ELEMENTUL ELECTROMAGNETIC PASIV DE CIRCUIT

DE

AL. TIMOTIN

621.3.011

Se defineşte elementul electromagnetic pasiv de circuit ca parte fără surse a unui sistem electromagnetic a cărui interacţiune cu exteriorul poate fi caracterizată cu ajutorul unui număr finit de variabile, funcţionale liniare de mărimile de stare locală a cîmpului electromagnetic, cum sînt curenţii, tensiunile electrice, fluxurile magnetice şi tensiunile magnetice. Teorema de unicitate a soluţiilor ecuaţiilor cîmpului permite să se identifice variabilele de interacţiune printre factorii expresiei algebrice biliniare la care se poate reduce fluxul energiei electromagnetice prin suprafaţa închisă care mărgineşte elementul.

Se stabilesc condiţiile pe care trebuie să le satisfacă această suprafaţă pentru a fi suprafaţa de separaţie a unui element electromagnetic de circuit, demonstrîndu-se teorema corespunzătoare a transferului de putere conform căreia fluxul de energie electromagnetică printr-o suprafaţă de separaţie delimitînd un domeniu multiplu conex are expresia algebrică biliniară căutată.

1. INTRODUCERE

Trecerea de la o teorie de cîmp la o teorie de reţea (de circuit) a regimurilor tranzitorii ale unui sistem fizic se poate face dacă sistemul admite o descompunere finită în părţi, subsisteme, astfel încît fiecare dintre acestea să fie caracterizabilă, din punctul de vedere al interacţiunii ei cu restul sistemului sau cu exteriorul, printr-un număr finit de variabile. Dacă o astfel de descompunere e posibilă, sistemul fizic considerat admite un model discret şi se poate numi *reţea* sau *circuit*. Variabilele de interacţiune vor fi mărimi de intrare sau de ieşire pentru subsistemele componente, care vor putea fi numite *elemente de reţea* sau *elemente de circuit*. Pentru fiecare element în parte vor exista, în număr finit, relaţii exprimînd mărimile de ieşire în funcţie de mărimile de intrare şi de starea iniţială a elementului. În aceste condiţii, structura şi evoluţia întregului sistem vor putea fi descrise cu ajutorul unui număr finit de ecuaţii obţinute din condiţiile de interconexiune ale părţilor lui (elementele) şi din relaţiile caracteristice elementelor.

St. cerc. energ. electr., tom. 21, nr. 2, p. 347—362, 1971

Un astfel de punct de vedere a fost dezvoltat sistematic în lucrarea [1] pentru sisteme electromagnetice interpretabile ca *rețele* sau *circuite electrice*, adică decompozabile în *elemente de circuit electric* ocupînd domenii simplu conexe, a căror interacțiune cu exteriorul era caracterizabilă prin curenți electrici și tensiuni electrice în număr finit (multipoli electrici). Același punct de vedere a fost dezvoltat în lucrarea [2] pentru sisteme de corpuri în contact termic sau pentru sisteme de medii în contact „chimic", permițînd schimbul de masă prin difuzie.

În lucrarea de față se generalizează considerațiile din lucrarea [1] la sisteme electromagnetice interpretabile ca asociații de elemente cuplate nu numai electric, ci și magnetic cu exteriorul și ocupînd domenii multiplu conexe.

Studiul se limitează la medii imobile cu proprietăți electromagnetice de material invariabile, liniare, pasive (fără cîmp imprimat), nedispersive (independente de frecvență și, implicit, fără trenaj electric sau magnetic) și imobile, caracterizate prin conductivitate σ, permitivitate ε și permeabilitate μ, funcții date de punct. În demonstrație, aceste funcții sînt considerate scalare. Generalizarea la medii anizotrope reciproce, cu proprietăți de material descrise de mărimi tensoriale simetrice, este imediată.

2. ELEMENTUL ELECTROMAGNETIC PASIV ȘI UNICITATEA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ASOCIAT LUI

Un sistem electromagnetic poate fi descompus, după voie, în părți disjuncte definite de anumite domenii D_Σ, în general multiplu conexe, și mărginite de suprafețe închise Σ, de asemenea multiplu conexe.

Sistemul este strict electromagnetic numai dacă are toate proprietățile electromagnetice de material *invariabile* și conține numai corpuri *imobile*.

În fiecare domeniu D_Σ, cîmpul electromagnetic are structura locală și evoluția instantanee descrise de ecuațiile lui Maxwell:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \sigma \boldsymbol{e} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{e} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}, \tag{1}$$

cu condițiile de trecere pe suprafețe de discontinuitate S_{12} (de normală $\boldsymbol{n}_{12}$)

$$\boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_1)|_{S_{12}} = 0; \quad \boldsymbol{n}_{12} \times (\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)|_{S_{12}} = 0, \tag{2}$$

în care $\sigma(M) \geqslant 0$, $\varepsilon(M) > 0$ și $\mu(M) > 0$ sînt funcții date de punct, prezentînd cel mult discontinuități de prima specie pe suprafețele S_{12}. Conductivitatea σ e diferită de zero în subdomeniul conductor D_{cond}.

Din ecuațiile cîmpului (1), (2) rezultă teorema energiei electromagnetice:

$$-\oint_\Sigma (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{h})\, \boldsymbol{n}\, \delta A = \int_{D_{\text{cond}}} \sigma e^2\, \delta v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{D_\Sigma} \left(\frac{\varepsilon e^2}{2} + \frac{\mu h^2}{2} \right) \mathrm{d}v \tag{3}$$

sau

$$p_\Sigma(t) = p_J(t) + \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{4}$$

în care

$$p_\Sigma(t) \equiv -\oint_\Sigma (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{h})\,\boldsymbol{n}\,\delta A \equiv \oint_\Sigma (\boldsymbol{e}_t\times\boldsymbol{h}_t)\,\boldsymbol{n}_{\mathrm{int}}\delta A \tag{5}$$

este puterea electromagnetică instantanee primită prin fluxul vectorului lui Poynting $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{h}$ prin suprafața frontieră Σ (avînd sensul normalei interioare $\boldsymbol{n}_{\mathrm{int}} = -\boldsymbol{n}$), $p_J \geqslant 0$ e puterea disipată instantaneu prin efect Joule în conductoarele din D_Σ, iar $w(t) \geqslant 0$ energia electromagnetică instantanee acumulată de cîmp. Teorema energiei permite să se demonstreze [1] unicitatea soluțiilor ecuațiilor cîmpului. Pentru a reformula această teoremă într-un limbaj mai general, vom nota cu

$$\mathcal{S}(t) = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}(M,t) \\ \boldsymbol{h}(M,t) \end{bmatrix}\right\}(M \in D_\Sigma) \tag{6}$$

mulțimea perechilor de valori $\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{h} \end{bmatrix}$ ale mărimilor $\boldsymbol{e}$ și $\boldsymbol{h}$ (fiecare pereche e o matrice-coloană cu două linii) în *toate* punctele domeniului D_Σ, considerate la un moment dat t.

Conform teoremei de unicitate, soluția (6) e univoc determinată în orice moment $t \geqslant t_0$ de către *condițiile inițiale* din momentul $t_0- = t_0 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0)$:

$$\mathcal{S}(t_0^-) = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}(M,t_0^-) \\ \boldsymbol{h}(M,t_0^-) \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_e(M) \\ \boldsymbol{F}_h(M) \end{bmatrix}\right\}, \tag{7}$$

și de către *condițiile de frontieră* pe suprafața Σ, pentru $t_0 \leqslant t' < t$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_t(M,t')|_{\Sigma 1} &= \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{g}_e(P,t'); \; M \to P \in \Sigma_1 \subset \Sigma \\ \boldsymbol{h}_t(M,t')|_{\Sigma 2} &= \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{g}_h(P,t'); \; M \to p \in \Sigma_2 \subset \Sigma \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

$\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ fiind o partiție oarecare a acestei suprafețe în două părți (disjuncte și complementare). Condițiile de frontieră se dau deci în fiecare punct al acesteia, fie prin componenta tangențială $\boldsymbol{e}_t$ a cîmpului electric, fie prin componenta tangențială $\boldsymbol{h}_t$ a cîmpului magnetic (componente continue, conform cu (2), la trecerea prin orice suprafață).

Interpretată din punctul de vedere al *principiului cauzalității*, conform căruia starea inițială a unui sistem fizic și variația în timp a unor mărimi de interacțiune cu exteriorul îi determină complet și univoc evoluția ulterioară, teorema de unicitate permite să se identifice *mărimile de stare locală* și *instantanee* a cîmpului, $\boldsymbol{e}$ și $\boldsymbol{h}$ (deoarece valorile lor precizează condiţiile iniţiale), şi *mărimile lui de interacţiune cu exteriorul*, $e_t|_\Sigma$ şi $h_t|_\Sigma$ (deoarece valorile lor pot preciza acţiunea exteriorului asupra cîmpului din D_Σ, acţiune care, în acord cu principiul acţiunii din aproape în aproape, se poate localiza numai pe suprafaţa frontieră).

Sistemul fizic definit de cîmpul electromagnetic din interiorul domeniului considerat are deci, în general, o infinitate (cu puterea continuului) de mărimi de interacţiune, adică — în limbajul teoriei sistemelor — o infinitate de mărimi de intrare. El va putea fi considerat un *element de circuit* numai pentru suprafeţe-frontieră îndeplinind condiţii restrictive suplimentare, care să permită determinarea mulţimii mărimilor de interacţiune de mai sus printr-una finită. Dar demonstraţia teoremei de unicitate pune în vedere faptul că mărimile de interacţiune $e_t|_\Sigma$ sau $h_t|_\Sigma$ sînt cele care intervin ca factori în expresia biliniară (5) a puterii electromagnetice primită din exterior. De aceea vom numi *element electromagnetic de circuit* un subsistem electromagnetic $\mathcal{E}$, definit de domeniul mărginit de o suprafaţă închisă Σ, în general multiplu conexă, numită *suprafaţă de separaţie*, avînd proprietatea de a reduce expresia biliniară (5) la o formă algebrică:

$$p_\Sigma \equiv \oint_\Sigma (e_t \times h_t)\, n_{\text{int}} \delta s = \sum_{k=1}^{m} x_k \cdot y_k \equiv X_T Y, \tag{9}$$

în care

$$x_k = x_k(t) = \mathcal{X}_k\left\{\begin{bmatrix} e_t(P,t) \\ h_t(P,t) \end{bmatrix}\right\} \qquad P \in \Sigma;\; k = 1, 2, \dots, m) \tag{10}$$

sînt m funcţii de timp, liniar independente, elemente ale matricei-coloană $X(t) = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix}$, definite de *funcţionale liniare* $\mathcal{X}_k$ de funcţia de punctul $P \in \Sigma$, bicîmpul $\begin{bmatrix} e_t \\ h_t \end{bmatrix}_\Sigma$. Astfel de funcţionale liniare sînt tensiunile (integralele de linie), fluxurile (integralele de suprafaţă) sau combinaţii liniare ale acestora etc. Cofactorii

$$y_k = y_k(t) = \mathcal{Y}_k\left\{\begin{bmatrix} e_t(P,t) \\ h_t(P,t) \end{bmatrix}\right\} \qquad P \in \Sigma;\; k = 1, 2, \dots, m) \tag{11}$$

sînt alte funcţii de timp, liniar independente, elemente ale matricei-coloană $Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}$, definite tot prin funcţionale liniare $\mathcal{Y}_k$ de bicîmpul $\begin{bmatrix} e_t \\ h_t \end{bmatrix}_\Sigma$.

Pentru a justifica această definiție, vom considera teorema energiei electromagnetice (4), care cu (9) ia forma

$$\sum_{k=1}^{m} x_k(t)\cdot y_k(t) = p_J(t) + \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

şi, după integrare în timp, devine

$$w_\Sigma(t_0-,t) \equiv \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0-}^{t} x_k(t')\cdot y_k(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0-}^{t} p_J(t')\,\mathrm{d}t' + w(t) - w(t_0-). \tag{13}$$

În această relație, $w_\Sigma(t_0-, t)$ este energia primită din exterior în intervalul considerat. Se constată imediat că, în *condiții inițiale omogene* (de repaus),

$$\mathcal{S}(t_0-) \equiv \left\{\begin{bmatrix} e(M,t_0-) \\ h(M,t_0-) \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \to w(t_0-) = 0 \tag{14}$$

şi pentru *condiții de interacțiune omogene* (de izolare)

$$X(t) \equiv 0 \longleftrightarrow x_k(t) = 0 \to w_\Sigma(t_0-,t) = 0 \quad (t \geqslant t_0), \tag{15}$$

energia electromagnetică acumulată în cîmp în momentul t e nepozitivă:

$$w(t) = -\int_{t_0-}^{t} p_J(t')\,\mathrm{d}t' \leqslant 0 \tag{16}$$

(deoarece $p_J \geqslant 0$) şi deci nulă (deoarece totdeauna $w(t) \geqslant 0$):

$$w(t) \equiv \int_{D_\Sigma} \left(\frac{\varepsilon e^2(M,t)}{2} + \frac{\mu h^2(M,t)}{2} \right) \delta v = 0. \tag{17}$$

Cum această energie e o funcțională pozitiv definită de fiecare dintre funcțiile de punct $\boldsymbol{e}$ sau $\boldsymbol{h}$, din (17) rezultă că, în condiții inițiale şi de interacțiune omogene (sistem izolat, inițial în repaus), mărimile $\boldsymbol{e}$ şi $\boldsymbol{h}$ rămîn nule în orice moment ulterior în D_Σ :[1]

$$\mathcal{S}(t) \equiv \left\{\begin{bmatrix} e(M,t) \\ h(M,t) \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}. \tag{18}$$

Acest rezultat permite să se demonstreze *teorema de unicitate a soluțiilor ecuațiilor lui Maxwell pentru cîmpul unui element electromagnetic pasiv de circuit.*

---

[1] Nu analizăm aici clasele de funcții cărora trebuie să le aparțină funcțiile de punct şi de timp considerate.

Starea inițială (7) și condițiile de interacțiune

$$X = X(t) \longleftrightarrow x_k = x_k(t) \quad (k = 1, 2, \cdots, m, \; t \geqslant t_0) \tag{19}$$

în intervalul de timp cuprins între momentul inițial și un moment ulterior oarecare determină univoc starea (6) în acel moment ulterior. Simbolic,

$$[\mathcal{S}(t_0-) \, ; \; X(t)]_{t \geqslant t_0} \to \mathcal{S}(t). \tag{20}$$

Într-adevăr, dacă ar exista două stări $\mathcal{S}_1(t)$ și $\mathcal{S}_2(t)$ compatibile cu aceeași stare inițială (7) și cu aceleași condiții de interacțiune (19), s-ar putea defini o stare „diferență" :

$$\mathcal{S}_d(t) \equiv \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1(M, t) - \boldsymbol{e}_2(M, t) \\ \boldsymbol{h}_1(M, t) - \boldsymbol{h}_2(M, t) \end{bmatrix} \right\}, \tag{21}$$

care ar fi o soluție a ecuațiilor liniare (1) (2) ale cîmpului în D_Σ, ar verifica condiții inițiale omogene de forma (14) și condiții de interacțiune omogene de forma (15), deoarece mărimile x_k sînt prin ipoteză funcționale *liniare* de perechea de componente tangențiale ale cîmpurilor electric și magnetic la suprafața frontieră, adică ar defini o soluție identic nulă de forma (18).

În acord cu interpretarea dată principiului cauzalității, mărimile x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ sînt *mărimi de interacțiune impuse* ale elementului electromagnetic pasiv de circuit.

Fiind dată expresia biliniară din membrul al doilea al egalității (9), satisfăcută *prin definiție* în cazul unui element de circuit, alegerea cîte unuia dintre factorii produselor binare sumate pentru a alcătui matricea X a mărimilor de interacțiune $x_k (k = 1, 2, \cdots, m)$ este arbitrară în măsura în care matricea-coloană aleasă are elemente liniar independente.

3. ECUAȚIILE ELEMENTULUI ELECTROMAGNETIC PASIV DE CIRCUIT

Dacă o problemă de cîmp electromagnetic a fost studiată construind clase de soluții valabile pe subdomenii disjuncte și contigue, soluția problemei se poate obține impunînd continuitatea componentelor tangențiale ale cîmpurilor electric și magnetic la trecerea prin toate suprafețele de separație ale diferitelor subdomenii. Din punctul de vedere al cîmpului, *cuplajul* subsistemelor care îl compun se exprimă printr-o infinitate de condiții corespunzătoare egalării, în fiecare punct al suprafețelor de separație, a ambelor componente tangențiale $\boldsymbol{e}_t$ și $\boldsymbol{h}_t$. În mod analog, în cazul cînd subdomeniile au suprafețe de separație caracteristice elementelor de circuit, cu cîte un număr finit de mărimi de interacțiune x_k asociate mărimilor y_k, toate funcționale liniare de componentele tangențiale intervenind în condiția de cuplaj a cîmpurilor, cuplajul elementelor se va exprima prin egalarea acestor mărimi de interacțiune sau a unor combinații liniare ale lor (de exemplu egalarea curenților electrici, a fluxurilor magnetice care traversează suprafața sau a potențialelor electrice sau magnetice).

De aceea, pentru a obţine ecuaţiile întregului sistem, e necesar să se cunoască pentru fiecare element în parte ecuaţiile care leagă mărimile y_k de mărimile de interacţiune date în teorema de unicitate, x_k. Ultimele vor putea fi interpretate ca *mărimi de intrare*, iar primele ca *mărimi de ieşire* ale elementului considerat. Deoarece, în condiţii iniţiale date şi pentru mărimi de intrare date soluţiile $\boldsymbol{e}(M,t)$ şi $\boldsymbol{h}(M,t)$ sînt univoc determinate în orice punct $M \in D_\Sigma$ şi componentele tangenţiale (8) — continue la trecerea prin orice suprafaţă — vor fi univoc determinate. Ca urmare, în aceleaşi condiţii, şi mărimile de ieşire (11) — funcţionale liniare de aceste componente tangenţiale — vor fi univoc determinate. Există deci pentru fiecare element m operatori liniari $(j = 1,2, \cdots, m)$:

$$y_j(t) = \mathcal{L}^j \{[\mathcal{S}(t_0-)\,;\; X(t)]_{t \geq t_0}\}, \tag{22}$$

care asociază univoc perechile constituite de starea iniţială şi de mulţimea funcţiunilor de intrare cu anumite mărimi de ieşire.

Aceasta este *teorema de existenţă a ecuaţiilor elementului electromagnetic de circuit*, ecuaţii definite de operatorii (22).

Notînd cu

$$\eta_{jk}(t) = y_j(t) \Bigg|_{\substack{\mathcal{S}(t_0-) = 0 \\ x_l(t) = \delta_{lk} 1(t)\,;\; l = 1,2,\cdots,m}} \qquad (j,k = 1,2,\cdots,m) \tag{23}$$

mărimile de ieşire particulare determinate în condiţii iniţiale omogene de cîte o singură mărime de intrare treaptă-unitate (celelalte fiind nule) şi cu

$$y_j^0(t) = y_j(t) \Bigg|_{\substack{\mathcal{S}(t_0-) \text{ dat} \\ x_l(t) = 0\,;\; l = 1,2,\cdots,m}} \qquad (j = 1,2,\cdots,m) \tag{24}$$

mărimile de ieşire particulare determinate în condiţii de intrare omogene de starea iniţială dată, liniaritatea operatorilor (22) permite să se prezinte ecuaţiile (22) sub forma

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0-}^{t} \eta_{jk}(t-\tau)\, x_k(\tau)\, \mathrm{d}\tau + y_j^0(t), \tag{25}$$

în care $\eta_{jk}(t)$ sînt funcţiile de răspuns tranzitoriu la excitaţii treaptă-unitate ale elementului, iar $y_j^0(t)$ soluţiile de condiţii iniţiale. Din cauză că, în general, repartiţiile iniţiale (7) *nu sînt univoc determinate de valorile iniţiale* $x_k(t_0-)$ *ale mărimilor de intrare*, soluţiile $y_j^0(t)$, care sînt funcţionale liniare de repartiţiile iniţiale (7), *nu* sînt în general univoc determinate de valorile iniţiale ale mărimilor de intrare.

Cu ajutorul teoremei de unicitate, al relațiilor (25) și al teoremei reciprocității cîmpului electromagnetic, se poate demonstra că un element electromagnetic de circuit, definit de un subsistem electromagnetic cu medii imobile, liniare, pasive și nedispersive, este *invariant în timp*, *cauzal*, *pasiv*, *reciproc* și *stabil* în sensul teoriei sistemelor liniare.

4. TEOREMA TRANSFERULUI DE PUTERE PENTRU SUPRAFAȚA DE SEPARAȚIE A UNUI ELEMENT ELECTROMAGNETIC DE CIRCUIT

Prin această teoremă se stabilesc condiții suficiente pentru ca puterea electromagnetică $p_\Sigma(t)$ să capete forma algebrică (9) și deci pentru ca o suprafață Σ să fie suprafața de separație a unui element electromagnetic de circuit cuplat electric și magnetic cu exteriorul. Se generalizează astfel cazul cînd cuplajul e strict electric și transferul de putere se reduce la puterea la borne [1], [3].

Fie un domeniu D_Σ, în general multiplu conex, cu frontiera Σ. Această frontieră este o *suprafață de separație* (fig. 1) dacă are $n' + n''$ *fețe* conexe și disjuncte $S'_k (k = 1, 2, \ldots, n')$ de reuniune $S' = \bigcup\limits_{k=1}^{n'} S'$ și $S''_j (j=1,2,\ldots,n'')$ de reuniune $S'' = \bigcup\limits_{v=1}^{n''} S''_j$ și o parte exterioară fețelor S_0,

$$\Sigma = S_0 \cup S' \cup S'' \quad [S_0 \cap S' = \varnothing;\ S_0 \cap S'' = \varnothing;\ S' \cap S'' = \varnothing], \tag{26}$$

eventual vidă, astfel încît în fiecare moment să fie îndeplinite condițiile

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n}.\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}(M,t)|_{S_0} = 0 \\ \boldsymbol{n}.\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}(M,t)|_{S_0} = 0 \end{aligned}\right\} \quad M \in D_\Sigma,\ M \to P \in S_0 \subset \Sigma, \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}(M,t)|_{S'_k} = 0 \\ \boldsymbol{n}.\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}(M,t)|_{S'_k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered} M \in D_\Sigma,\ M \to P \in S'_k \subset S', \\ (k = 1, 2, \ldots, n'), \end{gathered} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{h}(M,t)|_{S''_j} = 0 \\ \boldsymbol{n}.\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h}(M,t)|_{S''_j} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered} M \in D_\Sigma,\ M \to P \in S''_j \subset S''. \\ (j = 1, 2, \ldots, n'') \end{gathered} \tag{29}$$

Conturele Γ'_k ale fețelor S'_k, respectiv Γ''_j ale fețelor S''_j, sînt orientate în sensuri asociate drept normalei interioare $\boldsymbol{n}_{\mathrm{int}} = -\boldsymbol{n}$ la Σ.

Conform condițiilor de mai sus, curenții electrici (de conducție sau de deplasare)

$$i_k = \oint_{\Gamma_k} \boldsymbol{h}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{S'_k} \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\ \boldsymbol{h}\delta A \qquad (k = 1, 2, \cdots, n') \tag{30}$$

pătrund în domeniul D_Σ numai prin fețele disjuncte $S'_k \subset S'$ ale frontierei Σ, fluxurile magnetice variabile $\Phi_j(t)$ cu derivatele

$$\Phi'_j(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi_j}{\mathrm{d}t} = -\oint_{\Gamma''_j} \boldsymbol{e}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{S''_j} \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e}\mathrm{d}s \qquad (j = 1, 2, \cdots, n'') \tag{31}$$

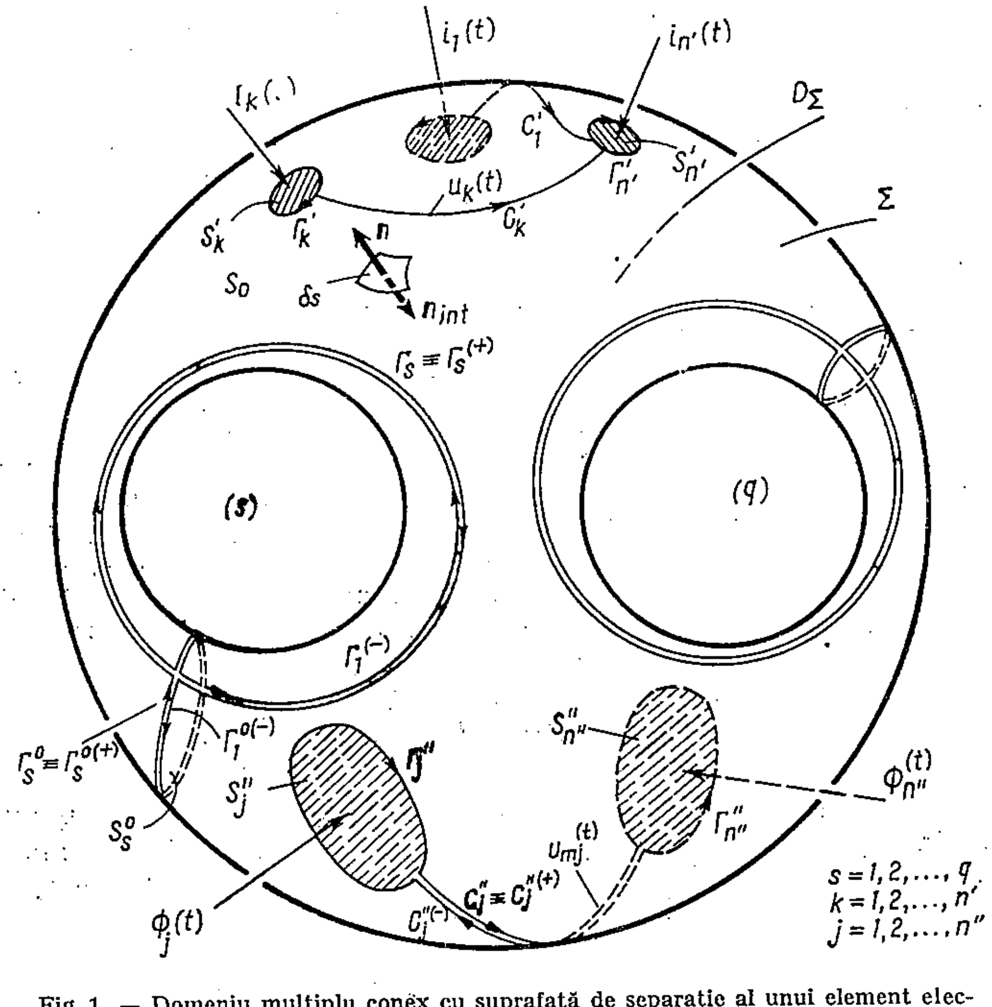

Fig. 1. — Domeniu multiplu conex cu suprafață de separație al unui element electromagnetic de circuit.

pătrund în domeniul D_Σ numai prin fețele disjuncte $S''_j \subset S''$ ale frontierei Σ, iar fluxul de energie electromagnetică cu densitatea scalară

$$(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{h})\,\boldsymbol{n}_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{e}\,(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\,(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n}) \tag{32}$$

pătrunde în domeniul D_Σ numai prin partea S_0, exterioară fețelor, a frontierei Σ. Ca urmare, cel mult $n' - 1$ curenți sînt independenţi şi cel mult $n'' - 1$ fluxuri magnetice variabile sînt independente :

$$\sum_{k=1}^{n'} i_k(t) = \int_{S'} \boldsymbol{n}_{\text{int}} \cdot \text{rot}\, \boldsymbol{h}\, \delta s = -\oint_{\Sigma} \boldsymbol{h}\, \text{rot}\, \boldsymbol{h}\, \delta s = 0, \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^{n''} \Phi'_j(t) = -\int_{S''} \boldsymbol{n}_{\text{int}}\, \text{rot}\, \boldsymbol{e}\, \delta s = \int_{\Sigma} \boldsymbol{n} \cdot \text{rot}\, \boldsymbol{e}\, \delta s = 0 \tag{34}$$

(deoarece orice rotor e solenoidal).

Deoarece partea externă feţelor S_0 nu e străbătută de flux magnetic variabil pe această suprafaţă, se poate defini un potenţial electric *uniform* după introducerea tăieturilor necesare transformării acestei părţi într-una simplu conexă sau cel puţin într-una cu circulaţia cîmpului electric nulă pentru orice curbă închisă care îi aparţine.

Pentru a preciza posibilităţile de alegere ale acestor tăieturi în S_0, presupunem că domeniul D_Σ are q goluri tubulare (s), cărora li se pot asocia cîte o tăietură-secţiune $S_s^0 \subset D_\Sigma$ de contur $\Gamma_s^0 \subset S_0 \subset \Sigma$ ($s = 1, 2, \cdots, q$) şi cîte o curbă închisă $\Gamma_s \subset S_0 \subset \Sigma$ care înlănţuie o singură dată golul tubular respectiv, interceptînd o singură dată conturul Γ_s^0 al tăieturii S_s^0.

Conturele Γ_s şi Γ_s^0 au sensuri asociate, astfel încît, plecînd din punctul lor de intersecţie, să poată fi parcurse ambele o singură dată în acelaşi sens.

Pentru a introduce tăieturile necesare în S_0 în vederea definirii unui potenţial electric uniform, se unesc conturele Γ''_j ($j = 1, 2, \cdots, n''-1$) ale primelor $n''-1$ feţe S''_j, prin care pătrunde fluxul magnetic variabil în D_Σ, cu conturul $\Gamma''_{n''}$ al feţei $S''_{n''}$ (luată ca referinţă) prin curbe C''_j :

$$C''_j \subset \left[S_0 - \left(\left(\bigcup_{s=1}^{q} \Gamma_s \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{q} \Gamma_s^0 \right) \right) \right]. \tag{35}$$

Excluzînd din S_0 aceste $n''-1$ curbe C''_j, cele q conture Γ_s^0 ale tăieturilor lui D_Σ şi cele q conture Γ_s asociate golurilor tubulare ale domeniului, se obţine suprafaţa (încă multiplu conexă din cauza „găurilor" corespunzătoare tăieturilor $\Gamma_s \cup \Gamma_s^0$ efectuate în ea)

$$S_\Gamma = S_0 - \left[\left(\bigcup_{j=1}^{n''-1} C''_j \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{q} \Gamma_s^0 \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{q} \Gamma_s \right) \right], \tag{36}$$

cu frontiera

$$\begin{aligned} \Gamma = \left(\bigcup_{k=1}^{n'} \Gamma'_k \right) \cup \left[\bigcup_{j=1}^{n''-1} \left(C_j''^{(+)} \cup C_j''^{(-)} \right) \right] \cup \left[\bigcup_{s=1}^{q} \left(\Gamma_s^{0(+)} \cup \Gamma_s^{0(-)} \right) \right] \cup \\ \cup \left[\bigcup_{s=1}^{q} \left(\Gamma_s^{(+)} \cup \Gamma_s^{(-)} \right) \right], \end{aligned} \tag{37}$$

asociată, ca sens, după regula burghiului drept normalei exterioare $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n}_{int}$, indicii superiori (+) şi (−), precizînd parcurgerea în sens direct, respectiv invers a curbelor la care se referă. Deoarece

$$\boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{e}|_{S_\Gamma} = 0, \tag{38}$$

iar orice „gaură" a suprafeţei S_Γ are flux magnetic total nul, în punctele ei se pot defini potenţiale electrice scalare prin relaţiile

$$v(P,t) = v(P_0,t) - \int_{\substack{P_0 \\ [C_{P_0P}\subset S_\Gamma]}}^{P} \boldsymbol{e}_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{e}_t = -\operatorname{grad} v + \boldsymbol{n}\frac{\partial v}{\partial u}. \tag{39}$$

Datorită primei condiţii (28), feţele S'_k $(k = 1,2,\cdots,n')$ prin care intră curenţii electrici în D_Σ *sînt echipotenţiale* şi tensiunile lor faţă de faţa $S'_{n'}$, luată ca referinţă, sînt date de expresiile

$$u_k(t) = \int_{\substack{k \\ [C'_k\subset S_\Gamma]}}^{(n')} \boldsymbol{e}_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (k = 1,2,\cdots,n'-1), \tag{40}$$

independente de alegerea curbelor de integrare $C'_k \subset S_\Gamma$, unind cîte un punct arbitrar al conturului Γ'_k cu un punct arbitrar al conturului de referinţă $\Gamma'_{n'}$ (echipotenţial).

Datorită primei condiţii (29), feţele S''_j $(j = 1,2,\cdots,n'')$ prin care intră fluxurile magnetice variabile în D_Σ sînt echipotenţiale pentru cîmpul magnetic şi tensiunile lor magnetice faţă de faţa $S''_{n''}$, luată ca referinţă, sînt

$$u_{m_j}(t) = \int_{\substack{(j) \\ \left[C''_j \subset \left[S_0 - \bigcup_{s=0}^{q}(\Gamma^0_s \cup \Gamma_s)\right]\right]}}^{(n'')} \boldsymbol{h}_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (j = 1,2,\cdots,n''-1). \tag{41}$$

Golurile tubulare (s) ale domeniului pot fi caracterizate cu ajutorul tensiunilor electromotoare

$$e_s(t) = \oint_{\Gamma_s\subset S_0} \boldsymbol{e}_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (s = 1,2,\cdots,q), \tag{42}$$

respectiv cu ajutorul tensiunilor magnetomotoare

$$f_s(t) = \oint_{\Gamma_s \subset S_0} \boldsymbol{h}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (s = 1, 2, \cdots, q), \tag{43}$$

determinate de fluxurile magnetice, respectiv de curentul electric total care înlănţuie aceste goluri tubulare prin exteriorul domeniului. Tăieturile S_s^0 asociate lor pot fi caracterizate cu ajutorul tensiunilor magnetomotoare

$$f_s^0(t) = \oint_{\Gamma_s^0 \subset S_0} \boldsymbol{h}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (1 = 1, 2, \cdots, q), \tag{44}$$

respectiv cu ajutorul tensiunilor electromotoare

$$e_s^0(t) = \oint_{\Gamma_s^0 \subset S_s} \boldsymbol{e}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (s = 1, 2, \cdots, q), \tag{45}$$

luate în lungul conturelor respective.

Se poate acum demonstra că puterea electromagnetică instantanee $p_\Sigma(t)$ primită printr-o suprafaţă de separaţie are forma algebrică (9). Pentru aceasta e suficient să se descompună aditiv integrala de suprafaţă (9), ţinînd seama că în condiţiile (28) şi (29) fluxul de energie electromagnetică pătrunde numai prin S_0:

$$p_\Sigma(t) \equiv \oint_\Sigma (\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{h}_t)\, \boldsymbol{n}_{\mathrm{int}}\, \delta A = \int_{S_0} (\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{h}_t)\, \boldsymbol{n}_{\mathrm{int}}\, \delta A = \int_{S_\Gamma} (\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{h}_t) \boldsymbol{n}_{\mathrm{int}} \delta A. \tag{46}$$

Ultima integrală a putut fi luată şi asupra suprafeţei S_Γ (36) (de care $S_0 = \Sigma - S' - S''$ diferă numai prin „tăieturile'' Γ_s, Γ_s^0 şi C_j'', de contribuţie nulă la aria acestei suprafeţe), cu avantajul de a efectua integrarea asupra unui domeniu bidimensional în punctele căruia componenta tangenţială $\boldsymbol{e}_t$ derivă dintr-un potenţial. Cu (32), (27), (29) şi (37) se obţine expresiile

$$\begin{aligned} p_\Sigma(t) &\equiv \oint_\Sigma (\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{h}_t)\, \boldsymbol{n}_{\mathrm{int}} \delta A = -\int_{S_\Gamma} (\operatorname{grad} v \times \boldsymbol{h})\, \boldsymbol{n}_{\mathrm{int}} \delta A = \\ &= \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}(v\boldsymbol{h})\, \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}A = \oint_\Gamma v\, \boldsymbol{h}_t\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \\ &= \sum_{k=1}^{n'} \oint_{\Gamma_k'} v\boldsymbol{h}_t\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \sum_{j=1}^{n''} \oint_{\Gamma_j''} v\boldsymbol{h}_t\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \\ &+ \sum_{j=1}^{n''-1} \int_{C_j''} (v^{(+)} - v^{(-)})\, \boldsymbol{h}_t\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \sum_{s=1}^{q} \oint_{\Gamma_s^0} (v^{(+)} - v^{(-)})\, \boldsymbol{h}_t\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \\ &+ \sum_{s=1}^{q} \oint_{\Gamma_s} (v^{(+)} - v^{(-)})\, \boldsymbol{h}_t\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \end{aligned} \tag{47}$$

în care

$v|_{\Gamma'_k} = u_k(t) + v_{n'}$ e constant pe Γ'_k (deoarece $\boldsymbol{e}_t|_{\Gamma'_k} = 0$), $\boldsymbol{h}_t|_{\Gamma''_j} = 0$,

iar

$$(v^{(+)} - v^{(-)})|_{C''_j} = -\oint_{\Gamma''_j} \boldsymbol{e}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\Phi_j}{dt} = \Phi'_j(t), \tag{48}$$

$$(v^{(+)} - v^{(-)})|_{\Gamma_s} = -\oint_{\Gamma^0_s} \boldsymbol{e}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -e^0_s(t), \tag{49}$$

$$(v^{(+)} - v^{(-)})|_{\Gamma^0_s} = \oint_{\Gamma_s} \boldsymbol{e}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = e_s(t), \tag{50}$$

$$\oint_{\Gamma'_k} \boldsymbol{h}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = i_k(t)\,; \quad \int_{C''_j} \boldsymbol{h}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = u_{m_j}(t), \tag{51}$$

$$\oint_{\Gamma^0_s} \boldsymbol{h}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f^0_s(t)\,; \quad \oint_{\Gamma_s} \boldsymbol{h}_t \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f_s(t). \tag{52}$$

Se obţine în cele din urmă, cu (33) şi (34),

$$\begin{aligned} p_\Sigma(t) \equiv \oint_\Sigma (\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{h}_t)\, \boldsymbol{n}_{\text{int}} \, \delta s = \sum_{k=1}^{n'-1} u_k(t)\, i_k(t) \,+ \\ + \sum_{j=1}^{n''-1} \frac{\mathrm{d}\Phi_j}{dt} u_{m_j}(t) + \sum_{s=1}^{q} e_s(t) f^0_s(t) - \sum_{s=1}^{q} e^0_s(t) f_s(t). \end{aligned} \tag{53}$$

Această egalitate exprimă *teorema transferului de putere printr-o suprafaţă de separaţie* şi are forma (9), toţi factorii produselor fiind funcţionale liniare de $\boldsymbol{e}_t$ sau $\boldsymbol{h}_t$. Ca urmare, o suprafaţă de separaţie defineşte un element electromagnetic de circuit. Mărimile de intrare pot fi alese u_k, Φ'_j, e_s şi e^0_s în care caz mărimile de ieşire vor fi i_k, u_{m_j}, f^0_s şi $-f_s$.

În regimuri particulare (cvasistaţionare), nu toate variabilele de mai sus sînt liniar independente (de exemplu curenţii unei porţi a unui multipol electric) şi numărul mărimilor de intrare e mai mic.

În legătură cu teorema transferului de putere (53), trebuie subliniate mai multe aspecte. Condiţiile (27)—(29), care definesc suprafaţa de separaţie, nu pot fi practic satisfăcute decît cu o anumită aproximaţie. Ele definesc un model teoretic al elementului electromagnetic de circuit de care elementele reale vor fi cu atît mai apropiate cu cît diferenţa dintre cei doi membri ai relaţiei (53) va fi mai mică (în medie pe intervalul de timp în care se studiază comportarea elementului). Aceste condiţii impun restricţii relativ severe pentru suprafaţa de separaţie, dar nu impun neapărat restricţii pentru cîmpul electromagnetic din D_Σ, care nu trebuie să fie neapărat cvasistaţionar (elementul considerat poate fi, de exemplu, o linie electrică lungă cu parametri distribuiţi).

Condiţiile (27)—(29) nu sînt incompatibile cu ecuaţiile lui Maxwell (1), (2), realizarea lor fiind în principiu subordonabilă existenţei unor materiale ideale cu proprietăţi particulare: condiţiile (27) sînt, de exemplu, realizate dacă partea S_0 a suprafeţei de separaţie e acoperită cu un material anelectric ($\varepsilon = 0$), izolant ($\sigma = 0$) şi amagnetic ($\mu = 0$); condiţiile (28) sînt realizate dacă partea S' a suprafeţei de separaţie (mulţimea „bornelor" electrice) e acoperită cu un material amagnetic ($\mu = 0$) perfect conductor în direcţii tangenţiale; condiţiile (29) sînt realizate dacă partea S'' a suprafeţei de separaţie (mulţimea „bornelor" magnetice) e acoperită cu un material anelectric ($\varepsilon = 0$) izolant ($\sigma = 0$) şi feromagnetic ideal în direcţii tangenţiale.

Expresia (53) sugerează posibilitatea de a interpreta puterea electromagnetică ca o sumă de trei termeni: puterea la „bornele" electrice $\left(p_{\mathrm{be}} = \sum_{k=1}^{n'-1} u_k i_k\right)$, puterea la „bornele" magnetice $\left(p_{\mathrm{bm}} = \sum_{k=1}^{n''-1} \Phi_j' . u_{mj}\right)$ şi puterea transferată „lateral" prin inducţie electromagnetică $\left(p_{\mathrm{lat}} = \sum_{s=1}^{q} (e_s f_s^0 - e_s^0 f_s)\right)$. Dar această descompunere e, în general, subordonată alegerii *arbitrare* a tăieturilor S_s^0, a curbelor Γ_s şi a curbelor C_j'' de definiţie a tensiunilor magnetice (ceea ce atrage după sine anumite restricţii asupra alegerii curbelor C_k' de definiţie a tensiunilor electrice ale bornelor).

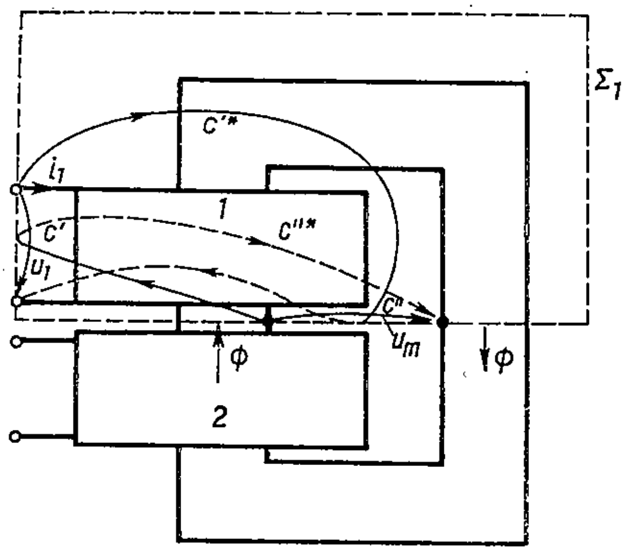

Fig. 2. — Element electromagnetic definit de o parte a unui transformator.

Dacă se consideră, de exemplu, un transformator cu bobinaje în galeţi (fig. 2), se poate găsi o suprafaţă Σ_1 care să poată fi considerată cu bună aproximaţie o *suprafaţă de separaţie* pentru o jumătate a transformatorului conţinînd înfăşurarea primară. Expresia (53) a puterii electromagnetice primite devine în acest caz

$$p_{\Sigma_1} = u_1 i_1 + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} u_m, \tag{54}$$

dar descompunerea în puterea primită pe la borne $u_1 i_1$ şi în puterea primită pe la „bornele" magnetice $\Phi' u_m$ nu e univocă decît restrîngînd alegerea curbei $C'' \subset \Sigma_1$ de definiţie a tensiunii magnetice. O altă alegere C''^* a curbei C'' care ar înlănţui în plus o singură dată unul dintre conductoarele legate la bornele electrice ar conduce la tensiunea magnetică $u_m + i_1$ şi ar impune o alegere C'^* a curbei de definiţie a tensiunii electrice care să înlănţuie o dată miezul, conducînd la tensiunea $u_1 - \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$. Evident, puterea p_{Σ_1} ar rămîne neschimbată, dar nu şi descompunerea ei.

5. CONCLUZII

Existenţa unei suprafeţe de separaţie cu proprietăţile (27)—(29) asigură caracterul de element de circuit subsistemului electromagnetic localizat în interiorul acestei suprafeţe.

Dacă mediul din interiorul suprafeţei de separaţie este liniar, pasiv, imobil şi nedispersiv, expresia (53) permite să se scrie teorema energiei electromagnetice sub forma

$$\sum_{k=1}^{n'-1} u_k i_k + \sum_{j=1}^{n''-1} \Phi'_j u_{mj} + \sum_{s=1}^{q} (e_s f_s^0 - e_s^0 f_s) =$$

$$= \int_{D_\Sigma} \sigma e^2 \, \delta v + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{D_\Sigma} \left(\frac{\varepsilon e^2}{2} + \frac{\mu h^2}{2} \right) \delta v, \tag{55}$$

cu următoarea consecinţă: cîmpul electromagnetic din domeniul D_Σ e univoc determinat în fiecare moment $t \geqslant t_0$ de repartiţia iniţială a cîmpului electric $\boldsymbol{e}(M, t_0-)$, de repartiţia iniţială a cîmpului magnetic $\boldsymbol{h}(M, t_0-)$ şi de evoluţia în $[t_0, t]$ a următoarelor mărimi de interacţiune : fie curentul primit $i_k(t)$, fie tensiunea aplicată $u_k(t)$ pentru fiecare „bornă electrică" S'_k (cu curent independent) ; fie fluxul magnetic primit $\Phi_j(t)$, fie tensiunea magnetică $u_{mj}(t)$ pentru fiecare „bornă magnetică" S''_j (cu flux magnetic independent) ; tensiunea electromotoare $e_s(t)$ şi tensiunea magnetomotoare $f_s(t)$ stabilite din exterior în fiecare gol tubular al domeniului D_Σ (dacă e multiplu conex).

Dintre factorii fiecărui produs de mărimi de interacţiune care apar în membrul al doilea al relaţiei (53), numai unul trebuie dat pentru a asigura unicitatea soluţiilor (alături de condiţiile iniţiale). Celălalt e deci determinat univoc o dată cu soluţia respectivă. Există deci relaţii bine determinate, caracteristice domeniului (şi liniare), prin care mărimile de interacţiune necunoscute sînt univoc determinate de mărimile de interacţiune date şi de condiţiile iniţiale. Acestea sînt *ecuaţiile elementului electromagnetic de circuit*, cu forma generală (25).

BIBLIOGRAFIE

1. R. Răduleţ, A. Timotin, A. Ţugulea, *Introduction des paramètres transitoires dans l'étude des circuits électriques linéaires ayant des éléments non filiformes et avec pertes supplémentaires.*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Électrotechn. et Énerg., **11**, *4*, 565—639 (1966).
2. R. Răduleţ, A. Timotin, A. Ţugulea, *Réseaux thermique et de diffusion en régime variable*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Électrotechn. et Énerg., **14**, *2*, 229—266 (1969).
3. R. Răduleţ, *Schimbul de energie electromagnetică pe la bornele comune a doi dipoli electrici*, Comunicările Academici R.P.R., **VI**, *6*, 779—786 (1956).