfaca:
 - Ecuatiile lui Kirchhoff entru curenti si tensiuni: $\mathbf{A}\mathbf{i}=0$; $\mathbf{B}\mathbf{u}=0$
 - Ecuatiile constitutive ale laturilor controlate in curent sau tensiune:

$$u_k = \mathcal{Z}_k i_k - e_k, k = 1, 2, \dots, m; \quad i_k = \mathcal{Y}_k u_k + j_k, k = m + 1, \dots, L$$

Formulara corecta a problemei fundamentale a analizei circuitelor

- **Forma matriciala a ecuatiilor constitutive – laturile controlate in curent:**

$$u_k = z_k i_k - e_k, k = 1, 2, \dots, L \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & & & 0 \\ & z_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & z_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_L \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{Zi} - \mathbf{e}$$

- **Laturile controlate in tensiune:**

$$i_k = y_k u_k + j_k, k = 1, 2, \dots, L \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & & & 0 \\ & y_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \dots \\ j_L \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{i} = \mathbf{Yu} + \mathbf{j}$$

- Matricile de impedanta/admitanta sunt diagonale in cazul circuitelor cu elemente dipolare si au elemente nediagonale in caz contrar.
- Problema fundamentala este bine formulata daca are solutie si ea este unica.
- **O conditie necesara de formulare corecta** este ca circuitul sa aiba un arbore, numit **arbore normal**, care sa contina toate sursele ideale de tensiune si nici o sursa ideal de curent. In aceste conditii sursele ideale de curent nu formeaza bucle iar sursele ideale de tensiune nu formeaza sectiuni.

Formulara corecta a problemei fundamentale a analizei circuitelor (cont.)

- Circuitele in care laturile sursa ideala de tensiune formeaza bucle sau laturile sursa ideala de curent formeaza sectiuni se numesc cu surse in exces si sunt **circuite incorect formulate**, deoarece nu au solutie (daca t.e.m. nu satisfac relatiile Kirchhoff pentru tensiuni sau daca c.e.m nu satisfac relatiile Kirchhoff pentru curenti) sau au mai multe solutii.
- **Teorema de buna formulare pentru circuite rezistive liniare**

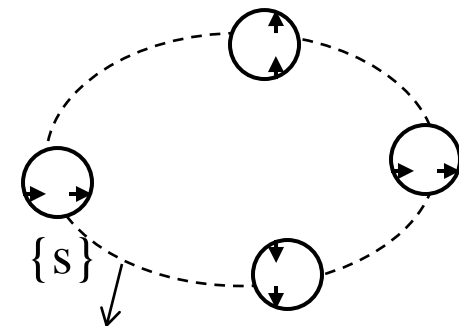
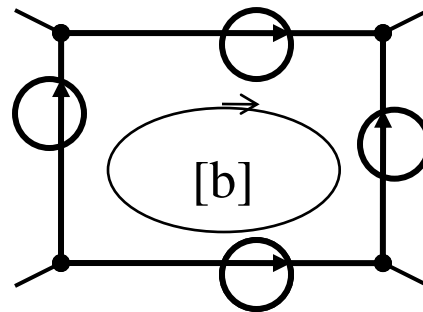
Un circuit linear alcatuit din rezistore disipative $R_k > 0, k = 1, 2, \dots, N_R$ (cu rezistente strict pozitive) si surse ideale este bine formulat daca si numai daca nu are surse in exces (adica are un arbore normal). In aceste conditii problema de analiza are solutie si aceasta este unica. Teorema se extinde in mod natural in c.a. cat si in regim tranzitoriu.

Demonstratia unicitatii se face aratand ca daca sursele se pasivizeaza, atunci conform teoremei lui Tellegen, circuitul are doar solutia nula:

$$\sum_{k=1}^{N_R} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{N_R} U_k^2 / R_k = 0 \Rightarrow$$

$$I_k^2 = 0, U_k^2 = 0, k = 1, 2, \dots, N_R$$

Existenta se demonstreaza constructiv.



Cazul laturilor controlate hibrid

- Vom presupune ca toate laturile controlate in curent (incl. sursele e) sunt cuprinse in arborele normal si ca cele controlate in tensiune (incl. sursele j) apartin coarborelui.
- **Ecuatiile constitutive ale acestor circuite care au atat laturi controlate in curent cat si laturi controlate in tensiune au deci forma:**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z} & 0 \\ 0 & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{e} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathcal{H}\mathbf{x} + \mathbf{z}$$

in care **vectorul y** contine marimile esentiale ale solutiei: tensiunile din ramuri si curentii din coarde, iar **vectorul z** contine excitatiile circuitului, respectiv parametrii surselor: t.e.m. e si c.e.m. j (inclusiv conditiile initiale).

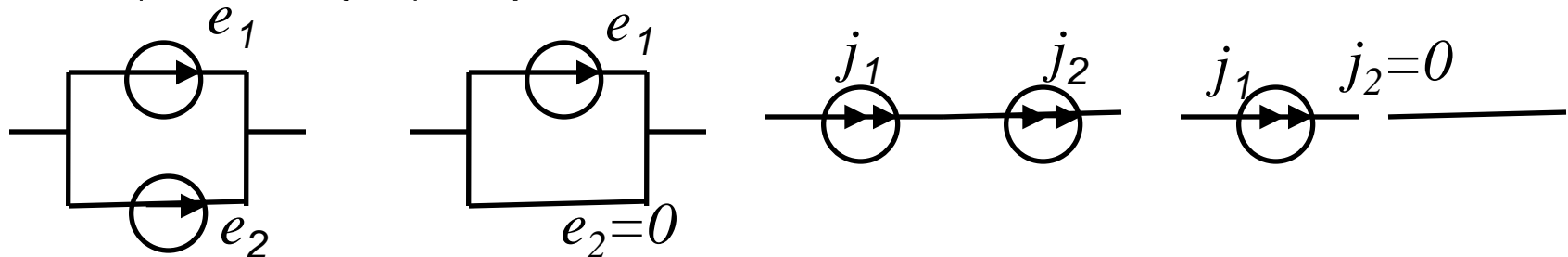
Matricea hibrida are structura diagonala, daca circuitul este alcatuit din elemente dipolare si are componente nediagonale, in cazul elementelor multipolare, cum sunt SUCI, SUCU plasate in arbore, si SICI, SICU in coarbore, comandate de curentii din ramuri si respectiv tensiuni din coarde.

Circuit Java applet: <http://www.falstad.com/circuit/e-index.html>

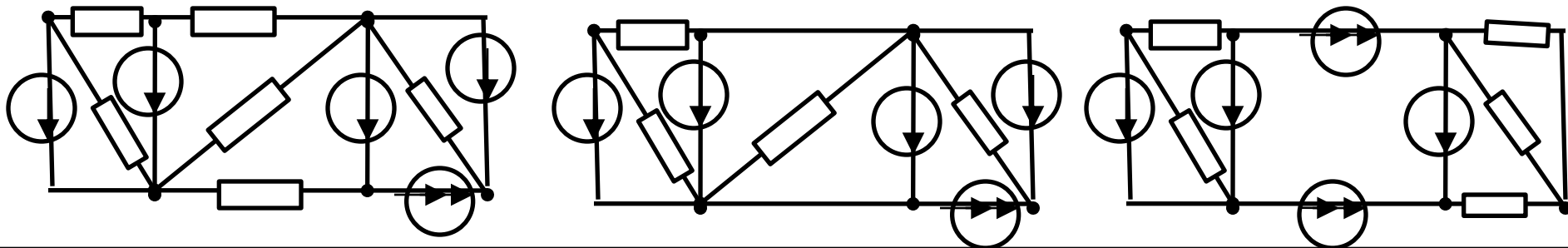
- Exemple de circuite prost formulate (cu surse in exces):**

Surse ideale de tensiune conecate in paralel: nu au solutie daca t.e.m. sunt diferite si au curenti nedeterminati, daca t.e.m. sunt egale, Conductorul perfect (sursa cu $e=0$) nu poate fi conectat in paralel cu surse de t.e.m.

Surse ideale de curent conecate in serie: nu au solutie daca c.e.m. sunt diferite si au tensiuni nedeterminate, daca c.e.m. sunt egale. Izolatorul perfect (sursa cu $j=0$) nu poate fi conectat in serie cu surse de c.e.m.



- Verificati daca circuitele din figura au arbore normal**



6.4. Metoda lui Kirchhoff pentru analiza circuitelor electrice

• Cazul laturilor controlate in curenti

Necunoscute principale: L curenti din laturi. Se rezolva sistemul de L ecuatii:

$$\text{K I: } \sum_{k \in (n)}^A i_k = 0, n = 1, 2, \dots, (N-1) \quad \text{K II: } \sum_{k \in [b]}^A \mathcal{Z}_k i_k = \sum_{k \in [b]}^A e_k, b = 1, 2, \dots, L-N+1$$

KI se aplica pe toate nodurile fara unu. K II se aplica pe L-N+1 bucle independente. Aceasta este **forma particulara a ecuatiei lui Kirchhoff** pentru bucle, cu enuntul: *suma algebrica a caderilor de tensiune pe laturile unei bucle este egala cu suma algebrica a t.e.m. din bucla.* Ea rezulta din relatia generala Kirchhoff, prin exprimarea tensiunilor in functie de curenti, conform ecuatiile constitutive. Forma matriciala a ecuatiilor acestei metode:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}; \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}; \mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i} - \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{Z}\mathbf{i} = \mathbf{B}\mathbf{e} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B}\mathbf{Z} \end{bmatrix} \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\mathbf{e} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B}\mathbf{Z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

Daca circuitul contine si surse ideale de curent, tensiunile lor sunt necunoscute – u_k , in schimb sunt cunoscuti curentii j_k prin ele, deci solutia are aceeasi dim.:

$$\sum_{k \in (n)}^A i_k = \sum_{k \in (n)}^A j_k, n=1:N-1; \sum_{k \in [b]}^A \mathcal{Z}_k i_k + \sum_{k \in [b]}^A u_k = \sum_{k \in [b]}^A e_k, b=1:L-N+1; \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'\mathbf{Z} & \mathbf{B}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{B}\mathbf{e} \end{bmatrix}$$

- Cazul laturilor controlate in tensiuni (dualul cazului anterior)**

Necunoscute principale: L tensiuni din laturi. Se rezolva sistemul de L ecuatii:

$$\text{K I: } \sum_{k \in (n)}^A y_k u_k = - \sum_{k \in (n)}^A j_k, \quad n = 1, 2, \dots, (N-1) \quad \text{K II: } \sum_{k \in [b]}^A u_k = 0, \quad b = 1, 2, \dots, L - N + 1$$

De aceasta data se foloseste **forma particulara a ecuatiei lui Kirchhoff** pentru noduri, cu enuntul: *suma algebrica a curentilor din laturile pasive care concura la un nod plus c.e.m. injectati in nod este nula.*

Forma matriciala a ecuatiilor acestei metode:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}; \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}; \mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{u} = -\mathbf{A}\mathbf{j} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}\mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}\mathbf{j} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Dupa rezolvarea sistemului de ecuatii se foloseste solutia \mathbf{u} , pentru a calcula curentii din laturi cu relatii constitutive:

$$i_k = y_k u_k + j_k, k = 1, \dots, L$$

- Cazul hibrid: laturi controlate in curent si in tensiune**

La ecuatiile constitutive se adauga relatiile Kirchhoff:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z} & 0 \\ 0 & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{e} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathcal{H}\mathbf{x} + \mathbf{z}$$

$$\mathbf{i}_a = \mathbf{D}^T \mathbf{i}_c, \mathbf{u}_c = -\mathbf{D}\mathbf{u}_a \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

Eliminad vectorul \mathbf{x} , se obtine sistemul de L ecuatii cu L necunoscute: tensiunile din ramuri si curentii coardelor. Fiecare latura sursa ideala scade cu o unitate numarul de necunoscute.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z} & 0 \\ 0 & \mathcal{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{e} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathcal{H}\mathcal{D}\mathbf{y} + \mathbf{z} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{I} - \mathcal{H}\mathcal{D})\mathbf{y} = \mathbf{z}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{z}$$

Circuitele liniare de c.c./c.a. au matricea \mathbf{K} de numere reale/complexe, deci conditia de buna formulare este: $\det(\mathbf{K}) = \det(\mathbf{I} - \mathcal{H}\mathcal{D}) \neq 0$

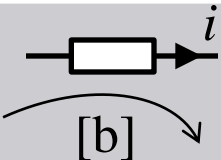
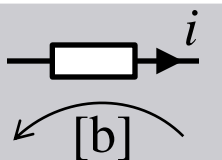
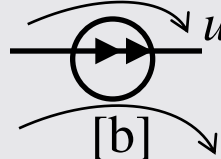
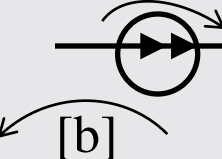
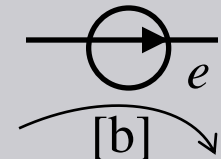
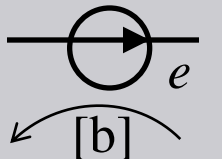
Algoritmul de analiza manuala prin metoda Kirchhoff

1. Se alege un arbore care contine toate laturile surse-ideale de tensiune si nici o sursa ideal de curent.
2. Se aleg orientarile si se noteaza necunoscutele principale: tensiunile din arbore si curentii din coarbore
3. Pentru fiecare coarda care nu este sursa ideala de curent se scrie ecuatiile constitutive, considerand elementul controlat in tensiunea coardei, care se exprima ca suma algebrica a tensiunilor din ramurile buclei generate de coarda respectiva.
4. Pentru fiecare ramura care nu este sursa ideala de tensiune se scrie ecuatiile constitutive, considerand elementul controlat in curentul ramurii, care se exprima ca suma algebrica a curentilor din coardele sectiunii generate de ramura respectiva.
5. Se rezolva sistemul de $L - N_e - N_j$ ecuatii cu tot atatea necunoscute.
6. Se determina tensiunile coardelor, folosind relatiile Kirchhoff pe buclele fundamentale generate de coardele respective.
7. Se determina curentii din ramuri, folosind relatiile Kirchhoff pe sectiunile fundamentale din care face parte ramurile respective.
8. Se verifica bilantul puterilor.

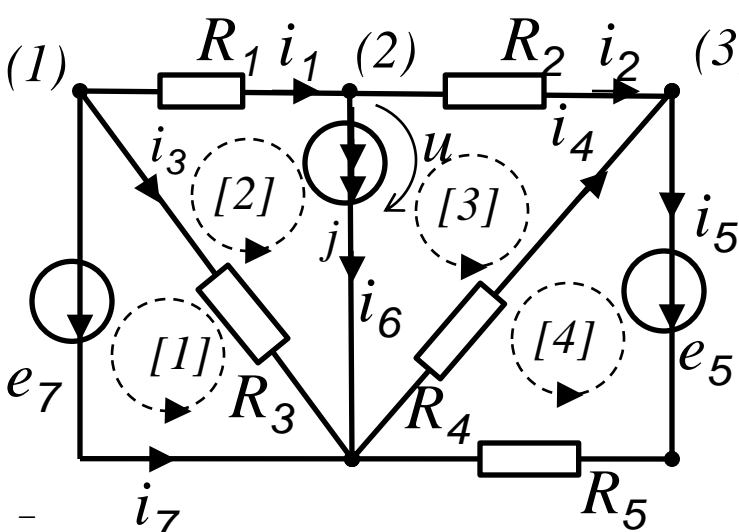
- Forma particulara a ecuatiei Kirchhof pentru bucle in c.c., c.a. si tr.
Regulile de semn.

$$\sum_{k \in [b]} \mathcal{Z}_k i_k + \sum_{k \in [b]} u_k = \sum_{k \in [b]} e_k \Rightarrow c.c.: \sum_{k \in [b]} R_k I_k + \sum_{k \in [b]} U_k = \sum_{k \in [b]} E_k;$$

$$c.a.: \sum_{k \in [b]} \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{k \in [b]} \underline{U}_k = \sum_{k \in [b]} \underline{E}_k; tr.: \sum_{k \in [b]} Z_k I_k + \sum_{k \in [b]} U_k = \sum_{k \in [b]} E_k$$

Element	+	-
Caderea de tensiune		
Tensiunea sursei ideale de curent		
T.e.m. sursei ideale de curent		

• Analiza circuitelor folosind metoda Kirchhoff



$$(1) : i_1 + i_3 + i_7 = 0$$

$$(2) : -i_1 + i_6 + i_2 = 0$$

$$(3) : -i_2 - i_4 + i_5 = 0$$

$$[1] : -R_3 i_3 = e_7 \Rightarrow$$

$$[2] : -R_1 i_1 + R_3 i_3 - u = 0$$

$$[3] : R_4 i_4 - R_2 i_2 + u = 0$$

$$[4] : -R_4 i_4 - R_5 i_5 = -e_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & R_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & -R_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ u \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \\ 0 \\ e_7 \\ 0 \\ 0 \\ -e_5 \end{bmatrix}$$

$$P_c = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_3 i_3^2 + R_4 i_4^2 + R_5 i_5^2; \quad P_g = i_5 e_5 + i_7 e_7 - u j; \quad i_6 = j$$

- **Metoda de generare a problemelor cu solutii intregi:** Desenati un circuit REJ bine formulat. Alegeti valori intregi arbitrare pentru tensiunile din ramuri si curenții din coarde. Completati grafurile de curent si tensiune si folosind ecuatiile constitutive determinati parametrii elementelor din circuit. Analizati apoi circuitul cu metoda lui Kirchhoff si verificati solutia prin bilantul puterilor si prin comparatie cu datele din cele doua grafuri.
- **Scriti codul MATLAB al metodei Kirchhoff pentru circuite cu laturi controlate in curent, tensiune si hibrid.**

6.5. Metoda curentilor ciclici (opt.)

- Se aplica in cazul laturilor controlate in curenti

Necunoscute principale: $L-N+1-N_j < L$ curenti de coarde, fara sursele de curent.

Ecuatiile se obtin pornind de la relatiile Kirchhoff scrise cu matricea \mathbf{B} in care substituim ecuatiile constitutive ale elementelor controlate in curent. Se obtine un sistem de $L-N+1$ ecuatii independente:

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c; \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}; \mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i} - \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{Z}\mathbf{i} - \mathbf{e}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{BZB}^T \mathbf{i}_c = \mathbf{B}\mathbf{e} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_c \mathbf{i}_c = \mathbf{e}_c \Rightarrow \mathbf{i}_c = \mathbf{Z}_c^{-1} \mathbf{e}_c$$

La circuite cu elemente dipolare, matricea sistemului de ecuatii numita *matricea impedantelor ciclice* are elementele:

$$\mathbf{Z}_c = \mathbf{BZB}^T$$

- diagonale: suma impedantelor laturilor care alcatuiesc bucla k :

$$z_{kk} = \sum_{l \in [k]} z_l$$

- nedigonale: suma algebrica a impedantelor laturilor ce apartin atat buclei k cat si buclei n . Ele se aduna, cand buclele au aceiasi orientare in latura comuna si se scad in caz contrar.

$$z_{kn} = z_{nk} = \sum_{\substack{l \in [k] \\ l \in [n]}} z_l$$

Termenii liberi sunt sumele t.e.m. din bucle: $e'_k = \sum_{l \in [k]} e_l$

Sursele ideale de curent j (aflate in coarde) impun valori ale unor curenti ciclici. Ecuatiile acestor curenti se elimina din sistem.

- Formele particulare ale ecuatiilor curentilor ciclici:

$$\underline{Z}_c \mathbf{i}_c = \mathbf{e}_c \quad \text{cu} \quad \underline{Z}_c = \mathbf{BZB}^T; \mathbf{e}_c = \mathbf{Be} \Rightarrow$$

$$c.c.: \mathbf{R}_c \mathbf{i}_c = \mathbf{e}_c \quad \text{cu} \quad \mathbf{R}_c = \mathbf{BRB}^T; \mathbf{e}_c = \mathbf{Be} \Rightarrow R_{jk} = \sum_{l \in [k],[j]}^A R_l; \quad e_j = \sum_{l \in [j]}^A e_l$$

$$SUCL: e_l = \rho_{lj} i_j = \rho_{lj} \sum_{j \in [b]}^A i_b \Rightarrow R_{jk} = \sum_{l \in [j],[k]}^A R_l + \sum_{l \in [j], m \in [k]}^A \rho_{lm}$$

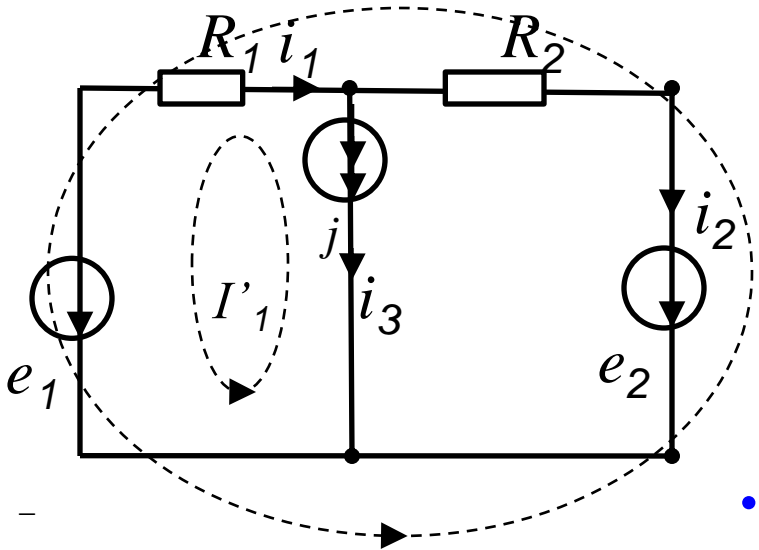
$$c.a.: \underline{\mathbf{Z}}_c \underline{\mathbf{I}}_c = \underline{\mathbf{E}}_c \quad \text{cu} \quad \underline{\mathbf{Z}}_c = \mathbf{BZB}^T; \underline{\mathbf{E}}_c = \mathbf{BE} \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_{ik} = \sum_{l \in [i],[k]}^A \underline{Z}_l + \sum_{l \in [i], m \in [k]}^A j\omega L_{lm}; \quad \underline{E}_k = \sum_{l \in [k]}^A \underline{E}_l$$

Impedantele mutuale se aduna cand curentii ciclici au aceeasi pozitie fata de bornele lor polarizate (ambii ies sau ambii intra) si se scad in caz contrar.

<http://automation.ucv.ro/Romana/cursuri/beAB12/4%20Metode%20matriceale.pdf>

• **Exemplu in c.c. :**



$$R_{11}I'_1 + R_{12}I'_2 = E'_1 \Rightarrow R_{11} = \infty \Rightarrow I'_1 = -j$$

$$R_{21}I'_1 + R_{22}I'_2 = E'_2 \Rightarrow -R_1j + (R_1 + R_2)I'_2 = e_1 - e_2$$

$$R_{21} = R_1; R_{22} = R_1 + R_2; E'_2 = e_1 - e_2$$

$$\Rightarrow I'_2 = (e_1 - e_2 + R_1j)/(R_1 + R_2)$$

$$i_1 = -I'_1 - I'_2; i_2 = -I'_2; i_3 = -I'_1$$

• **Exemplu de c.a. :**

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}'_2 = \underline{E}'_1 \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}'_2 = \underline{E}'_2 \end{cases}$$

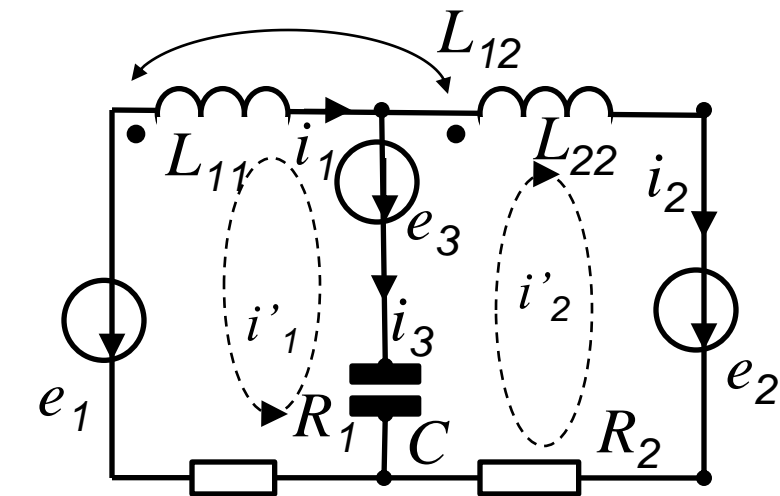
$$\underline{Z}_{11} = R_1 + 1/(j\omega C) + j\omega L_{11};$$

$$\underline{Z}_{22} = R_2 + 1/(j\omega C) + j\omega L_{22};$$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12} = 1/(j\omega C) - j\omega L_{12};$$

$$\underline{E}'_1 = \underline{E}_1 - \underline{E}_3; \underline{E}'_2 = \underline{E}_2 - \underline{E}_3$$

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}'_1; \underline{I}_2 = \underline{I}'_2; \underline{I}_3 = -\underline{I}'_1 - \underline{I}'_2$$



6.6 Metoda nodala

- **In cazul laturilor controlate in tensiuni:** Necunoscute principale: $N-1 < L$ – potentialele nodurilor (usor de vizualizat cu osciloscopul !)

Ecuatiile se obtin pornind de la relatiile Kirchhoff scrise cu matricea A in care substituim ecuatiile constitutive ale elementelor controlate in tensiuni. Se obtine un sistem de $N-1$ ecuatii independente:

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}; \mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}; \mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j}) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{v} = -\mathbf{A} \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{Y}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{Y}_n^{-1} \mathbf{j}_n$$

La circuite cu elemente dipolare, matricea sistemului de ecuatii numita *matricea admitantelor nodale* are elementele:

- diagonale: suma admitantelor laturilor concurente la nodul k :
- nediagonale: minus admitantele laturilor dintre k si n

Termenii liberi sunt injectiile de curent c.e.m. in nod:

$$j'_k = \sum_{l \in (k)} j_l$$

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T$$

$$y_{kk} = \sum_{l \in (k)} y_l$$

$$y_{kn} = y_{nk} = - \sum_{\substack{l \in (k) \\ l \in (n)}} y_l$$

Sursele ideale de tensiune cu un terminal la masa impun potentialele unor noduri. Ecuatiile acestor noduri se elimina din sistem. Celelalte surse ideale de tensiune se pasivizeaza cu ajutorul teoremei lui Vaschy \rightarrow $N-1-N_e$ nec.

Metoda tensiunilor de ramuri (opt.)

- In cazul laturilor controlate in tensiuni

Necunoscute principale: $N-1-N_e < L$ – tensiunile ramurilor fara surse ideale e.

Ecuatiile se obtin pornind de la relatiile Kirchhoff scrise cu matricea C in care substituim ecuatiile constitutive ale elementelor controlate in tensiuni. Se obtine un sistem de $N-1$ ecuatii independente:

$$\mathbf{C}\mathbf{i} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{u}_a; \mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{Y}\mathbf{C}^T \mathbf{u}_a + \mathbf{j}) = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{C}^T \mathbf{u}_a = -\mathbf{C}\mathbf{j}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{Y}_s \mathbf{u}_a = \mathbf{j}_s \Rightarrow \mathbf{u}_a = \mathbf{Y}_s^{-1} \mathbf{j}_s, \text{ cu } \mathbf{Y}_s = \mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{C}^T; \mathbf{j}_s = -\mathbf{C}\mathbf{j}$$

La circuite cu elemente dipolare, matricea sistemului de ecuatii numita *matricea admitantelor sectiunilor* are elementele:

$$\mathbf{Y}_s = \mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{C}^T$$

$$y_{kk} = \sum_{l \in (k)} y_l$$

- diagonale: suma admitantelor laturilor din sectiunea k :

- nediagonale: minus admitantele laturilor dintre k si n

$$y_{kn} = y_{nk} = - \sum_{\substack{l \in (k) \\ l \in (n)}} y_l$$

Termenii liberi sunt injectiile de curent in sectiune:

$$j'_k = \sum_{l \in (k)} j_l$$

Sursele ideale de tensiune impun tensiuni in ramuri, rmanand doar $N-1-N_e$ necunoscute. Ecuatiile acestor ramuri se elimina din sistem ramanad doar $N-1-N_e$ ecuatii. Metoda este duala metodei curentilor ciclici.

- **Formele particulare ale ecuatiilor nodale** (SRT se transfigureaza in SRC):

$$\underline{Y}_n \underline{v} = \underline{j}_n \quad \text{cu} \quad \underline{Y}_n = \mathbf{A} \underline{Y} \mathbf{A}^T; \underline{j}_n = -\mathbf{A} \underline{j} \Rightarrow$$

$$\text{c.c.: } \mathbf{G}_n \underline{v} = \underline{j}_n \quad \text{cu} \quad \mathbf{G}_n = \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^T; \underline{j}_n = -\mathbf{A} \underline{j} \Rightarrow G_{jk} = - \sum_{l \in (j), (k)}^A G_l; G_{kk} = \sum_{l \in (k)}^A G_l; j'_k = \sum_{l \in (k)}^A j_l$$

$$\text{SICU: } j_l = \gamma_{lj} u_j = \gamma_{lj} (v_{ni(j)} - v_{nf(j)}) \Rightarrow G_{jk} = - \sum_{l \in (j), (k)}^A G_l + \sum_{l \in (j), m \in (k)}^A \gamma_{lm}$$

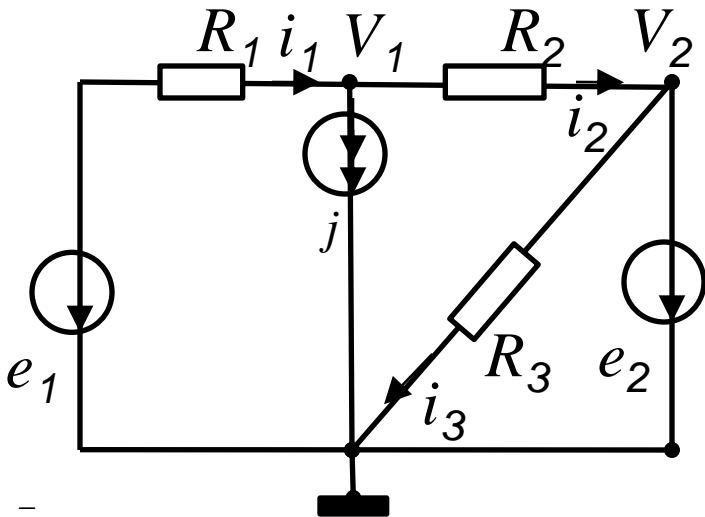
$$\text{c.a.: } \underline{Y}_n \underline{V} = \underline{J}_n \quad \text{cu} \quad \underline{Y}_n = \mathbf{A} \underline{Y} \mathbf{A}^T; \underline{J}_n = -\mathbf{A} \underline{J} \Rightarrow Y_{ik} = - \sum_{l \in (i), (k)}^A Y_l; Y_{kk} = \sum_{l \in (k)}^A Y_l; J'_k = \sum_{l \in (k)}^A J_l$$

Daca circuitul contine laturi sursa ideala de tensiune, unul din nodurile lor se alege ca nod de masa (referinta potentialului).

Marele avantaj al tehnicii nodale: termenii din sistem au semn cunoscut, independent de orientarea curentilor sau tensiunilor: sunt pozitivi pe diagonala si cu minus cei nediagonali (nu este necesara atentie speciala la stabilirea semnului, deci riscurile de eroare scad).

- Definiti o **clasa de obiecte ce reprezinta circuitele** RE. Extindeti apoi clasa.

Exemple de aplicare a tehnicii nodale:



$$\begin{cases} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 = J'_1 \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 = J'_2 \end{cases}$$

$$G_{11} = 1/R_1 + 1/R_2; G_{12} = -1/R_2; J'_1 = -e_1/R_1 - j;$$

$$G_{22} = \infty \Rightarrow V_2 = -e_2 \Rightarrow$$

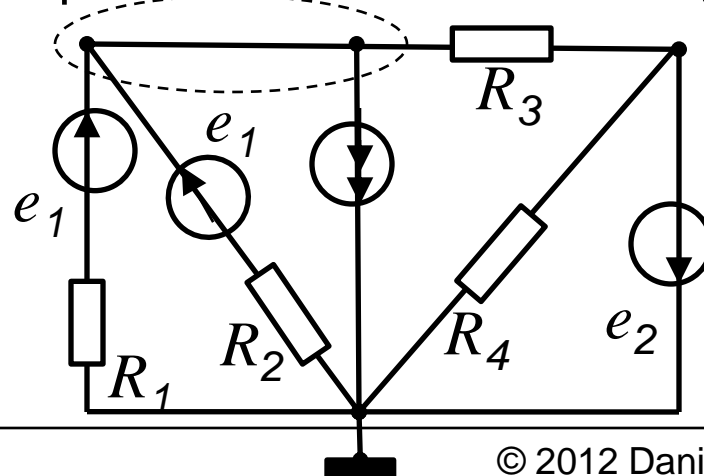
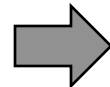
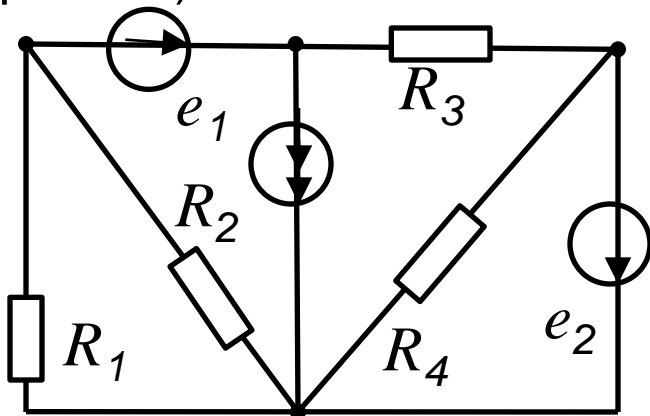
$$(1/R_1 + 1/R_2)V_1 + 1/R_2 + e_2 = -e_1/R_1 - j \Rightarrow$$

$$V_1 = (-1/R_2 - e_2 - e_1/R_1 - j)/(1/R_1 + 1/R_2);$$

$$V_1 = -R_1 i_1 - e_1 \Rightarrow i_1 = (-V_1 - e_1)/R_1; i_2 = (V_1 - V_2)/R_2; i_3 = V_2/R_3$$

Eliminarea sursei ideale de tensiune cu teorema lui Vaschy:

(pseudo)nodurile incercuite au acelasi potential – formeaza un singur nod!



- Circuit de c.c. analizat nodal in MATLAB:**

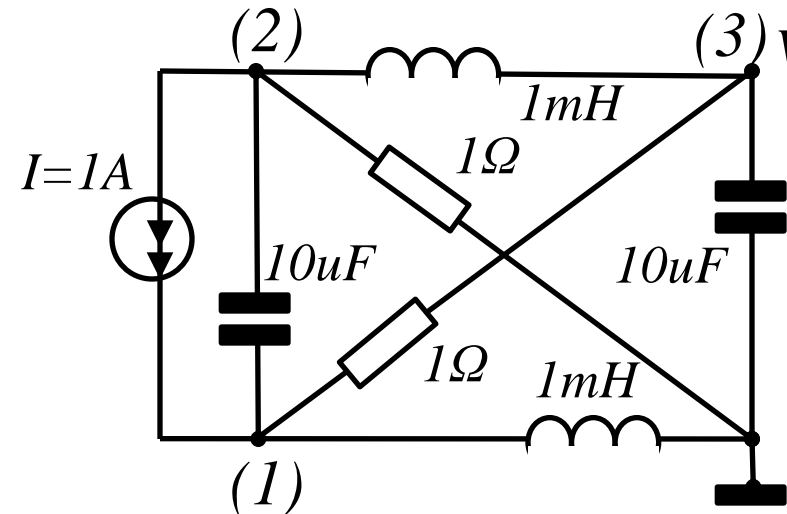
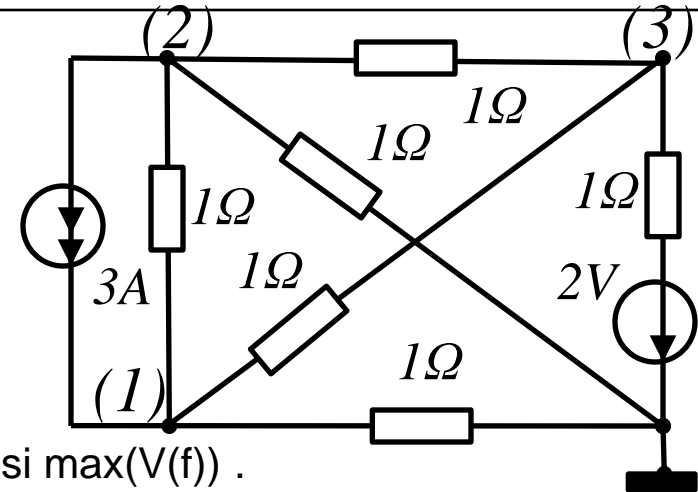
```
>> Gn=[3, -1, -1;...
-1, 3, -1;...
-1 -1, 3];
>> Jn=[3, -3, -2]';
>> Vn=Gn\Jn
Vn = 0.2500 -1.2500 -1.0000
```

- Circuit de c.a. analizat nodal in MATLAB:**

V in functie de $f=(100-10k)$ Hz. Gasiti frecventa de rezonanta si $\max(V(f))$.

```
fmin=100; fmax=10e3; N=100;
f=fmin+(fmax-fmin)*(1:N)/N; V=f;
for it=1:N w=2*pi*f(it);
YC=j*w*1e-5; YL=-j*1e3/w;
Yn=[1+YC+YL, -YC, -1;
-YC, 1+YC+YL, -YL;
-1, -YL, 1+YC+YL];
Jn=[1, -1, 0]';
Vn=Yn\Jn; V(it)=abs(Vn(3));
end
```

```
plot(f,V); grid; http://an.lmn.pub.ro/lab/an\_2011\_2012.pdf
```



- **Metoda nodala modificata (MNA = Modified Nodal Approach)**

Se aplica analizei circuitelor care contin elemente incompatibile cu tehnica nodala clasica. Se rezolva un sistem extins in care intervin in plus urmatoarele necunoscute (grupate in vectorul curentilor \mathbf{i}_m):

- curenții din sursele ideale de tensiune;
- curenții portilor de iesire la SUCU;
- curenții ambelor porti la SUCI
- curenții portilor de intrate (de comanda) la SICI;
- curenții bobinelor cuplate magnetic;
- curenții rezistoarelor liniare sau neliniare controlate în curent.

Ecuatiile MNA au forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_n & \mathbf{B}_m \\ \mathbf{A}_m & \mathbf{Z}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_n \\ \mathbf{e}_m \end{bmatrix}$$

provenita din forma particulara a primelor ecuatii Kirchhoff la care se adauga ecuatiile constitutive in care intervin curentii mentionati anterior.

Se constata ca matricea sistemului MNA este de fapt matricea hibrida.

<http://automation.ucv.ro/Romana/cursuri/beAB12/4%20Metode%20matriceale.pdf>

- Contributiile elementelor la matricea nodala

Matricea	Z	SICU	SRC	SRT
Y:	$\begin{matrix} ni & nf \\ ni \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z \\ -1/Z & 1/Z \end{bmatrix} \end{matrix}$	$\begin{matrix} ni(j) & nf(j) \\ ni(i) \begin{bmatrix} -\gamma_{ij} & +\gamma_{ij} \\ +\gamma_{ij} & -\gamma_{ij} \end{bmatrix} \\ nf(i) \end{matrix}$	$\begin{matrix} ni & nf \\ ni \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z \\ -1/Z & 1/Z \end{bmatrix} \\ nf \end{matrix}$	$\begin{matrix} ni & nf \\ ni \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z \\ -1/Z & 1/Z \end{bmatrix} \\ nf \end{matrix}$
J':	0	0	$\begin{matrix} ni \begin{bmatrix} -J \\ J \end{bmatrix} \\ nf \end{matrix}$	$\begin{matrix} ni \begin{bmatrix} -E/Z \\ E/Z \end{bmatrix} \\ nf \end{matrix}$

SIC se trateaza ca o sursa reala (SRC) cu admitanta nula.

Determinati ce contributii aduc la matricele A,B, Z, E, J elemntele:

- Sursa ideala de tensiune (SIT)
- Sursa de tensiune comandata iliniar in tensiune: SUCU
- Sursa de tensiune comandata liniar in curent: SUCI
- Sursa de curent comandata liniar in curent: SICI
- Perechea d ebobine cuplate: L, M

- Contributiile elementelor la matricea MNA

Matricea	SIT	SUCU	SUCI	SICI	Cuplaje
Am:	$ni(l) \quad nf(l)$ $\begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix}$	$ni(l) \quad nf(l) \quad ni(k) \quad nf(k)$ $\begin{bmatrix} -\alpha_{lk} & \alpha_{lk} & +1 & -1 \end{bmatrix}$	$ni - nf(l) \quad ni - nf(k)$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $l \quad k$	$ni(k) \quad nf(k)$ $\begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix}$ k	$ni - nf(l) \quad ni - nf(k)$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $l \quad k$
Bm:	$ni(l) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $nf(l) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$	$ni(l) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $nf(l) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$	$ni(l) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $nf(l) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$ $ni(k) \begin{bmatrix} +1 \end{bmatrix}$ $nf(k) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$	$ni(l) \begin{bmatrix} -\beta_{lk} \\ \beta_{lk} \end{bmatrix}$ $nf(l) \begin{bmatrix} \beta_{lk} \end{bmatrix}$ $ni(k) \begin{bmatrix} +1 \end{bmatrix}$ $nf(k) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$	$ni(l) \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $nf(l) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$ $ni(k) \begin{bmatrix} +1 \end{bmatrix}$ $nf(k) \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$
Zm:	0	0	$l \quad k$ $l \begin{bmatrix} 0 & z_{lk} \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	$l \quad k$ $l \begin{bmatrix} -sL_{ll} & -sL_{lk} \end{bmatrix}$ $k \begin{bmatrix} -sL_{kl} & -sL_{kk} \end{bmatrix}$
Em:	$-e_l$	0	0	0	0
Im:	i_l	i_l	$\begin{bmatrix} i_l \\ i_k \end{bmatrix}$	i_k	$\begin{bmatrix} i_l \\ i_k \end{bmatrix}$

- Scrieti o **functie MATLAB dedicata analizei nodale** a unui circuit de c.a. cu elemente dipolare liniare. Functia se poate folosi si la analiza de c.c., cand partile imaginare vor fi nule. Extindeti pentru surse comandate.
- Codul se bazeaza pe relatiiile: $\underline{V} = \underline{Y}_n^{-1} \underline{J}_n$ cu $\underline{Y}_n = \underline{A} \underline{Y} \underline{A}^T$; $\underline{J}_n = -\underline{A} \underline{J} \Rightarrow$
- Vom considera datele de intrare:
 - Numarul de laturi L, iar pentru fiecare latura $k=1:L$, presupusa sursa reala de tensiune si/sau curent se dau: nodul initial $ni(k)$, nodul final $nf(k)$, impedanta $Z(k)$, curentul electromotor $J(k)$ si tensiunea electromotoare $E(k)$ reprezentate in complex.
- Solutia (datele de iesire din functie) va fi: vectorul potentialelor nodurilor si vectorul curentilor prin impedante.
- Scrieti apoi o functie care **reprezinta grafic modul in care variaza potentialul unui nod** dintr-un circuit RCLM oarecare in functie de frecventa.
- Dezvoltati un program de **analiza simbolica in frecventa** a unui circuit RLC de c.a. Semnalele vor fi reprezentate de coeficientii polinoameleor din functiile rationale de pulsatie s . Indicatie: operatiile aritmetice $+ - * /$ intre numere complexe vor fi substituite cu operatii intre functii rationale.

```
% daca (0) este nodul de masa:
for k=1:L
    Y(k,k)=1/Z(k);
    if (ni(k)~=0) A(ni(k),k)=1;
        Je(ni(k))=Je(ni(k))-J(k)-...
        E(k)/Z(k);
    end
    if (nf(k)~=0) A(nf(k),k)=-1;
        Je(nf(k))=Je(nf(k))+J(k)+...
        E(k)/Z(k);
    end
end
v=(A*Y*A')\Je; i=(A'*v+E)./Z;
Pc=Z'*(i.*i); Pg=E'*i-J'*A'*v;
```

6.7 Teorema liniaritatii. Superpozitia.

- Orice circuit multipolar alcatuit din elemente liniare este linear.

Demonstratia se bazeaza pe faptul ca ecuatiile (din metodele Kirchoff, curenti ciclici sau potentialele nodale) unui astfel de circuit sunt liniare si in consecinta solutia depinde linear de parametrii surselor – termeni liberi.

Daca notam cu \mathbf{x} solutia si cu \mathbf{y} sursele, atunci

$$\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{i}]^T; \mathbf{y} = [\mathbf{j}, \mathbf{e}]^T; \mathbf{x}_k = \mathcal{S}(\mathbf{y}_k) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathcal{S}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{y}_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathcal{S}(\mathbf{y}_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{x}_k$$

In care \mathcal{S} este operatorul linear de transfer surse-solutie, cu forma hibrida:

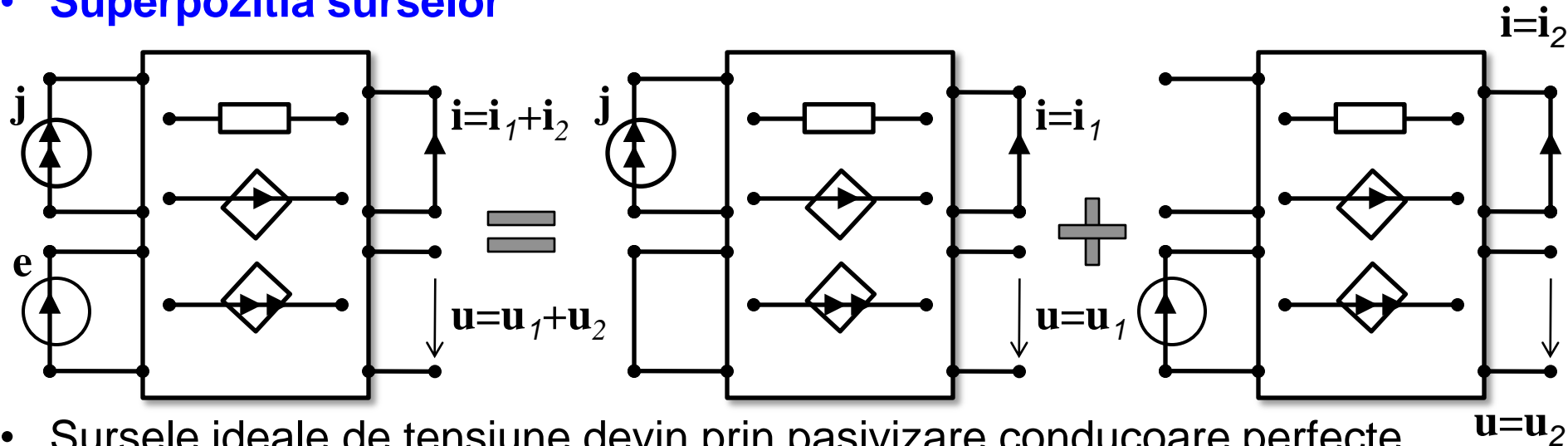
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{i}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{e} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \mathcal{S}(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x} = \mathcal{S}(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}' & \mathcal{A}' \\ \mathbf{B}' & \mathcal{Y}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{Z}'\mathbf{j} + \mathcal{A}'\mathbf{e} \\ \mathbf{i} = \mathbf{B}'\mathbf{j} + \mathcal{Y}'\mathbf{e} \end{cases}$$

Daca $n=2$ si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, atunci **superpozitia** surselor determina suprapunerea solutiilor:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{j}, \mathbf{e}]^T = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \Rightarrow \mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{i}]^T = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$$

• Superpozitia surselor

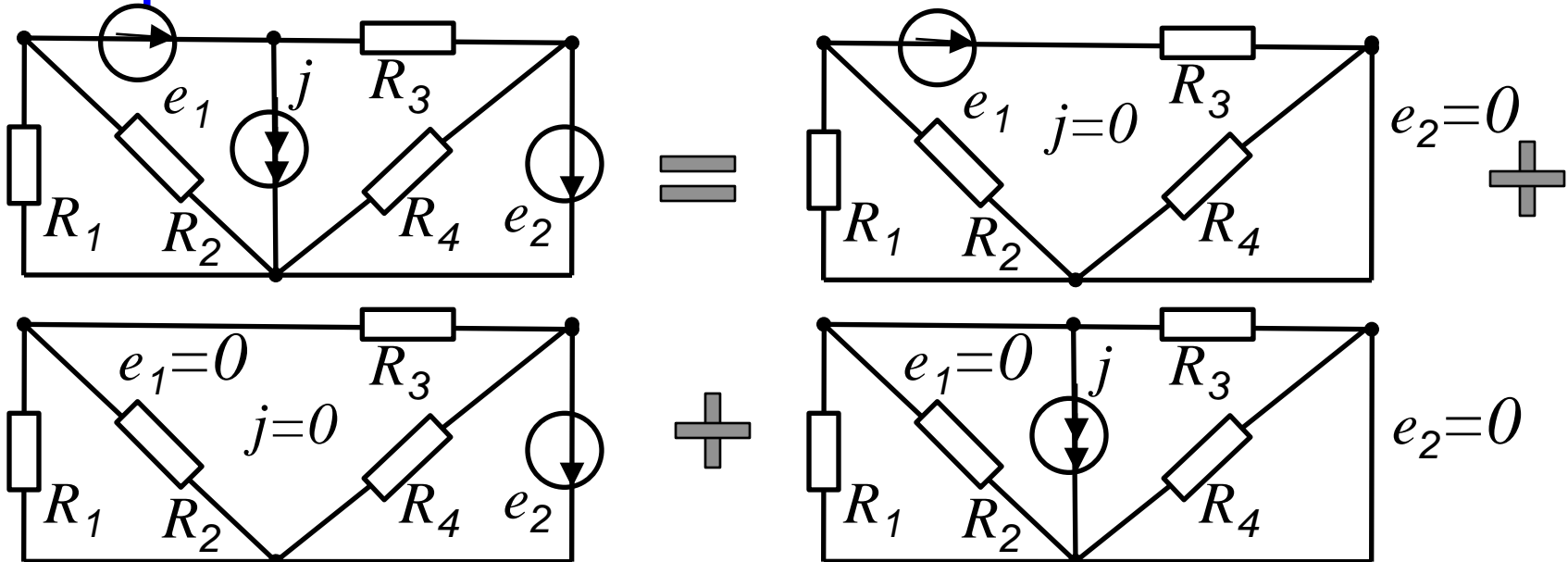


- Sursele ideale de tensiune devin prin pasivizare conductoare perfecte
- Sursele ideale de curent devin prin pasivizare izolatoare perfecte
- Superpozitia se aplica atat tensiunilor cat si curentilor din orice latura a unui circuit linear (numite semnalele de iesire sau raspunsurile circuitului)

• Forme ale teoremei superpozitiei-linearitatii:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{Z}'\mathbf{j} + \mathcal{A}'\mathbf{e} \\ \mathbf{i} = \mathcal{B}'\mathbf{j} + \mathcal{Y}'\mathbf{e} \end{cases} \Rightarrow c.c.: \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{R}'\mathbf{j} + \mathbf{A}'\mathbf{e} \\ \mathbf{i} = \mathbf{B}'\mathbf{j} + \mathbf{G}'\mathbf{e} \end{cases}; c.a.: \begin{cases} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}'\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{A}}'\underline{\mathbf{E}} \\ \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{B}}'\underline{\mathbf{J}} + \underline{\mathbf{Y}}'\underline{\mathbf{E}} \end{cases}; tr.: \begin{cases} \mathbf{U}(s) = \mathbf{Z}'\mathbf{J}(s) + \mathbf{A}'\mathbf{E}(s) \\ \mathbf{I}(s) = \mathbf{B}'\mathbf{J}(s) + \mathbf{Y}'\mathbf{E}(s) \end{cases}$$

- Exemple:**



- Superpozitia dintre solutia libera si cea forzata**

Conform teoremei surselor echivalente conditiilor initiale, orice element acumulator de energie cu conditii initiale nenule este echivalent cu elementul cu conditii initiale nule in serie cu o sursa ideal de tensiune sau in paralel cu o sursa independent de curent, care reprezinta conditiile initiale. Deci, in baza teoremei superpozitiei, semnalele tranzitorii din orice circuit RLCEj sunt suma dintre semnalele datorate surselor din circuit (raspunsul forzat) si semnalele datorate surselor de conditii initiale (raspunsul liber).

6.8 Teorema reciprocitatii (opt.)

- Orice circuit multipolar alcatuit din elemente liniare reciproce este reciproc.

Elemente reciproce (efectul intrarii asupra iesirii este similar cu cel invers) def.:

- Elementele controlate in curent care au matricea impedantelor simetrica
- Elementele controlate in tensiune care au matricea admitantelor simetrica
- Elementele controlate hibrid care au factorii de transfer in tensiune/curent antisimetrice: $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T, \mathbf{A} = -\mathbf{B}^T$

Sursele comandate si AOP nu sunt reciproce, dar bobinele cuplate sunt.

- Elementele dipolare sunt implicit reciproce. Doua excitatii arbitrare ale elementelor reciproce determina pseudoputeri egale: $\tilde{p}'_k = \tilde{p}''_k$

Deoarece matricea impedantelor ciclice si matricea admitantelor sectiunilor sunt simetrice, matricile de transfer surse-solutie vor fi si ele simetrice:

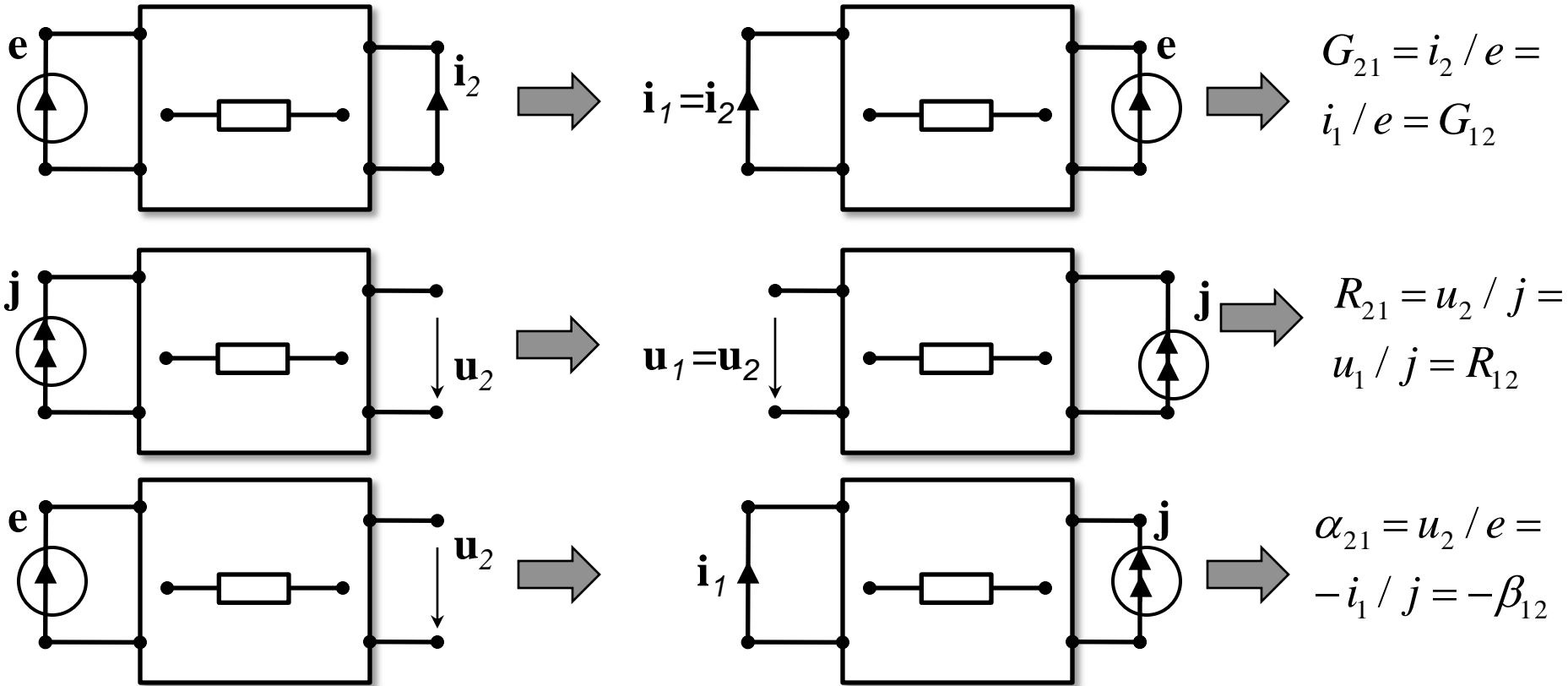
$$\mathbf{i} = \mathbf{B}^T \mathbf{i}_c = \mathbf{B}^T (\mathbf{BZB}^T)^{-1} \mathbf{e}_c = \mathbf{B}^T (\mathbf{BZB}^T)^{-1} \mathbf{B} \mathbf{e} = \mathbf{Y}' \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{Y}' = \mathbf{B}^T (\mathbf{BZB}^T)^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{Y}'^T$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{u}_a = \mathbf{C}^T (\mathbf{CYC}^T)^{-1} \mathbf{j}_s = \mathbf{C}^T (\mathbf{CYC}^T)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{j} = \mathbf{Z}' \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{Z}' = \mathbf{C}^T (\mathbf{CYC}^T)^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{Z}'^T$$

O demonstratie geniala: conf. Tellegen, pseudoputerile se conserva pe intreg circuitul, deci daca sunt egale pentru elemente vor fi egale si in total.

$$\tilde{p}'_k = \tilde{p}''_k \Rightarrow \sum \tilde{p}'_k = \sum \tilde{p}''_k \Rightarrow \tilde{p}' = \tilde{p}''$$

• Exemple de circuite reciproce:



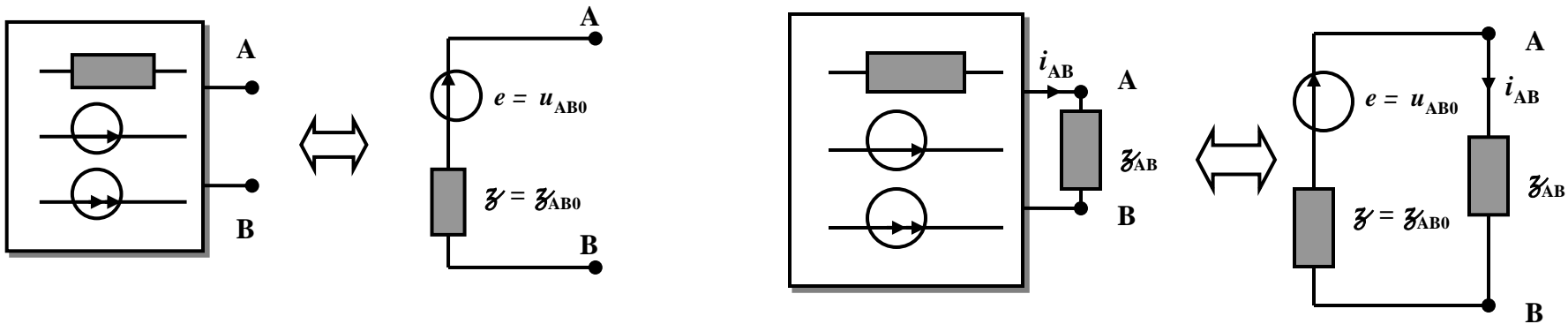
- Relatiile sunt valabile pentru orice combinatie de impedante (de ex. T, Π, Γ..).
- Prin mutarea sursei dintr-o latura in alta, efectul ei asupra celeilalte laturi ramane acelasi. Aratati ca circuitele de c.c. nu amplifica: $|\alpha_{21}| = |\beta_{12}| \leq 1$ Dar c.a?

6.9. Teoremele lui Thevenin si Norton. Generalizari.

- **Teorema lui Thevenin:** orice circuit controlabil in curent, format din elemente liniare, surse de curent si surse de tensiune este echivalent fata de doua borne A, B cu o sursa reala de tensiune care are t.e.m. egala cu tensiunea de mers in gol u_{AB0} a circuitului initial si impedanta interna egala cu impedanta echivalenta z_{AB0} a circuitului pasivizat, fata de bornele AB.
- **Relatia lui Thevenin** da expresia curentului din latura AB a circuitului:

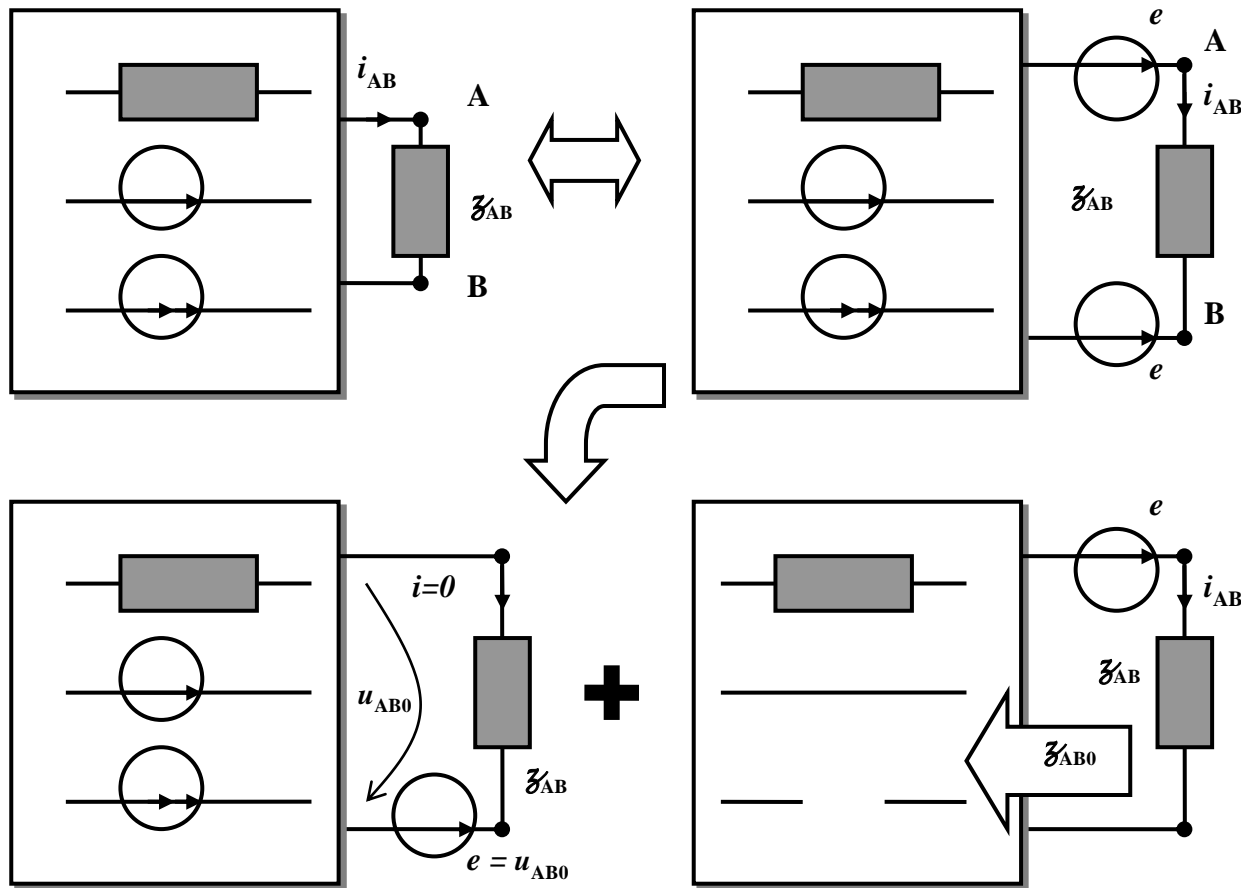
$$i_{AB} = (z_{AB} + z_{AB0})^{-1} u_{AB0} \Rightarrow$$

$$cc : I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}}; \quad ca : \underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB0}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{AB0}}; \quad tr : I_{AB}(s) = \frac{U_{AB0}(s)}{Z_{AB} + Z_{AB0}}$$



Demonstratia teoremei lui Thevenin

Se inseriaza in latura AB doua surse ideale de tensiune cu actiune si apoi se aplica superpozitia ca in figura. Daca e este u_{AB0} , atunci $i=0$ si in al doilea circuit curentul este dat de relatia lui Thevenin iar sursa reala de tensiune intre A-B este chiar generatorul Thevenin echivalent.



Teorema lui Norton

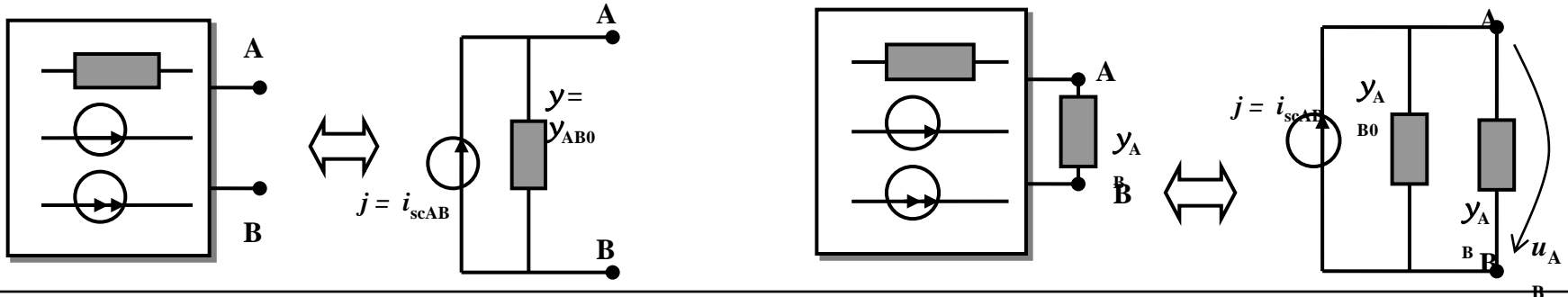
- **Teorema lui Norton (duala teoremei Thevenin):** orice circuit controlabil in teniune, format din elemente liniare, surse de curent si surse de tensiune este echivalent fata de doua borne A, B cu o sursa reala de curent care are c.e.m. egal cu valoarea curentului de scurtcircuit i_{scAB} a circuitului initial si admitanta interna egala cu admitanta echivalenta Y_{AB0} a circuitului pasivizat, fata de bornele AB.
- **Relatia lui Norton** da expresia tensiunii din latura AB a circuitului:

$$u_{AB} = (y_{AB} + y_{AB0})^{-1} i_{scAB} \Rightarrow$$

$$- \text{cc} : U_{AB} = \frac{I_{scAB}}{G_{AB} + G_{AB0}}; \quad \text{ca} : \underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{scAB}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{AB0}}; \quad \text{tr} : U_{AB}(s) = \frac{U_{scAB}(s)}{Y_{AB} + Y_{AB0}}$$

- Demonstratia prin dualitate sau prin teorema generatoarelor echivalente

$$y_{AB0} = (z_{AB0})^{-1}, i_{scAB} = y_{AB0} u_{AB0}$$

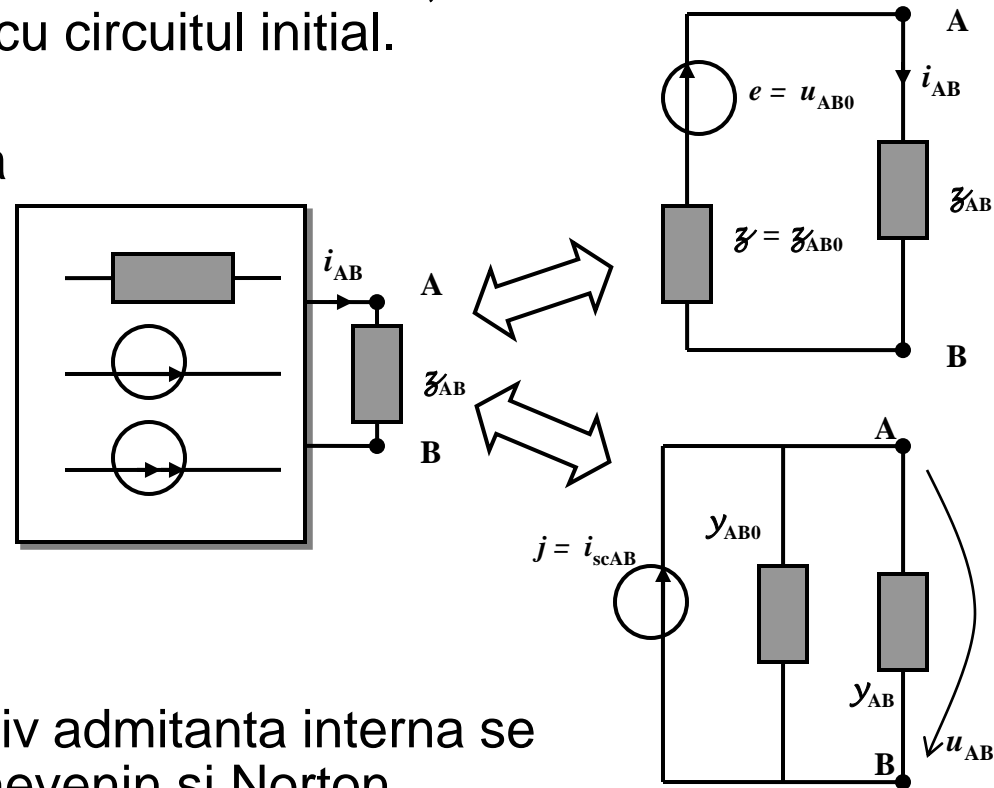


Teorema surselor echivalente Thevenin-Norton

Un circuit format din elemente liniare, surse de curent si surse de tensiune este echivalent fata de doua borne A, B ale sale cu o sursa reala de tensiune sau cu o sursa reala de curent. Daca exista ambele surse, atunci ele sunt echivalente intre ele si echivalente cu circuitul initial.

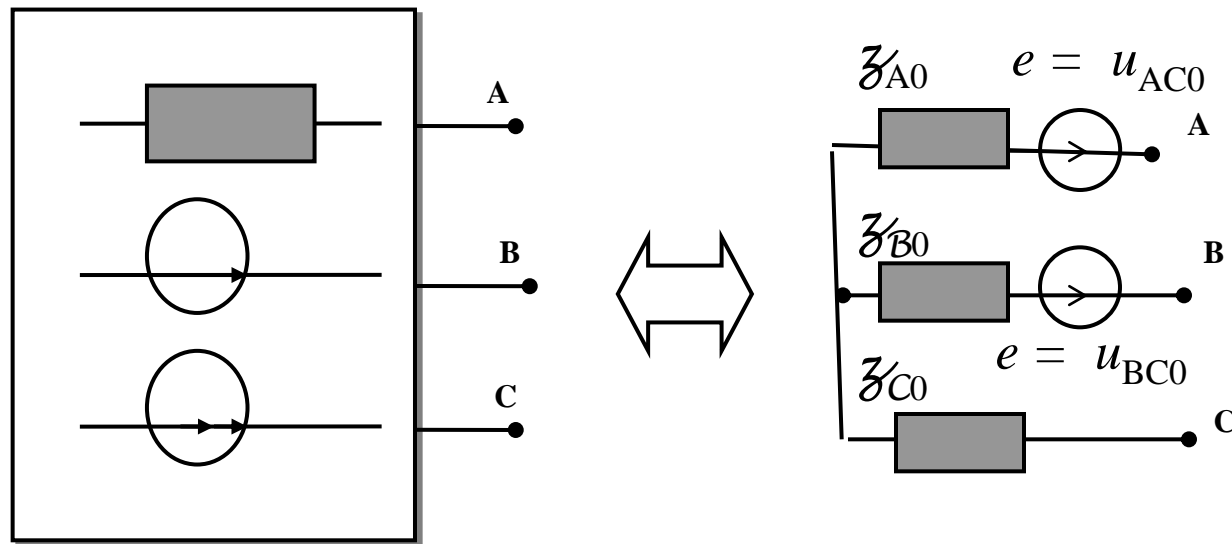
Sursa reala de tensiune are t.e.m. egala cu tensiunea de mers in gol a circuitului u_{AB0} si impedanta interna egala cu impedanta echivalenta Z_{AB0} a circuitului pasivizat, iar sursa reala de curent are c.e.m. egal cu curentul de scurtcircuit i_{scAB} al circuitului initial si admitanta interna egala cu admitanta echivalenta y_{AB0} a circuitului pasivizat.

In cazurile limita impedanta respectiv admitanta interna se anuleaza iar sursele echivalente Thevenin si Norton degeneraza in surse ideale de tensiune respectiv curent, surse care nu sunt echivalente intre ele.



Teorema lui Thevenin pentru circuite tripolare (opt.)

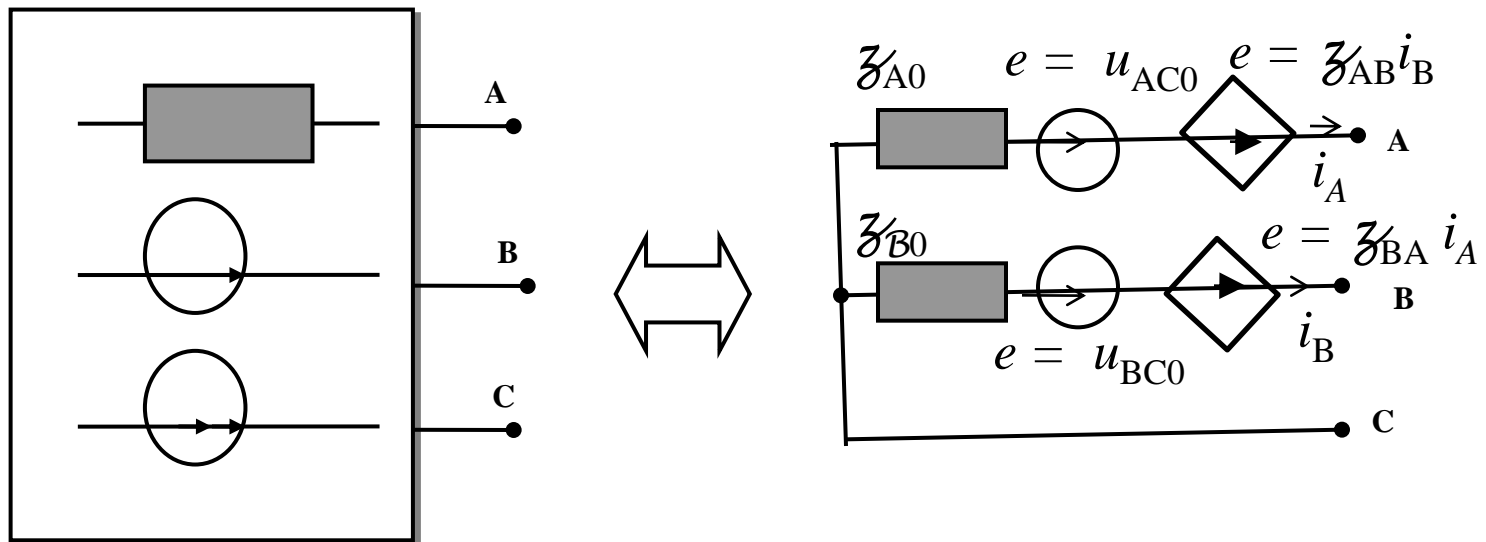
- **Cazul reciproc.** Un subcircuit controlabil in curent, format din elemente liniare si **reciproce**, surse independente de curent si/sau tensiune este echivalent fata de trei terminale A, B, C ale sale cu un circuit format din trei elemente dipolare liniare conectate in stea, doua dintre ele inseriate cu surse independente de tensiune. Sursele au t.e.m. astfel incat sa genereze tensiunile de mers in gol, iar cele trei impedante interne sunt echivalente cu cele ale circuitului pasivizat, fata de bornele ABC.



Demonstratia ca in cazul dipolar plus teorema de modelarea a multipolului.

Teorema lui Thevenin pentru circuite tripolare nereciproce (opt.)

- Cazul nereciproce** Un subcircuit format din **elemente liniare, reciproce sau nu** (inclusiv surse comandate liniar), surse independente de curent si/sau tensiune este echivalent fata de trei borne A, B, C ale sale cu un circuit format din doua elemente dipolare liniare conectate in V (cu nodul comun la unul din terminale), inseriate fiecare cu o sursa de tensiune controlata liniar in curent si cu o sursa independenta de tensiune. Sursele independente au t.e.m. astfel incat sa genereze tensiunile de mers in gol, iar cele patru elemente liniare au impedantele si transimpedantele astfel, incat sa fie echivalente cu cele ale circuitului pasivizat, fata de bornele ABC.



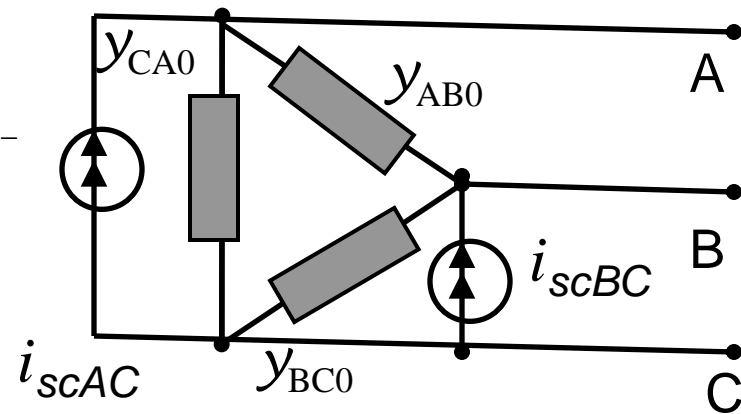
Demonstratia ca in cazul dipolar + teorema modelarii multipolului nereciproce.

Teorema lui Norton pentru circuite tripolare (opt.)

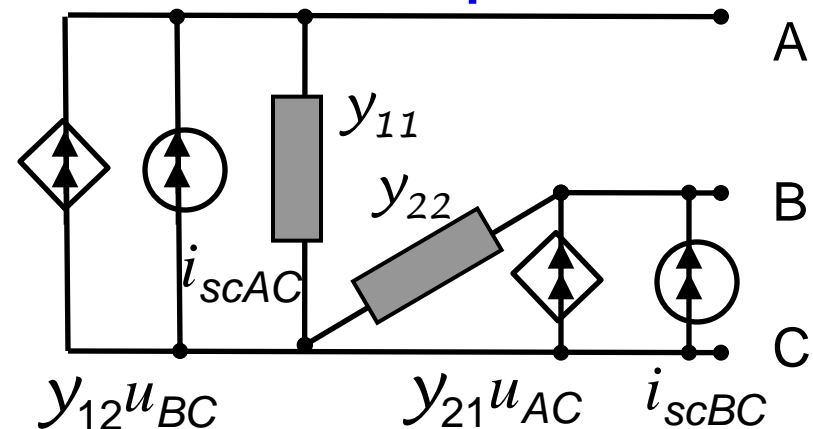
Este duala teoremei lui Thevenin pentru circuite tripolare. Conform ei, circuitele tripolare controlate in tensiune au schemele echivalente din figura.

Demonstratia se face prin dualitate sau in cazul reciproc prin transfigurari succesive: stea-trunghi, alunecarea surselor de tensiune prin Vaschy, generatoare echivalente tensiune-curent si in final Vaschy pentru surse de curent. Schema nereziproca se obtine din teorema liniaritatii-superpozitiei:

In cazul reciproc



In cazul nereziproca



$$\begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 + j_1, \text{ unde } j_1 = \mathcal{B}' \mathbf{j} + \mathcal{Y}' \mathbf{e} \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 + j_2, \text{ unde } j_2 = \mathcal{B}'' \mathbf{j} + \mathcal{Y}'' \mathbf{e} \end{cases}$$

$$H: \begin{cases} v_1 = \mathcal{Z}_{11}i_1 + \alpha_{12}v_2 + e_1, \text{ unde } e_1 = \mathcal{Z}' \mathbf{j} + \mathcal{A}' \mathbf{e} \\ i_2 = \beta_{21}i_1 + y_{22}v_2 + j_2, \text{ unde } j_2 = \mathcal{B}'' \mathbf{j} + \mathcal{Y}'' \mathbf{e} \end{cases}$$

In cazul hibrid (H), o latura are schema Thevenin si cealalta schema Norton.

Teorema lui Norton pentru circuite multipolare (opt.)

In cazul reciproc dintre cele doua teoreme, doar teorema lui Norton se poate generaliza pentru un multipol cu $n > 3$ terminale. **Enunt:** un subcircuit controlabil in tensiune, cu n terminale format din elemente liniare si reciproce, surse independente de curent si/sau tensiune este echivalent fata de terminalele sale cu un circuit format din $n(n-1)/2$ elemente dipolare conectate in poligon complet. Dintre acestea $(n-1)$ laturi si anume cele spre ultimul terminal sunt active, avand conectate in paralel surse independente de curent. Sursele au c.e.m. astfel incat sa genereze curentii de scurtcircuit, iar admitantele interne sunt egale cu cele ale circuitului pasivizat.

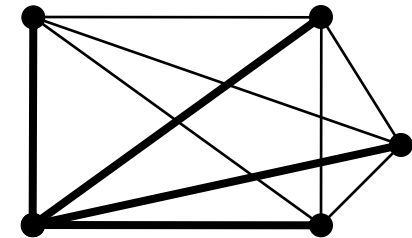
Alimentand cu tensiuni arbitrare, din teorema linearitatii-superpozitiei, rezulta:

$$i_k = i'_k + i''_k = i_{ksc} + \sum_{j=1}^{n-1} y'_{kj} e_j \Leftrightarrow \mathbf{i} = \mathbf{i}_{sc} + \mathbf{y}' \mathbf{e}, \quad \text{cu } \mathbf{e} = \mathbf{v}$$

Parametrii schemei Norton se obtin prin identificarea cu ecuatiile schemei:

$$j_k = i_{ksc}; \quad y_{kj} = y_{jk} = -y'_{kj}; \quad y_{k0} = \sum_{j=1}^{n-1} y'_{kj}$$

Topologia generatorului Norton reciproc multipolar (laturile ingrosate sunt active, iar restul sunt liniare):



Teorema afinitatii (opt.)

Consideram cazul general, al circuitelor alcatuite din surse ideale de curent sau tensiune si elemente liniare eventual nereciproce cu terminale controlate hibrid, care in general au **ecuatii constitutive de forma afina**:

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathcal{H}\mathbf{x} + \mathbf{z}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \mathbf{i}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_a \\ \mathbf{v}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_a \\ \mathbf{j}_b \end{bmatrix}$$

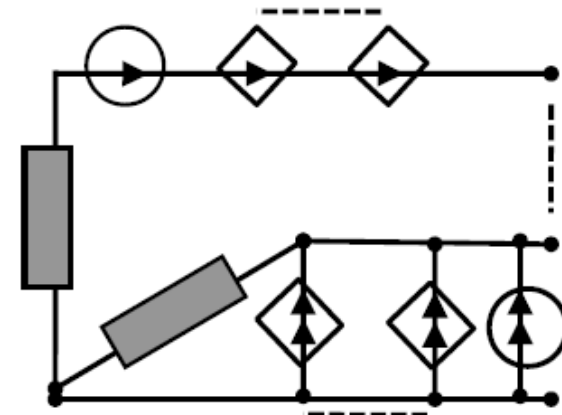
ce contin un termen liniar si altul constant \mathbf{z} . Aceste relatii generalizeaza relatiile lui Joubert (si implicit Ohm), pentru cazul circuitelor multipolare controlate hibrid.

Enuntul teoremei: subcircuitele alcatuite din elemente cu caracteristici afine ("liniare" cu surse independente) au la randul lor caracteristici afine (sunt echivalente cu surse reale, care au o parte liniara si una activa).

Conform teoremei liniaritatii-superpozitiei, subcircuitul controlat hibrid are urmatoarele relatii de tip afin intre marimile de excitatie si raspunsuri:

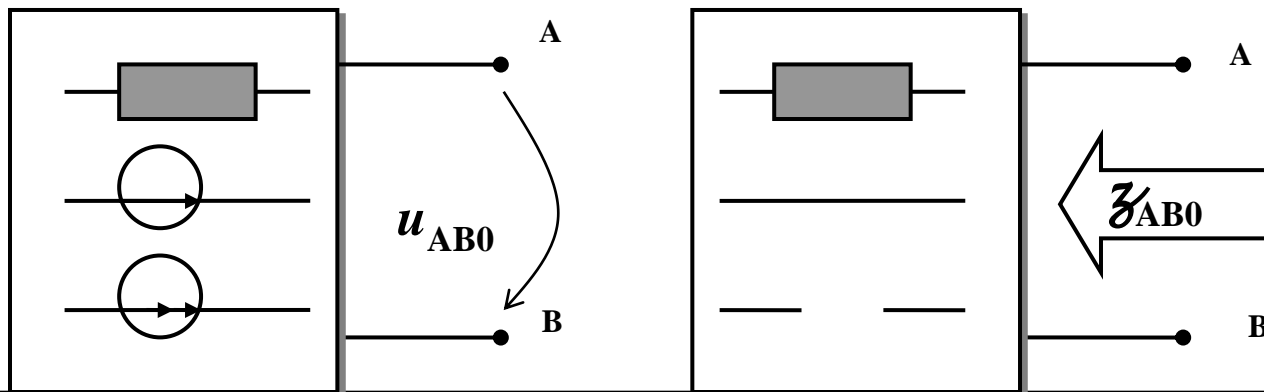
$$\boxed{\mathbf{y}' = \mathcal{H}'\mathbf{x}' + \mathbf{z}'} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_a \\ \mathbf{i}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}' & \mathcal{A}' \\ \mathcal{B}' & \mathbf{Y}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}'_a \\ \mathbf{v}'_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Z}'' & \mathcal{A}'' \\ \mathcal{B}'' & \mathbf{Y}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j}' \\ \mathbf{e}' \end{bmatrix}$$

Schema echivalenta de tip Thevenin-Norton este:

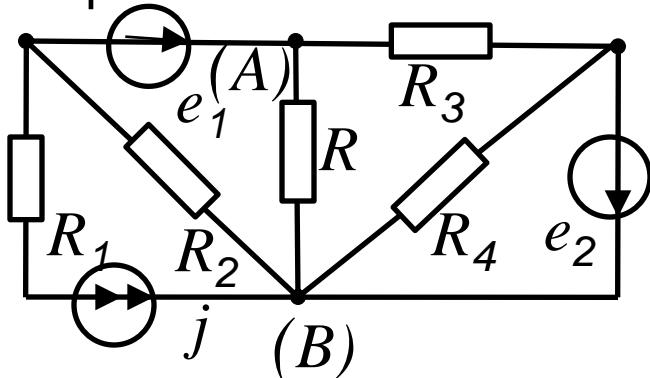


Etapele calculului curentului/tensiunii dintr-o latura pasiva de impedanta z_{AB} :

1. Se elimina latura de impedanta z_{AB} si se pasivizeaza apoi circuitul, inlocuind sursele ideale de tensiune cu conductoare perfecte, sursele ideale de curent cu izolatoare perfecte (in general, sursele se inlocuiesc cu impedantele lor interne) si apoi se calculeaza impedanta (admitanta) echivalenta z_{AB0} (y_{AB0}) a circuitului pasivizat fata de bornele A-B.
2. Daca exista z_{AB0} se calculeaza tensiunea de mers in gol u_{AB0} la bornele unui izolator perfect care inlocuieste z_{AB} . In caz contrar se calculeaza curentul de scurtcircuit i_{scAB} , inlocuind z_{AB} cu un conductor perfect.
3. Se alcatuieste sursa echivalenta Thevenin sau Norton, dupa cum circuitul pasivizat este controlabil in curent respectiv in tensiune. Se aplica apoi relatia Thevenin sau Norton.



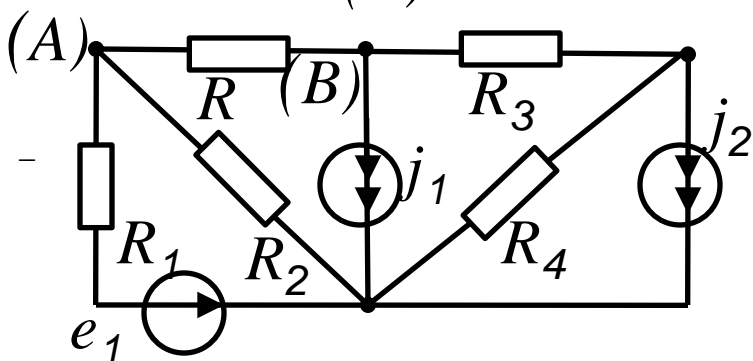
Exemple de surse echivalente Thevenin-Nortoni (explicati fara alte calcule)!:



$$i_{scAB} = e_1 / R_2 - j - e_2 / R_3$$

$$R_{AB0} = R_2 R_3 / (R_2 + R_3) \Rightarrow$$

$$U_{AB} = \frac{e_1 / R_2 - j - e_2 / R_3}{1 / R + 1 / R_{AB0}}; I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R}$$



$$u_{AB0} = -e_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_4 (j_1 + j_2) + R_3 j_1$$

$$R_{AB0} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3 + R_4 \Rightarrow$$

$$I_{AB} = \frac{u_{AB0}}{R + R_{AB0}}; U_{AB} = R I_{AB}$$

- **Teorema transferului maxim de putere:** Puterea transferata de un circuit de c.c. unui rezistor are valoarea maxima pentru $R_{AB} = R_{AB0}$.

$$P = R_{AB} I_{AB}^2 = \frac{R_{AB} U_{AB0}^2}{(R_{AB} + R_{AB0})^2} \Rightarrow \frac{dP}{dR_{AB}} = \frac{U_{AB0}^2 [(R_{AB} + R_{AB0})^2 - 2R_{AB}(R_{AB} + R_{AB0})]}{(R_{AB} + R_{AB0})^2} = 0 \Rightarrow R_{AB} = R_{AB0}$$

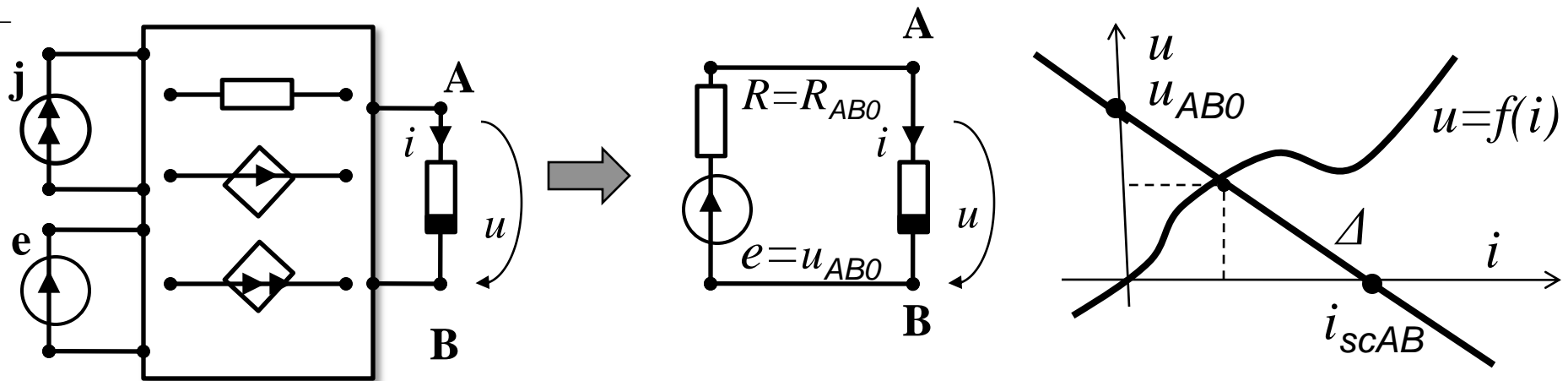
In c.a. puterea este maxima pentru: $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{AB0}^* \Leftrightarrow R_{AB} = R_{AB0}; X_{AB} = -X_{AB0}$

- Metoda dreptei de sarcina:**

Se considera un circuit rezistiv alcatuit din elemente liniare, surse ideale de curent si/sau tensiune si un rezistor neliniar, presupus controlat in curent, cu functia caracteristica f . Conform teoremei Thevenin:

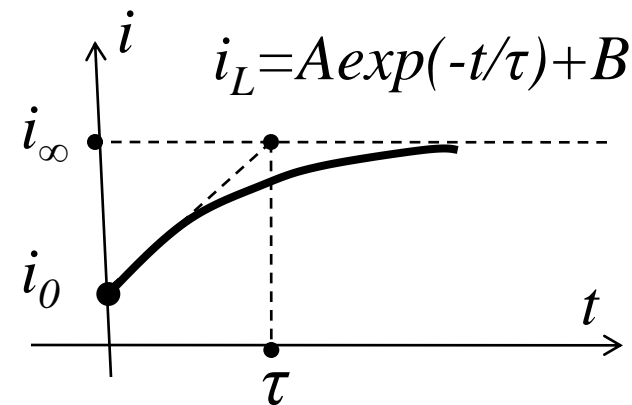
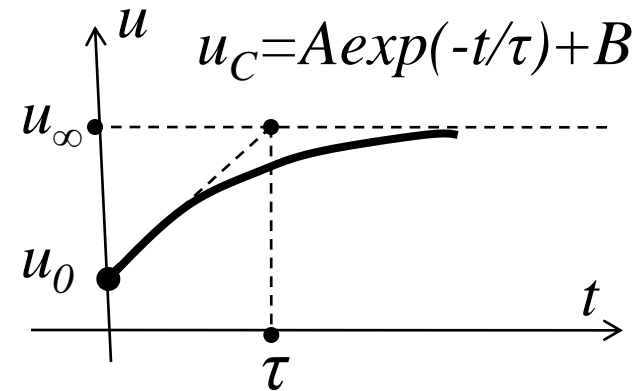
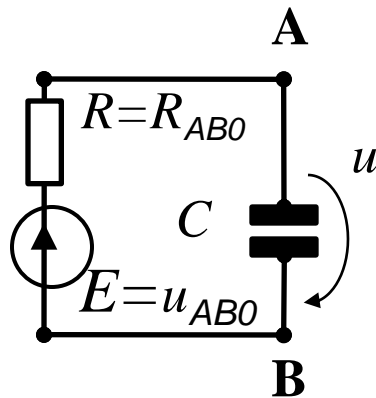
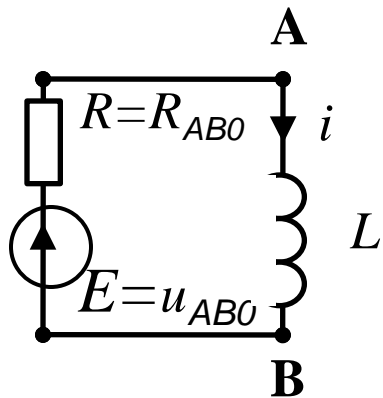
$$u = f(i); \quad u = u_{AB0} - R_{AB0}i; \quad \text{cu } u = u_{AB}; i = i_{AB}$$

Reprezentand grafic cele doua ecuatii constitutive: pentru elementul neliniar si dreapta Δ (numita "de sarcina" – caracteristica sursei echivalente), solutia problemei neliniare se va afla la intersectia celor doua curbe:



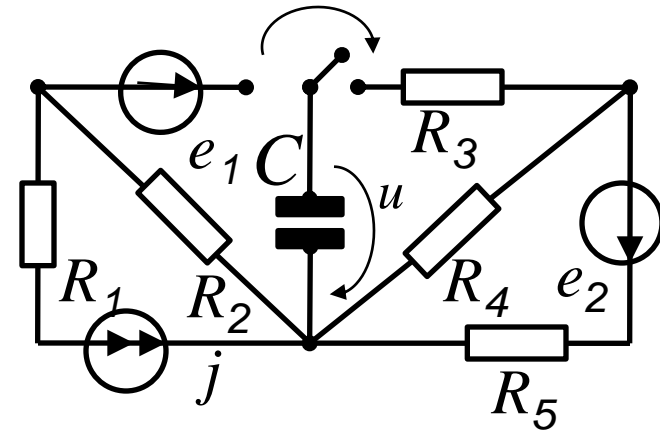
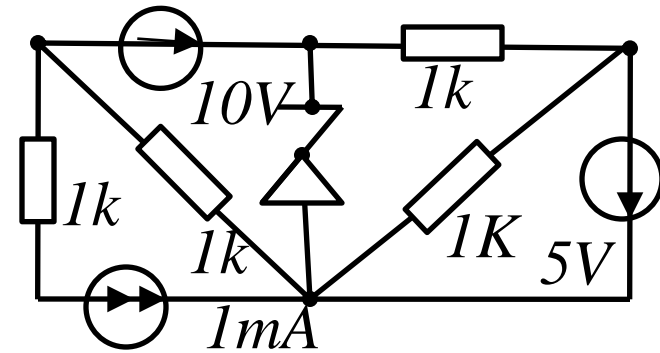
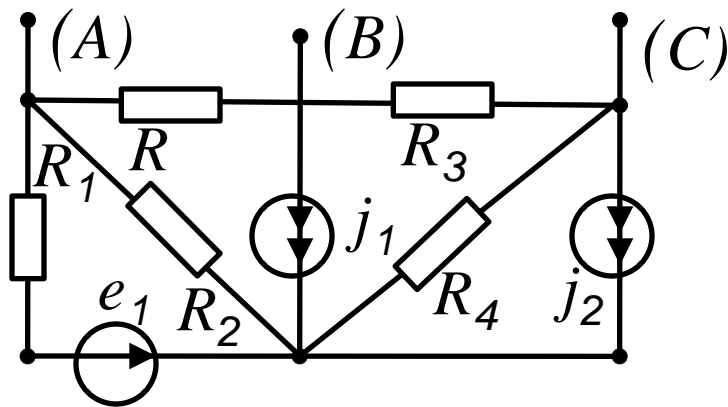
Raspunsul circuitelor de ordinul intai prin identificarea constantelor

Se considera un circuit rezistiv alcatuit din elemente liniare, surse ideale de curent si/sau tensiune Constante in timp si un element reactiv (L sau C). Conform teoremei Thevenin circuitul rezistiv se echivaleaza cu o sursa reala de tensiune



Variabila de stare (curentul i_L in cazul bobinei si tensiunea u_C in cazul condensatorului) au o variatie in timp de forma $x(t) = A \exp(-t/\tau) + B$ in care constanta de timp $\tau = L/R$ si respectiv $\tau = RC$. Din valoarea initiala si cea de regim stationar posterior regimului tranzitoriu se determina constatele A si B.

- Determinati tensiunea si curentul prin dioda Zener (cu $U_z = 5V$) folosind metoda dreptei de sarcina.
- Determinati expresia de variatie in timp a tensiunii de la bornele condensatorului dupa ce are loc comutarea.
- Determinati schemele echivalente Thevenin și Norton pentru circuitul tripolar A-B-C.



- Determinati schemele Thevenin, Norton si hibrida ale unui tranzistor bipoar pentru mici variatii (semnal mic si model liniarizat de semnal mare)

- Matricea admitantelor multipolului.** Se considera un circuit linear multipolar (neizolat), Daca toate nodurile sale sunt terminale atunci matricea admitantelor multipolului este chiar matricea admitanteleor nodale. Daca multipolul este controlabil si in curenti, inversa sa este matricea impedantelor multipolului $\mathbf{Y}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n$; $\mathbf{i} = \mathbf{Y}_m \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{Y}_m = \mathbf{Y}_n = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \Leftrightarrow \mathbf{Z}_m = (\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T)^{-1}$
- Matricea admitantelor circuitului partial izolat.** In conditiile in care doar o parte din noduri (sa presupunem ca primele m) sunt terminale (t) adica sunt alimentate din exterior cu curenti iar restul sunt izolate (i), ecuatiile nodale se partajeaza:

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v} = \mathbf{j}_n \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{tt} & \mathbf{Y}_{ti} \\ \mathbf{Y}_{it} & \mathbf{Y}_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y}_{tt} \mathbf{v}_t + \mathbf{Y}_{ti} \mathbf{v}_i = \mathbf{j}_t; \mathbf{Y}_{it} \mathbf{v}_t + \mathbf{Y}_{ii} \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_i = -\mathbf{Y}_{ii}^{-1} \mathbf{Y}_{it} \mathbf{v}_t; \mathbf{Y}_{tt} \mathbf{v}_t - \mathbf{Y}_{ti} \mathbf{Y}_{ii}^{-1} \mathbf{Y}_{it} \mathbf{v}_t = \mathbf{j}_t \Rightarrow \mathbf{Y}_{mm} \mathbf{v}_t = \mathbf{i}_t; \mathbf{Y}_{mm} = \mathbf{Y}_{tt} - \mathbf{Y}_{ti} \mathbf{Y}_{ii}^{-1} \mathbf{Y}_{it}$$
 Matricea admitantelor partiale a nodurilor terminale este deci complementul lui Schur a matricei admitantelor nodurilor izolate http://en.wikipedia.org/wiki/Schur_complement
- Matricea hibrida H** se obtine partajind nodurile terminale controlate in v si i.
- Generatorul Norton multipolar.** Daca nodurile izolate sunt alimentate cu surse interne: $\mathbf{i}_t = \mathbf{Y}_{mm} \mathbf{v}_t + \mathbf{j}_t; \mathbf{j}_t = \mathbf{Y}_{ti} \mathbf{Y}_{ii}^{-1} \mathbf{j}_i \rightarrow$ Codul MATLAB, simplu!

6.10. Variabile si ecuatii de stare (opt.)

Variabilele de stare sunt marimi esentiale care descriu starea unui circuit. Ele:

- sunt derivate fata de timp (deci continui) in ecuatiile circuitului;
- reprezinta, conform teoremei lui Cauchy conditiile initiale ale ecuatiilor diferentiale ordinare, care descriu evolutia in timp a circuitului;
- reprezinta si memoreaza evolutia circuitului inainte de momentul initial;
- exprima energia acumulata in circuit, marime termodinamica de stare.

Forma standard (canonica) a ecuatiilor unui sistem liniar invariant in timp:

- $\mathbf{x} : (0, t \max) \rightarrow \mathbb{R}^n$ *variabile de stare, functie derivabila*
- $\mathbf{u} : (0, t \max) \rightarrow \mathbb{R}^m$ *semnalele de intrare (excitatiile)*
- $\mathbf{y} : (0, t \max) \rightarrow \mathbb{R}^m$ *semnalele de iesire (raspunsurile)*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

- \mathbf{A} – *matricea de stare de dimensiune $n \times n$*
- \mathbf{B} – *matricea de intrare de dimensiune $n \times m$*
- \mathbf{C} – *matricea de iesire de dimensiune $m \times n$;*
- \mathbf{D} – *matricea relatiei directe intrare-iesire de dim. $m \times m$*
- n – *numarul de variabile de stare (complexitatea sistmeului)*
- m – *numarul de intrari si de iesiri (tensiuni/curenti max 2L)*
- *Consideram ca la fiecare excitatie (e sau j) corespunde un raspuns (i resp. u).*

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n \\ \updownarrow m \\ \leftarrow n \quad \leftarrow m \end{matrix}$$

Ecuatiile de stare ale unui circuit liniar (opt.)

Se considera un circuit alcatuit din rezistoare, bobine cuplate sau nu, condensatoare toate elemente ideale lineare, surse comandate liniar si surse independente, ideale de curent si tensiune, care sunt excitatiile circuitului liniar. Vom mai presupune ca exista un arbore care contine toate elementele controlate in curent si nici un element controlat in tensiune. Deci acest arbore normal contine toate sursele ideale, independente sau comandate de curent, conductoarele perfecte si toate condensatoarele, fara sa contina surse ideale, independente sau comandate de curent, izolatoare perfecte sau bobine. In consecinta nu exista bucle formate din condensatoare ideale si/sau surse ideale de tensiune si nici sectiuni formate din bobine ideale si/sau surse ideale de curent. Spunem in aceste conditii ca circuitul **nu contine elemente in exces**.

Inlocuim in acest circuit condensatoarele cu surse ideale de tensiune si bobinele cu surse ideale de curent. Conf. teoremei liniaritatii-superpozitiei:

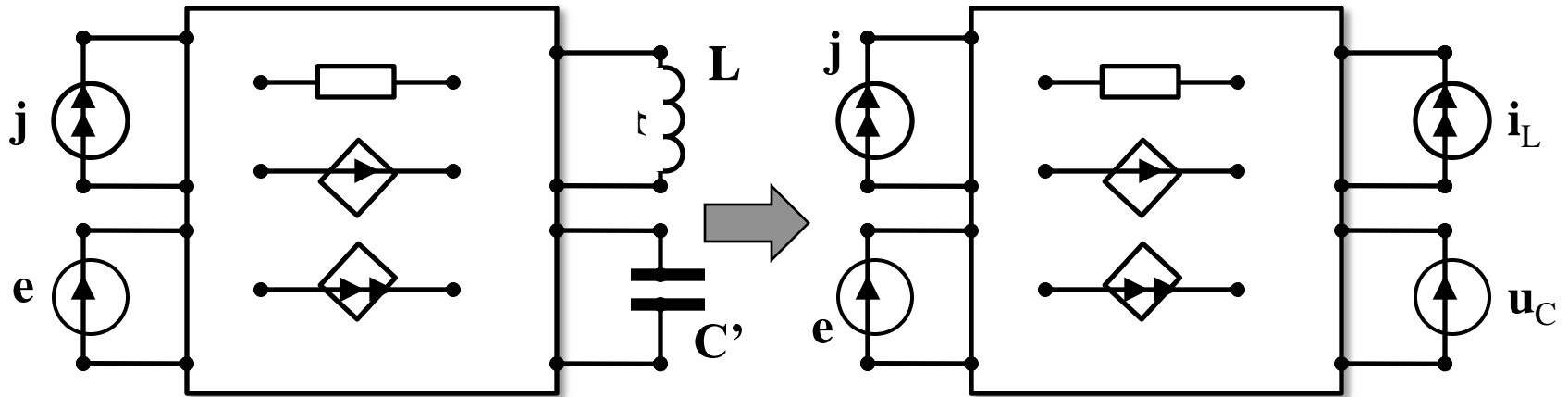
$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{i}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{LL} & \mathbf{A}_{LC} \\ \mathbf{B}_{CL} & \mathbf{G}_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Lj} & \mathbf{A}_{Lj} \\ \mathbf{B}_{Cj} & \mathbf{G}_{Ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_j \\ \mathbf{i}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{jL} & \mathbf{A}_{jC} \\ \mathbf{B}_{eL} & \mathbf{G}_{eC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{jj} & \mathbf{A}_{je} \\ \mathbf{B}_{ej} & \mathbf{G}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{i}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}' \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_L \\ \mathbf{u}_C \end{bmatrix}$$

Ecuatiile constitutive ale bobinelor si condensatoarelor in reg. de la REC.

Ecuatiile de stare ale unui circuit liniar (cont)



L - matricea inductantelor proprii si mutuale presupusa pozitiv definita

C' - matricea diagonala a capacitativitatilor, presupuse strict pozitive

Rezultata ecuatiile de stare in care: $\mathbf{x} = [\mathbf{i}_L; \mathbf{u}_C]$; $\mathbf{u} = [\mathbf{j}; \mathbf{e}]$; $\mathbf{y} = [\mathbf{u}_j; \mathbf{i}_e]$

- curentii prin bobine si tensiunile condensatoarelor sunt variabilele de stare
- c.e.m si respective t.e.em. ale surselor independente sunt excitatiile
- tensiunile surselor ideale de curent si curentii surselor de ideale de tensiune sunt raspunsurile circuitului, iar

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{LL} & \mathbf{A}_{LC} \\ \mathbf{B}_{CL} & \mathbf{G}_{CC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Lj} & \mathbf{A}_{Lj} \\ \mathbf{B}_{Cj} & \mathbf{G}_{Ce} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{jL} & \mathbf{A}_{jC} \\ \mathbf{B}_{eL} & \mathbf{G}_{eC} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{jj} & \mathbf{A}_{jj} \\ \mathbf{B}_{ej} & \mathbf{G}_{ee} \end{bmatrix}$$

Rezolvarea ecuatiilor de stare prin transformare Lapalce (opt.)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \xrightarrow{\mathcal{L}} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{BU}(s) \Rightarrow [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{BU}(s) + \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{BU}(s) + \mathbf{x}_0] \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{CX}(s) + \mathbf{DU}(s) \Rightarrow \mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}_0 \end{cases}$$

- Raspunsul circuitului are doua componente:
- **Componenta fortata**, datorata surselor depinde linear de semnalele de intrare, prin intermediul unei matrice $H(s)$ **numita functie de transfer a sistemului (sau functia de circuit)**. Ea se obtine considerand starea initiala nula:

$$\mathbf{Y}_f(s) = [\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s) \Leftrightarrow \mathbf{Y}_f(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s) \text{ cu } \mathbf{H}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- **Componenta libera** a semnalului de iesire, cea datorata starii initiale depinde linear de vectorul variabilelor de stare in momentul initial si se obtine

considerand excitatia nula: $\mathbf{Y}_l(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}_0$

- Variatia in timp a raspunsului circuitului se obtine aplicand transformata Laplace inversa:

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{Y}_l(s) + \mathbf{Y}_f(s)]$$

- Matricea \mathbf{A} este diagonalizabila daca $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}$ cu $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

- \mathbf{P} si \mathbf{D} se obtin din vectorii si respectiv valorile proprii ce satisfac: $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{x} = 0$

deci sunt polii functiei de transfer $H(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}[[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[[s\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{P}]^{-1}] = \mathbf{P}^{-1}\mathcal{L}^{-1}[[s\mathbf{I} - \mathbf{D}]^{-1}]\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathcal{L}^{-1}[\text{diag}[1/(s - \lambda_k)]]\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\text{diag}(e^{\lambda_k t})\mathbf{P} = e^{\mathbf{A}t}$$

- **Componeta libera a raspunsului este deci:**

$$\mathbf{y}_l(t) = \mathbf{C}\mathcal{L}^{-1}[[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}]\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

Componenta libera a raspunsului (cont.)

- In raspunsul liber starea circuitului evolueaza astfel $\mathbf{x}_l(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{x}_0$ in care $\mathbf{\Phi}(t) = e^{At}$ se numeste matrice de tranzitie si are $\mathcal{L}[\mathbf{\Phi}(t)] = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$
- Daca valorile proprii ale matricei A sunt reale, atunci operatorul de tranzitie este format dintr-o suma de exponentiale $e^{\lambda_k t}$ care se atenuaza (tind catre zero), daca valorile proprii sunt negative. Inversele valorilor proprii dau in acest caz constantele de timp ale circuitului si permit estimarea timpului cat dureaza raspunsul liber (regimul tranzitoriu). $\tau_k = -1 / \lambda_k$ Acest lucru se intampla in cazul circuitelor formate din elemente acumulative de energie de un singur fel (bobine sau condensatoare) pasive si rezistoare disipative.
- In cazul circuitelor care contin si bobine si condensatoare, valorile proprii pot fi complexe. Ele sunt in perechi conjugate $\lambda_k = -\alpha_k \pm j\omega_k$ iar raspunsul liber este o suma de functii sinusoidale atenuate exponential.
- Durata regimului tranzitoriu este data de constantele de timp $\tau_k = -1 / \text{Re}[\lambda_k]$ iar partile imaginare dau frecventele oscilatiilor proprii ale circuitului.
- Conditia ca circuitul sa aiba un raspuns stabil (marginat in timp, amortizat) este ca partile reale ale valorilor proprii sa fie negative, cume se intampla in circuitele cu elemente acumulative pasive si rezistoare disipative.

Componenta forțată a răspunsului (cont.)

Pe baza teoremei convoluției pentru transformata Laplace:

$$\mathbf{y}_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) = \mathbf{C}\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

• Răspunsul circuitului la excitații Dirac se numește răspuns indicial:

$$\mathbf{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)] = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$$

• Răspunsul forțat este convoluția dintre răspunsul indicial și excitație:

$$\mathbf{Y}_f(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s) \Rightarrow \mathbf{y}_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s)] = \mathbf{h} * \mathbf{u} =_{def} \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{h}(\tau)\mathbf{u}(t-\tau)d\tau$$

• În consecință, răspunsul total este

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

• Evoluția variabilelor de stare are și ea componentele liberă și forțată:

$$x(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

• Funcțiile MATLAB `ss2tf` și `tf2ss` permit conversia de la modelul de stare (ABCD) la funcția de transfer (num,den) și invers.

• Ecuatii de stare pentru circuite CGJ

Daca circuitul nu contine bobine, atunci ecuatiile de stare au matricele :

$$\mathbf{A} = -\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{G}_{cc}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{C}'^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{cj} & \mathbf{G}_{ce} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{B}_{cj}, \mathbf{C} = \mathbf{A}_{jc}, \mathbf{D} = \mathbf{R}_{jj} \Rightarrow$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{jc} \\ \mathbf{G}_{ec} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{jj} & \mathbf{A}_{je} \\ \mathbf{B}_{ej} & \mathbf{G}_{ee} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -\mathbf{C}' \frac{d\mathbf{u}_c}{dt} = \mathbf{G}_{cc}\mathbf{u}_c + \mathbf{B}_{cj}\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_j = \mathbf{A}_{jc}\mathbf{u}_c + \mathbf{R}_{jj}\mathbf{j} \end{cases}$$

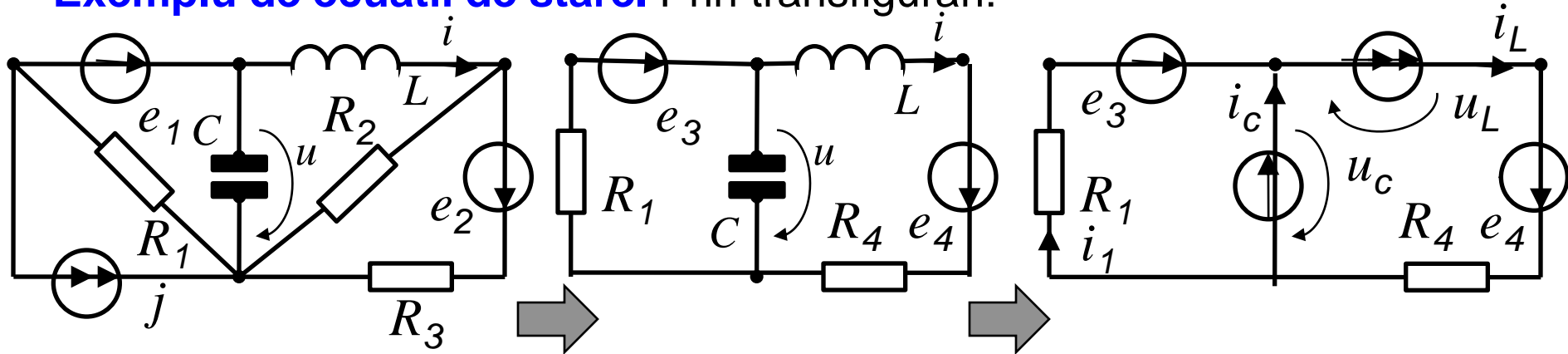
Circuitele din clasa CGJ au o forma si mai simpla a ecuatiilor de stare.

• Ecuatii de stare pentru circuite RLE sunt duale:

$$\begin{cases} -\mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}_L}{dt} = \mathbf{R}_{LL}\mathbf{i}_L + \mathbf{A}_{Le}\mathbf{e} \\ \mathbf{i}_e = \mathbf{B}_{eL}\mathbf{i}_L + \mathbf{G}_{ee}\mathbf{e} \end{cases} \quad \text{DOE: } \begin{cases} \mathbf{E} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{By} \\ \mathbf{v} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Dy} \end{cases}$$

Daca unele capacitati/inductante sunt nule, atunci matricele C sau L pot devini singulare. In acest caz dimensiunea spatiului starilor scade, motiv pentru care vectorul x se numi vectorul *variabilelor de semistare*. Ecuatiile de semistare au forma generala cu matricele de semistare A,B,C,D,E, numita si forma descriptor. Sistemul este de tip differential-algebraic (DAE), continand atat ecuatii diferentiale cat si ecuatii algebrice.

- Exemplu de ecuatii de stare. Prin transfigurari:



$$e_3 = e_1 - R_1 j; R_4 = R_2 R_3 / (R_2 + R_3); e_4 = e_2 R_2 / (R_2 + R_3);$$

$$i_1 = (-u_C + e_3) / R_1 \Rightarrow i_C = i_L - i_1 = i_L + u_C / R_1 - e_3 / R_1;$$

$$u_L = -e_4 + R_4 i_L - u_C \Rightarrow \mathbf{x} = [i \quad u]^T; \mathbf{y} = [i_C \quad u_L]^T$$

$$\begin{cases} -L \frac{di}{dt} = R_4 i - u - e_4 \\ -C \frac{du}{dt} = i + u / R_1 - e_3 / R_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -R_4 / L & 1 / L \\ 1 / C & -1 / (R_1 C) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e_4 / L \\ e_3 / (R_1 C) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 / R_1 \\ R_4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -e_3 / R_1 \\ -e_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Functia de transfer si solutia libera:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -R_4/L & 1/L \\ 1/C & -1/(R_1C) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} e_4/L \\ e_3/(R_1C) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1/R_1 \\ R_4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -e_3/R_1 \\ -e_4 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D} \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_4/L & 1/L \\ 1/C & -1/(R_1C) \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ 1/(R_1C) & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1/R_1 \\ R_4 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1/R_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{H}(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}; \mathbf{x}_l(t) = e^{At}\mathbf{x}_0; \mathbf{y}_l(t) = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}_0$$

Polii: $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} s + R_4/L & -1/L \\ -1/C & s + 1/(R_1C) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) - \omega^2 = 0;$

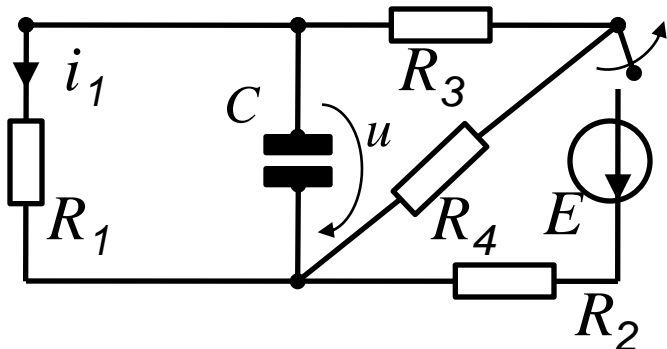
cu $\alpha_1 = R_4/L; \alpha_2 = 1/(R_1C); \omega^2 = 1/(LC) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2};$

$$\Delta = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4(\alpha_1\alpha_2 - \omega^2); \omega = \omega_c = \sqrt{\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2/4} \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\omega < \omega_c \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0; \alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2; \omega_0 = \sqrt{\Delta}/2 = \omega^2 + \alpha^2 - \alpha_1\alpha_2$$

Alegeti valori ale parametrilor elementelor de circuit, a.i. solutia libera sa oscileze cu 10kHz si sa se stinga in 10 perioade. Rezolvati apoi problema si reprezentati grafic variatia solutiei (folosind MATLAB si in paralel SPICE).

- **Solutii libere.** In regimul de c.c. anterior comutarii conditia initiala este:



$$i_1 = -E_e / (R_1 + R_3 + R_{24}) \quad \text{cu}$$

$$R_{24} = R_2 R_4 / (R_2 + R_4);$$

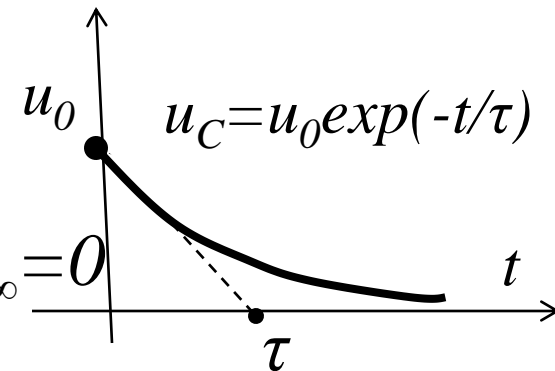
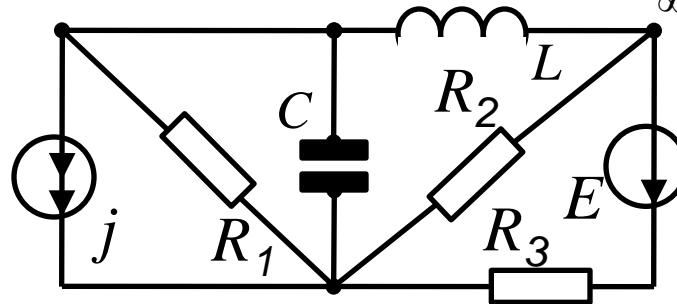
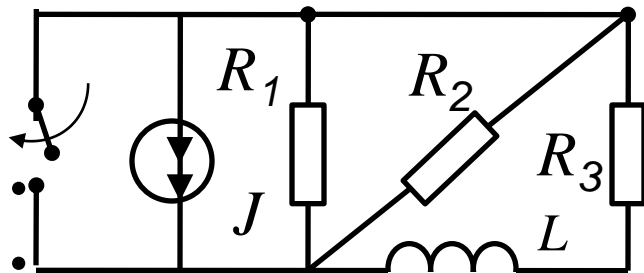
$$E_e = ER_4 / (R_2 + R_4) \Rightarrow u_0 = R_1 i_1$$

- In regimul regimul tranzitoriu liber (de descarcare a condensatorului):

$$R_e = R_1 \parallel (R_3 + R_4) = R_1 (R_3 + R_4) / (R_1 + R_3 + R_4);$$

$$-C \frac{du}{dt} = u / R_e \Rightarrow u(t) = A e^{-t/\tau} ; \tau = R_e C; A = u_0$$

- Determinati solutiile libere ale circuitelor:

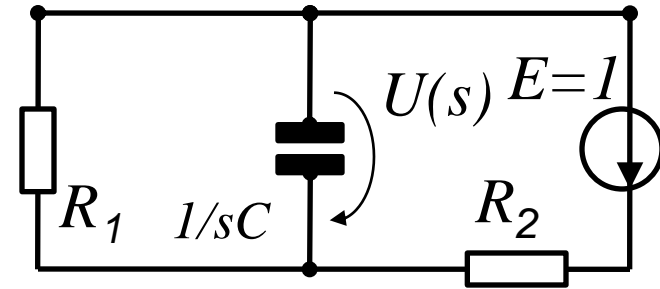


Cand sunt oscilante?
 Cat dureaza?

- Solutia fortata.** La excitatie Dirac, cu relatia divizorului de tensiune:

$$Z(s) = \frac{R_1}{sC(R_1 + 1/sC)} = \frac{R_1}{sCR_1 + 1} \Rightarrow$$

$$U(s) = E \frac{Z}{Z + R_2} = \frac{R_1}{(CR_1 + 1)(R_1/(sCR_1 + 1) + R_2)} =$$



$$\frac{1/(CR_2)}{s + (1/R_2 + 1/R_1)/C} = \frac{\alpha_2}{s + \alpha_1 + \alpha_2} = H(s) \Rightarrow u_\delta(t) = \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}$$

$H(s)$ este functia de transfer

Raspunsul fortat (de exemplu pentru $e(t)$ un impuls dreptunghiular de durata T si amplitudine E) se calculeaza prin convolutia raspunsului indicial:

$$u_f(t) = \int_0^t u_\delta(t - \tau) e(\tau) d\tau =$$

$$E \int_0^t u_\delta(t - \tau) d\tau = E \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \int_0^t e^{(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} d\tau = E \alpha_2 (1 - e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}) / (\alpha_1 + \alpha_2); t \leq T$$

$$E \int_0^T u_\delta(t - \tau) d\tau = E \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} \int_0^T e^{(\alpha_1 + \alpha_2)\tau} d\tau = E \alpha_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} (e^{(\alpha_1 + \alpha_2)T} - 1) / (\alpha_1 + \alpha_2); t > T$$

Aplicatii. Elemente acumulatoroare de energie in exces

- **Exces de speta intai: exista in circuit bucle EC sau sectiuni JL**

In acest caz, circuitul obtinut prin inlocuirea condensatoarelor cu SIT si a bobinelor cu SIC este prost formulat.

- **Exces de speta a doua: exista in circuit bucle EL sau sectiuni JC**

In acest caz, circuitul de regim stationar (de c.c.) ulterior regimului tranzitoriu nu este bine formulat ($\det(A)=0$, A are valori proprii nule). Exemple de excese:

Elemente	Exces de speta intai	Exces de speta a doua
2C	Paralel	Serie
2L	Serie	Paralel
3C	Triunghi	Stea
3L	Stea	Triunghi
CE	Paralel	Serie
LJ	Serie	Paralel
2C, E	Triunghi	Stea
C, 2E	Triunghi	Stea
2L, J	Stea	Triunghi
L, 2J	Stea	Triunghi

Aplicatii. Elemente acumulator de energie in exces (cont.)

- Cele doua spete se explica prin ambivalenta elementelor L, C, Bobina idela este controlata in tensiune, dar in regim stationar devine conductor perfect care este controlabil in curent. Condensatorul se comporta dual.

Analiza circuitelor cu elemente in exces se recomanda sa fie facuta folosind tehnici operationale (transformata Laplace), ca in aplicatia “incarcarea unui condensator de la altul”.

- Alcatuiti circuite care contin elemente in exces de tipul celor prezentate in tabelul anterior si analizati gradul lor de complexitate, definit ca numarul lor de variabile de stare independente (constante de timp – valori proprii).
- Scrieti o functie MATLAB care genereaza matricele de stare ABCD ale unui circuit electric cu elemente dipolare RL, RC si in final RLC liniare.
- Rezolvati in MATLAB, prin mai multe metode ecuatiile de stare generate, de exemplu folosind functia ode45, exponentiala matriceala sau functiei ss2tf si reprezentati grafic modul in care variaza in timp variabilele de stare.
- Extindeti clasa de obiecte circuit sa cuprinda si circuite electrice in regim tranzitoriu.
- Incercati sa definiti un algoritm care sa genereze matricele descriptor ABCDE pentru un circuit cu elemente LC in exces.

6.11. Circuite liniare in regim periodic nesinusoidal (opt.)

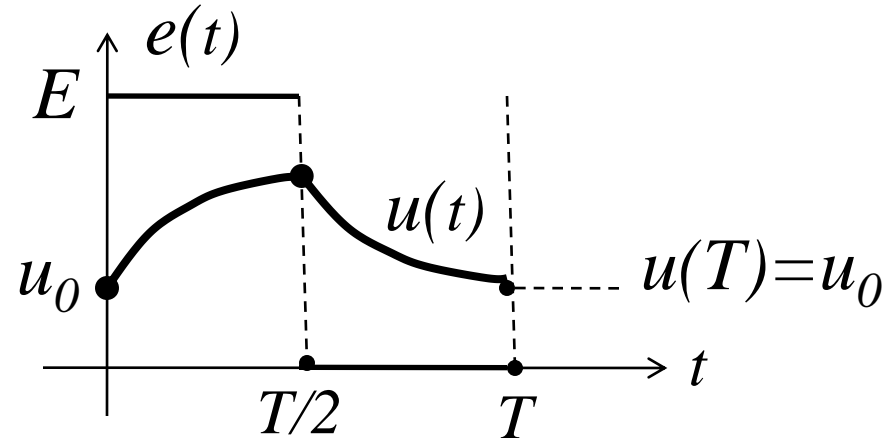
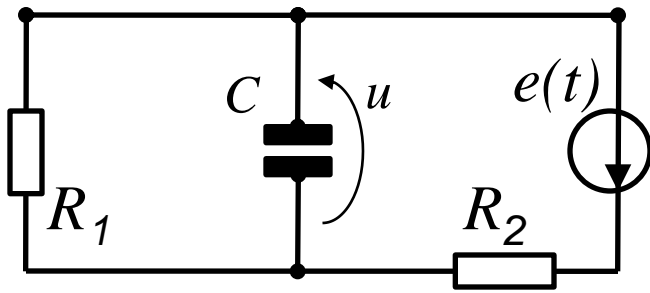
- Circuitele liniare alimentate cu surse de curent si/sau tensiune cu variatie periodica in timp (T este perioada comuna a tuturor surselor) au semnale (curenti si tensiuni) functii de timp cu perioada T . Astfel de circuite electrice pot fi analizate doar pe o perioada $0 < t < T$, solutia extinzandu-se apoi prin periodicitate la intraga axa a timpului.
- O metoda posibila de analiza a acestor circuite este **metoda regimului tranzitoriu repetat**. In aceasta metoda se porneste de la conditii initiale \mathbf{x}_0 arbitrare si se analizeaza circuitul in regim tranzitoriu pe intervalul unei perioade $0 < t < T$. Din conditiile de periodicitate impuse variabilelor de stare $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T)$ rezulta valoarea conditiilor initiale, deci si solutia problemei:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \Rightarrow \mathbf{x}(T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}_0 + \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_0 \Rightarrow$$

$$\left[e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I} \right] \mathbf{x}_0 = \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \Rightarrow \mathbf{x}_0 = \left[e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I} \right]^{-1} \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

- Conditia initiala periodica se obtine rezolvand un sistem de ecuatii algebrice liniare cu matricea dependenta vaorile solutiilor libere la momentul T si termenul liber solutia fortata la momentul T .

- Exemplu de aplicare a metodei regimului tranzitoriu repetat:



- Sursa are variatia periodica in timp:
- Prin identificarea constantelor:

$$e(t) = \begin{cases} E; & 0 < t < T/2 \\ 0; & T/2 < t < T \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} A'e^{-t/\tau} + B'; & 0 < t < T/2; \\ A''e^{-t/\tau} + B''; & T/2 < t < T; \end{cases} \quad \tau = CR_1R_2/(R_1 + R_2)$$

$$A' + B' = u_0; B' = ER_1/(R_1 + R_2);$$

$$A'e^{-T/2\tau} + B' = A''e^{-T/2\tau} + B''; A''e^{-T/\tau} + B'' = u_0; B'' = 0 \Rightarrow$$

$$u_0 = ER_1(1 - e^{T/2\tau}) / [(1 - e^{T/\tau})(R_1 + R_2)]$$

Circuite liniare in regim periodic nesusoidal (cont.)

- O alta abordare se bazeaza pe dezvoltarea in **serie Fourier** a semnalelor periodice din circuitul analizat. In conditii destul de generale functiile periodice se dezvolta in serii de functii sinusoidale avand frecventele $1/T$, $2/T$, $3/T$, functii numite armonicile semnalului (prima este fundamentala):

$$y = f(t) = f(t+T), \quad \text{cu } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t); \quad \omega = 2\pi / T$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt$$

- Coeficientii Fourier au aceste expresii deoarece armonicile sunt ortogonale. De obicei se trunchiaza seriile la polinoame trigonometrice cu m termeni.
- Conform teoremei superpozitiei-liniaritatii, circuitele electrice liniare excitate de surse cu m armonici vor fi la randul lor raspunsul o suma de m armonici. Analiza se reduce deci la o rezolvarea unui circuit liniar de c.a. la m frecvente diferite.

http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series; <http://www.uwec.edu/walkerjs/media/fseries.pdf>

http://www.miv.ro/books/MCiuc_Fourier.pdf

http://www.utqjiu.ro/math/miovanov/book/ms_curs/cap4.pdf

- Se va analiza circuitul RC rezolvat prin metoda regimului tranzitoriu repetat
- Coeficientii Fourier ai t.e.m a sursei sunt:

$$e(t) = \begin{cases} E; & 0 < t < T/2 \\ 0; & T/2 < t < T \end{cases}; \Rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = E/2;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cos k\omega t dt = \frac{2E}{T} \int_0^{T/2} \cos k\omega t dt = \frac{2E}{Tk\omega} \sin k\omega T/2 = 0;$$

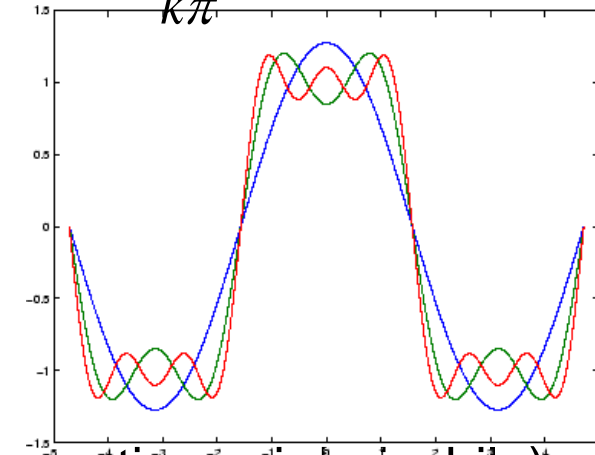
$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \sin k\omega t dt = \frac{2E}{T} \int_0^{T/2} \sin k\omega t dt = -\frac{2E}{Tk\omega} (\cos k\omega T/2 - 1) = \frac{E}{k\pi} [1 - (-1)^k]$$

- Seria t.e.m contine doar armoniic impare si se trunchiaza la un numar finit de termeni

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) =$$

$$a_0 + b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3\omega t + b_5 \sin 5\omega t \dots b_m \sin k\omega t$$

Daca excitatia are variatie mai neteda (de exemplu este continua si derivabila) atunci seria Fourier este mai rapid convergenta $b_k \propto 1/k^3$



- Componenta de c.c. si armonicile de c.a. se suprapun:

$$u_0(t) = U_0 = a_0 R_1 / (R_1 + R_2) = 0,5 R_1 / (R_1 + R_2);$$

$$e_k(t) = b_k \sin k\omega t \Rightarrow \underline{E}_k = \mathcal{C}[e_k(t)] = b_k = \frac{E[1 - (-1)^k]}{k\pi\sqrt{2}}$$

$$\underline{U}_k = \underline{E}_k \underline{Z}_k / (R_2 + \underline{Z}_k); \quad \text{cu} \quad \underline{Z}_k = \frac{R_1}{jk\omega C [R_1 + 1/(jk\omega C)]} = \frac{R_1}{1 + jk\omega CR_1} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_k = \frac{E[1 - (-1)^k] \underline{Z}_k}{k\pi\sqrt{2}(R_2 + \underline{Z}_k)} = \frac{E[1 - (-1)^k]}{k\pi\sqrt{2}(1 + R_2 / \underline{Z}_k)} = \frac{E[1 - (-1)^k](1 + R_2 / R_1 - jk\omega CR_2)}{k\pi\sqrt{2}[(1 + R_2 / R_1)^2 + (k\omega CR_2)^2]}$$

$$\Rightarrow u_k(t) = U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_k); \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cong \sum_{k=0}^m u_k(t) = U_0 + U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1) + \dots$$

$$U_k = \frac{E[1 - (-1)^k]}{k\pi\sqrt{2} \sqrt{(1 + R_2 / R_1)^2 + (k\omega CR_2)^2}}; \quad \varphi_k = -\text{arctg}(k\omega CR_2 / (1 + R_2 / R_1))$$

- Scriti un **cod MATLAB de analiza armonica a circuitelor liniare**.
Coeficientii Fourier se pot calcula prin integrare numerica (quad) sau cu fft.

6.12. Analiza in frecventa. Transformata Fourier (opt.)

Cand perioada T tinde catre infinit, seria Fourier tinde catre integrala Fourier:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt \Rightarrow c_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-k\omega t) dt$$

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-jk\omega t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt =_{def} \mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$$

Aceasta defineste transformata Fourier (ck este transformata complexa $\sqrt{2/j}$).
 Functiei reale ii corespunde o functie complexa de variabila reala, care da **spectrul** functiei reale. Transformata Fourier inversa este:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t =$$

Cand $T \rightarrow$ infinit, spectrul discret tinde catre unul continuu.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(k\omega t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] =_{def} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi f) \exp(j2\pi f t) df \leftarrow \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k \exp(jk\omega t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)] = f(t). \quad \begin{cases} a_k = c_k + c_{-k} \\ b_k = j(c_k - c_{-k}) \end{cases} \Leftrightarrow c_k = \begin{cases} (a_k - j b_k) / 2; k > 0 \\ a_0; k = 0 \\ (a_k + j b_k) / 2; k < 0 \end{cases}$$

http://ro.wikipedia.org/wiki/Transformata_Fourier

Analiza in frecventa. Transformata Fourier (cont.)

Proprietatile transformatei Fourier:

- Transformata este liniara:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathcal{F}[f_k(t)]$$

- Transformata operatia de derivare in inmultire cu $j\omega$:

$$\mathcal{F}\left[\frac{df}{dt}\right] = j\omega \mathcal{F}[f(t)]$$

- Intre transformata Lapalce si Fourier exista

similitudine daca $s \rightarrow j\omega$. In consecinta, reprezentarea operationala a circuitelor cu conditii initiale nule devine reprezentare Fourier, daca frecventa complexa s devine variabila pur imaginara $j\omega$. Rezulta un circuit similar cu cel de c.a. reprezentat in complex, doar ca semnalele nu sunt constante complexe ci sunt functii de pulsatia ω .

- Daca se aproximeaza integralele din definiile lor cu sume, transformile Fourier directa si inversa se numesc transformariel Fourier discrete (**DFT**). Pentru evaluarea lor exista un algoritm extrem de eficient, numit Fast Fourier Transform (**FFT**). Ele este disponibil si in MATLAB sub numele `fft` si `ifft`.

- **Esantionare:** retine valorile unei functii continui intr-o multime finita (discreta) de noduri. DFT esantioneaza atat semnalul cat si spectrul sau.

- **Teorem esantionarii:** semnalelele cu spectru margnit in banda B [Hz], se reconstriesc perfecta, daca frecventa de esantionare ($1/T_s$) este dublul benzii

Analiza in frecventa. Transformata Fourier (cont.)

Analizei in frecventa a circuitelor electrice liniare in regim tranzitoriu este similara tehnicii reprezentarii complexe sau a transformatei Laplace:

- se transforma Fourier semnalele de intrare (t.e.m./c.e.m.) cu tehnici numerice (DFT, FFT) sau analitice (din definitie sau tabel) determinad $U(\omega)$;
- se analizeaza circuitul electric liniar cu excitatii unitare, pentru o pulsatie arbitrara ω sau parcurgand sirul de pulsatii discrete, si se determina functia de transfer (de circuit) $H(\omega)$ pentru acea pulsatie. Impedantele complexe au expresiile din c.a. $j\omega L$ si $1/j\omega C$. Deoarece functia H rezulta in urma unor operatii aritmetice $*/+-$, ea este rationala in ω (raport a doua polinoame in ω);
- se calculeaza semnalele de iesire la pulsatia curenta $Y(\omega)=H(\omega)U(\omega)$;
- se aplica transformata Fourier inversa (DFT sau FFT in cazul analizei numerice) si se determina semnalul de iesire $y(t)$.

Modul in care variaza modulul si argumentul functiei de transfer in functie de frecventa reprezentate in scara dublu logaritmica poarta numele de **diagrame Bode** iar reprezentarea lor ca o curba in planul complex (in forma polara-trigonometrica) poarta numele de **diagrama Nyquist**.

http://en.wikipedia.org/wiki/Bode_plot http://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist_plot

http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform http://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform

http://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist%E2%80%93Shannon_sampling_theorem ©2012 Daniel IOAN

Semnalul $x(t)$ este esantionat pe o retea uniforma cu N noduri, cu perioada de esantionare T_s , rezultand vectorul real $x(1:N)$ pentru $t=(0:N-1)*T_s$.

FFT il transforma intr-un vector complex X , de dimensiune N , cu componentele:

$$X(k) = \sum_{i=1}^N x(i) \omega_N^{(i-1)(k-1)}; \text{ cu } \omega_N = e^{-2\pi j / N} \text{ radacina de ordin } N \text{ a unitatii}$$

asociat frecventelor $f = (0:N-1) * f_s$, in care $f_s = 1/T_s$ este frecventa de esantionare.

Transformarea inversa ifft are expresia:

$$x(i) = (1/N) \sum_{k=1}^N X(k) \omega_N^{-(i-1)(k-1)};$$

FFT este eficient, daca $N = 2^m$.

Daca semnalul are L esantioane in timp, atunci se adopta $N = 2^{\text{nextpow2}(L)}$;

si se apelaza FFT cu sintaxa: $Y = \text{fft}(x, N)$; iar $x_i = \text{ifft}(Y)$ va fi semnalul initial prelungit cu valori nule restul de $N-L$ noduri.

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] =_{\text{def}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \cong \int_{-T_f}^{T_f} f(t) \exp(-j\omega t) dt \cong \sum_{i=1}^N f(t_i) \exp(-j\omega_k t_i) T_s = T_s \cdot \text{FFT}(f)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] =_{\text{def}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \cong \int_{-f_s}^{f_s} F(\omega) \exp(j\omega t) df \cong \sum_{k=1}^N F(\omega_k) \exp(j\omega_k t_i) f_s / N = f_s \cdot \text{iFFT}(F)$$

Deoarece spectrul generat de FFT este simetric fata de $k=N/2$, pentru a obtine spectrul corespunzator frecventelor pozitive se foloseste doar restrictia:

`f = fs/2 * linspace(0, 1, N/2+1); plot(f, 2 * abs(Y(1:N/2+1)));`

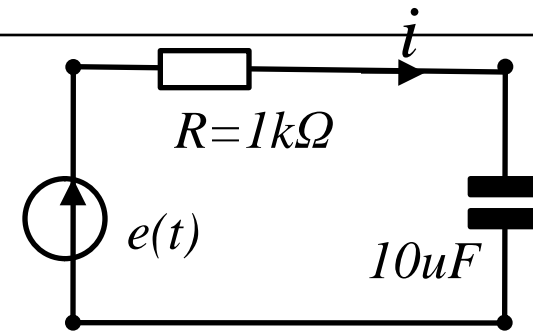
Aplicatii. Analiza in domeniul timpului vs in domeniul frecventei

Exemplu de analiza in domeniul timpului/frecventei

```

>> A=-100;
    B=100;
    N=1000; tmax=25e-2; t=[0:N-1]*tmax/(N-1); x=t;
    for k=1:N x(k)=exp(A*t(k))*B;
    end
    [T,Y] = ode45(@state,[0 5e-2],[0]);
    yprim=diff(Y)./diff(T);
    fmin=0; fmax=2e3; N=1024;
    f=fmin+(fmax-fmin)*(0:N-1)/(N-1); xf=f;
    for it=1:N w=2*pi*f(it);
        YC=j*w*1e-5;
        xf(it)=1/(1+1e3*YC);
    end
    y=ifft(xf);
    plot(T(1:size(T)-1),yprim,t,x, ...
        (0:N/2-1)/fmax,2*fmax*real(y(1:N/2)));
function [dy] = state(t,Y)
%state ecuatie de stare unidim
dy=-100*Y+100; end

```

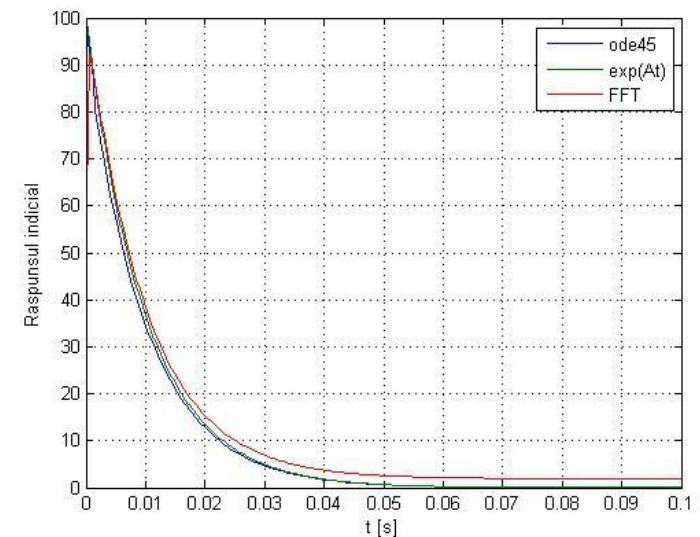


$$C \frac{du}{dt} = i = -u/R + e/R$$

$$u = e - Ri \Rightarrow i = (e - u)/R$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + bz; a = -100; b = 100$$

$$\underline{I} = \underline{EZ} / (R + \underline{Z}) = \frac{E}{Y(R + 1/Y)} = \frac{E}{1 + RY}$$

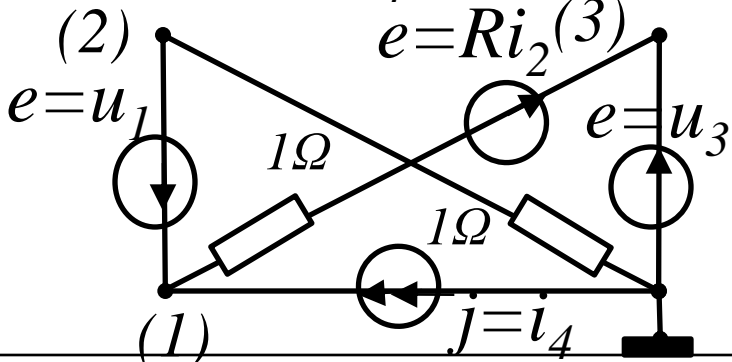
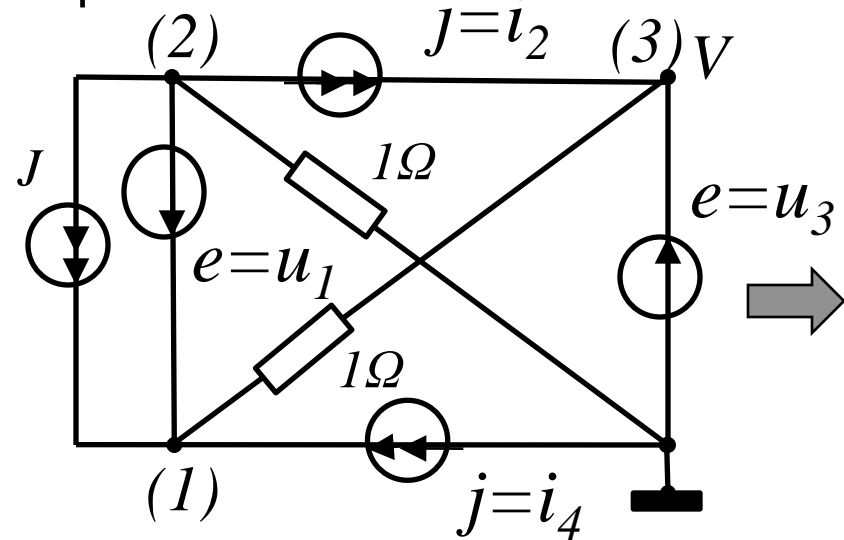
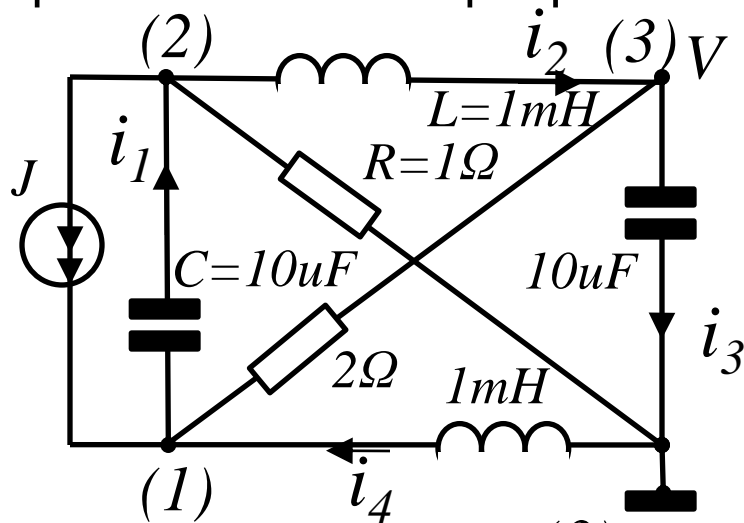


Calculati raspunsul la diverse excitatii: puls, sin.

Aplicatii. Analiza in domeniul timpului vs in domeniul frecventei

Exemplu de analiza in domeniul timpului

Circuitele liniare pot fi analizate in regim tranzitoriu in domeniul timpului sau al frecventei. Din raspunsul la excitatie treapta se obtine prin derivare raspunsul indicial si apoi prin convolutie raspunsul la o excitatie arbitrara.



$$G_{11}V_1 = I_{sc1} \Rightarrow 2V_1 / R = i_4 + u_1 / R + (Ri_2 + u_3) / R \Rightarrow$$

$$V_1 = (i_4 + u_1 - i_2 + u_3) / 2; V_2 = -u_1 + V_1; V_3 = u_3;$$

$$i_1 = j + i_2 + V_2 / R; i_3 = i_2 + (V_1 - V_3) / R =$$

$$i_2 + (i_4 + u_1 - i_2 + u_3) / 2 - u_3; u_2 = V_2 - V_3; u_4 = -V_1$$

Ecuatiile de stare:

$$\begin{aligned}
 G_{11}V_1 = I_{scl} &\Rightarrow 2V_1/R = i_4 + u_1/R + (Ri_2 + u_3)/R \Rightarrow \begin{cases} C_1 du_1 / dt = i_1 = j + i_2 + V_2 / R = (i_4 - u_1 + i_2 + u_3) / 2 + j; \\ C_3 du_3 / dt = i_3 = i_2 + (V_1 - V_3) / R = (i_4 + u_1 + i_2 - u_3) / 2; \\ L_2 di_2 / dt = u_2 = -u_1 + V_1 - u_3 = (i_4 - u_1 - i_2 - u_3) / 2; \\ L_4 di_4 / dt = u_4 = -V_1 = -(i_4 + u_1 - i_2 + u_3) / 2; \end{cases} \\
 V_1 = (i_4 + u_1 - i_2 + u_3) / 2; & V_2 = -u_1 + V_1; V_3 = u_3; \\
 i_1 = j + i_2 + V_2 / R; & i_3 = i_2 + (V_1 - V_3) / R = \\
 i_2 + (i_4 + u_1 - i_2 + u_3) / 2 - & u_3; u_2 = V_2 - V_3; u_4 = -V_1
 \end{aligned}$$

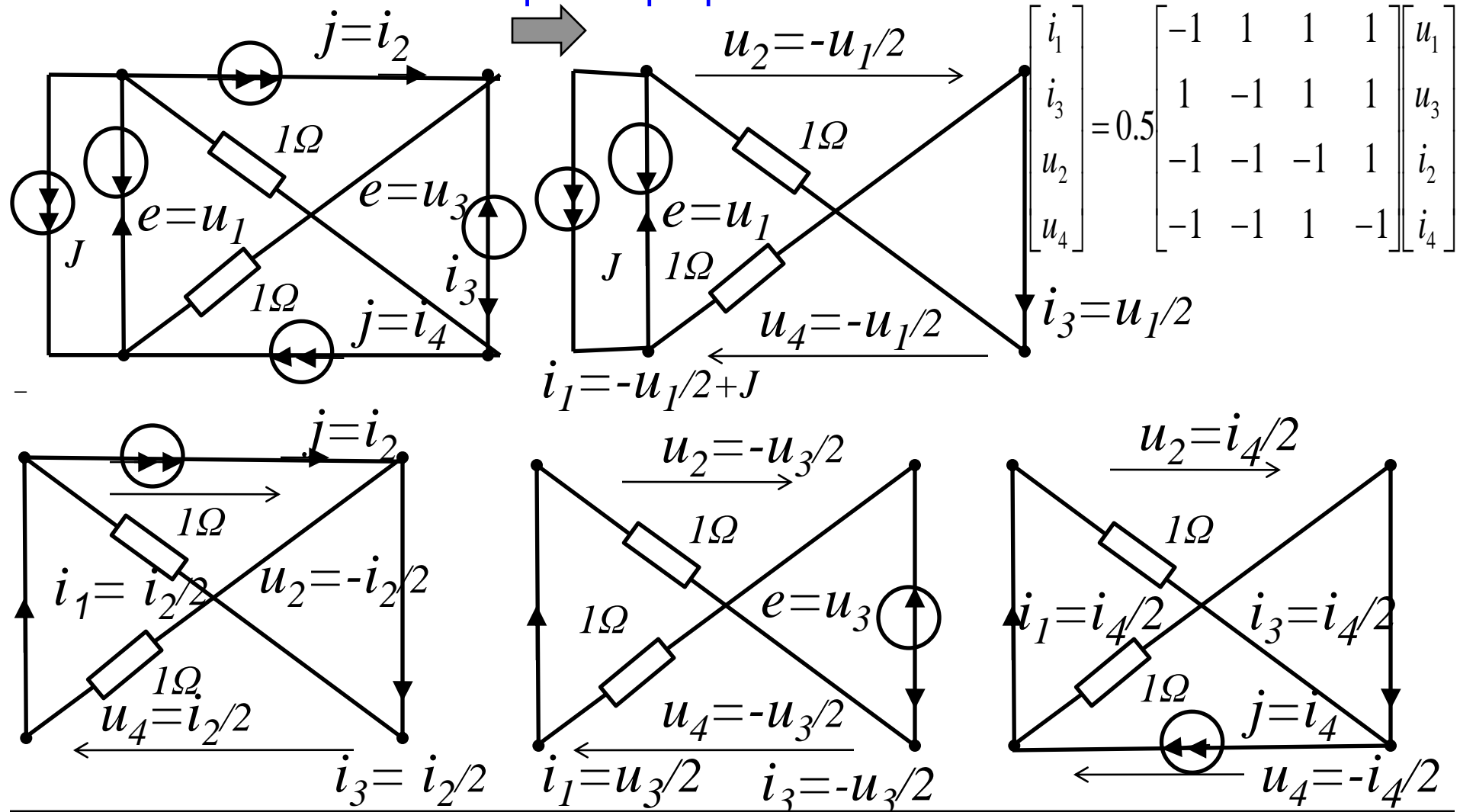
$$- \begin{bmatrix} i_1 \\ i_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ i_2 \\ i_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ i_2 \\ i_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = 500 \begin{bmatrix} -100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & -100 & 100 & 100 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10^5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}j; \quad j = \delta(t) \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{B}$$

```

>> A=500*[-100, 100, 100, 100; 100, -100, 100, 100; -1, -1, -1, 1; -1, -1, 1, -1];
B=[1e5, 0, 0, 0]'; N=100; tmax=30e-3; x=zeros(4,N); t=zeros(1,N);
for k=1:N
    t(k)=(k-1)*tmax/(N-1);
    x(1:4,k)=exp(A*t(k))*B;
end
plot(t,x(3,:)); eig(A)
    
```

- Acelasi rezultat se obtine prin superpozitie:



Valorile proprii: Matricea A are doua valori proprii reale negative si o pereche de valori proprii complexe. Solutia libera este de forma:

$$\lambda_1 = -1e5 = \alpha_1 = -1/\tau_1; \lambda_2 = -1e3 = \alpha_1 = -1/\tau_2;$$

$$\lambda_{34} = -8.18e-12 + j1e4 = \alpha_3 \pm j\omega_0 = -1/\tau_2; \Rightarrow$$

$$\tau_1 = 10\mu s; \tau_1 = 1ms; \tau_3 = 1/8.18Ts; f_0 = \omega_0 / (2\pi) = 1591.54Hz$$

$$x_l(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-t/\tau_2} + C_3 e^{-t/\tau_3} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Datorita dispersiilor mari ale valorilor constantelor de timp, ecuatia face parte din categoria “**stiff ODE**” si este foarte dificil de rezolvat numeric, iar $\exp(At)$ este instabil numeric pentru valori mari ale timpului.

- Transformata Fourier se aplica la analiza tranzitorie a circuitelor liniare cu conditii initiale nule. **Avantajul fata de transf. Laplace** este algoritmul FFT
- In **MATLAB convolutia** a doua semnale x si y esantionate pe aceasi retea de noduri se realizeaza in domeniul frecventei (chiar pentru functii indiciale determinate in domeniul timpului), prin transformarea lor FFT, inmultirea punct cu punct si apoi inversarea transformarii: `ifft(fft(x).*fft(y));`

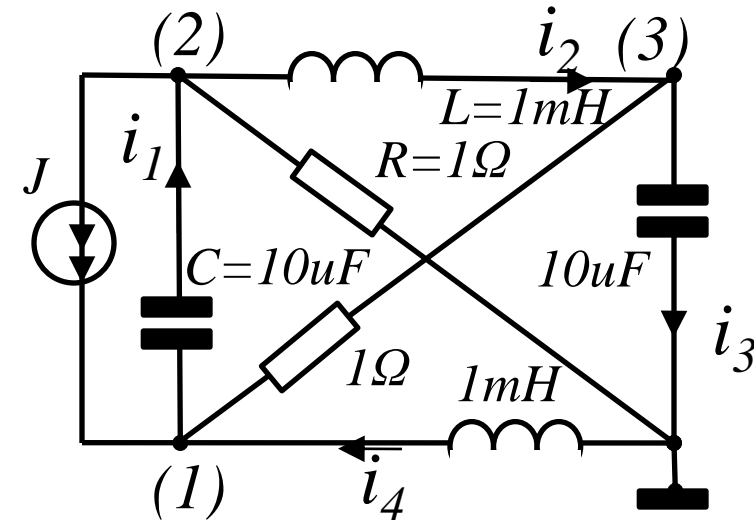
http://en.wikipedia.org/wiki/Stiff_equation

Aplicatii. Analiza in domeniul timpului vs in domeniul frecventei

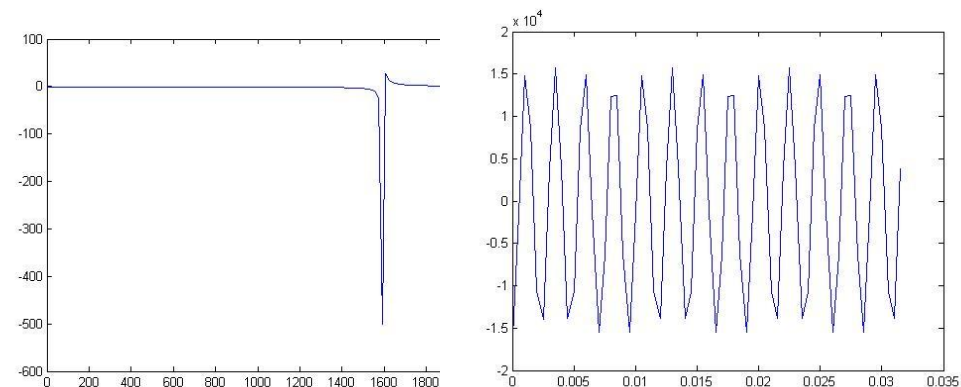
- Exemplu de analiza in domeniul frecventei.** Va fi analizat acelasi circuit.

```

fmin=1; fmax=2e3; N=128;
f=fmin+(fmax-fmin)*(0:N-1)/(N-1); xf=f;
for it=1:N w=2*pi*f(it);
    YC=j*w*1e-5; YL=-j*1e3/w;
    Yn=[1+YC+YL, -YC, -1;
        -YC, 1+YC+YL, -YL;
        -1, -YL, 1+YC+YL];
    Jn=[1, -1, 0]';
    Vn=Yn\Jn; xf(it)=(Vn(2)-Vn(3))*YL;
end
figure; plot(f(1:N),xf(1:N));
figure; y=ifft(xf); plot((0:N/2-1)/fmax,2*fmax*y(1:N/2));
    
```



In domeniul frecventei se obtin rezultate mai stabile numeric decat in domeniul timpului.



Aplicatii. Modelarea elementelor cu parametri distribuiti

- Elementele de circuit cu parametri distribuiti sunt caarcterizate de impedante compexe ce depind de frecventa prin intermediul unor functii transcendente (vezi conductorul masiv in MQS sau linia de transmisie). Aceste functii au o infinitate de poli zi zerouri, deci pot fi modelate cu circuite care au o infinitate de elemente acumulative de energie. Sunt deci sisteme cu un numar finit de intrari si iesiri, dar au un **spatiu al starilor de dimensiune infinita**.
- Prin discretizarea spatiala a ecuatiilor campului electromagnetic se obtin ecuatii diferentiale ordinare cu un numar finit stari. In consecinta, **sistemul discretizat** este unul care are o dimensiune finita a starilor (de ordinul numarului de grade de libertate folosite in metoda numerica de camp),
- Chiar daca este finit, modelul discret are o complexitate prea mare. Pentru a fi util. lui ii trebuie aplicata o procedura de **reducere a ordinului**. De exemplu prin **Vector Fitting** care da o aproximare rationala a datelor.
- Determinati un model de ordin redus pentru un **conductor cilindric masiv**
- Determinati **raspunsul indicial al liniei lungi**, cu FFT aplicat matricei $Z(\omega)$.
- Determinati **un model de ordin redus pentru o linie de transmisie** bifilara (cu si fara efect pelicular!). Comparati cu discretizarea cu lant de linii scurte. Generati automat modelul SPICE al liniei pornind de la datele ei geometrice.

http://web.mit.edu/mor/about_mor.html <http://www.energy.sintef.no/Produkt/VECTFIT/>

6.13. Analiza numerica a circuitelor electrice (opt.)

- Cea mai simpla problema este cea a **circuitelor electrice liniare de c.c.**

Analiza consta in patru etape:

- Introducerea datelor (descrierea circuitului)
 - Generarea matricei sistemului liniar si a termenului liber
 - Rezolvarea sistemului de ecuatii algebrice liniare
 - Postprocesarea: calculul si afisarea rezultatelor
- Circuitul poate fi descris intr-un limbaj dedicat (de exemplu de tip SPICE) sau pe cale interactiva, inclusiv grafica.
 - Generarea matricelor se face cu una din metodele sistematice prezentate anterior. Cea mai simpla este tehnica nodala (eventual modificata). Pentru circuitel de foarte mari dimensiuni se recomanda folosirea matricelor rare (in care se meoreaza doar valorile si pozitiile elementelor nenule).
 - Rezolvarea sistemului de ecuatii se face secvential sau paralel prin metode directe. Rezolvarea sistemelor cu matrice rare cere tehnici speciale, care minimizeaza umplerea. Aceste tehnici sunt apelate si de \ din MATLAB: <http://www.mathworks.comhelp/techdoc/math/f6-8856.html>
 - Postprocesarea se poate face automat sau interactiv.

Analiza numerica a circuitelor electrice (cont.)

- Analiza numerica a **circuitelor electrice liniare de c.a.** este similara cu analiza de c.c. numai ca acum se opereaza cu numere complexe. MATLAB nu face deosebirea intre variabilele reale si cele complexe. Singura modificare a codului se refera la introducerea datelor cand se reprezenta in complex impedantele/admitantele si semnalele sinusoidale de intrare.
- Analiza numerica a **circuitelor rezistive neliniare.** In acest caz trebuie rezolvate sisteme de ecuatii “algebrice” neliniare. Cea mai simpla abordare a acestei probleme este folosirea *aproximarii liniare pe portiuni*, care reduce analiza la o serie de rezolvari de probleme liniare de c.c.
- Functiile caracteristice ale elementelor dipolare, descrise tabelar sunt approximate linair pe portiuni. In acest fel ele au in fiecare portiune cate o schema echivalenta de tip SRT. Analiza numerica presupune parcurgerea ciclica a tuturor combinatiilor de portiuni ale elementelor neliniare din circuit si rezolvarea pentru fiecare combinatie a probemei liniare de c.c. obtinuta prin inlocuirea elementului cu SRT corespunzatoare portiunii respective. Ciclul este abandonat, daca solutia este in interiorul intervalului de valabilitate a schemei SRT folosite. <http://www.mate.tue.nl/mate/pdfs/6004.pdf>
- Scrieti codul MATLAB pentru analiza circuitelor neliniare cu aceasta metoda. <http://www.plexim.com/files/plecsmanual.pdf>

Analiza numerica a circuitelor electrice (cont.)

- Daca circuitul contine multe elemente neliniare iar elementele neliniare sunt descrise de tabele cu multe noduri, atunci metoda aproximarii liniare pe portiuni nu este performanta, deoarece risipeste resursele de calcul, rezolvand inutil foarte multe circuite liniare de c.c. Pentru a evita aceasta risipa se folosesc metode de rezolvare iterativa a sistemelor de ecuatii neliniare ce descriu circuitele rezistive neliniare. Dintre acestea, cea mai des folosita este *metoda Newton-Raphson*.
- In rezolvarea sistemului de n ecuatii neliniare cu n necunoscute, la fiecare iteratie se aproximeaza functia neliniara cu o functie afina obtinuta prin trunchierea seriei Taylor la primii ei doi termeni:

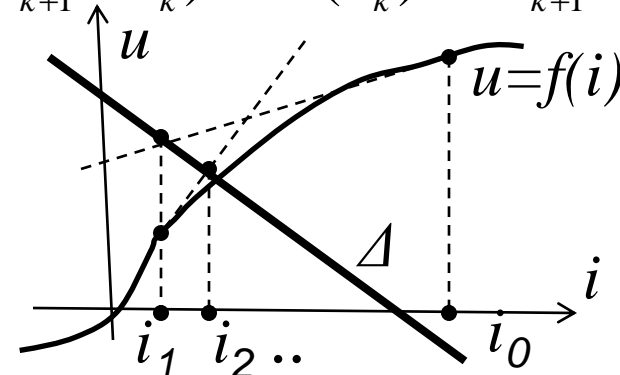
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) = 0$$

La iteratia $k=0,1,2,\dots$ se rezolva sistemul linear $[\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)](\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \Rightarrow \mathbf{x}_{k+1}$

Matricea sistemului linear este chiar Jacobianul sistemului de functii. Circuitul electric care are aceste ecuatii liniare se obtine inlocuind la iteratia $k+1$ rezistoarele neliniare cu SRT (dinamica) de ecuatie:

$$u = f(i_k) + f'(i_k)(i - i_k) = Ri + e$$

cu R rezistenta dinamica pentru curentul din iteratia anterioara.



- Metoda Newton-Raphson in tehnica nodala:**

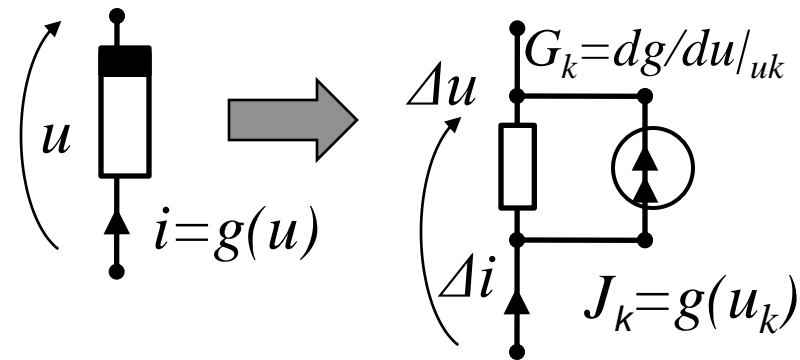
$$\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{v} = -\mathbf{A} \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{j} = \mathbf{Y}_n \mathbf{v} - \mathbf{j}_n$$

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{v}_k)](\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{v}_k) \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{Y}' \mathbf{A}^T \mathbf{w}_k = -(\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_k + \mathbf{A} \mathbf{j}) = -\mathbf{f}(\mathbf{v}_k) \Rightarrow$$

$$\mathbf{w}_k = \Delta \mathbf{v}_k = -[\mathbf{A} \mathbf{Y}' \mathbf{A}^T]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k \Rightarrow \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k$$

solutia incrementala (variatiia de la iteratia curenta la cea urmatoare) este data de un circuit liniar (diferential, de variatii):

Noua iteratie se obtin si rezolvand circuitul liniar (diferential):

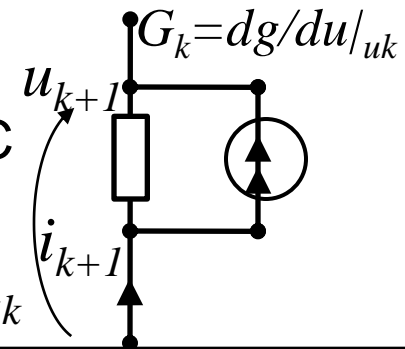


$$[\mathbf{f}'(\mathbf{v}_k)](\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{v}_k) \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{Y}' \mathbf{A}^T (\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k) = -(\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_k + \mathbf{A} \mathbf{j}) \Rightarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}' \mathbf{A}^T \mathbf{v}_{k+1} = -(\mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T \mathbf{v}_k + \mathbf{A} \mathbf{j}) + \mathbf{A} \mathbf{Y}' \mathbf{A}^T \mathbf{v}_k = -\mathbf{A}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}') \mathbf{A}^T \mathbf{v}_k - \mathbf{A} \mathbf{j}$$

Ambele circuite se obtin inlocuind rezistoarele neliniare cu SRC cu conductanta dinamica la iteratia curenta, dar c.e.m. diferiti.

Similar, in cazul MNA. Modificati codul anterior!. $J_k = g(u_k) - G_k u_k$



Analiza numerica a circuitelor electrice (cont.)

- Analiza numerica a circuitelor electrice in **regim tranzitoriu** se poate face prin integrarea numerica a ecuatiilor de stare (ODE), caracteristice acestor circuite neliniare sau liniare $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t); \Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}(t)$

cu metode de tip Runge-Kuta sau bazate pe derivarea numerica in m pasi:

$$\mathbf{x}'(t_k) \cong \mathbf{x}'_k = (1/h_k) \sum_{r=0}^m a_r \mathbf{x}_{k-r}; \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k); & \text{Euler regresiva} \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}); & \text{Euler progresiva} \\ \mathbf{x}_k = h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)/a_0 - \sum_{r=1}^m a_r \mathbf{x}_{k-r} & \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}))/2; & \text{Metoda trapezelor} \end{cases}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods

<http://www.mccormick.northwestern.edu/docs/efirst/ode.pdf>

Axa timpului se discretizeaza in momentele $t_0, t_1=t_0+h, t_2=t_1+h, \dots$ si se parcurg aceste noduri. La fiecare moment discret, in cazul metodelor implicite (la care a_0 este nenul) se determina solutia prin rezolvarea sistemului de ecuatii neliniare sau liniare:

$$\mathbf{x}_k - h_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) / a_0 = - \sum_{r=1}^m a_r \mathbf{x}_{k-r} \Rightarrow \mathbf{x}_k - h_k (\mathbf{Ax}_k + \mathbf{Bu}(t_k)) / a_0 = - \sum_{r=1}^m a_r \mathbf{x}_{k-r}$$

Ecuatii ale unui circuit rezistiv obtinut prin inlocuirea elementelor LC cu SRT.

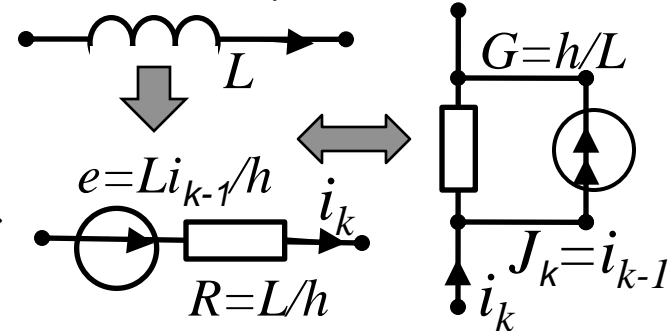
Analiza numerica a circuitelor electrice (cont.)

De ex. in metoda Euler implicita, L,C se inlocuiesc cu SRT sau SRC (discrete):

$$u = L \frac{di}{dt} \cong L \frac{i_k - i_{k-1}}{h} = u_k \Rightarrow u = Ri - e; R = L/h; e = Ri_{k-1}$$

$$i = C \frac{du}{dt} \cong C \frac{u_k - u_{k-1}}{h} = i_k \Rightarrow i = Gu - j; G = C/h; j = Gu_{k-1} \Leftrightarrow$$

$$R = h/C; e = Rj = u_{k-1}$$



Daca circuitul este liniar, la fiecare moment de timp se rezolva circuitul liniar de c.c. obtinut prin inlocuirea elementelor reactive cu surse reale de curent sau tensiune. Circuitele neliniare se rezolva iterativ, cu metoda Newton-Raphson. La fiecare iteratie neliniara, rezistoarele neliniare se inlocuiesc cu surse reale de curent sau tensiune. Precizia metodei de integrare in timp este mai ridicata cu cat pasul de timp h este mai scazut. La pasi mici de timp si metoda Newton este mai rapid convergenta. Prin aceasta abordare analiza s-a redus la o serie de rezolvari de circuite de c.c. liniare. Aceste circuite pot fi rezolvate cu orice metoda, inclusiv cu tehnica nodala, deci **nu este necesara scrierea ecuatiilor de stare.**

- Pentru precizia simularii, programele performante modifica automat pasul de timp si adapteaza ordinul si tipul metodei la fiecare pas de timp.

- **Structura algoritmului de simulare tranzitorie a circuitelor neliniare**

```
t=0; Initializaza tensiunile/curentii cu zero sau cu conditiile initiale
repete t=t+h % avanseaza pasul de timp al integrarii numerice
    inlocuieste elementele reactive cu SRC/SRC discrete; It=0
    repete It = It + 1 % iteratiile neliniare Newton-Raphson
        inlocuieste rezistoarele neiniare cu SRC/SRT dinamice (de variatii)
        rezolva circuitul liniar cu MNA % (calculeaza variatia w a solutiei)
        (x = x + w % corecteaza solutia)
        daca It == Itmax mesaj de eroare % neconvergent
    pana cand norma(v) < tol sau It == Itmax
- pana cand t > tmax
```

- Scrieti **codul MATLAB pentru analiza circuitelor electrice in regim tranzitoriu.**

Indicatie: incorporati codul dezvoltat anterior pentru circuite rezistive neliniare.

Chiar daca aplicatiile implementate nu au performantele unor programe profesionale, ele permit intelegerea anatomiei acestor programe dar si folosirea lor eficienta in cazul problemelor dificile (vezi de exemplu comanda SPICE .OPTIONS). Mai mult, portiuni din codurile realizate pot fi folosite cu succes in cercetare/dezvoltare, cand sunt necesare aplicatii customizate.

<http://automation.ucv.ro/Romana/cursuri/beAB12/7%20Analiza%20prin%20programe%20specializate.pdf>

- **Comenzi SPICE “cu punct”**
- .DC – analiza de c.c. si analiza variatiei parametrice a surselor
- .OP – gaseste PSF (Punctul Static de Functionare) in c.c.
- .TF – functia de transfer pentru semnale mici de c.c.
- .AC – analiza de c.a. de mici variatii a circuitului liniarizat in PSF
- .NET – calculeaza functiile de circuit (Z, Y, H) intr-o analiza c.a.
- .TRAN – analiza tranzitorie neliniara
- .IC – specificarea conditii initiale
- .FOUR – analiza Fourier dupa una tranzitorie
- .STEP – analiza parametrica
- .NOISE – analiza de zgomot
- .OPTIONS – optiunile simulatorului: de ex. itl1=ltmax; method= metoda de integrare numerica; pivtol=toleranta pivotului; reltol=toleranta relativa; s.a
- .END – sfarsit descriere circuit

<http://www.it.hs-mannheim.de/cms/files/1/.261.140.706.335,000,00.pdf>

- Relatiilor lui Kirchhoff in forma matriciala au o diversitate de forme echivalente, in care intervin matricile topologice A , B , C sau D . Arborii din grafurile circuitelor joaca un rol central in construirea acestor matrici si in scrierea corecta a ecuatiilor lui Kirchhoff.
- Teorema lui Tellegen are o importanta deosebita, atat din punct de vedere conceptual cat si aplicativ. Ea garanteaza conservarea puterilor, indiferent de topologia circuitului sau de tipul elementelor care alcatuiesc circuitul.
- In teoria circuitelor electrice, circuitele sunt alcatuite din elemente ideale, deci sunt modele abstracte ale circuitelor reale. Din acest motiv este posibil ca circuitul sa fie gresit alcatuit, Verificarea corectitudinii formularii este o conditie necesara pentru a obtine solutii cu semnificatie corecta in practica. De obicei formularea incorecta se explica prin modelarea idealizata excesiv.
- Analiza sistematica se poate face prin mai multe metode: Kirchhoff, curenti ciclici, tehnica nodala si atele, fiecare cu avantaje - mai ales tehnica nodala.
- Teoremele fundamentale ale circuitelor: a pasivitatii, liniaritatii, reciprocitatii sau a afinitatii au formulari elegante, asemanatoare, independente de regim.
- Teoremele Thevenin, Norton si generalizarile lor completeaza teoremele de echivalenta prezentate in capitolele anterioare. Algebra liniara si calculul matriceal sunt instrumente de baza in analiza circuitelor.

Sunt recomandate pentru o pregatire minima: [1,2] ; [3] dezvoltă teoria câmpului iar [4] teoria circuitelor. Titlurile [5,6,7-8] sunt cursuri de nivel introductiv, mediu și respectiv avansat iar [9] este util pentru capătarea deprinderilor de rezolvare a problemelor – aplicații. Ultimele titluri se referă la aspecte avansate-de cercetare.

1. FMG Tomescu, Anca Tomescu, Bazele electrotehnicii, Camp el-mg, Circuite electrice, Matrix Rom
2. Mihai Iordache, Bazele electrotehnicii, Editura Matrix Rom 2009
3. A. Timotin, Viorica Hortopan, A. Irim, M. Preda, "Leccióni de Bazele Electrotehnicii", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970.
4. L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh, "Linear and nonlinear circuits", McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
5. D. Ioan. *Electrotehnica si electronica industrială*, vol. 1-3. I.P.B., Bucuresti, Romania, 1983-5
5. bis. Daniel Ioan, *Bazele electrotehnicii*, 2000, www.lmn.pub.ro/~daniel/cursbaze.pdf
2. M. Preda, P. Cristea, "Bazele electrotehnicii", vol. I și vol. II. Circuite electrice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
3. C. I. Mocanu, "Teoria câmpului electromagnetic", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
4. C.I. Mocanu, "Teoria circuitelor electrice", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
5. R. Răduleț, *Bazele Electrotehnicii - Probleme I si II*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
6. R. Radulet, Al. Timotin, and A. Tugulea. Introducerea parametrilor tranzitorii in studiul circuitelor electrice lineare avand elemente neliforme si pierderi suplimentare. St. cerc. energ. electr., 16(4):857-929, 1966
7. Wai-Kai Chen, *The Circuits and Filters Handbook*, CRC Pres, 2009,
8. L.O. Chua, P.M. Lin, "Computer-aided analysis of electronic circuits", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975
9. Ricardo Rianza, *Differential-Algebraic Systems: Analytical Aspects and Circuit Applications*, 2008

- [http://msdn.microsoft.com/en-us/library/ms379574\(v=vs.80\).aspx](http://msdn.microsoft.com/en-us/library/ms379574(v=vs.80).aspx)
- **Prof. dr. ing. Dumitru TOPAN**, Curs Bazele electrotehnicii la Fac. Automatica – Univ. Craiova
http://www.automation.ucv.ro/Romana/cursuri/beAB12/c_be.htm
- http://en.wikipedia.org/wiki/Tellegen's_theorem
- <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27244-circuit-analysis-toolbox>
- http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27244-circuit-analysis-toolbox/content/circuit%20analysis/help/helpfiles/tellegen_demo.html
- **EENG223 - Circuit Theory I / INFE221 Electric Circuits; Eastern Mediterranean University;**
<http://faraday.ee.emu.edu.tr/EENG223/>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Mesh_analysis
- http://en.wikipedia.org/wiki/Nodal_analysis
- http://en.wikipedia.org/wiki/Analysis_of_resistive_circuits
- <http://web.cecs.pdx.edu/~prasads/CircuitTheorems.pdf>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9venin's_theorem
- http://en.wikipedia.org/wiki/Norton's_theorem
- http://www.tifr.res.in/~achanta/Electronics/Lectures/EquivalentTheorems_Proofs.pdf
- [http://en.wikipedia.org/wiki/State_space_\(controls\)](http://en.wikipedia.org/wiki/State_space_(controls))
- http://en.wikipedia.org/wiki/Zero_state_response
- http://www.tedpavlic.com/teaching/osu/ece209/support/circuits_sys_review.pdf
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>