

O TEORIE DE CÎMP STRUCTURALĂ A UNEI CLASE DE SISTEME LINEARE

Acad. REMUS RĂDULEȚ, AL. TIMOTIN și A. ȚUGULEA

1. SISTEME DINAMICE

Studiul proprietăților unor clase de obiecte fizico-chimice sau tehnice a pus în evidență numeroase proprietăți comune, în special din punct de vedere funcțional, adică al interacțiunii lor cu ceea ce le este exterior, făcînd posibilă dezvoltarea unor cercetări de sinteză în care, în mare măsură, natura obiectelor considerate nu mai este luată în considerare.

Au putut fi astfel subsumate unor teorii unitare obiecte foarte diverse ca natură, cum sînt sistemele de puncte materiale ale dinamicii newtoniene, mediile continuu defavorabile, circuitele electrice cu parametri concentrați sau repartizați, cîmpurile electromagnetice, sistemele chimice în reacție, sistemele de telecomunicație, sistemele de producere și distribuție a energiei, mașinile și transformatoarele electrice, traductoarele, sistemele automate etc.

Fiecare dintre aceste obiecte ale cercetării constituie un *sistem* în sensul că reprezintă o mulțime de elemente între care există relații specifice, distincte de aceea care le definește apartenența la această mulțime și al căror ansamblu reprezintă *structura* sistemului.

Starea sistemelor se modifică în timp, succesiunea ordonată a *stărilor* unui *sistem* între un anumit moment inițial și unul ulterior definindu-i *evoluția* între aceste două momente. Mărimile care permit caracterizarea completă a stării unui sistem la un moment dat din punctul de vedere al modului cum această stare îi condiționează evoluția ulterioară se numesc *mărimi de stare*. Starea finală a unei evoluții e însă condiționată nu numai de starea inițială, ci și de acțiunea exteriorului asupra sistemului, descrisă — în intervalul dintre momentul inițial și momentul pînă în care i se urmărește evoluția — prin anumite mărimi cu variații mutual independente, numite *mărimile lui de intrare*.

Această determinație e asigurată de legile structurale de *stare* și de *desfășurare* ale sistemului, primele fiind caracteristice structurii sistemului la un moment dat, iar ultimele exprimînd legături structurale între stări succesive.

Evoluția unui sistem determină și acțiunea lui asupra a ceea ce îi este exterior descrisă prin mărimile lui de *ieșire*. Mărimile de intrare și

cele de ieșire caracterizează *interacțiunea* sistemului cu exteriorul. Mărimile de interacțiune, considerate ca funcții de timp, se numesc și *variabile de interacțiune* și, în particular, *variabile de intrare*, respectiv *variabile de ieșire*.

Sistemele se numesc *dinamice* — și numai la acestea se referă lucrarea de față — sau *statistice*, după cum mărimile lor de stare și de intrare sînt toate accesibile determinării experimentale cu o precizie principial nelimitată, sau sînt definite, cel puțin unele, prin funcții de repartitie interpretabile experimental numai pentru colective virtuale de sisteme identice.

Conform *principiului cauzalității*, evoluția unui sistem e complet determinată de starea lui inițială și de variația în timp a intrărilor lui în intervalul cuprins între momentul inițial și momentul ulterior considerat.

Din punct de vedere formal, din acest principiu rezultă că fiecărui sistem i se poate atașa un *operator de evoluție E*, adică un *operator care asociază ansamblului format de starea într-un moment inițial și de setul de funcții de timp care definesc începînd cu acel moment intrările cîte o singură stare a sistemului în fiecare moment ulterior celui inițial*.

Identificarea operatorului de evoluție al unui sistem dat se poate face cunoscîndu-i proprietățile structurale și, în particular, legile lui de stare și de desfășurare. Cunoașterea evoluției unui sistem asigură însă implicit și cunoașterea acțiunii lui asupra exteriorului, adică și a mărimilor lui de ieșire, care interesează din punctul de vedere al comportării sistemului în ansamblul din care face parte și cu care interacționează. Rezultă că operatorul de evoluție al unui sistem permite întotdeauna să se identifice și un *operator de funcționare F* atașat lui, numit și *operator de răspuns*, care asociază ansamblului format de starea într-un moment inițial și de setul de funcții de timp, care îi definesc începînd cu acel moment intrările, cîte un singur set de funcții de timp ce definesc ieșirile lui în fiecare moment ulterior celui inițial.

Operatorul de funcționare nu mai caracterizează sistemul prin prisma proprietăților sale structurale, ci din punctul de vedere al *proprietăților sale funcționale*, impuse în cazul sistemelor tehnice de nevoile practicii. În general, proprietățile funcționale ale unui sistem nu-i determină univoc structura și operatorul lui de funcționare nu-i determină univoc operatorul de evoluție, deși reciproca este adevărată.

În clasificarea sistemelor dinamice prezintă importanță numărul de mărimi de stare și numărul de mărimi de intrare.

În cazurile cele mai generale, *sistemele fizico-chimice* au o infinitate de variabile de stare și o infinitate de variabile de intrare. Proprietățile lor de stare sînt doar localizate și, în general, variabile din loc în loc. Un exemplu e un *cîmp fizic* definit într-un domeniu mărginit al spațiului și avînd ca variabile de stare valorile *locale* ale unui număr finit de funcții de punct definite pe infinitatea de puncte ale domeniului, variabilele de intrare fiind valorile *locale* ale unui număr finit de funcții de punct (adesea altele), definite pe infinitatea de puncte ale *suprafeței frontiere* închise care mărginește acel domeniu.

Sistemele tehnice, adică obiectele rezultate din procese de fabricație, au, în general, un număr *finit* de variabile de intrare, potrivit cu posibilitățile de intervenții în număr finit în comanda sau în interconectarea lor ;

ele pot avea o infinitate de variabile de stare cînd au părți cu neomogenitate variabilă din loc în loc sau un număr finit de astfel de variabile.

De aceea teoria sistemelor dinamice poate fi dezvoltată atît pentru sisteme cu numere *finite* de intrări și de variabile de stare, numite și *sisteme cu parametri concentrați*, cît și pentru sisteme cu număr *finit* de intrări, dar cu o infinitate de variabile de stare, sau cu o infinitate de intrări și de variabile de stare, numite toate *sisteme cu parametri repartizați*. Nu se studiază sisteme cu un număr finit de variabile de stare, dar cu o infinitate de variabile de intrare, acestea din urmă nemaiputînd fi toate independente.

Sistemele dinamice de puncte materiale studiate în mecanică sînt exemple de sisteme cu parametri concentrați. Pentru aceste sisteme, variabilele de stare sînt asociabile în perechi *canonic conjugate* — coordonate generalizate și impulsuri generalizate —, fiecărei perechi corespunzîndu-i un grad de libertate. De aceea sistemele cu un număr finit de mărimi de stare (și, implicit, cu un număr finit de intrări) se mai numesc sisteme cu număr finit de grade de libertate. Circuitele electrice cu parametri concentrați aparțin aceleiași clase de sisteme dinamice. Cimpurile electromagnetice, de deformății, termice etc. sînt exemple de sisteme cu parametri repartizați cu o infinitate de intrări sau cu un număr finit de intrări (ca, de exemplu, liniile electrice lungi).

Sistemele dinamice pot fi *interconectate*, astfel încît să se asigure egalitatea unora dintre mărimile lor de interacțiune sau a unor sume sau diferențe ale unor astfel de mărimi. Ele se numesc în acest caz subsisteme sau elemente ale sistemului compus rezultat, care se numește *decompozabil* în interconexiunea arătată a acestor elemente și care au drept mărimi de intrare și de ieșire unele din cele ale subsistemelor sale componente, iar drept mărimi de stare unele sau, eventual, toate mărimile de stare ale acestor *subsisteme* sau *elemente* ale sale.

Un astfel de subsistem sau element se numește *element ideal* al sistemului din care face parte dacă *are un număr finit de mărimi de interacțiune și o structură atît de simplă, încît stările să fie complet caracterizate* (în cursul celor mai generale evoluții posibile ale sale) *de valorile unora dintre mărimile lui de interacțiune*, astfel încît acestea să poată fi folosite *singure* și ca mărimi de stare. Intrările și valorile inițiale ale unora dintre mărimile de interacțiune ale unui *element ideal* determină deci univoc *ieșirile*, adică și *starea* lui în orice moment ulterior: operatorul de funcționare al unui *element ideal* determină deci univoc și operatorul său de evoluție.

2. DEZVOLTAREA TEORIILOR FUNCȚIONALE ȘI A CELOR STRUCTURALE ALE SISTEMELOR DINAMICE ÎN TEORII UNITARE ALE SISTEMELOR DINAMICE ABSTRACTE

O teorie *unitară* a unor obiecte complexe decompozabile în părți care interacționează între ele și au clase de comportări analoge prezintă avantaje, deoarece aceste obiecte au ieșiri și relații de comportare mult mai puțin complexe decît legile de structură și de evoluție ale părților lor. Sistematizarea relațiilor care caracterizează diferite tipuri de evoluții și

de comportări ale sistemelor dinamice concrete a condus la definirea conceptului de *sistem abstract*, și anume prin mulțimea de stări, de variabile de intrare și de variabile de ieșire, prin operatorii de evoluție și de funcționare, cum și prin mulțimea ordonată de numere reale pe care sînt definite funcțiile ce descriu stările, intrările și ieșirile, și care corespunde timpului. Această mulțime poate fi discretă sau continuă, numai ultimul caz fiind considerat mai departe.

Compararea legilor pe care cercetările le-au descoperit în interiorul diferitelor discipline clasice a pus în evidență și *legi* de aceeași formă în diferite *discipline*, adică și legi de formă independentă de clasele de proprietăți structurale pe care le privesc. Astfel de legi pot servi ca punct de plecare pentru *teorii structurale* ale unor întregi clase de sisteme, și anume independent de specia de proprietăți definitorii ale structurii fiecăruia dintre aceste sisteme.

De asemenea cercetările din interiorul disciplinelor clasice au pus în evidență și tipuri de *conexiuni* între proprietățile de intrare, de stare inițială și de ieșire ale unor sisteme studiate care au aceeași formă în discipline diferite, adică au o formă iarăși independentă de clasele lor de proprietăți structurale. Și aceste forme de conexiuni pot servi ca punct de plecare, și anume pentru *teorii funcționale* ale unor clase de sisteme independente de specia de proprietăți definitorii ale lor.

Teoria acestor sisteme abstracte, care este în curs de constituire, are axiomatizări care diferă încă — uneori esențial — de la un autor la altul, datorită nu numai conceptelor primitive diferite adoptate, ci și gradului de generalitate urmărit, cum rezultă, de exemplu, din consultarea lucrărilor indicate sub referințele bibliografice [1] — [3]. Definițiile proprietăților generale ale acestor sisteme, cum sînt caracterul lor cauzal, liniaritatea și invariabilitatea lor în timp, caracterul finit, eventual discret, reciprocitatea și pasivitatea lor, nu sînt deci nici aceleași și nici totdeauna echivalente. Tendința, cercetărilor moderne este să realizeze această teorie generală prin unificarea a două căi de dezvoltare, dintre care una este asociată în principal unei teorii *funcționale*, iar cealaltă uneia *structurale*.

În prima teorie, conceptul de *sistem abstract* e constituit prin generalizarea aceluia de *multipol electric* din teoria regimului permanent, adică fie staționar, fie periodic, al circuitelor electrice lineare. Acest multipol este o parte a unei *rețele electrice* al cărei cuplaj cu restul rețelei are loc exclusiv pe la un număr finit de *borne de acces*, care îl cuplează conductiv (sau galvanic) cu restul. În regimurile staționar, periodic sau de răspuns tranzitoriu asociat unor mărimi de stare nule în momentul inițial, mărimile de ieșire ale unui astfel de multipol sînt univoc determinate *exclusiv* de mărimile lui de intrare, adică starea lui inițială nu mai intervine explicit în această determinare. El are deci relații intrare-ieșire, adică de funcționare sau de răspuns, bine determinate, care îl caracterizează complet din punctul de vedere al interacțiunii lui cu restul rețelei. Pentru studiul comportării multipolului în regimurile menționate nu este deci necesară cunoașterea *structurii* lui interioare și nici identificarea explicită a mărimilor lui de stare. Acesta este, în forma sa cea mai simplă, punctul de vedere al „cutiei negre”, adică al considerării unui obiect cu o structură interioară inaccesibilă investigației directe, dar care reacționează în mod bine determinat la excitațiile

exterioare, realizând o transformare univocă a intrărilor sale în ieșiri. Conceptul de sistem abstract constituit prin generalizarea aceluia de multipol electric pune deci accentul pe relațiile de funcționare sau de răspuns și nu pe cele de structură și se identifică într-o primă etapă cu conceptul de *operator de transfer*, adică cu un operator de funcționare de tip special, care asociază fiecărui set de funcții de timp definind mărimile lui de intrare un unic set de funcții de timp definind mărimile lui de ieșire. În studiul sistemelor lineare cu ajutorul transformărilor integrale, un astfel de operator se caracterizează în cazul cel mai simplu prin așa-numita *funcție de transfer* a sistemului. Conceptul de *stare* nu intervine în această definiție a sistemului abstract și în teoria elaborată pe baza ei, chiar dacă particularizarea realizată prin considerarea numai a anumitor regimuri *speciale* de funcționare ascunde în fond o anumită alegere implicită a stărilor lui inițiale.

În cea de-a doua teorie, conceptul de *sistem abstract* e constituit prin generalizarea celui de *sistem dinamic conservativ*, adică de sistem dinamic ale cărui legi de evoluție pot lua forma de sistem de ecuații diferențiale de primul ordin, de tipul lui *Hamilton*, care a fost studiat inițial în mecanica newtoniană a sistemelor de puncte materiale. Teoria sistemelor hamiltoniene s-a dezvoltat cu precădere pentru studiul sistemelor izolate sau, cel mult, al celor cu o evoluție *dată* a condițiilor exterioare, realizată prin introducerea explicită a timpului, ca variabilă independentă, în expresia funcției lui Hamilton, care le caracterizează *complet* proprietățile, fără a fi nevoie de vreo precizare referitoare la mărimi de intrare. Aceste sisteme au fost studiate deci exclusiv din punctul de vedere al legilor de *desfășurare*, începând cu o stare inițială oarecare, respectiv din punctul de vedere al relației dintre stările inițiale și funcțiile de timp ce reprezintă mărimile de ieșire considerate, care sînt necunoscutele selectate spre a caracteriza anumite aspecte ale evoluției sistemului sau ale claselor de evoluții posibile. Conceptul de sistem abstract constituit prin generalizarea celui de sistem dinamic conservativ pune accentul pe relațiile de structură și nu pe cele funcționale și se identifică într-o primă etapă cu conceptul de *operator de tranziție a stărilor*, adică cu un operator de evoluție de tip special, care asociază fiecărui moment inițial și fiecărui set de valori inițiale pentru variabilele de stare o evoluție bine determinată a stărilor ulterioare (și deci în particular și a ieșirilor). Conceptul de interacțiune cu exteriorul poate să nu intervină în această definiție a sistemului abstract și în teoria elaborată pe baza ei, chiar dacă particularizarea realizată prin considerarea numai a unor condiții exterioare invariabile sau cu o evoluție *univoc impusă* ascunde în fond o anumită alegere implicită a mărimilor lui de intrare.

Unificarea acestor două căi de dezvoltare a teoriei sistemelor abstracte se face *fie* asociind conceptul de *stare* aceluia de operator de transfer, *fie* asociind conceptul de *intrare* aceluia de operator de tranziție a stărilor. În primul caz se păstrează pe primul plan *relațiile de funcționare* sau de *răspuns* ale sistemului, considerat mereu ca o cutie neagră despre a cărei structură interioară există numai informațiile care rezultă din examinarea interacțiunii lui cu exteriorul în toate condițiile inițiale posibile. Relațiile de comportare nemaiimplicînd în general o determinație *unică* a ieșirii de către intrare, se admite că cercetarea sistematică a tuturor perechilor

intrare-ieşire *posibile* permite să se asocieze sistemului o mulţime de „parametri” numiţi „stări”, astfel încît ieşirile asociate aceleiaşi intrări să fie discernabile univoc după aşa-numitul „parametru-stare” din momentul iniţial. Această operaţie se numeşte *parametrizarea* după stările iniţiale a relaţiilor intrare-ieşire [1]. Acum sistemul abstract nu mai e identificat deci cu un anumit operator de transfer (ca în prima etapă), ci cu o mulţime de astfel de operatori, corespunzători diferitelor stări iniţiale posibile, adică cu un *operator de funcţionare*. Stabilirea relaţiilor care permit determinarea univocă a stării finale în funcţie de intrări şi de starea iniţială este o problemă secundară, a cărei rezolvare eventuală ar permite şi identificarea unui operator de evoluţie a sistemului. Aceasta este calea urmată de *teoria funcţională a sistemelor dinamice*, care încearcă să nu facă ipoteze asupra structurii lor interioare şi în care operatorul de evoluţie este un concept derivat.

În al doilea caz se păstrează pe primul plan *relaţiile de structură* ale sistemului, considerînd însă diferite condiţii de interacţiune posibile. Relaţiile de structură nemaiimplicînd în general o determinaţie unică a stărilor finale de către cele iniţiale, se identifică funcţiile de timp independente care reprezintă mărimile de intrare ce trebuie cunoscute în intervalul dintre momentul iniţial şi cel final pentru ca stările asociate aceleiaşi stări iniţiale să fie discernabile univoc după ele. Acum sistemul abstract nu mai e identificat deci cu un anumit operator de tranziţie a stărilor, ca în prima etapă, ci cu o mulţime de astfel de operatori, corespunzători diferitelor intrări posibile, adică cu un *operator de evoluţie*. Alegerea mărimilor de ieşire, printre diferitele funcţii de stare susceptibile de a caracteriza acţiunea sistemului asupra exteriorului, este o problemă secundară, care permite şi identificarea unui operator de funcţionare al sistemului. Aceasta este calea urmată de *teoria de structură a sistemelor dinamice*, care nu face ipoteze prealabile asupra modului de interacţiune a sistemului cu exteriorul şi în care operatorul de funcţionare e un concept derivat.

În ambele cazuri se poate ajunge la conceptul de sistem abstract, definit ca o asociere a unor mulţimi de stări, de variabile de intrare şi de variabile de ieşire, cu un operator de evoluţie şi cu unul de funcţionare [2].

Problema fundamentală a studiului unui sistem dinamic d a t constă în identificarea clasei de sisteme abstracte căreia îi aparţine, şi aceasta înseamnă în primul rînd identificarea mărimilor lui de stare, de intrare şi de ieşire şi a existenţei operatorilor lui de funcţionare şi de evoluţie unici. Din acest punct de vedere, între teoriile structurale şi cele funcţionale rămîn cîteva deosebiri esenţiale, şi anume :

1. Într-o *teorie structurală*, identificarea mărimilor de intrare asociabile unui sistem dinamic ale cărui relaţii de structură sînt cunoscute, de exemplu sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale şi algebrice, este o problemă rezolvabilă pe baza teoremelor de unicitate şi de existenţă a soluţiilor ecuaţiilor respective. Aceste teoreme pun în evidenţă condiţiile necesare şi suficiente pentru existenţa unui operator de evoluţie, mărimile de intrare fiind acelea a căror variaţie în timp trebuie dată în intervalul de timp considerat, împreună cu starea iniţială, pentru a asigura soluţii unice în acel interval de timp. Totodată aceleaşi teoreme permit identi-

ficarea mărimilor de stare, ca fiind acelea necesare și suficiente caracterizării complete a stărilor inițiale din același punct de vedere.

Într-o teorie funcțională, identificarea *mărimilor de stare* asociabile unui sistem pentru care sînt cunoscute numai relațiile de funcționare, de exemplu sub forma unei mulțimi de perechi intrare-ieșire, adică de operatori de transfer, este o problemă cu mult mai dificilă, în special pentru sistemele cu puține mărimi de ieșire și cu multe mărimi de stare (eventual o infinitate).

2. În aplicații, această dificultate a analizei prin funcționare a sistemului se depășește considerînd părțile componente ale sistemului, adică descompunînd sistemul în subsisteme mai simple, interconectate între ele, avînd relații de funcționare mai simple. O astfel de operație reprezintă însă un prim pas spre *identificarea structurii* sistemului, deoarece relațiile de funcționare, adică de comportare ale părților ca și egalitățile ce reprezintă condițiile de interconexiune ale lor, devin în general relații de structură pentru întregul sistem. Totodată cercetarea proprietăților fiecărui element nedecompozabil în altele mai simple se face numai funcțional, fără ipoteze asupra structurii lui. Un astfel de procedeu combină deci un minim de analiză structurală, referitoare la descompunerea în subsisteme, cu analiza funcțională a acestor subsisteme și reprezintă, în fond, cea mai răspîndită formă de investigație fenomenologică în științele naturii și în științele tehnice. Ea poate conduce însă la identificarea completă a structurii unui sistem numai dacă descompunerea este împinsă pînă la subsisteme componente care să fie toate *elemente ideale*, pentru care mărimile de stare sînt o parte din mărimile de interacțiune. Într-adevăr, în acest caz, stările tuturor elementelor ideale componente pot fi caracterizate complet cunoscînd valorile mărimilor lor de intrare sau de ieșire, din a căror mulțime se pot alege mărimile de stare ale întregului sistem considerat la început. Relațiile de comportare ale elementelor ideale componente și egalitățile exprimînd condițiile lor de interconexiune vor fi legile de desfășurare și de stare ale acestui sistem.

Acest procedeu permite deci identificarea completă a mărimilor de stare numai pentru *sistemele reductibile*, care reprezintă adică o interconexiune de elemente *numai ideale*. Aceasta este, de exemplu, cazul rețelelor electrice cu elemente filiforme, studiate în regim cvasistaționar. *Nu toate sistemele sînt însă reductibile.*

3. În teoriile de structură, sistemul dinamic este definit prin relațiile lui de structură și nu e necesară precizarea mărimilor lui de intrare sau de ieșire. Teoremele de unicitate permit identificarea mărimilor de intrare, dar în general — pentru o structură dată — *există mai multe alegeri posibile ale mărimilor de intrare*. În cazul simplu al unei rețele electrice izolate și cu parametri concentrați, relațiile de structură sînt date prin ecuațiile lui Kirchhoff în valori instantanee, referitoare la nodurile independente și la ochiurile independente ale rețelei. Ele au soluții unice, fie că se dau funcțiile de timp care corespund tensiunilor electromotoare ale generatoarelor, fie că se dau funcțiile de timp care exprimă curenții debitați de aceste generatoare.

În cazul a n laturi active, adică cu generatoare, pot exista 2^n alegeri pentru cele n mărimi de intrare și (cel puțin) tot atîția operatori de funcționare distincți. Unui același sistem dinamic din punctul de vedere al unei teorii de structură îi pot deci corespunde mai multe sisteme abstracte din punctul de vedere al unei teorii funcționale. Un element ideal de circuit electric, de exemplu o bobină ideală, poate fi interpretată ca sistem abstract în două moduri : dacă mărimea de intrare aleasă este curentul și mărimea de ieșire e tensiunea, operatorul de funcționare este un operator de derivare, în care nu intervine starea inițială, adică este un operator de transfer ; dacă mărimea de intrare aleasă este tensiunea și mărimea de ieșire este curentul, operatorul de funcționare este un operator de integrare, în care apare explicit valoarea inițială a curentului (mărimea de ieșire este și mărime de stare). Doi operatori de funcționare distincți definesc însă două sisteme abstracte distincte.



În cele ce urmează se prezintă elemente ale unei *teorii de structură* a modelului abstract al unei clase destul de largi de sisteme dinamice *lineare*, numite sisteme *acumulativ-disipative*, cu scopul de a arăta că, fără a cunoaște natura și structura de detaliu a unui astfel de sistem dinamic, anumite proprietăți foarte generale ale structurii lui permit să se demonstreze teorema de unicitate a soluțiilor ecuațiilor de structură și să se atingă principalele obiective ale studiului problemei fundamentale menționate mai sus : identificarea mărimilor de stare, de intrare și de ieșire și a formei operatorilor unici de evoluție și de funcționare.

Teoria va fi prezentată pentru sisteme cu parametri repartizați (cu o infinitate de grade de libertate) mai puțin studiate în literatură, și anume pentru cazul unui număr finit de intrări, cum au sistemele tehnice uzuale.

Ea poate fi dezvoltată fără dificultăți și pentru sisteme cu parametri concentrați, care însă au fost mult studiate (cu alte metode) în literatura de specialitate, cum și pentru sisteme cu parametri repartizați avînd o infinitate (chiar și nenumărabilă) de intrări, care prezintă un interes mai restrîns în tehnica actuală.

3. SISTEME LINEARE ACUMULATIV-DISIPATIVE CU O INFINITATE DE MĂRIMI DE STARE ȘI CU UN NUMĂR FINIT DE INTRĂRI

Considerăm un sistem dinamic definit de *cîmp fizic*, localizat într-un domeniu D_{Σ} al spațiului avînd o configurație geometrică invariabilă și suprafața frontieră Σ . Cîmpul electromagnetic dintr-un mediu imobil, cîmpul micilor deformații viscoelastice, cîmpul de conducție termică și cîmpul de difuziune a unei substanțe sînt exemple particulare de sisteme din această clasă, care vor fi prezentate în anexă.

Presupunem că *proprietățile locale* ale sistemului pot fi complet caracterizate, în fiecare punct P al domeniului și în fiecare moment t , cu ajutorul unui număr q de mărimi scalare reale :

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q, \quad (1)$$

care pot fi scalari propriu-ziși, componente vectoriale, componente tensoriale etc., și vor fi numite *mărimi de caracterizare locală*, fiind valorile unor funcții de punct ($P \in D_\Sigma$) și de timp :

$$\varphi_i = \varphi_i(P, t); \quad i \in \{1, 2, \dots, q\}, \quad (1')$$

numite *funcții de caracterizare locală* a sistemului. Ansamblul acestor mărimi va fi notat strâns

$$\varphi \stackrel{d}{=} \{\varphi_i\} \equiv \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q\} \quad (2)$$

și va furniza o caracterizare *suficientă* a stării locale a sistemului. Nu toate componentele *ansamblului local* φ vor fi însă și mărimi de stare locală a sistemului, ci numai cele *necesare* caracterizării exhaustive a stărilor inițiale locale în privința determinăției evoluției ulterioare a sistemului și care vor putea fi identificate tocmai pe baza acestei condiții. Deoarece însă starea locală variază în general de la punct la punct, caracterizarea *stării globale* a întregului sistem la un moment dat se va putea face numai cu ajutorul unui număr infinit de mărimi scalare, valori ale funcțiilor de punct considerate, luate în infinitatea de puncte ale domeniului D_Σ . Sistemul studiat va avea, prin urmare, o infinitate de mărimi de stare. Fiind un câmp fizic cu acțiuni exclusiv prin contiguitate, un astfel de sistem va avea numai legi de structură *locale*, în sensul că toate proprietățile lui globale vor fi consecințe ale unor astfel de relații locale. Astfel de legi pot fi exprimate cu ajutorul unui *sistem de ecuații locale*, în care vor interveni funcțiile de caracterizare locală (1') și care va fi scris strâns sub forma operatorială

$$\boxed{\mathcal{L}[\varphi] = 0.} \quad (3)$$

Ecuațiile acestui sistem pot fi, de exemplu, ecuații algebrice, diferențiale sau cu derivate parțiale, cum rezultă și din exemplele prezentate în anexă. Pentru simplificarea prezentării admitem că domeniul D_Σ nu prezintă discontinuități de structură, toate funcțiile de caracterizare locală (1') și toate funcțiile de punct ce descriu proprietăți de material și intervin în (3) ca parametri locali caracteristici configurației geometrice a sistemului fiind presupuse continue și derivabile, astfel încât ecuațiile (3) să aibă sens în vecinătatea fiecărui punct $P \in D_\Sigma$. Aceasta nu constituie o restricție esențială, deoarece — așa cum se procedează curent în teoria câmpului — toate discontinuitățile pot fi tratate prin trecere la limită din rapide variații continue.

Un astfel de sistem dinamic cu o infinitate de mărimi de stare va fi numit *sistem linear acumulativ-disipativ* dacă are proprietățile generale de structură I și II prezentate mai jos.

Proprietatea I. Ecuațiile de structură locale sînt *lineare*, adică exprimă anularea unui operator linear aplicat funcției de punct și de moment $\varphi(P, t)$ definită de ansamblul local (2)

$$\mathcal{L} [\lambda_I \varphi^I + \lambda_{II} \varphi^{II}] = \lambda_I \mathcal{L} [\varphi^I] + \lambda_{II} \mathcal{L} [\varphi^{II}] \quad (4)$$

și sînt *structural invariable*, adică admit și soluția locală $\varphi(P, t+T)$ dacă admit soluția locală $\varphi(P, t)$, cu orice $T \geq 0$:

$$\mathcal{L} [\varphi(P, t)] = 0 \rightarrow \mathcal{L} [\varphi(P, t+T)] = 0. \quad (4')$$

Adunarea și înmulțirea cu un scalar al ansamblelor locale se definesc prin aceleași operații aplicate *tuturor* componentelor lor scalare $\varphi_i (i \in \{1, 2, \dots, q\})$. Din forma omogenă (3) a ecuațiilor locale și din linearitatea (4) a operatorului definit de membrul stîng al acestor ecuații rezultă că orice combinație lineară de soluții $\varphi(P, t) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \varphi^{\alpha}(P, t)$ este de asemenea o soluție. Mulțimea soluțiilor acestor ecuații de structură locală constituie deci un *spațiu linear al soluțiilor locale*. Deși proprietatea de invariabilitate structurală (4') a ecuațiilor este independentă de proprietatea de linearitate, așa cum se știe din teoria funcțională a sistemelor lineare (în cadrul căreia se manifestă prin invariabilitatea în timp a operatorului de funcționare), ea este util asociată acesteia în cadrul unei teorii *de cîmp* structurale. Dependența explicită de timp a operatorului local \mathcal{L} ar însemna, în fond, o variație în timp a parametrilor sistemului, adică, în lumina principiului cauzalității, o manifestare a unei anumite acțiuni exercitate din exterior asupra sistemului și deci a unei anumite variabile de intrare, chiar dacă această variație în timp ar fi cunoscută. În cazul unui cîmp fizic, parametrii sistemului sînt mărimile de material, funcții date de punct, care, dacă ar depinde explicit de timp, ar reprezenta de fapt variabile de intrare *interioare* domeniului și nelocalizate pe *frontiera* acestuia, în opoziție cu principiul de acțiune prin contiguitate.

Proprietatea a II-a. Ecuațiile de structură locală ale sistemului admit o *consecință integrală*, adică referitoare la întregul domeniu, și *instantanee*, adică valabilă în fiecare moment t , numită *teorema funcționalelor pătratice*, de forma

$$I(t) = P(t) + \frac{dW(t)}{dt}, \quad (5)$$

în care $W(t)$, $P(t)$ și $I(t)$ sînt funcții de timp atașate sistemului și definite prin funcționale pătratice sau bilineare de funcțiile de punct $\varphi(P, t)$ considerate la t fix (sau de combinații lineare ale lor), prima, \mathcal{W} , fiind numită funcționala de acumulare, cea de-a doua, \mathcal{P} , funcționala de disipație, iar cea de-a treia, \mathcal{I} , funcționala de interacțiune, caracterizate cum urmează.

Funcționala de acumulare, pătratică, mărginită, pozitiv definită :

$$\boxed{W \stackrel{d}{=} \mathcal{W} [\varphi(P, t)]_{P \in D_\Sigma} \stackrel{d}{=} \int_{D_\Sigma} w(s) dv = W(t) \geq 0,} \quad (6)$$

e dată de integrala de volum, extinsă asupra întregului domeniu, a unei funcții de punct numite *densitatea de acumulare* w și care, în fiecare punct al domeniului, este o formă pătratică pozitiv definită cu coeficienți funcții numai de punct :

$$\boxed{w = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^l \alpha_{jk}(P) s_j s_k = w(s) \geq 0} \quad \alpha_{jk} = \alpha_{kj}, \quad (7)$$

de unele dintre cele $q \geq l$ mărimi locale și linear independente (1), constituind un subansamblu

$$s \stackrel{d}{=} \{s_1, s_2, \dots, s_l\} \quad (8)$$

al ansamblului (2) de q mărimi care intervin în ecuațiile de structură locală (3). Deoarece forma pătratică (7) e pozitiv definită, ea are numai valori nenegative, anularea ei implicînd anularea tuturor argumentelor ei :

$$w(s) = 0 \rightarrow s = 0 \quad (s_i = 0, i \in \{1, 2, \dots, l\}). \quad (7')$$

Ca urmare, și funcționala de acumulare (6) e pozitiv definită și anularea ei într-un moment dat atrage după sine anularea identică (în toate punctele domeniului D_Σ) a valorilor mărimilor locale s_i de care ea depinde : funcționala de acumulare definește prin rădăcina ei pătrată o *normă* pe mulțimea funcțiilor de punct $s(P, t)$ la t fix, ceea ce conferă acestei mulțimi caracterul de *spațiu linear normat*.

Funcționala de disipație, pătratică, nenegativă :

$$\boxed{P \stackrel{d}{=} \mathcal{P} [\varphi(P, t)]_{P \in D_\Sigma} = P(t) \geq 0,} \quad (9)$$

e definită în fiecare moment t pe mulțimea funcțiilor de punct $\varphi(P, t)$, de obicei tot cu o integrală de volum, extinsă uneori numai asupra unei părți a domeniului (asupra părții lui „disipative”) și nu e neapărat pozitiv definită.

Funcționala de interacțiune

$$I \stackrel{d}{=} \mathcal{J} [i(M, t)]_{M \in \Sigma} = I(t) \geq 0 \quad (10)$$

poate avea valori pozitive, negative sau nule și e definită în fiecare moment t pe o mulțime

$$i \stackrel{d}{=} \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \quad (11)$$

de funcții de punct $i_j(M, t)$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $m \leq q$ la t fix, definite pe frontiera Σ a domeniului, și anume de acelea dintre combinațiile lineare ale componentelor $\varphi(P, t)$ (cu $P \rightarrow M \in \Sigma$) ale ansamblului local φ care, în baza legilor lineare de structură ale sistemului, trec continuu prin orice suprafață de discontinuitate (deci și prin Σ cînd părți ale acesteia sînt suprafețe de discontinuitate) și sînt univoc determinate de funcțiile de punct și de timp $s_i(P, t)$ (cu $P \rightarrow M \in \Sigma$) ale subansamblului (8), de care depinde densitatea de acumulare (7). Mărimile i_j vor fi numite *mărimi de interacțiune locală* ale sistemului și sînt combinații lineare ale unor mărimi locale φ_i , considerate în puncte de pe fața interioară a frontierei sistemului.

În exemplele din anexă, sistemele prezentate sînt lineare, acumulativ-disipative și cu o infinitate de grade de libertate. Linearitatea ecuațiilor lor de structură rezultă din linearitatea operatorilor de derivare, de adunare și de înmulțire cu funcții de punct date, reprezentate de diferitele mărimi de material, a căror repartitie spațială definește de fapt și configurația geometrică interioară a sistemului. Anumite consecințe integrale ale acestor ecuații sînt interpretabile ca teoreme ale funcționalelor pătratice și permit identificarea mărimilor s_i din (8) și i_i din (11).

Existența unor funcționale lineare (6), (9) și (12) cu proprietățile arătate și a relației (5) dintre ele limitează tipurile de ecuații locale, lineare, de structură, ale sistemelor acumulativ-disipative. Din punct de vedere fizic, această limitare nu este atît de severă cum apare la o primă examinare, deoarece în numeroase cazuri, dar nu totdeauna, ea este implicată de principiile termodinamicii. Într-adevăr, dacă U este energia interioară (finită) a unui sistem termodinamic și S este entropia lui, iar sistemul evoluează ireversibil, dar *monoterm*, adică în condiții de contact termic cu un sigur izvor de căldură, de temperatură absolută T (totdeauna pozitivă), cum ar fi mediul ambiant, forma diferențială a primelor două principii ale termodinamicii conduce la egalitatea cunoscută

$$d(U - TS) = -S dT + \delta L - T \sigma dt,$$

în care $F = U - TS$ este energia liberă a sistemului, δL lucrul elementar generalizat primit de sistem pe cale mecanică, electromagnetică etc., iar $\sigma = (dS/dt)_{\text{irrev}} \geq 0$ viteza de producere interioară de entropie a sistemului. Împărțind cu dt și pentru transformări izoterme ($dT = 0$), se obține egalitatea

$$\frac{\delta L}{dt} = T \sigma + \frac{dF}{dt}, \quad (12)$$

care are forma (5), membrul stîng reprezentînd o putere primită din exterior, condiționată de variația parametrilor externi care intră în expresia lucrului mecanic, interpretabilă ca funcțională de interacțiune, primul termen din membrul drept fiind nenegativ și interpretabil ca funcțională de disipație (o viteză de transformare interioară a energiei libere în energie legată, care e nulă numai la transformări reversibile), iar al doilea termen din membrul drept fiind interpretabil ca derivată în raport cu timpul a funcționalei de acumulare, identică aici cu energie liberă $F = U - TS$. În măsura în care energia liberă este o funcțională pătratică pozitiv definită și ecuațiile de structură sînt linearizate, ceea ce are loc totdeauna pentru mici abateri izoterme de la o stare de echilibru în care valoarea minimă a energiei libere poate fi aleasă ca nivel de referință al acestei energii, teorema funcționalelor pătratice este deci o expresie particulară a consecinței (12) a principiului conservării energiei. Exemplele din anexă privitoare la cîmpul conducției termice și la cîmpul de difuziune arată însă că nu orice teoremă a funcționalelor pătratice are această interpretare și proprietate.

Sistemele tehnice acumulativ-disipative au de obicei un număr finit de mărimi de interacțiune chiar și cînd au o infinitate de mărimi de stare. O astfel de situație se realizează riguros pentru sistemele a căror frontieră Σ se poate descompune într-un număr finit de părți disjuncte (vezi [4]—[6]), cu proprietăți omogene din punctul de vedere al condițiilor de frontieră necesare determinării cîmpului $s(P, t)$, astfel încît aceste condiții de frontieră să poată fi exprimate printr-un număr finit de funcții de timp, atașate unora dintre părțile omogene ale frontierei Σ , numite *borne de acces* sau *poli*.

O condiție necesară și suficientă în acest scop este exprimată de proprietatea III de mai jos, care, alături de primele două proprietăți considerate anterior, definește modelul abstract de sistem linear acumulativ-disipativ cu o infinitate de mărimi de stare și cu număr finit de intrări.

Proprietatea a III-a. Frontiera Σ a domeniului în care e localizat sistemul este o suprafață de separație sau o suprafață la borne, în sensul că asigură o formă bilineară algebrică pentru funcționala de interacțiune :

$$I(t) \stackrel{d}{=} \mathcal{J} [i(M, t)]_{M \in \Sigma} = \sum_{k=1}^n x_k(t) \cdot y_k(t), \quad (13)$$

numită *forma bilineară de interacțiune*, ale cărei variabile $x_k(t)$, respectiv $y_k(t)$, cu $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, alcătuiind fiecare cîte un grup de n funcții de timp linear independente, vor fi numite *mărimi de interacțiune la borne* și sînt definite prin funcționale lineare de funcțiile de punct definite pe frontiera Σ , într-un moment dat t , de mărimile de interacțiune locale (11) :

$$x_k = \mathcal{X}_k [i(M, t)]_{M \in \Sigma} = x_k(t), \quad (14)$$

respectiv

$$y_k = \mathcal{Y}_k [i(M, t)]_{M \in \Sigma} = y_k(t). \quad (15)$$

Deoarece, prin ecuațiile de structură, funcțiile $i(M, t)$ depind linear de $s(M, t)$, mărimile de interacțiune la borne sînt univoc și linear determinate de funcțiile $s(P, t)$, de care depinde densitatea de acumulare (7). Funcționalele lineare (14) și (15) sînt date de obicei prin integrale de linie sau de suprafață ale unora dintre mărimile de interacțiune locală $i_j \in i(M, t)$, cu $M \in \Sigma$ și t fix.

În condițiile existenței unei suprafețe de separație, teorema funcționalelor pătratice (5) ia cu (13) forma următoare :

$$\sum_{k=1}^n x_k(t) \cdot y_k(t) = P(t) + \frac{dW(t)}{dt}, \quad (16)$$

caracteristică sistemelor lineare acumulativ-disipative cu o infinitate de grade de libertate și cu interacțiune finită.

Fiind dată o formă bilineară (13), alegerea factorilor primi (notați cu x_k) în fiecare dintre termenii ei este în general arbitrară și există în general 2^n alegeri distincte posibile x_1, x_2, \dots, x_n ale mărimilor x (factorii primi), determinînd univoc tot atîtea alegeri y_1, y_2, \dots, y_n ale mărimilor y (factorii secunzi).

În interpretarea termodinamică (12) a teoremei, acest caz corespunde situației obișnuite, în care sistemul termodinamic are un număr finit de *parametri externi* q_k , ale căror creșteri linear independente apar în expresia lucrului elementar generalizat primit :

$$\delta L = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k, \quad (13')$$

cu coeficienți numiți *parametri de forță* asociați lor. În acest caz, cu $\dot{q}_k = dq_k/dt$, relația (12) ia forma (16), adică

$$\sum_{k=1}^n Q_k \dot{q}_k = T \sigma + \frac{dF}{dt}, \quad (16')$$

astfel încît cele două grupuri asociate de mărimi de interacțiune (14), respectiv (15), pot fi parametri de forță Q_k , respectiv derivatele în raport cu timpul ale parametrilor externi \dot{q}_k („vitezele” generalizate).

Forma bilineară (13) a funcționalei de interacțiune rezultă din proprietățile suprafeței de separație și din proprietățile de material asociate punctelor acestei suprafețe, cum arată exemplele din anexă. Suprafața de separație implică în fond o izolare parțială a sistemului față de exterior, astfel încît interacțiunea lor să fie localizată „omogen” numai în dreptul bornelor de acces.

4. TEOREMA DE UNICITATE ȘI IDENTIFICAREA MĂRIMILOR DE STARE, DE INTRARE ȘI DE IEȘIRE PENTRU SISTEME LINEARE ACUMULATIV-DISIPATIVE

Rezolvarea problemei fundamentale a studiului oricărui sistem dinamic implică în primul rînd identificarea mărimilor lui de stare, de intrare și de ieșire și stabilirea existenței operatorilor lui unici de evoluție

și de funcționare. Într-o teorie de structură, care consideră un sistem dat prin configurația lui geometrică și prin legile lui de stare și de desfășurare, identificarea acestor mărimi se poate face pe baza teoremei de *unicitate* a soluțiilor problemei *regimului tranzitoriu* al sistemului, adică a problemei integrării sistemului ecuațiilor lui de structură locală în condițiile inițiale și de interacțiune date.

Importanța teoremei funcționalelor pătratice constă în faptul că ea permite demonstrarea unicității soluției problemei regimului tranzitoriu al sistemului *fără a cere cunoașterea formei specifice, concrete, a legilor lui de structură locală*, adică pentru toate formele acestor legi lineare care admit o consecință de forma teoremei funcționalelor pătratice.

Pentru un sistem linear acumulativ-disipativ cu o infinitate de mărimi de stare și interacțiune finită, *problema generală a regimului lui tranzitoriu* poate fi formulată cum urmează :

Să se găsească o *soluție de regim tranzitoriu* a ecuațiilor sistemului, adică un set

$$s(P, t) \stackrel{d}{=} \{s_1(P, t), s_2(P, t), \dots, s_l(P, t)\} \quad (17)$$

de funcții de punct și de timp $s_i(P, t) \subset \varphi(P, t)$ (cu $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, $P \in D_\Sigma$ și $t > t_0$, dat) de care depinde local densitatea de acumulare (7), care să verifice ecuațiile de structură locală (3), adică să aparțină unei soluții $\varphi(P, t)$ a acestor ecuații și să îndeplinească anumite condiții inițiale (la $t = t_0$) și la borne (în intervalul $(t_0, t]$).

Teorema de unicitate afirmă că soluția de regim tranzitoriu este unică *dacă* se dau următoarele două tipuri de condiții : *condițiile inițiale*

$$s(P, t_0) = f(P), \quad P \in D_\Sigma, \quad (18)$$

cu $f(P)$ dat și compatibil cu ecuațiile de *stare* ale sistemului ; *condițiile la borne* de o clasă $B \stackrel{d}{=} \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, definită de o anumită alegere a mărimilor (14) printre cele 2^n alegeri posibile a ordinii factorilor în cei n factori binari ai funcționalei bilineare de interacțiune (13) :

$$x_k(t') = g_k(t') \begin{cases} t_0 < t' \leq t, \\ k \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{cases} \quad (19)$$

și *dacă* $s(P, t)$ aparține unor clase de funcții de punct (la t fix) și de timp (la P fix) pentru care ecuațiile de structură locală și funcționalele (6), (9), (13) au sens.

Ansamblul condițiilor inițiale și la borne constituie *condițiile de unicitate* de clasă B :

$$C_B \stackrel{d}{=} \{s(P, t_0) ; x_1(t'), x_2(t'), \dots, x_n(t')\} \quad (20)$$

$$\begin{matrix} P \in D_\Sigma \\ t' \in (t_0, t] \end{matrix}$$

Într-adevăr, integrând în (t_0, t) teorema funcționalelor pătratice (16), se obține egalitatea

$$W(t) = W(t_0) - \int_{t_0}^t P(t') dt' + \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t x_k(t') y_k(t') dt'. \quad (16')$$

Rezultă că în condiții inițiale omogene (de repaus) : $s(P, t_0) \equiv 0$, care atrag anularea funcționalei de acumulare în momentul inițial, $W(t_0) = 0$, și în condiții la borne omogene (de izolare în clasa B) : $x_k(t') \equiv 0$, care atrag anularea integralei formei bilineare de interacțiune, funcționala de acumulare $W(t)$ trebuie să fie nepozitivă (căci $P(t') \geq 0$) și deci, fiind pozitiv definită, identic nulă. Aceasta atrage anularea identică a soluției, adică, în condiții inițiale și la borne omogene, sistemul acumulativ-disipativ rămâne în starea inițială de repaus considerată, ecuațiile lui de structură admitând numai *soluția banală*

$$\begin{aligned} \{s(P, t_0) \equiv 0, x_k(t') \equiv 0\} &\Rightarrow s(P, t) \equiv 0, & (21) \\ P &\in D_\Sigma, \\ t' &\in (t_0, t), \\ k &\in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

De aici rezultă unicitatea soluțiilor în condiții inițiale și la borne oarecare. Într-adevăr, dacă ar exista două soluții în condițiile inițiale (16) și la borne (19) date, diferența lor ar fi de asemenea o soluție a ecuațiilor de structură locale (care sînt lineare), și anume soluția corespunzătoare unor condiții inițiale omogene (cele două soluții avînd prin ipoteză aceeași repartitie inițială) și unor condiții la borne omogene (cele două soluții corespunzînd prin ipoteză aceluiași condiții la borne, exprimate prin operatori lineari), adică ar fi soluția banală : cele două soluții ale problemei de regim tranzitoriu puse coincid deci cu necesitate.

Ansamblul $s = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$ de mărimi locale linear independente, a căror repartitie inițială determină complet evoluția sistemului în condiții la borne date, trebuie identificat deci cu *ansamblul mărimilor de stare locală*. Funcția de punct $s(P, t)$, cu t fix, descrie deci *starea* sistemului într-un moment dat. Mulțimea funcțiilor de punct definite pe D_Σ și susceptibile de a fi stări ale sistemului, adică compatibile cu ecuațiile lui de stare locală și pentru care funcționala de acumulare, funcționala de disipație și funcționalele ce definesc mărimile de interacțiune au sens, constituie un *spațiu funcțional*, $\mathcal{S} \stackrel{d}{=} \{s(P, t)\}_{\text{orice } t}$, numit *spațiul stărilor*, căruia trebuie să-i aparțină și starea inițială $f(P)$. Spațiul stărilor este un spațiu *linear*, deoarece orice combinație lineară de stări este de asemenea o stare posibilă, ecuațiile de stare fiind lineare, iar funcționalele considerate fiind lineare sau pătratice, existența ultimelor fiind asigurată de inegalitatea $(\lambda_1 s^{(1)} + \lambda_2 s^{(2)})^2 \leq 2(\lambda_1^2 (s^{(1)})^2 + \lambda_2^2 (s^{(2)})^2)$. Ca urmare *funcțiile de punct* $s(P, t) \stackrel{d}{=} \{s_1(P, t), \dots, s_i(P, t)\}$, cu l componente scalare, adică *stările* aparținînd spațiului \mathcal{S} , pot fi numite și *vectori de stare*. Spațiul linear al stărilor este un

spațiu funcțional *normat*, cu norma \sqrt{W} , definită cu ajutorul funcționalei de acumulare (6). Mai mult, cu ajutorul formei bilineare hermitice asociate formei pătratică (7), care definește densitatea de acumulare, se poate defini un *produs scalar* în \mathcal{S} care capătă structura unui *spațiu Hilbert*.

Ansamblul numeric $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ al valorilor mărimilor de interacțiune (14), a căror variație în intervalul $(t_0, t]$ determină complet evoluția sistemului în același interval în condiții inițiale date, trebuie identificat deci cu ansamblul finit al *mărimilor de intrare*, numit scurt *intrarea* x a sistemului. Orice combinație lineară de intrări este de asemenea o intrare posibilă, și anume, datorită linearității funcționalelor (14) și a operatorilor din ecuațiile de structură, intrarea asociată *aceleiași* combinații lineare a soluțiilor $s(P, t)$ corespunzătoare. De aceea și mulțimea $X \stackrel{d}{=} \{x\}$ a tuturor intrărilor posibile e un spațiu linear, și anume un *spațiu linear n-dimensional*, ale cărui elemente pot fi numite *vectori de intrare*:

$$x \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{X}[i(M, t)]_{\substack{M \in \Sigma \\ t \text{ fix}}} \in X, \quad (22)$$

și variază în timp conform condițiilor la borne (19) date. Spațiul intrărilor este în general *afin*, fiindcă nu toate mărimile de intrare sînt de aceeași specie și e bine definit pentru fiecare clasă $B = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ în parte.

Teorema de unicitate a soluțiilor stabilește existența unei *singure* soluții $s(P, t)$, determinată de o stare inițială $s(P, t_0)$ dată și de o variație dată $x(t')$ a vectorului de intrare în $(t_0, t]$, dacă o astfel de soluție există¹, adică stabilește existența *operatorului de evoluție* al sistemului într-o clasă dată B de condiții la borne:

$$E_B [\{s(P, t_0) ; x(t')\}]_{\substack{P \in D_\Sigma \\ t' \in (t_0, t)}} = s(P, t), \quad (23)$$

operator definit pe *produsul cartezian* al spațiului stărilor cu spațiul funcțiilor de timp susceptibile de a reprezenta condițiile la borne, produs cartezian ale cărui elemente sînt chiar condițiile de unicitate C_B (20).

Interacțiunea prin contiguitate a sistemului considerat cu exteriorul se face *numai* prin suprafața de separație Σ , și anume *numai* pe la borne. Mărimile de interacțiune de al doilea tip, y_k , care înmulțesc mărimile de intrare x_k în forma bilineară algebrică (13) a funcționalei de interacțiune, sînt și ele univoc determinate de soluția $s(P, t)$ a problemei de regim tranzitoriu, și deci, ca urmare a teoremei de unicitate, de condițiile inițiale

¹ Demonstrarea existenței soluțiilor nu va fi analizată aici. Observăm numai că ea implică compatibilitatea condițiilor la borne și inițiale atât între ele, cât și cu soluțiile ecuațiilor locale.

și de condițiile la borne. Ele sînt singurele susceptibile de a exprima *reacțiunea* sistemului asupra exteriorului care impune variația în timp a intrărilor. Ca urmare, ansamblul $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ al valorilor cofactorilor mărimilor de intrare x_k în forma bilineară de interacțiune (13) trebuie identificat cu ansamblul finit al *mărimilor de ieșire*, numit scurt *ieșirea* y a sistemului (chiar dacă, în condiții particulare de funcționare, numai unele dintre elementele $y_k \in y$ vor fi alese ca mărimi de ieșire). Orice combinație lineară de ieșiri este de asemenea o ieșire posibilă, și anume, datorită linearității funcționalelor (15) și operatorilor din ecuațiile de structură, aceea asociată *aceleiași* combinații lineare a soluțiilor $s(P, t)$ corespunzătoare. Prin urmare, și mulțimea $Y \stackrel{a}{=} \{y\}$ a tuturor ieșirilor posibile e un *spațiu linear n-dimensional*, ale cărui elemente pot fi numite *vectori de ieșire*:

$$y \stackrel{a}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \mathcal{U}[i(M, t)]_{\substack{M \in \Sigma \\ t \text{ fix}}} \in Y, \quad (24)$$

și variază în timp conform evoluției $s(P, t)$ impuse sistemului de condițiile inițiale și la borne. Fiecărei clase B de condiții la borne, definită de una dintre alegerile posibile ale primilor factori în forma bilineară de interacțiune, îi corespunde un singur spațiu al intrărilor X și un singur spațiu al ieșirilor Y . Acestea din urmă fiind determinate univoc de starea inițială și de variația în timp a intrării, în fiecare clasă B de condiții la borne există un *operator de funcționare*:

$$\mathbf{F}_B [\{s(P, t_0); x(t')\}]_{\substack{P \in D_\Sigma \\ t' \in (t_0, t)}} = y(t), \quad (25)$$

definit, ca și operatorul de evoluție \mathbf{E}_B , pe spațiul condițiilor de unicitate (20), cu valori în spațiul funcțiilor de timp susceptibile de a reprezenta variația în timp a ieșirilor.

Deoarece pentru un sistem linear acumulativ-disipativ dat, cu intrări finite, există 2^n clase B de condiții la borne posibile, unui astfel de sistem i se pot asocia cîte 2^n operatori de evoluție (23) și de funcționare (25), în funcție de mărimile de intrare alese, adică 2^n *sisteme abstracte distincte*.

5. TEOREMA DE SUPERPOZIȚIE, SEPARAREA SOLUȚIILOR ȘI FORMELE GENERALE ALE OPERATORILOR DE EVOLUȚIE ȘI DE FUNCȚIONARE

Linearitatea ecuațiilor de structură și a funcționalelor care definesc mărimile de interacțiune permite demonstrarea unor teoreme de superpoziție și construirea prin suprapunere a soluțiilor $s(P, t)$ și a funcțiilor de ieșire $y(t)$.

Fiecărei clase B de condiții la borne i se poate asocia un spațiu linear \mathcal{E}_B al condițiilor de unicitate, produs cartezian al spațiului stărilor prin spațiul funcțiilor de intrare :

$$\mathcal{E}_B \stackrel{a}{=} \{C_B\} \text{ cu } C_B = \{s(P, t_0); x(t')\}_{\substack{P \in D_\Sigma \\ t' \in (t_0, t]}}, \quad (26)$$

în care adunarea și înmulțirea cu scalari a condițiilor de unicitate C_B se definesc prin *aceleași* operații aplicate *tuturor* componentelor lor (repartiții inițiale și funcții de intrare) și pe care sînt definiți operatorul de evoluție și operatorul de funcționare.

În fiecare clasă B de condiții la borne se poate demonstra o *teoremă de superpoziție*, conform căreia soluția $s(P, t)$, respectiv funcția de ieșire $y(t)$, determinate de o combinație lineară $C_B = \sum \lambda_\nu C_B^\nu$ de condiții de unicitate

C_B^ν , este combinația lineară cu *aceiași* coeficienți λ_ν a soluțiilor $s_\nu(P, t)$, respectiv a funcțiilor de ieșire $y_\nu(t)$, determinate de fiecare condiție C_B^ν în parte :

$$s(P, t) = \sum_\nu \lambda_\nu \cdot s_\nu(P, t), \quad (27)$$

$$y(t) = \sum_\nu \lambda_\nu \cdot y_\nu(t). \quad (28)$$

Într-adevăr, soluțiile de mai sus, construite prin superpoziție, verifică ecuațiile lineare și condițiile de unicitate „rezultante” dacă fiecare soluție parțială verifică ecuațiile și condițiile de unicitate parțiale corespunzătoare. Teorema de superpoziție exprimă de fapt caracterul *linear* al operatorilor de evoluție și de funcționare (23) și (25), definiți pe spațiul linear \mathcal{E}_B al condițiilor de unicitate. Trebuie subliniat însă că *se pot suprapune numai soluții parțiale corespunzătoare unei aceleiași clase de condiții la borne B .*

În particular, teorema superpoziției permite separarea efectului determinat de starea inițială de efectul determinat de condițiile la borne, adică permite *separarea soluțiilor* sub forma

$$s(P, t) = s^0(P, t) + s^r(P, t), \quad (29)$$

$$y(t) = y^0(t) + y^r(t),$$

în care

$$s^0(P, t) = \mathbf{E} [\{s(P, t_0); 0\}], \quad (30)$$

$$y^0(t) = \mathbf{F} [\{s(P, t_0); 0\}]$$

sînt *soluțiile de evoluție autonomă* asociate condițiilor de unicitate date, corespunzătoare stării inițiale (18) date, însă unor condiții la borne omo-

gene (în clasa B) numite uneori *soluții de condiții inițiale*, iar

$$\begin{aligned} s^r(P, t) &= \mathbf{E} [\{0; x(t')\}], \\ y^r(t) &= \mathbf{F} [\{0; x(t')\}] \end{aligned} \quad (31)$$

sînt *soluțiile de răspuns tranzitoriu*, asociate condițiilor de unicitate date, corespunzătoare condițiilor la borne (19) date, însă unor mărimi de stare nule în momentul inițial (condiții inițiale omogene).

Soluția de evoluție autonomă exprimă influența aditivă a stării inițiale asupra evoluției sistemului și corespunde regimului tranzitoriu care s-ar stabili în condițiile inițiale date dacă mărimile de intrare alese ar fi menținute identic nule (condiții de izolare de clasă B aleasă), fără ca, evident, aceasta să implice anularea celorlalte mărimi de interacțiune, adică a mărimilor de ieșire y . Ea *depinde* de clasa de condiții la borne considerată.

Soluția de răspuns tranzitoriu exprimă influența aditivă a funcțiilor de intrare $x_k(t)$ asupra evoluției sistemului și corespunde regimului tranzitoriu care s-ar stabili în condițiile la borne date dacă mărimile de stare ar fi identic nule în starea inițială (stare inițială de „repaus”). Sistemul evoluează în acest caz numai sub acțiunea exteriorului și mărimile de ieșire reprezintă „răspunsul” lui la excitația reprezentată de mărimile de intrare. Cu ajutorul teoremei superpoziției se poate separa acțiunea fiecărei mărimi de intrare în parte, iar cu ajutorul integralei Duhamel acțiunea fiecărei mărimi de intrare în parte poate fi exprimată prin superpoziția acțiunilor unor mărimi de intrare, funcții treaptă de timp, corespunzătoare. Introducînd *matricea-cîmp de răspuns tranzitoriu local* $\sigma(P, t) = [\sigma_{ij}]$ de ordin $l \times n$, ale cărei componente sînt *funcțiile locale de răspuns tranzitoriu la excitație treaptă-unitate* la borna j :

$$\sigma_{ij}(P, t) = s_i(P, t) \left| \begin{array}{l} s(P, 0) \equiv 0, \\ x_m(t) \equiv 0 \quad (m \in \{1, 2, \dots, n\}; m \neq j), \\ x_j(t) = I(t), \\ i \in \{1, 2, \dots, l\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{array} \right. \quad (32)$$

identic nule pentru $t < 0$, și introducînd *matricea de răspuns tranzitoriu la ieșire* $\eta(t) = [\eta_{kj}]$ de ordin $n \times n$, ale cărei componente sînt *funcțiile de răspuns tranzitoriu la ieșire sub excitație treaptă-unitate* la borna j :

$$\eta_{kj}(t) = y_k(t) \left| \begin{array}{l} s(P, 0) \equiv 0, \\ x_n(t) \equiv 0 \quad (m \in \{1, 2, \dots, n\}; m \neq j), \\ x_j(t) = I(t), \\ k \in \{1, 2, \dots, n\}; j \in \{1, 2, \dots, n\}, \end{array} \right. \quad (33)$$

identic nule pentru $t < 0$, soluțiile, respectiv ieșirile generale de regim tranzitoriu se pot exprima cu (29) sub forma matriceală

$$s(P, t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \sigma(P, t - t') \cdot x(t') dt' + s^0(P, t), \quad (34)$$

respectiv

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \eta(t-t') \cdot x(t') dt' + y^0(t). \quad (35)$$

Aceste relații reprezintă forme explicite ale *operatorilor de evoluție* și, respectiv, *de funcționare* ai sistemului considerat.

Primii termeni, exprimați cu ajutorul derivatelor unor integrale de convoluție, reprezintă operatorii de răspuns tranzitoriu (local, respectiv de ieșire), iar ultimii — care ar putea fi, la rîndul lor, explicitați în raport cu repartiția inițială căreia i se aplică, cu ajutorul unor funcții Green adecvat definite spre a ține seama de restricțiile impuse de legile de stare — reprezintă componentele de evoluție autonomă (de condiții inițiale) ale soluțiilor.

În teoria sistemelor lineare se preferă utilizarea funcțiilor de răspuns tranzitoriu la excitație *impulsie-unitate* ($\delta(t)$), care sînt derivatele generalizate ale funcțiilor (32), respectiv (33). În cazul sistemelor cu parametri repartizați, este preferabilă însă utilizarea răspunsurilor la excitație-treaptă (32), respectiv (33), deoarece primele nu conduc totdeauna la integrale de convoluție convergente. De exemplu, în cazul cîmpului termic, la aplicarea unei impulsii de temperatură pe fața unui conductor termic, care are celelalte fețe menținute la rece, fluxul de căldură absorbit prin fața considerată (mărimea de ieșire la intrarea impulsie-unitate) are în vecinătatea originii ($t \rightarrow 0$) expresia asimptotică $\sim \text{const}/t \sqrt{t}$, neintegrabilă (impropriu) în $(0, t)$, în timp ce, la aplicarea unei trepte de temperatură în condiții în rest neschimbate, același flux absorbit are expresia asimptotică integrabilă (impropriu) $\sim \text{const} / \sqrt{t}$.

Utilizînd transformata Laplace, notînd cu majuscule transformatele Laplace ale funcțiilor de intrare sau de ieșire (care sînt funcții de variabilă complexă p) și introducînd *matricea de transfer* a sistemului

$$H(p) = [H_{kj}(p)] = p \mathcal{L}[\eta], \quad (36)$$

relațiile (35), care exprimă *operatorul de funcționare*, adică legătura stare-intrare-ieșire, iau următoarea formă operațională algebrică:

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) + Y^0(p). \quad (37)$$

Analiza acestor relații, împreună cu analiza proprietăților matricii de transfer pe baza unei teoreme operaționale a funcționalelor pătratică, care se poate deduce totdeauna în condițiile în care ecuațiile de structură locală sînt lineare și admit consecința integrală reprezentată de teorema (5), permite să se stabilească numeroase proprietăți ale sistemelor acumulativ-disipative considerate în această lucrare, dintre care menționăm următoarele șase:

a) sistemele acumulativ-disipative considerate definesc pentru fiecare clasă de condiții la borne (implicată de o anumită alegere a mărimilor de intrare) un sistem abstract linear, cauzal, invariabil în timp, pasiv, cu

relații stare-intrare-ieșire de forma (35) în valori instantanee sau (37) sub formă operațională;

b) clasele de funcții de punct sau de timp pe care sînt definiți operatorii de evoluție și de funcționare ai sistemului sînt acelea pentru care ecuațiile de structură locală și funcționalele lineare și pătratice considerate au sens;

c) *matricea de transfer*, caracteristică fiecărui sistem abstract definit de un anumit sistem acumulativ-disipativ și de o clasă de condiții la borne, este *pozitiv reală* (forma pătratică XHX asociată fiind o funcție pozitiv-reală pentru orice X real [7]). Elementele ei sînt reale pentru p real, nu au singularități în semiplanul $Re(p) > 0$ și au cel mult poli simpli pe axa imaginară și la infinit. Sistemele cu parametri repartizați acumulativ-disipative au însă matrice de transfer transcendente, eventual cu singularități esențiale în semiplanul stîng;

d) funcțiile de răspuns tranzitoriu la excitație-treaptă (33) au cel mult o singularitate de tipul funcției lui Dirac $\delta(t)$ în origine, în care caz *limitele integralelor de convoluție* (35) trebuie alese $t_0 -$ și t_+ ;

e) pentru repartiții inițiale oarecare, soluția de evoluție autonomă nu e exprimabilă cu ajutorul funcțiilor de răspuns tranzitoriu și, în general, nu poate fi exprimată în funcție de valorile inițiale ale mărimilor de interacțiune. Sistemele cu parametri repartizați au condiții inițiale de *cîmp*, adică *irreductibile* la condiții inițiale la borne;

f) dacă mărimile de stare sînt identic nule în starea inițială, se poate imagina pentru orice sistem acumulativ-disipativ un model electromagnetic de tipul unui multipol electric, avînd aceeași matrice de transfer $H(p)$. În general, această matrice are elemente care nu sînt funcții meromorfe cu un număr finit de poli (ca în cazul circuitelor cu parametri concentrați), ci funcții meromorfe cu număr infinit de poli sau funcții cu singularități esențiale. Realizabilitatea efectivă a multipolului electric echivalent depinde de posibilitatea de a identifica elemente de circuit electric nefili-forme [4], avînd funcții de transfer de tipul cerut. În cazul funcțiilor meromorfe, utilizînd dezvoltări în serie și în fracțiuni continue limitate la un număr finit de termeni, se pot realiza modele electromagnetice cu parametri concentrați care să aproximeze oricît de bine sistemul cu parametri repartizați dat.

CONCLUZII

După o prezentare a punctelor de vedere structural și funcțional în dezvoltarea teoriei sistemelor dinamice cu scopul de a evidenția deosebiriile dintre ele în construirea conceptului de sistem abstract, s-au prezentat elementele unei teorii de structură aplicabile unor sisteme cu parametri repartizați (cîmpuri fizice cu o infinitate de grade de libertate) localizate într-un domeniu D_{Σ} al spațiului în condițiile destul de generale în care ecuațiile de structură locală, lineare și invariabile, admit o consecință integrală numită teorema funcționalelor pătratice și corespunzătoare în numeroase cazuri (însă nu în toate) principiului de conservare a energiei.

În această teoremă intervin trei funcționale caracteristice sistemului: funcționala de acumulare mărginită și pozitiv-definită, funcționala de disipație nenegativă și funcționala de interacțiune. Condițiile prezentate definesc clasa de *sisteme lineare acumulativ-disipative cu o infinitate de mărimi de stare* pentru care demonstrarea teoremelor de unicitate a soluțiilor și de superpoziție a soluțiilor de regim tranzitoriu se poate face fără a cunoaște forma specifică a ecuațiilor de structură locală, ceea ce permite identificarea mărimilor de stare locală, de care depinde funcționala de acumulare, și a mărimilor de intrare și de ieșire, de care depinde funcționala de interacțiune definită pe frontiera Σ a domeniului, cum și demonstrarea *existenței* și explicitarea *formei* operatorilor de evoluție și de funcționare (de răspuns) a sistemului, respectiv identificarea spațiilor funcționale care corespund variabilelor de stare, de intrare și de ieșire.

În acord cu proprietățile generale ale sistemelor tehnice care au un număr limitat de căi de interacțiune cu exteriorul, teoria a fost dezvoltată pentru *sisteme acumulativ-disipative cu număr finit de intrări*, indicându-se condițiile în care suprafața-frontieră Σ poate fi considerată ca o suprafață de separație care izolează câmpul fizic studiat într-o măsură suficientă pentru a asigura interacțiunea lui cu exteriorul numai în anumite porțiuni omogene ale ei, numite borne de acces.

Dacă există o suprafață de separație, funcționala de interacțiune devine o formă algebrică bilineară în anumite mărimi globale, care depind linear de starea locală a sistemului și dintre care se pot alege mărimile de intrare și de ieșire.

Nu este necesar ca aceste mărimi să fie funcții de starea sistemului, ele putând depinde și de derivate în raport cu timpul ale mărimilor de stare.

Fiecărui sistem linear acumulativ-disipativ dat îi corespund mai multe sisteme abstracte, cu operatori de evoluție și de funcționare (de răspuns) distincți, după clasa de condiții la borne impusă, adică după mărimile de intrare alese printre factorii produselor bilineare ai funcționalei de interacțiune. Teorema separării soluțiilor permite identificarea componentelor aditive de evoluție autonomă și de răspuns tranzitoriu ale soluției generale de regim tranzitoriu a ecuațiilor de structură locală a sistemului și în particular a matricei de transfer pozitiv-reale corespunzătoare clasei de condiții la borne considerate. Elementele acestei matrice sînt în general funcții transcendente cu o infinitate de poli și eventual cu singularități esențiale, de variabila complexă respectivă, din care cauză caracterizarea răspunsului tranzitoriu al sistemelor cu parametri repartizați prin funcții de răspuns tranzitoriu la excitații impulsive prezintă dificultăți, care dispar dacă se utilizează răspunsul la excitații-treaptă.

Teoria prezentată, care generalizează rezultate anterioare obținute de autori în studiul rețelelor electrice și termice cu elemente nefiliforme, a fost dezvoltată pentru sisteme de structură invariabilă, adică neparametrice, în care timpul nu apare deci explicit în coeficienții ecuațiilor de structură, sisteme care nu au surse, adică au ecuații de structură omogene, și au un număr finit de mărimi de intrare.

Teorii asemănătoare se pot dezvolta pentru sisteme cu structură variabilă, ceea ce implică, în fond, existența unor intrări suplimentare, cu variație în timp impusă, de tipul *parametric*, sau cu o infinitate de mărimi de interacțiune, și anume fără alte modificări esențiale afară de cele privitoare la forma explicită a operatorilor de evoluție și de funcționare.

BIBLIOGRAFIE

1. L. A. ZADEH, CH. A. DESOER, *Linear system theory: the State Space Approach*, New York—Londra, McGraw-Hill Book Comp., 1963.
2. R. E. KALMAN, P. L. FALB, M. A. ARBIB, *Topics in mathematical system theory*, New York, McGraw-Hill Book Comp., 1969.
3. M. R. WOHLERS, *Lumped and Distributed Passive Networks: A Generalised and Advanced Viewpoint*, New York—Londra, Academic Press, 1969.
4. R. RĂDULEȚ, A. TIMOTIN, A. ȚUGULEA, *Introduction des paramètres transitoires dans l'étude des circuits électriques ayant des éléments non filiformes et avec pertes supplémentaires*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série Electrotehn. Energ., **11**, 4, 565—638 (1966).
5. R. RĂDULEȚ, A. TIMOTIN, A. ȚUGULEA, *Réseaux thermiques et de diffusion en régime variable*, ibidem, **14**, 2, 229—266 (1969).
6. A. TIMOTIN, *Elementul electromagnetic pasiv de circuit*, St. cerc. energ. electrotehn., **21**, 2, 347—362 (1971).
7. W. CAUER, *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*, Berlin, Akademie-Verlag, 1954

ANEXĂ

EXEMPLE DE SISTEME DINAMICE LINEARE, ACUMULATIV-DISIPATIVE, CU O INFINITATE DE MĂRIMI DE STARE ȘI NUMĂR FINIT DE INTRĂRI

a. CÎMPUL ELECTROMAGNETIC

Considerăm un domeniu mărginit simplu conex D_{Σ} , ocupat de un mediu imobil, într-o stare termică invariabilă, care din punct de vedere electromagnetic este linear, izotrop, pasiv, nedispersiv și caracterizat de funcțiile de punct numite permitivitate, $\epsilon = \epsilon(P) > 0$, permeabilitate, $\mu = \mu(P) > 0$, și conductivitate, $\sigma = \sigma(P) > 0$. Stările electromagnetice din acest domeniu sînt caracterizabile complet local prin mărimile vectoriale numite intensitatea cîmpului electric, $\vec{E} = E(P, t)$, intensitatea cîmpului magnetic, $\vec{H} = H(P, t)$, densitatea curentului electric de conducție, $\vec{J} = J(P, t)$, și mărimea scalară numită densitate de sarcină electrică,

$\rho = \rho(P, t)$, care intervin în cinci legi locale de structură (3), și anume

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} - \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \bar{J} &= 0, \\ \operatorname{rot} \bar{E} + \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} (\epsilon \bar{E}) - \rho &= 0, \\ \operatorname{div} (\mu \bar{H}) &= 0, \\ \bar{J} - \sigma \bar{E} &= 0, \end{aligned} \quad (3a)$$

astfel încît ansamblul local (2) are $q = 10$ componente scalare :

$$\varphi \stackrel{d}{=} \{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, J_x, J_y, J_z, \rho\}. \quad (2a)$$

Primele două legi (3a) sînt legi de desfășurare, iar ultimele trei legi de stare; primele patru sînt ecuații cu derivate parțiale de primul ordin, iar ultima e o relație algebrică, a cărei formă extrem de simplă corespunde proprietăților de material idealizate considerate. Proprietatea I referitoare la linearitatea ecuațiilor locale (4) și la invariabilitatea lor structurală (4') se verifică imediat. Înmulțind scalar prima ecuație (3a) cu \bar{E} și pe a doua cu \bar{H} și scăzîndu-le, se obține, după integrarea pe întregul domeniu, teorema energiei electromagnetice :

$$\underbrace{\oint_{\Sigma} (\bar{E} \times \bar{H}) \bar{e}_{ni} dA}_{I(t)} = \underbrace{\int_{D_{\Sigma}} \sigma \bar{E}^2 dv}_{P(t)} + \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{D_{\Sigma}} \frac{1}{2} (\epsilon \bar{E}^2 + \mu \bar{H}^2) dv}_{W(t)}, \quad (5a)$$

care are forma cerută de proprietatea II a teoremei funcționalelor pătratice (5), densitatea de acumulare (7) fiind densitatea de volum a energiei electromagnetice :

$$w = \frac{1}{2} (\epsilon \bar{E}^2 + \mu \bar{H}^2) \geq 0, \quad (7a)$$

funcționala de acumulare, pozitiv definită, fiind energia electromagnetică, funcționala de disipație nenegativă fiind puterea disipată prin efect Joule în partea conductoare a domeniului D_{Σ} (cu $\sigma \neq 0$), iar funcțională bilineară de interacțiune fiind puterea electromagnetică primită prin frontiera Σ a domeniului (cu normala interioară $\bar{e}_{ni} = -\bar{e}_n$) prin fluxul vectorului lui Poynting. Ansamblul $s \subset \varphi$ al mărimilor de stare locală (8) rezultă a fi ansamblul componentelor scalare, local linear independente, de care depinde densitatea de volum a energiei electromagnetice (7a), adică

$$s \stackrel{d}{=} \{E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z\}, \quad (8a)$$

numai $l = 6$ din cele 10 componente ale ansamblului local (2a) fiind deci mărimi de stare locală, ale căror repartiții inițiale caracterizează complet condițiile inițiale ale problemei regimului tranzitoriu al câmpului electromagnetic, în acord cu teorema de unicitate. Spațiul linear normat al stărilor este spațiul sextetelor de funcții scalare de punct definite în D_Σ :

$$\mathcal{S} \stackrel{d}{=} \{E_x(P), E_y(P), E_z(P), H_x(P), H_y(P), H_z(P)\},$$

compatibile cu a patra ecuație (de stare) (3a) și cu o valoare finită pentru energia electromagnetică $W = \int_{D_\Sigma} w \, dv$, a cărei rădăcină pătrată definește norma stării considerate:

$$\|s(P)\| = \left[\int_{D_\Sigma} \frac{1}{2} (\epsilon \bar{E}^2 + \mu \bar{H}^2) \, dv \right]^{1/2}.$$

Ansamblul i (11) al mărimilor de interacțiune locală este ansamblul celor $m = 4$ componente scalare local linear independente ale componentelor tangențiale $\bar{E}_t = \bar{e}_n \times (\bar{E} \times \bar{e}_n)$ și $\bar{H}_t = \bar{e}_n \times (\bar{H} \times \bar{e}_n)$ ale câmpurilor în fiecare punct M al suprafeței-frontieră, de care depinde funcționala de interacțiune, adică fluxul vectorului lui Poynting, din membrul întâi al teoremei (5a):

$$i \stackrel{d}{=} \{E_{t1}, E_{t2}, H_{t1}, H_{t2}\}. \quad (11a)$$

Se verifică imediat că aceste mărimi de interacțiune locală sînt combinații lineare ale componentelor ansamblului φ (2a) și sînt univoc și linear determinate de starea locală s (8a).

Ca urmare, câmpul electromagnetic considerat este un sistem linear acumulativ-disipativ, cu o infinitate de mărimi de stare: valorile locale ale componentelor vectoriale \bar{E} și \bar{H} în toate punctele domeniului D_Σ considerat.

Suprafața Σ poate fi o suprafață de separație dacă nu este străbătută de linii de inducție magnetică (ceea ce se asigură riguros într-un model idealizat în care mediul exterior suprafeței îi realizează un înveliș de permeabilitate nulă) sau de linii de inducție electrică (ceea ce se asigură riguros într-un model idealizat în care mediul exterior îi realizează un înveliș de permitivitate nulă) și dacă este străbătută de linii de curent de conducție numai prin $n + 1$ fețe echipotențiale disjuncte $S_k (k \in \{1, 2, \dots, n + 1\})$, care vor deveni bornele de acces ale *multipolului electric* astfel definit (fig.1).

În acest caz, forma bilineară de interacțiune definită de puterea instantanee primită prin fluxul vectorului lui Poynting ia forma algebrică bilineară (vezi[4])

$$I(t) \stackrel{d}{=} \oint_{\Sigma} (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot \bar{e}_{ni} \, dA = \sum_{k=1}^n v_k(t) \cdot i_k(t), \quad (13a)$$

în care intervin potențialele bornelor S_k față de borna S_{n+1} luată ca referință (cu $C_k \subset \Sigma$, unind $P_k \in S_k$ cu $P_{n+1} \in S_{n+1}$):

$$v_k(t) = \int_{\sigma_k} E(M, t) d\vec{r} \quad (14a)$$

și curenții (lineari independenți) absorbiți pe la bornele S_k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$), $\Gamma_k \subset \Sigma$ fiind conturile acestor borne:

$$i_k(t) = \oint_{\Gamma_k} \vec{H}(M, t) d\vec{r}, \quad (15a)$$

care vor fi mărimile de interacțiune (14) și (15). Clasa de condiții la borne, care precizează și sistemul abstract asociabil multipolului electric studiat,

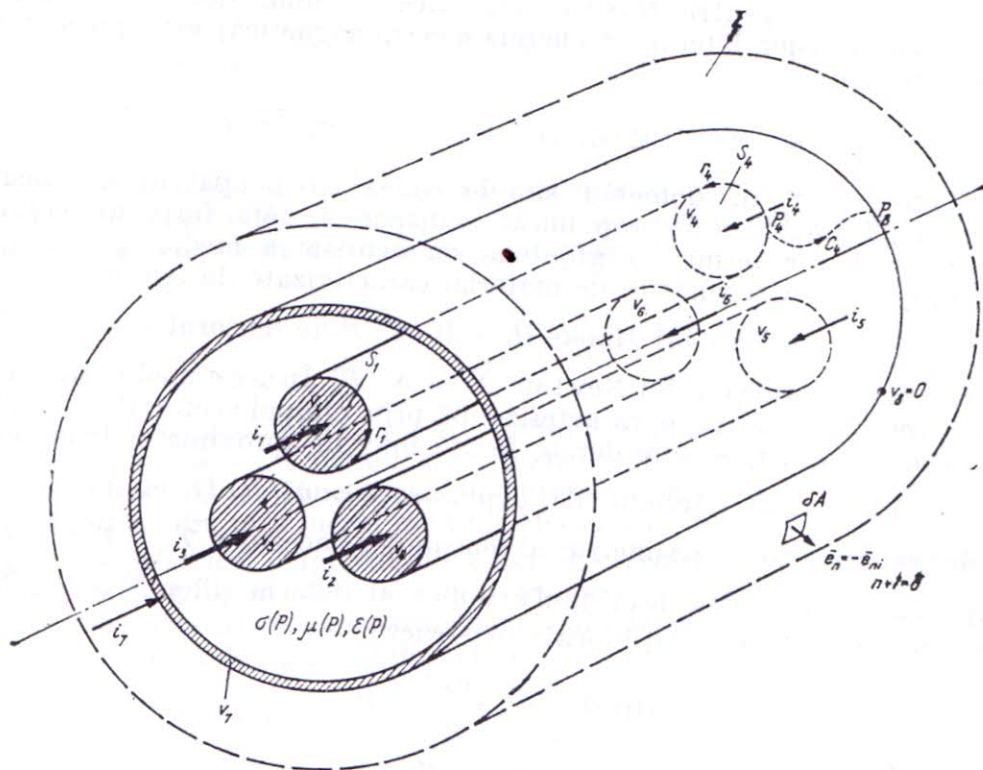


Fig. 1. — Sistem electromagnetic (porțiune de cablu trifazat, de lungime mare, cu izolant imperfect).

este hotărâtă de alegerea unui anumit șir de n mărimi de intrare, câte una din fiecare pereche (v_k, i_k) asociată unei borne (k), cealaltă mărime a perechii devenind mărimea de ieșire corespunzătoare. Dacă se alege drept mărimi de intrare curenții, operatorul de funcționare (35) al multipolului electric, adică operatorul stare-intrare-ieșire, se va scrie pe componente sub forma (vezi și [4])

$$v_j(t) = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \int_{t_0^-}^{t^+} \xi_{jk}(t-t') i_k(t') dt' + v_j^0(t), \quad (35a)$$

în care $\xi_{jk}(t)$ sînt funcțiile de răspuns tranzitoriu la excitație treaptă-unitate în tensiuni, iar $v_j^0(t)$ soluțiile de evoluție autonomă în gol (condiții la borne omogene în clasa definită de mărimile de intrare reprezentate de curenți), determinate de starea inițială din momentul t_0 a cîmpului electromagnetic din D_Σ . Funcțiile de răspuns tranzitoriu $\xi_{jk}(t)$ au cel mult o singularitate-tip $\delta(t)$ în origine și sînt asociate impedanțelor operaționale de transfer ale multipolului prin relațiile

$$Z_{jk}(p) = p \mathcal{L} [\xi_{jk}(t)]. \quad (36a)$$

Alte proprietăți ale acestor funcții, ca și modul de caracterizare prin parametrii tranzitorii (fără singularități) ai unui multipol electric sînt prezentate în lucrarea [4]. Generalizarea corespunzătoare existenței unor borne de acces magnetice (pentru fluxuri magnetice) și unor domenii multiplu conexe (cu transfer lateral de energie electromagnetică) este prezentată în lucrarea [6].

b. CÎMPUL MICILOR DEFORMAȚII VÍSCOELASTICE

Considerăm un domeniu simplu conex D_Σ ocupat de un mediu continuu deformabil, anizotrop, linear, nedispersiv, fără forțe de volum, de conductivitate termică neglijabilă, cu densitatea medie $\tau_0 = \tau_0(P)$ și cu proprietăți viscoelastice de material caracterizate de tensorul elastic de ordinul al patrulea al lui Hooke $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{H}}(P)$ și de tensorul viscozităților de ordinul al patrulea al lui Newton $\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{N}}(P)$. În acest mediu, starea de deformare viscoelastică e caracterizabilă prin cîmpul vectorial al deplasărilor $\overline{u} = \overline{u}(P, t)$ — considerate foarte mici în aproximația lineară —, cîmpul vectorial al vitezelor de deplasare $\overline{v} = \overline{v}(P, t)$, cîmpul tensorial de ordinul al doilea și simetric al tensiunilor mecanice $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}(P, t)$ și cîmpul tensorial simetric de ordinul al doilea al deformațiilor $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{X}}(P, t)$, care intervin în patru relații locale de structură :

$$\begin{aligned} \text{Div } \overline{\overline{T}} - \tau_0 \frac{d\overline{v}}{dt} &= 0, \\ \overline{\overline{T}} - \overline{\overline{H}} \cdot \overline{\overline{X}} + \overline{\overline{N}} \cdot \frac{\partial \overline{\overline{X}}}{\partial t} &= 0, \\ \overline{v} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} &= 0, \\ \overline{\overline{X}} - \text{def } \overline{u} &= 0, \end{aligned} \quad (3b)$$

astfel încît ansamblul local (2) are $q = 18$ componente scalare distincte (tensiunile și deformațiile fiind tensori simetrici au numai cîte șase componente distincte) și local linear independente :

$$\varphi \stackrel{d}{=} \{X_{xx}, X_{xy}, \dots, T_{xx}, T_{xy}, \dots, u_x, u_y, u_z, v_x, v_y, v_z\} \quad (2b)$$

Primele trei relații (3b) sînt ecuații de desfășurare, iar ultima este o ecuație de stare (echivalentă unor restricții impuse funcțiilor de punct definite de tensorul deformațiilor și cunoscute sub numele de condițiile lui Saint-Venant, deoarece nu orice funcție tensorială de punct poate fi deformatorul unei funcții vectoriale de punct).

Proprietatea I referitoare la linearitatea și la invariabilitatea structurală a ecuațiilor locale (3b) se verifică imediat. Înmulțind scalar prima ecuație cu \bar{v} și integrînd-o prin părți asupra întregului domeniu D_Σ cu utilizarea celei de-a doua ecuații înmulțite contractat cu $\frac{\partial \bar{X}}{\partial t}$ se obține teorema energiei mecanice :

$$\oint_{\Sigma} \underbrace{(\bar{T} \cdot \bar{v}) \bar{e}_n}_{I(t)} dA = \int_{D_\Sigma} \underbrace{\left(\bar{N} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial t} \right)}_{P(t)} \cdot \frac{\partial \bar{X}}{\partial t} dv + \frac{d}{dt} \int_{D_\Sigma} \underbrace{\frac{1}{2} [(\bar{X} \cdot \bar{H}) \bar{X} + \tau_0 \bar{v}^2]}_{W(t)} dv, \quad (5b)$$

care are forma cerută de proprietatea II a teoremei funcționalelor pătratică (5), densitatea de acumulare (7) fiind suma dintre densitatea de volum a energiilor elastică de deformație și cinetică :

$$w = \frac{1}{2} (\bar{X} \cdot \bar{H}) \cdot \bar{X} + \frac{1}{2} \tau_0 \bar{v}^2 \geq 0, \quad (7b)$$

funcționala de acumulare, pozitiv definită, fiind energia totală-cinetică și de deformație —, funcționala de disipație fiind puterea disipată prin frecare viscoasă, iar funcționala de interacțiune fiind puterea mecanică primită de mediu prin lucrul mecanic efectuat în unitatea de timp de tensiunile viscoelastice \bar{T} aplicate din exterior suprafeței mediului considerat. Ansamblul $s \subset \varphi$ al mărimilor de stare locală (8) rezultă a fi ansamblul componentelor scalare, local linear independente, de care depinde densitatea de volum (7b) a energiei totale, adică

$$s \stackrel{d}{=} \{X_{xx}, X_{xy}, X_{xz}, X_{yy}, X_{yz}, X_{zz}, v_x, v_y, v_z\}, \quad (8b)$$

numai $l = 9$ dintre cele 18 componente ale ansamblului local (8a) fiind deci mărimi de stare locală, ale căror repartiții inițiale caracterizează complet condițiile inițiale ale problemei de regim tranzitoriu respective. Spațiul linear al stărilor este spațiul nonetelor de funcții scalare de punct definite în D_Σ :

$$\mathcal{S} \stackrel{d}{=} \{ \{X_{xx}(P), \dots, X_{zz}(P), v_x(P), v_y(P), v_z(P)\} \},$$

compatibile cu a patra ecuație (de stare) (3b), adică satisfăcînd condițiile lui Saint-Venant, și cu o valoare finită pentru energia mecanică totală W , a cărei rădăcină pătrată definește norma stării considerate. Ansamblul

i (11) al mărimilor de interacțiune locală este în fiecare punct al suprafeței-frontieră ansamblul celor $m = 6$ componente scalare local linear independente ale tensiunii $\bar{T}_n = \bar{e}_n \cdot \bar{T}$, asociate normalei exterioare \bar{e}_n , și ale vitezei \bar{v} , de care depinde funcționala de interacțiune, adică lucrul mecanic efectuat din exterior în unitatea de timp asupra corpului considerat:

$$i \stackrel{d}{=} \{T_{nx}, T_{ny}, T_{nz}, v_x, v_y, v_z\}. \quad (11b)$$

Se verifică imediat că aceste mărimi de interacțiune locală sînt combinații lineare ale componentelor ansamblului φ (2b) și sînt univoc și linear determinate de starea locală (8b), ca funcție de timp prin a doua ecuație (3b).

Ca urmare, cîmpul micilor deformații viscoelastice considerat mai sus este un sistem linear acumulativ-disipativ, cu o infinitate de mărimi

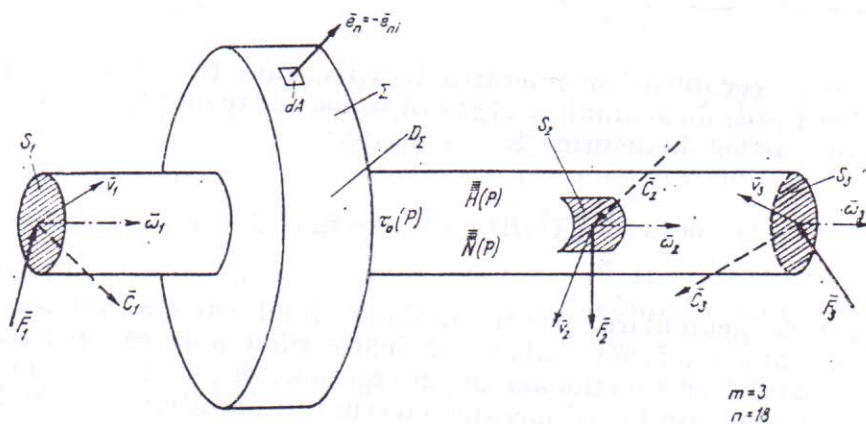


Fig. 2. — Sistem mecanic (element rezonant al unui filtru electromecanic).

de stare: valorile locale ale componentelor vitezei \bar{v} și tensorului simetric \bar{X} al deformațiilor în toate punctele domeniului considerat. Deși apar prin derivatele lor de primul ordin în raport cu timpul în ecuațiile de desfășurare în sistemul (3b), componentele deplasărilor \bar{u} nu sînt în acest caz mărimi de stare locală, deoarece în cazul considerat al lipsei forțelor de volum densitatea de acumulare corespunzătoare, adică densitatea de volum a energiei mecanice, nu depinde de deplasări. Luarea în considerare a unor forțe de volum de tip gravitațional ar fi introdus termeni dependenți de deplasare ai energiei mecanice, dar nepătratici (în prezentarea newtoniană a energiei potențiale respective) sau termeni aditivi negativ definiți în densitatea de volum a energiei (în prezentarea de cîmp a gravitației).

Mediul continuu considerat are, în general, o infinitate de mărimi de interacțiune, definite în infinitatea de puncte ale suprafeței-frontieră. Dacă însă această suprafață delimitează o porțiune de corp (vezi, de exemplu, fig. 2) al cărui contact mecanic cu exteriorul de face exclusiv prin m fețe rigide disjuncte S_k ale ei, frontiera reprezintă o suprafață de separație,

în sensul cerut de proprietatea III, și porțiunea de corp considerată va fi *multipol mecanic*, ale cărei borne de acces sînt aceste fețe rigide $S_k \subset \Sigma$ ($k \in \{1, 2, \dots, m\}$). În cazul general în care fiecare față rigidă are șase grade de libertate: trei de translație (ale vitezei \bar{v}_k a centrului ei de inerție M_k) și trei de rotație (ale vitezei ei unghiulare de rotație $\bar{\omega}_k$ în jurul acestui centru), cele $n = 6m$ mărimi de interacțiune (14) pot fi cele $3m$ componente scalare ale forțelor rezultante aplicate bornelor:

$$\bar{F}_k(t) = \int_{S_k} \bar{e}_n \cdot \bar{T} dA = \int_{S_k} \bar{e}_n \bar{H}(\cdot \bar{X}) dA - \int_{S_k} \bar{e}_n \left(\bar{N} \frac{\partial \bar{X}}{\partial t} \right) dA \quad (14'b)$$

și cele $3m$ componente scalare ale momentelor rezultante în raport cu centrele de inerție ale bornelor, adică cuplurile rezultante aplicate acestora:

$$\bar{C}_k(t) = \int_{S_k} \bar{r} \times (\bar{e}_n \cdot \bar{T}) dA, \quad (14''b)$$

iar cele $n = 6m$ mărimi de interacțiune (15) pot fi, corespunzător alegerii precedentelor, cele $3m$ componente scalare ale vitezelor centrelor de inerție $M_k \subset S_k$ și cele $3m$ componente scalare ale vitezelor unghiulare de rotație ale acestor fețe rigide:

$$\bar{v}_k(t) = \bar{v}(M_k, t) \quad (M_k \in S_k), \quad (15'b)$$

$$\bar{\omega}_k(t) = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{v}(M, t) \quad (M \in S_k). \quad (15''b)$$

Forma bilineară de interacțiune (13) este în acest caz puterea mecanică instantanee primită de multipolul mecanic pe la borne cu $n = 6m$ termeni scalari bilineari:

$$I(t) \stackrel{d}{=} \oint_{\Sigma} (\bar{T} \cdot \bar{v}) \bar{e}_n dA = \sum_{k=1}^{m=6} (\bar{F}_k \cdot \bar{v}_k + \bar{C}_k \cdot \bar{\omega}_k). \quad (13b)$$

Clasa de condiții la borne va fi definită de alegerea celor n mărimi de intrare printre factorii scalari ai acestor termeni aditivi bilineari, existînd în general 2^n alegeri posibile, factorii restanți fiind mărimile de ieșire asociate lor. Cu ajutorul funcțiilor de răspuns tranzitoriu la excitație treaptă-unitate se vor putea scrie formele (34), respectiv (35), ale operatorilor de evoluție și de funcționare ai multipolului mecanic.

c. CÎMPUL CONDUȘIEI TERMICE

Considerăm un domeniu simplu conex D_{Σ} ocupat de un conductor de căldură linear, izotrop, rigid fără surse interioare de căldură, în general neomogen, avînd conductivitatea termică $\lambda = \lambda(P) > 0$ și căldura spe-

cifică volumică $\gamma = \gamma(P) > 0$ independente de temperatură (în aproximația lineară considerată), în care fenomenele locale de transfer de căldură prin conducție se pot caracteriza complet prin cîmpul scalar al temperaturilor relative $\vartheta = \vartheta(P, t)$ față de un nivel de referință ales și prin cîmpul vectorial al densității fluxului de căldură $\bar{q} = \bar{q}(P, t)$, care intervin în două legi de structură locală :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{q} + \gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= 0, \\ \bar{q} + \lambda \operatorname{grad} \vartheta &= 0, \end{aligned} \quad (3c)$$

dintre care prima e o lege de desfășurare, iar a doua o lege de stare. Ansamblul local (2) va avea $q = 4$ componente scalare :

$$\varphi \stackrel{d}{=} \{\vartheta, q_x, q_y, q_z\}. \quad (2c)$$

Se verifică imediat proprietatea I referitoare la linearitatea și la invariabilitatea structurală a ecuațiilor locale (3c). Înmulțind prima ecuație cu ϑ și integrînd-o prin părți asupra întregului domeniu cu luarea în considerare a celei de-a doua ecuații, se obține o consecință integrală interpretabilă drept teoremă a funcționalelor pătratice, în acord cu proprietatea II :

$$\underbrace{\int_{\Sigma} \vartheta \bar{q} \bar{e}_{ni} dA}_{I(t)} = \underbrace{\int_{D_{\Sigma}} \frac{1}{\lambda} \bar{q}^2 dv}_{P(t)} + \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{D_{\Sigma}} \frac{1}{2} \gamma \vartheta^2 dv}_{W(t)}, \quad (5c)$$

în care densitatea de acumulare

$$w = \frac{1}{2} \gamma \vartheta^2 \geq 0 \quad (7c)$$

nu mai are interpretarea energetică pusă în evidență în cazul primelor două exemple (densitatea de volum a energiei interioare față de starea de referință $\vartheta = 0$ fiind în acest caz $\gamma \vartheta$).

Ansamblul $s \subset \varphi$ al mărimilor de stare locală (8) are în acest caz o singură componentă, temperatura :

$$s \stackrel{d}{=} \{\vartheta\}, \quad (8c)$$

funcția de punct $\vartheta(P)$ definind starea sistemului la un moment dat, spațiul \mathcal{S} al stărilor fiind spațiul linear normat al funcțiilor scalare de punct definite în D_{Σ} pentru care funcționala de acumulare

$$W = \int_{D_{\Sigma}} \frac{1}{2} \gamma \vartheta^2 dv \geq 0 \quad (6c)$$

are sens și rezultă finită, definind norma \sqrt{W} . Din forma

$$I = \oint_{\Sigma} \vartheta \bar{q} \bar{e}_{ni} \delta A = - \oint_{\Sigma} \vartheta q_n \delta A \quad (10c)$$

a funcționalei de interacțiune rezultă că ansamblul i (11) al mărimilor de interacțiune locală are $m = 2$ componente scalare, temperatura și componenta normală a densității fluxului de căldură (după normala exterioară)

$$i \stackrel{d}{=} \{\vartheta, q_n\}, \quad (11c)$$

care sînt componente sau combinații lineare ale componentelor ansamblului local (2c), univoc și linear determinate prin ecuațiile de structură de funcția de stare $\vartheta(P)$ în orice moment. Ca urmare, și cîmpul conducției termice este un sistem linear acumulator disipativ cu o infinitate de mărimi de stare.

Acest cîmp are, în general, o infinitate de mărimi de intrare. Dacă însă (fig. 3) suprafața de frontieră Σ e termic izolantă peste tot, cu excepția a n fețe disjuncte $S_k \subset \Sigma$ și izoterme, prin care se asigură contactul termic al corpului considerat cu exteriorul, ea devine o suprafață de separație în sensul proprietății III, definind un multipol termic (vezi [5]) ale cărui mărimi de interacțiune vor fi fluxurile de căldură primite pe la borne:

$$\Phi_k(t) = \int_{S_k} \bar{q} \bar{e}_{ni} dA = \int_{S_k} \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial s_n} dA, \quad (14c)$$

respectiv temperaturile bornelor izoterme S_k :

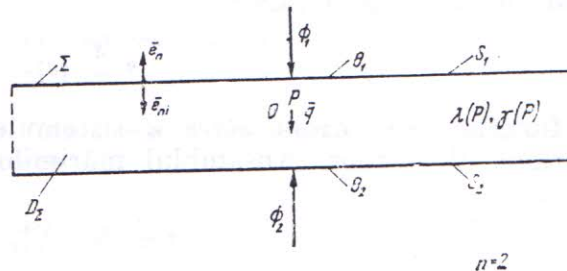
$$\vartheta_k(t) = \vartheta(M, t) \quad (M \in S_k). \quad (15c)$$

În adevăr, în acest caz funcționala de interacțiune (10c) capătă forma bilineară algebrică

$$I(t) = \sum_{k=1}^n \Phi_k(t) \vartheta_k(t), \quad (16c)$$

care însă nu are semnificația fizică de *putere*, ca în primele două exemple de sisteme lineare acumulator-disipative. Pentru fiecare clasă de condiții

Fig. 3. — Sistem termic (perete conductor plan al unui schimbător de căldură).



la borne definită de alegerea celor n mărimi de intrare printre cele n fluxuri și cele n temperaturi, se obține un sistem abstract asociabil multipolului termic, cu anumiți operatori de evoluție (34) și de funcționare (35).

d. CÎMPUL DE DIFUZIUNE

Considerăm difuziunea unei substanțe definite într-un mediu imobil, izotropă, izotermă, lineară și neînsoțită de reacții chimice, cu coeficientul de difuziune $D = D(P)$. Cîmpul de difuziune e caracterizabil local prin concentrația $c = c(P, t)$ a substanței care difuzează și prin densitatea fluxului de substanță $\bar{w} = \bar{w}(P, t)$, cele două legi de structură locală:

$$\operatorname{div} \bar{w} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0, \quad (3d)$$

$$\bar{w} + D \operatorname{grad} c = 0,$$

fiind cu totul analoge celor două legi ale conducției termice (3c). Această analogie locală, cu corespondențele

$$\vartheta \rightarrow c; \quad \bar{q} \rightarrow \bar{w}; \quad \gamma \rightarrow 1; \quad \lambda \rightarrow D,$$

asigură un izomorfism complet al sistemelor lineare corespunzătoare. Ansamblul local (2) al cîmpului de difuziune rezultă

$$\varphi \stackrel{d}{=} \{c, w_x, w_y, w_z\} \quad (2d)$$

și teorema funcționalelor pătratice rezultă

$$\underbrace{\int_{\Sigma} c \bar{w} \bar{e}_{n_i} dA}_{I(t)} = \underbrace{\int_{D_{\Sigma}} \frac{1}{D} \bar{w}^2 dv}_{P(t)} + \frac{d}{dt} \underbrace{\int \frac{c^2}{2} dv}_{W(t)}, \quad (5d)$$

cu densitatea de acumulare

$$w = \frac{1}{2} c^2 \quad (7d)$$

(fără interpretare energetică), care indică concentrația c drept unică mărime de stare locală:

$$s \stackrel{d}{=} \{c\}, \quad (8d)$$

și funcția $c(P)$ drept stare a sistemului, element al spațiului linear normat al stărilor. Ansamblul mărimilor de interacțiune locală rezultă

$$i \stackrel{d}{=} \{c, w_n\}, \quad (11d)$$

iar condițiile de izolare corespunzătoare definiției suprafeței Σ ca suprafețe de separație implică caracterul ei impermeabil pentru difuzia substanței considerate, cu excepția a n fețe disjuncte de egală concentrație.