

# INTRODUCEREA PARAMETRILOR TRANZITORII ÎN STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE LINEARE AVÎND ELEMENTE NEFILIFORME ȘI PIERDERI SUPLEMENTARE<sup>1)</sup>

DE

ACAD. R. RĂDULEȚ, A. TIMOTIN și A. ȚUGULEA

621.3.011.538.542 : 537.226.3

În lucrare se generalizează teoria circuitelor electrice lineare în cazul când elementele acestora sînt nefiliforme și cu pierderi suplimentare. Pentru a le caracteriza intrinsec li s-au asociat anumite funcțiuni de timp (parametri tranzitorii) numite rezistență tranzistorie, inductivitate tranzitorie, conductanță tranzitorie și capacitate tranzitorie, pentru care s-au stabilit numeroase proprietăți generale. S-a analizat influența condițiilor inițiale de cîmp, demonstrîndu-se teoremele de unicitate a soluțiilor și de superpoziție necesare rezolvării problemelor de cîmp și determinării parametrilor tranzitorii.

Au fost generalizate ecuațiile lui Kirchhoff la cazul considerat, cum și ecuațiile telegrafistilor. Lucrarea se încheie cu exemple de calcul al unor parametri tranzitorii urmate de concluzii generale asupra problemelor tratate.

## 1. PROBLEMA PARAMETRILOR TRANZITORII

Teoria circuitelor electrice *lineare* de curent alternativ și cu parametri concentrați se bazează pe sistemul ecuațiilor lui Kirchhoff, ce se presupune că le satisfac funcțiunile de timp pe care le reprezintă valorile instantanee ale tensiunilor și curenților. În regim staționar, adică în curent continuu, aceste ecuații sînt consecințe *exacte* ale legilor cîmpului electromagnetic dacă dielectricul din jurul conductoarelor lineare e perfect izolant.

Pentru circuitele electrice în regim variabil, de exemplu pentru cele de curent alternativ, ecuațiile lui Kirchhoff în valori instantanee ale tensiunilor și curenților sînt însă numai *aproximații* [1] ale consecințelor

<sup>1)</sup> Articol apărut în „Rev. roum. sci. tech.-Electrotechn. Energ.” 16, 4 (1966).

legilor câmpului electromagnetic variabil, adică ale ecuațiilor lui Maxwell. Aproximațiile necesare deducerii ecuațiilor lui Kirchhoff în valori instantanee, pentru circuite lineare, din ecuațiile lui Maxwell sînt următoarele: caracterul perfect izolant al mediului ce înconjoară circuitele; existența unui regim cvasistationar adică a unui regim de variație suficient de lent pentru a se putea neglija peste tot, cu excepția dielectricului din condensatoare, contribuția variației în timp a câmpului electric (a curentului de deplasare) la producerea câmpului magnetic, respectiv pentru a se putea neglija în dielectricul condensatoarelor contribuția variației în timp a câmpului magnetic (prin inducție electromagnetică) la producerea câmpului electric; circuit format din conductoare strict filiforme, adică suficient de subțiri pentru a se putea admite o repartitie de curent continuu a densității de curent pe secțiunea lor transversală și neglijarea influenței pierderilor de putere în dielectricul condensatoarelor asupra repartitiei câmpului electric interior, adică neglijarea influenței efectului de relaxație asupra acestei repartitii.

Dacă sînt îndeplinite aceste condiții și se pot face aceste aproximații, suma algebrică a curenților instantanei din laturile care concură într-un nod de rețea e nulă (prima teoremă a lui Kirchhoff) și deci curentul electric de conducție are în orice moment aceeași valoare prin toate secțiunile transversale ale oricărui conductor neramificat, sistemul valorilor instantanee ale curenților din laturile circuitului determină univoc repartitia instantanee (din același moment) a câmpului magnetic în întregul spațiu, valorile instantanee ale sarcinilor condensatoarelor determină univoc repartitia instantanee (din același moment) a câmpului electric din dielectricul respectiv, câmpul magnetic și câmpul electric la mare depărtare de circuitul electric izolat tind suficient de repede către zero (și anume invers proporțional cu cel puțin cubul distanței, astfel că efectele de radiație sînt neglijabile), suma algebrică a tuturor căderilor de tensiune instantanee ale elementelor de circuit care alcătuiesc un ochi de circuit e egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare instantanee ale generatoarelor din acel ochi (a doua teoremă a lui Kirchhoff), iar elementele dipolare *reale* de circuit (bobine cu pierderi, rezistoare inductive, condensatoare cu pierderi) admit scheme echivalente cu parametri concentrați, constituite din elemente de circuit ideale în număr finit: rezistoare ideale, bobine ideale, condensatoare ideale.

Cu aceste aproximații rezultă pentru elementele de circuit lineare, pasive și ideale, reprezentate de rezistorul, bobina, respectiv condensatorul ideale, între căderea de tensiune  $u(t)$  și curentul instantaneu  $i(t)$ , ecuațiile

$$u = r i, \quad i = g u \quad (\text{rezistorul ideal}), \quad (1)$$

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = \sum l \frac{di}{dt} \quad (\text{bobina ideală}), \quad (2)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = c \frac{du}{dt} \quad (\text{condensatorul ideal}), \quad (3)$$

în care parametrii constanți  $r$  — rezistențele,  $g = 1/r$  — conductanțele,  $l$  — inductivitățile proprii și mutuale și  $c$  — capacitățile cu valorile lor de regim

staționar,  $\Phi(t)$  fiind fluxul total instantaneu al bobinei, iar  $q(t)$ —sarcina instantanee a condensatorului<sup>1)</sup>.

Cu aceleași notații, prima teoremă a lui Kirchoff are forma

$$\sum_k i_k(t) = 0 \quad (4)$$

pentru fiecare nod (sumarea efectuându-se asupra tuturor laturilor legate la nodul considerat), iar cea de a doua teoremă are forma

$$\sum_k e_k(t) = \sum_k u_k(t) \quad (5)$$

pentru fiecare ochi (sumarea efectuându-se asupra tuturor elementelor de circuit ale laturilor ochiului considerat), în care  $e_k(t)$  sînt tensiunile electromotoare ale generatoarelor din laturile ochiului.

Sistemul de ecuații (1), (2), (3), (4), (5) reprezintă în general un sistem de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți și de ordinul întâi, ale cărui soluții  $u_k(t)$ ,  $i_k(t)$  sînt complet determinate de funcțiunile de timp  $e_k(t)$  și de valorile inițiale  $\Phi_k(0+)$  ale fluxurilor bobinelor și  $q_k(0+)$  ale sarcinilor condensatoarelor.

Dacă nu se fac aproximațiile arătate mai sus, studiul circuitelor în regim variabil nu se mai poate face în general în limbajul teoriei circuitelor, adică utilizînd ca variabile de stare curenții și căderile de tensiune (un număr finit de grade de libertate), ci trebuie abordat în limbajul teoriei cîmpului electromagnetic, adică utilizînd ca variabile de stare funcțiunile de punct reprezentate de intensitățile cîmpului electric și magnetic (o infinitate de grade de libertate). Dificultățile analitice ale tratării exacte a problemei determinării cîmpului electromagnetic variabil, asociat unui circuit electric cu o structură ceva mai complicată, sînt atît de mari, încît în practică se preferă utilizarea teoremelor lui Kirchoff chiar și cînd aproximațiile menționate sînt nesatisfăcătoare, utilizînd pentru regimul permanent sinusoidal eventual forma complexă a ecuațiilor (1) . . . (5) cu parametri de circuit dependenți de frecvență.

Cele patru aproximații nu sînt însă la fel de importante și nu sînt aplicabile totdeauna concomitent în diferite probleme concrete. Aproximația regimului quasistaționar (*b*) este îndreptățită pentru studiul cîmpului electromagnetic în interiorul conductoarelor metalice (densitatea curențului de deplasare e neglijabilă față de densitatea curențului de conducție pentru toată gama de frecvențe utilizată azi în tehnică) și este justificabilă și în afara conductoarelor la frecvențe nu prea înalte, la care e satisfăcută inegalitatea

$$\lambda_{min} = \frac{v}{f_{max}} \gg D_{max} \quad (6)$$

în care  $\lambda_{min}$  e cea mai mică lungime de undă, corespunzătoare celei mai înalte frecvențe  $f_{max}$  care poate interveni în problema considerată,  $v$  e viteza de propagare a undei electromagnetice corespunzătoare, iar  $D_{max}$  e dimensiunea lineară maximă a circuitului (în direcția de propagare).

<sup>1)</sup> S-au utilizat litere mici pentru parametrii  $r$ ,  $l$ ,  $c$  din ecuațiile în valori instantanee, spre a rezerva majusculele pentru parametrii din ecuațiile operaționale.

Pentru o clasă foarte largă de probleme tehnice, corespunzătoare circuitelor cu parametri concentrați, condiția (6) e satisfăcută pînă la frecvențe de ordinul megahertzilor, ceea ce și justifică acceptarea aproximației de regim cvasistaționar.

Alta este situația aproximației corespunzătoare caracterului filiform al circuitelor. Teoria efectului pelicular [1] permite să se demonstreze că repartiția unui curent alternativ sinusoidal și de frecvență  $f = \omega/2\pi$  e practic uniformă pe secțiunea transversală a unui conductor numai dacă adîncimea de pătrundere  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}}$  a cîmpului electromagnetic în materialul său e mult mai mare decît dimensiunile lineare maxime ale secțiunii transversale a celui conductor :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^7}{f \sigma \mu_r}} \gg d_{max}, \quad (7)$$

relație în care  $\sigma$  și  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = \mu_r \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}$  sînt conductivitatea și permeabilitatea magnetică a conductorului, iar  $d_{max}$  cea mai mare dimensiune lineară a secțiunii transversale. Chiar la frecvența industrială de 50 Hz, condiția (7) nu mai e satisfăcută în cupru de îndată ce dimensiunile secțiunii transversale depășesc cîțiva milimetri și deci nu se mai poate face aproximația de conductor filiform.

Influența efectului de relaxație din dielectricul condensatoarelor e neglijabilă în condensatoare lineare cu dielectric perfect omogen, sau în condensatoare lineare cu dielectric neomogen, în care materialele au timpuri de relaxație  $t_r = \epsilon/\sigma = 1/(2\pi f \cdot \text{tg } \delta)$  foarte mari față de perioada  $T = 1/f$ , adică în care e verificată inegalitatea

$$\frac{T}{t_r} = 2\pi \cdot \text{tg } \delta \ll 1 \quad (8)$$

unde  $\text{tg } \delta$  e tangenta unghiului de pierderi, iar  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \cdot \epsilon_r$  permitivitatea materialului. Dacă această condiție nu e satisfăcută, sau dacă dielectricul condensatorului are pierderi prin polarizare (viscozitate), neglijarea efectelor de relaxație e principial inutilizabilă, chiar dacă regimul e cvasistaționar.

Nu există o teorie generală a circuitelor electrice lineare și cu parametri concentrați, valabilă pentru toate regimurile variabile în care nu se pot neglija influențele efectelor pelicular sau de relaxație, adică pentru circuitele nefiliforme, cînd nu mai pot fi valabile nici în regim permanent sinusoidal ecuații de forma (1), (2), (3). În cazul considerării efectului pelicular, densitatea de curent și cîmpul magnetic asociat în conductoare au faze variabile de la punct la punct și diferite una de alta, astfel că fluxul magnetic total al unui circuit închis nu este în fază cu intensitatea curentului și nu mai este proporțional cu această intensitate, pentru a se putea defini o inductivitate proprie constantă a circuitului. În cazul considerării efectului de relaxație din condensatoarele cu pierderi cu dielectric neomogen, densitatea de sarcină și cîmpul electric asociat au faze variabile de la punct la punct și diferite una de alta, astfel că sarcina unei armături

nu mai este în fază cu tensiunea aplicată la borne și nu mai este proporțională cu această tensiune, pentru a se putea defini o capacitate constantă a condensatorului.

Numai pentru cazul particular al regimului permanent sinusoidal s-au dezvoltat metode de studiu pentru circuite lineare nefiliforme și cu condensatoare cu pierderi, și anume folosind cunoscuta formă în complex a ecuațiilor cîmpului (eventual cu introducerea unor mărimi de material  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  — complexe) și stabilind, în locul ecuațiilor (1), (2) și (3), ecuații lineare pe care le satisfac imaginile în complex  $\underline{U}$  și  $\underline{I}$  ale tensiunilor și curenților, și avînd forma

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad (9)$$

în care apar impedanțe echivalente complexe, dependente prin funcțiuni transcendente de frecvența  $f = \omega/2\pi$ , adică și de parametrul  $j\omega$  ( $j = \sqrt{-1}$ ). De asemenea, numai pentru regimurile tranzitorii particulare, cu valori inițiale nule ale intensităților cîmpurilor electrice și magnetice în întregul spațiu, s-au dezvoltat metode operaționale [2] asemănătoare, care conduc la ecuații lineare satisfăcute de imaginile Laplace  $U(p)$  și  $I(p)$  ale tensiunilor și curenților — și avînd forma

$$U(p) = Z(p) I(p) \quad (10)$$

în care apar impedanțe operaționale echivalente, dependente prin funcțiuni transcendente de parametrul complex  $p$  cu  $Z(j\omega) = \underline{Z}$ .

Autorii își propun să dezvolte în lucrarea de față o teorie generală, în mărimi instantanee, a tuturor regimurilor permanente sau tranzitorii, cu sau fără mărimi inițiale nule, ale circuitelor electrice lineare cu conductoare nefiliforme și cu efecte de relaxație, care să răspundă următoarelor întrebări: În ce măsură caracterizarea unor astfel de circuite se mai poate face cu un număr finit de variabile, cum sînt valorile instantanee ale tensiunilor și curenților? Care este efectul repartiției inițiale a cîmpurilor magnetice și electrice asupra evoluției stărilor circuitului? Care sînt relațiile între valorile instantanee ale tensiunilor și curenților, pentru elementele de circuit, care generalizează ecuațiile (1), (2) și (3) și sînt valabile și în aceste cazuri? Cum trebuie caracterizate, în acest caz, elementele lineare de circuit, ținînd seamă de faptul că definirea unor parametri  $r$ ,  $l$ ,  $c$  constanți nu este posibilă?

Lucrarea introduce pentru circuitele cu elemente nefiliforme și cu efecte de relaxație, parametri funcțiuni de timp ai elementelor de circuit, care vor fi numiți *parametri tranzitorii* și vor interveni în generalizarea respectivă a ecuațiilor lui Kirchhoff în valori instantanee. Expresiile acestor parametri tranzitorii vor putea fi stabilite numai pe baza rezolvării problemei de cîmp electromagnetic corespunzătoare, luîndu-se astfel în considerație variația în timp a repartiției spațiale a cîmpului magnetic sau electric în cuprinsul elementului de circuit. Necesitatea introducerii unor parametri tranzitorii pentru elementele anumitor circuite electrice s-a simțit în literatura de specialitate în tratarea unor probleme particulare [3] [4] [5], însă nu s-a ajuns să se formuleze pînă acum definiții și metode de studiu unitare și să se justifice teoretic condițiile generale ale utilizării unor astfel de parametri.

## 2. TEOREMA DE UNICITATE A ECUAȚILOR CÎMPULUI ELECTROMAGNETIC ASOCIAT UNUI ELEMENT DE CIRCUIT MULTIPOLAR LINEAR

Pentru a defini un model teoretic al unui *element* de circuit electric, ca parte a unui sistem electromagnetic a cărui interacțiune cu exteriorul să fie caracterizabilă cu ajutorul curenților aduși din exterior sau al tensiunilor la borne, considerăm un sistem electromagnetic cu corpuri imobile,

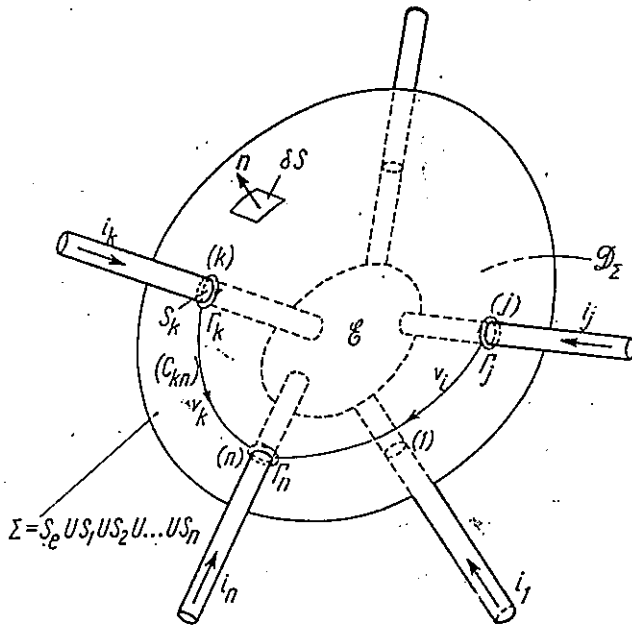


Fig. 1. — Element multipolar nefiliform de circuit electric.

fără cîmpuri electrice imprimate, cu caracteristici de material electrice și magnetice lineare, caracterizate prin permeabilitatea  $\mu(M)$  permitivitatea  $\varepsilon(M)$  și conductivitatea  $\sigma(M)$ , funcțiuni pozitive date de punctul  $M$  considerat, avînd vectorul de poziție  $r$ , materialele fiind adeseori omogene pe porțiuni, adică mărimile  $\mu$ ,  $\varepsilon$  și  $\sigma$  fiind constante în subdomenii separate prin suprafețe de discontinuitate  $S_d$ , cu excluderea liniilor și a punctelor de discontinuitate. Fie  $\mathbf{E}(M, t)$ ,  $\mathbf{D}(M, t) = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}(M, t)$ ,  $\mathbf{B}(M, t) = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}(M, t)$  și  $\rho_v(M, t)$  funcțiunile de punct și de moment care reprezintă respectiv intensitatea cîmpului electric, inducția electrică, intensitatea cîmpului magnetic, inducția magnetică, densitatea curentului electric de conducție și densitatea de sarcină electrică. În afara suprafețelor de discontinuitate, acestea sînt funcțiuni continue de punct împreună cu derivatele lor și verifică ecuațiile lui Maxwell :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_v \quad (13)$$

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (14)$$

ca și legea conducției electrice

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (15)$$

respectiv ecuația de conservare a sarcinii electrice (care rezultă din (11) și (13)):

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (16)$$

Pentru suprafețele de discontinuitate  $S_d$  ale mărimilor  $\varepsilon$ ,  $\mu$  și  $\sigma$ , condițiile de trecere corespunzătoare ecuațiilor (11)–(14) și (16) au următoarea formă:

$$(\mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{H}_2)_t, \quad (11')$$

$$(\mathbf{E}_1)_t = (\mathbf{E}_2)_t, \quad (12')$$

$$n_{12}(\varepsilon_2 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_1 \mathbf{E}_1) = \rho_s, \quad (13')$$

$$n_{12}(\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0 \quad (14')$$

$$n_{12} \left[ \left( \mathbf{J}_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \right) - \left( \mathbf{J}_1 + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \right) \right] = n_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) + \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0, \quad (16')$$

în care indicii 1 și 2 se referă la cele două fețe ale suprafeței  $S_d$ ,  $n_{12}$  e versorul normalei cu sensul dinspre 1 spre 2, indicele  $t$  se referă la componentele vectoriale din planul tangent la suprafața  $S_d$  ale vectorilor câmp, iar  $\rho_s$  e densitatea de suprafață a sarcinii electrice.

Considerăm în aceste condiții o suprafață închisă  $\Sigma$  avînd elementele de arie  $\delta s$ , versorul normal  $\mathbf{n}$  îndreptat spre exterior ( $\mathbf{n}_{int} = -\mathbf{n}$ ) și notăm cu  $\delta v$  elementele de volum ale domeniului  $\mathcal{D}_\Sigma$  definit de interiorul suprafeței  $\Sigma$  din care se exclud punctele suprafețelor de discontinuitate  $S_d$  eventual existente.

Din ecuațiile (11) și (12), cu condițiile de trecere (11') și (12'), se obține teorema energiei electromagnetice (Poynting):

$$-\oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \delta S = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 \delta v + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \left( \mu \frac{\mathbf{H}^2}{2} + \varepsilon \frac{\mathbf{E}^2}{2} \right) \delta v \quad (17)$$

sau

$$p_\Sigma(t) = p_J(t) + \frac{d}{dt} [W_m(t) + W_e(t)] \quad (18)$$

în care:

$$p_\Sigma(t) = -\oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \delta S = \oint_{\Sigma} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) \cdot \mathbf{n}_{int} \delta S \geq 0 \quad (19)$$

e puterea electromagnetică instantanee primită prin suprafață,

$$p_J(t) = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \sigma \mathbf{E}^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mathbf{E} \mathbf{J} \delta v \geq 0 \quad (20)$$

e puterea instantanee disipată prin efect Joule în conductoarele din  $\mathcal{D}_\Sigma$ , cu densitatea de volum  $\mathbf{E} \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}^2 \geq 0$ ;

$$W_m(t) = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu \frac{\mathbf{H}^2}{2} \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\mathbf{B} \mathbf{H}}{2} \delta v \geq 0 \quad (21)$$

e energia magnetică localizată în  $\mathcal{D}_\Sigma$  cu densitatea de volum  $\mathbf{B} \mathbf{H}/2 = \mu \mathbf{H}^2/2 \geq 0$ ;

$$W_e(t) = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon \frac{\mathbf{E}^2}{2} \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} \delta v \geq 0 \quad (22)$$

e energia electrică localizată în  $\mathcal{D}_\Sigma$  cu densitatea de volum  $\mathbf{E} \mathbf{D}/2 = \varepsilon \mathbf{E}^2/2 \geq 0$ .

Cu ajutorul relației (17) și utilizând caracterul pozitiv definit al mărimilor (20), (21) și (22), se demonstrează că, în cazul general, funcțiunile  $\mathbf{E}(M, t)$ ,  $\mathbf{H}(M, t)$ , soluții ale ecuațiilor (11), (12), (11'), (12') și (15), sînt univoc determinate dacă se dau repartițiile lor în momentul  $t=0$  (condițiile inițiale, care trebuie să fie compatibile cu (14) și (14')) și valorile *uneia* dintre componentele tangențiale  $\mathbf{E}_t(M, t)$  sau  $\mathbf{H}_t(M, t)$  în fiecare punct al suprafeței  $\Sigma$  și în fiecare moment (condițiile de frontieră). În aceste condiții ecuația (14) e demonstrabilă cu ajutorul relației (12) și al condițiilor inițiale,  $\mathbf{J}(M, t)$  e dat de (15), iar funcțiunile  $\rho_v(M, t)$  și  $\rho_s(M, t)$  sînt univoc determinabile a posteriori, cu ajutorul ecuațiilor (13) și (13'). Condițiile de trecere (14') și (16') sînt automat satisfăcute.

Considerăm acum un element  $\mathcal{L}$  al unui sistem electromagnetic înconjurat de un mediu izolant și avînd  $n$  conductoare de legătură cu exteriorul, prin care intră *curenții totali* (practic, numai de conducție)

$$i_k(t) = \oint_{\Gamma_k} \mathbf{H} \, dr \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

unde  $\Gamma_k$  sînt curbe închise care îmbrățișează strîns conductoarele de acces.

Numim *suprafață de separație* (fig. 1) o suprafață închisă fixă  $\Sigma$ , de normală exterioară  $\mathbf{n}$ , care conține în interior elementul  $\mathcal{L}$  și intercepțează cele  $n$  conductoare de legătură în secțiunile lor transversale  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )—numite *borne de acces*—cu conturile  $\Gamma_k$  (avînd sensul de referință asociat după regula burghiului drept sensului normalei interioare) și care satisface în orice moment următoarelor condiții:

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{E}(M, t) = 0 \quad (M \in \Sigma) \quad (24)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H}(M, t) = 0 \quad (M \in S_e) \quad (25)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(M, t) = 0 \quad (M \in S_k; k=1, 2, \dots, n) \quad (26)$$



( $S_c$  fiind partea suprafeței din afara conductoarelor de legătură :

$$\Sigma = S_c \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n).$$

Dacă o astfel de suprafață de separație există, elementul  $\mathcal{E}$  va fi numit *element de circuit electric* (multipolar, sau  $n$ -polar) și se va arăta că interacțiunea lui cu exteriorul poate fi caracterizată și în regim variabil în limbajul teoriei circuitelor electrice, chiar dacă în interiorul său există conductoare nefiliforme, condensatoare cu pierderi suplimentare, prin relaxație în dielectric, piese conductoare neconectate conductiv (galvanic) la bornele de acces și în care se induc curenți turbionari etc. Pentru cazul circuitelor cu părți conductoare filiforme în dreptul bornelor, suprafața de separație a fost introdusă în lucrarea [6] sub numele de suprafață a tensiunii la borne.

Condițiile (24), (25) și (26) sînt mult mai puțin restrictive decît aproximațiile uzuale (v. §1) ale teoriei circuitelor electrice, pentru că se referă numai la suprafața de separație  $\Sigma$  și nu la structura interioară a elementului. Practic, ele pot fi satisfăcute numai cu aproximație : condiția (24) rezultă din neglijarea efectelor de inducție electromagnetice în punctele suprafeței  $\Sigma$  (suficient de depărtată de zonele de cîmp magnetic intens) adică din neglijarea unor cuplaje inductive ale elementului de circuit cu exteriorul și e echivalentă cu afirmarea caracterului biscalar al cîmpului electric la nivelul bornelor ; condiția (25) rezultă din neglijarea curenților electrice din afara conductoarelor de legătură, adică din neglijarea unor cuplaje capacitive și conductive (cu excepția bornelor) ale elementului de circuit cu exteriorul, și e totdeauna satisfăcută în cazul unui mediu exterior perfect izolant și în regim evasistaționar, iar condiția (26) implică numai ipoteza unui cîmp electric biscalar cu linii de cîmp invariabile în timp în interiorul conductoarelor de legătură, astfel încît secțiunile transversale  $S_k$  ale acestor conductoare să poată fi luate ortogonale pe liniile de cîmp electric și deci pe liniile de curent. Calculînd fluxul — identic nul — al vectorului rot  $\mathbf{H}$  prin întreaga suprafață  $\Sigma$  rezultă cu (23) și (25) o condiție de legătură pentru curenții aduși din exterior

$$\sum_{k=1}^n \dot{v}_k(t) = 0 \quad (27)$$

care formează, deci, un sistem complet. Se observă că relațiile (25) și (26) sînt teoretic compatibile, chiar dacă se ține seama de (12'), (11) și (15), deoarece mărimile de material  $\epsilon$  și  $\sigma$  pot avea teoretic orice valori ne-negative (și pot fi considerate nule în afara conductoarelor de legătură în aproximația considerată aici).

Din relația (24) rezultă independența de drum a tensiunii electrice calculată între două puncte oarecare ale suprafeței de separație și posibilitatea de a scrie componenta tangențială  $E_t$  a intensității cîmpului electric, în toate punctele suprafeței de separație, sub forma :

$$E_t = - \text{grad } \varphi + n \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (28)$$

în care  $\varphi(M, t)$  e un potențial scalar, astfel că

$$\int_{A \subset \Sigma}^B E \, dr = \int_A^B E_t \, dr = \varphi(A, t) - \varphi(B, t). \quad (29)$$

Din (26) rezultă că în conductoarele de legătură, în dreptul bornelor de acces,  $\mathbf{E} = n \mathbf{E}_n$  și  $\mathbf{E}_t = 0$ , adică secțiunile transversale  $S_k$  sînt echipotențiale. Vom nota cu  $\varphi_k(t)$  valorile pe care le ia funcțiunea  $\varphi$  în punctele acestor secțiuni

$$\varphi_k(t) = \varphi(M, t) \quad (\text{cu } M \in S_k) \quad (30)$$

și cu  $v_k(t)$  potențialele electrice ale bornelor  $k = 1, 2, \dots, n-1$  față de borna a  $n$ -a, calculate în lungul unor curbe oarecare  $C_{kn}$  conținute în suprafața de separație și numite și *tensiuni la borne*:

$$v_k(t) = \int_{(k) \{C_{kn} \subset \Sigma\}}^{(n)} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \varphi_k(t) - \varphi_n(t). \quad (31)$$

Puterea electromagnetică instantanee (19) primită printr-o suprafață de separație se exprimă cu (28), (25) și (30) sub forma

$$\begin{aligned} p_{\Sigma}(t) &= - \oint_{\Sigma} [-\text{grad} \varphi \times \mathbf{H}] \mathbf{n} \, \delta S = - \oint_{\Sigma} (\varphi \text{ rot } \mathbf{H}) \mathbf{n} \, \delta S = \\ &= \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) i_k(t) \end{aligned} \quad (32)$$

sau, ținînd seama de (28) și (31), sub forma

$$p_{\Sigma}(t) \equiv - \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \mathbf{n} \, \delta S = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(t) i_k(t) \quad (33)$$

în care apar numai cei  $n - 1$  curenți exteriori independenți. Cu această expresie teorema energiei electromagnetice (18) se scrie sub forma

$$p_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(t) i_k(t) = p_J(t) + \frac{d}{dt} [W_m(t) + W_c(t)]. \quad (34)$$

Putem acum formula în modul următor problema generală a determinării cîmpului electromagnetic variabil al unui element de circuit electric pasiv, linear și  $n$ -polar:

Se cer funcțiunile vectoriale de punct  $\mathbf{E}(M, t)$  și  $\mathbf{H}(M, t)$  definite în  $\mathcal{D}_{\Sigma}$  și pentru  $t > 0$  care:

1. Pentru orice  $M \in \mathcal{D}_{\Sigma}$  și  $t > 0$  verifică ecuațiile (11), (12) și (15), adică ecuațiile omogene

$$\text{rot } \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} = 0. \quad (35)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (36)$$

2. Pentru orice suprafață de discontinuitate  $S_d$  și  $t > 0$  verifică condițiile de trecere omogene (11') și (12'), adică

$$(\mathbf{E}_1)_t = (\mathbf{E}_2)_t; (\mathbf{H}_1)_t = (\mathbf{H}_2)_t. \quad (37)$$

3. Pentru orice  $M \in \mathcal{D}_\Sigma$  satisfac condițiile inițiale

$$E(M, 0) = F_e(M) \quad (38)$$

$$H(M, 0) = F_h(M) \quad (39)$$

cu

$$\operatorname{div}(\mu F_h) = 0; \quad n_{12}(\mu_2 F_{h2} - \mu_1 F_{h1})|_{S_d} = 0. \quad (39')$$

4. În punctele  $M \in \Sigma$  și pentru  $t > 0$  satisfac condițiile de frontieră omogene (24), (25) și (26).

5. Pentru orice  $t > 0$  satisfac condițiile la borne

$$\oint_{\Gamma_k \subset \Sigma} H(M, t) dr = i_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, l), \quad (40)$$

$$\int_{(i)C_{jn} \subset \Sigma}^{(n)} E(M, t) dr = v_j(t) \quad (j = l + 1, l + 2, \dots, n - 1), \quad (41)$$

în care  $i_k(t)$  și  $v_j(t)$  sînt funcțiuni date de timp, iar numerotarea bornelor s-a făcut astfel încît primele  $l$  ( $0 \leq l \leq n - 1$ ) sînt cele pentru care s-au dat curenții. Cazul  $l = n - 1$  corespunde unor condiții la borne date exclusiv prin curenți, iar cazul  $l = 0$  unor condiții la borne date exclusiv prin tensiuni. Curentul  $i_n(t) = - \sum_{k=1}^{n-1} i_k(t)$  nu este independent de cei-

lalți și nu intervine în formularea condițiilor la borne.

Pentru  $t = 0$  funcțiunile  $i_k(t)$  și  $v_j(t)$  trebuie să fie compatibile cu condițiile inițiale (38) și (39), adică trebuie să satisfacă condițiile

$$\left. \begin{aligned} i_k(0) &= \oint_{\Gamma_k} H(M, 0) dr = \oint_{\Gamma_k} F_h(M) dr \\ v_j(0) &= \int_{(i)C_{jn}}^{(n)} E(M, 0) dr = \int_{(i)C_{jn}}^{(n)} F_e(M) dr \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Rezolvarea acestei probleme generale se bazează pe teoremele care se demonstrează mai jos.

**TEOREMA I.** Problema omogenă, corespunzătoare unor condiții inițiale de repaus,

$$E(M, 0) = F_e(M) = 0; \quad H(M, 0) = F_h(M) = 0, \quad (43)$$

și unor condiții la borne omogene ( $t > 0$ )

$$\left. \begin{aligned} i_k(t) &= 0, \quad (k = 1, 2, \dots, l), \\ v_j(t) &= 0, \quad (j = l + 1, l + 2, \dots, n - 1), \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

admite numai soluții identic nule

$$E(M, t) \equiv 0; \quad H(M, t) \equiv 0. \quad (45)$$

Din (43), (21) și (22) rezultă că în acest caz

$$W_m(0) + W_e(0) = 0 \quad (46)$$

iar din (44) și (33) rezultă  $p_{\Sigma}(t) = 0$ . Se obține astfel, din (34) cu (44) și (46),

$$W_m(t) + W_e(t) = - \int_0^t p_j(t) dt \leq 0 \quad (47)$$

deoarece puterea (20) disipată prin efect Joule e pozitiv definită. Cum energiile magnetică  $W_m(t)$  și electrică  $W_e(t)$  sînt pozitive sau nule, relațiile (21), (22) și (47) pot fi satisfăcute numai dacă

$$W_m(t) + W_e(t) \equiv 0, \quad t \in (0, \infty). \quad (48)$$

Din (21) și (22) rezultă însă că aceste energii sînt integralele unor funcțiuni pozitiv definite de  $H$  și  $E$ , astfel încît din (48) rezultă (45).

*TEOREMA a II-a* (teorema de unicitate). *Problema neomogenă, corespunzătoare unor condiții inițiale (38) și (39) oarecare (cu restricția (39')) și unor condiții la borne (40) și (41) oarecare (cu l arbitrar ales,  $0 \leq l \leq n - 1$ ) are soluții unice pentru funcțiunile  $H(M, t)$  respectiv  $E(M, t)$ .*

În adevăr, dacă ar exista două soluții  $H^{(1)}$  și  $H^{(2)}$  respectiv  $E^{(1)}$  și  $E^{(2)}$ , corespunzătoare acelorași condiții inițiale și la borne, funcțiunile diferență

$$\left. \begin{aligned} H^{(d)}(M, t) &\equiv H^{(1)}(M, t) - H^{(2)}(M, t), \\ E^{(d)}(M, t) &\equiv E^{(1)}(M, t) - E^{(2)}(M, t), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ar fi, din cauza linearității tuturor ecuațiilor (35)–(41) și (24)–(26), soluțiile problemei omogene, care sînt identic nule conform teoremei I:

$$H^{(d)}(M, t) \equiv 0; \quad E^{(d)}(M, t) \equiv 0. \quad (50)$$

Cu (49) rezultă

$$H^{(1)}(M, t) \equiv H^{(2)}(M, t); \quad E^{(1)}(M, t) \equiv E^{(2)}(M, t), \quad (51)$$

adică cele două soluții coincid în mod necesar.

Cum funcțiunile  $J(M, t)$ ;  $\rho_v(M, t)$  și  $\rho_s(M, t)$  sînt univoc determinate de  $E$  și  $H$  prin relațiile (15), (13) și (13'), rezultă că în condițiile inițiale și la borne, menționate, și repartițiile de curent și de sarcină sînt univoc determinate.

De asemenea în aceleași condiții rezultă univoc determinate prin intermediul lui  $H(M, t)$  și  $E(M, t)$  potențialele  $v_k(t)$  ale primelor  $l$  borne, pentru care s-au dat curenții (40),

$$v_k(t) = \int_{(k) \{C_{kn} \subset \Sigma\}}^{(n)} E(M, t) dr \quad (k = 1, 2, \dots, l) \quad (52)$$

și curenții  $i_j(t)$  ai ultimelor  $n - 1 - l$  borne, pentru care s-au dat tensiunile (41),

$$i_j(t) = \oint_{\Gamma_j \subset \Sigma} H(M, t) dr \quad (j = l + 1, l + 2, \dots, n - 1), \quad (53)$$

cum și curentul bornei ( $n$ ) de referință

$$i_n(t) = - \sum_{k=1}^{n-1} i_k(t). \quad (54)$$

La rezolvarea ecuațiilor câmpului electromagnetic asociat elementului de curent multipolar se consideră întotdeauna riguros satisfăcute condițiile de frontieră (24), (25) și (26). Practic, ele pot fi satisfăcute numai aproximativ. Observînd că aceste condiții au fost utilizate numai la deducerea expresiei (33) a puterii primite pe la borne, o condiție globală de valabilitate a acestei aproximații (care permite introducerea suprafeței de separație și a conceptului de element de circuit) este inegalitatea

$$\left| \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, \delta S - \sum_{k=1}^{n-1} v_k i_k \right| \ll \left| \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, \delta S \right|, \quad (55)$$

care include și neglijarea radiației de energie electromagnetică de către elementul de circuit.

Se înțelege că în condiții particulare de structură a elementului de circuit numărul variabilelor la borne independente poate fi mai mic decît  $n - 1$ . De asemenea formularea condițiilor la borne independente se poate face sub forme mai generale, prin relații integro-diferențiale lineare și neomogene între mărimile  $v_k(t)$  și  $i_k(t)$ . Prezentarea de mai sus corespunde necesității de a găsi relațiile dintre mărimile de la borne, relații caracteristice elementului de circuit și independente de rețeaua mai complexă din care el face parte.

În regim *quasi-staționar* repartițiile inițiale  $\mathbf{E}(M, 0)$  respectiv  $\mathbf{H}(M, 0)$  sînt determinate univoc de repartițiile inițiale ale sarcinii  $\rho_v(M, 0)$ ,  $\rho_s(M, 0)$  respectiv ale curentului  $\mathbf{J}(M, 0)$ . În acest regim condițiile inițiale pot fi deci exprimate cu ajutorul funcțiilor de punct care definesc aceste din urmă repartiții.

Teoremele I și II de mai sus rămîn valabile și în cazul cînd funcțiunile de timp (40) și (41), care exprimă condițiile la borne, admit discontinuități de prima specie, cum se poate arăta utilizînd forma operațională a ecuațiilor, care este deosebit de avantajoasă și în rezolvarea efectivă a problemei determinării câmpului.

Introducînd transformarea Laplace a funcțiunilor de timp (care depînd eventual și de punct)  $f(M, t)$  sub forma

$$F(M, p) = \mathcal{L}[f(M, t)] = \int_{0-}^{\infty} f(M, t) e^{-pt} dt \quad (56)$$

cu convenția de a considera limita inferioară a intervalului de integrare din (56) la stînga eventualelor puncte de discontinuitate din origine, respectiv ale eventualelor singularități impulsive (de tipul  $\delta(t)$ ) ale funcțiunii  $f$ . Cu această convenție teorema derivării are forma:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] = p \mathcal{L}[f] - f(M, 0-),$$

cînd derivata  $\frac{\partial f}{\partial t}$  este luată în sens generalizat și poate include de asemenea singularități impulsive în origine.

În formularea problemei generale momentul inițial este acum momentul limită  $t = 0 -$ , la stînga originii, iar condițiile inițiale (38), (39) iau (cu  $\eta > 0$ ) forma :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{E}(M, 0 - \eta) &= \mathbf{E}(M, 0 -) = \mathbf{F}_e(M), \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} \mathbf{H}(M, 0 - \eta) &= \mathbf{H}(M, 0 -) = \mathbf{F}_h(M). \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Cu aceste convenții formele operaționale ale ecuațiilor cîmpului (35) și (36) sînt <sup>1)</sup>

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(M, p) - (p\varepsilon + \sigma) \mathbf{E}(M, p) = -\mathbf{F}_e(M), \quad (58)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(M, p) + p\mu \mathbf{H}(M, p) = \mathbf{F}_h(M). \quad (59)$$

Condițiile de trecere (37) și condițiile de frontieră (24), (25) și (26) rămîn valabile pentru transformatele Laplace  $\mathbf{H}(M, p)$  și  $\mathbf{E}(M, p)$  ale vectorilor-cîmp, iar condițiile la borne (40) și (41) se scriu

$$\oint_{\Gamma_k \subset \Sigma} \mathbf{H}(M, p) d\mathbf{r} = I_k(p) \quad (k = 1, 2, \dots, l), \quad (60)$$

$$\int_{(j) \subset \mathcal{C}_j \subset \Sigma}^{(n)} \mathbf{E}(M, p) d\mathbf{r} = V_j(p) \quad (j = l + 1, l + 2, \dots, n - 1). \quad (61)$$

Din aceste relații se obțin două consecințe integrale, formal analoge teoremei (17), (33) a energiei electromagnetice, dar care nu reprezintă nici transformarea Laplace a ecuației care exprimă această teoremă — deoarece regula de transformare a produselor de funcțiuni de timp nu duce la produse obișnuite ale imaginilor, ci la produse de convoluție în planul complex — și nici nu au interpretarea energetică a relației (17). Una din consecințele integrale este relația

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} V_k(p) I_k(p) &= - \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \mathbf{n} \delta S = \\ &= \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \sigma \mathbf{E}^2 \delta v + p \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} (\mu \mathbf{H}^2 + \varepsilon \mathbf{E}^2) \delta v - \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} (\varepsilon \mathbf{E} \mathbf{F}_e + \mu \mathbf{H} \mathbf{F}_h) \delta v \end{aligned} \quad (62)$$

care va permite interpretarea unor valori limită ale parametrilor tranzitorii caracteristicii circuitelor, în special sub forma de mai jos, stabilită pentru condiții inițiale de repaus ( $\mathbf{F}_e = 0$ ,  $\mathbf{F}_h = 0$ )

$$p \sum_{k=1}^{n-1} V_k(p) I_k(p) = \frac{1}{p} \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \sigma (p\mathbf{E})^2 \delta v + \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} [\mu (p\mathbf{H})^2 + \varepsilon (p\mathbf{E})^2] \delta v. \quad (63)$$

<sup>1)</sup> Notăm cu litere grase, drepte, transformatele Laplace ale vectorilor cîmp.

Cea de-a doua dintre consecințele integrale este relația

$$\sum_{k=1}^{n-1} V_k(p) I_k(p) = - \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} \delta S = \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* \delta v + \quad (64)$$

$$+ p \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \mu \mathbf{H} \mathbf{H}^* \delta v + p^* \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* \delta v - \int_{\mathcal{D}_{\Sigma}} [\mu \mathbf{H}^* \mathbf{F}_h + \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{F}_e] \delta v,$$

în care asteriscul indică mărimi complex conjugate — și care permite generalizarea teoremei de unicitate a soluțiilor și pentru cazul în care funcțiunile de timp considerate au discontinuități (în special în origine), cu condiția ca transformatele lor Laplace să aibă sens<sup>1)</sup>.

În adevăr din (64) rezultă [cu  $\text{Re}\{p\} > 0$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ] că ecuațiile (58) și (59) omogene (adică cu  $\mathbf{F}_h = 0$ ,  $\mathbf{F}_e = 0$ ), cu condiții la borne (60) și (61) omogene (adică cu  $I_k(p) = 0$ ,  $V_j(p) = 0$ ), admit numai soluții identic nule ( $\mathbf{E}(M, p) \equiv 0$ ,  $\mathbf{H}(M, p) \equiv 0$ ), deoarece produsele  $\mathbf{E} \mathbf{E}^*$  și  $\mathbf{H} \mathbf{H}^*$  sînt pozitiv definite. Ca urmare, printr-un raționament analog celui utilizat la demonstrarea teoremei a II-a de mai sus, rezultă că soluțiile ecuațiilor neomogene (58) și (59) sînt univoc determinate de condițiile la borne neomogene (60) și (61) formulate cu transformatele Laplace ale mărimilor aplicate la borne și de repartițiile inițiale (la  $t = 0-$ ), (57) ale cîmpurilor electric și magnetic.

Rezolvînd ecuațiile operaționale (58) și (59) se obțin imaginile Laplace ale vectorilor-cîmp și prin inversiune funcțiunile de timp respective. După determinarea imaginii Laplace  $F(M, p)$  se pot calcula valorile limită la dreapta, în origine, ale oricărei funcțiuni de timp  $f(M, t)$  cu teorema valorilor inițiale

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [pF(M, p)] = \lim_{t \rightarrow 0} f(M, t) = f(M, 0+). \quad (65)$$

În funcție de condițiile la borne adoptate și de regimul considerat, este posibil să se constate existența unor discontinuități în origine:

$$\left. \begin{aligned} E(M, 0+) \neq F_e(M) = E(M, 0-), \\ H(M, 0+) \neq F_h(M) = H(M, 0-). \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

### 3. TEOREMA SUPERPOZIȚIEI ȘI RELAȚIILE DINTRE TENSIUNI ȘI CURENȚI PENTRU UN ELEMENT DE CIRCUIT MULTIPOLAR

Sub formă operațională condițiile la borne (60) și (61) sînt *independente* de condițiile inițiale (57), deoarece imaginile Laplace  $\mathbf{H}(M, p)$  și  $\mathbf{E}(M, p)$  ale vectorilor-cîmp nu sînt afectate de existența unor eventuale discontinuități de forma (66) ale vectorilor-cîmp, în origine.

Se poate demonstra deci imediat superpoziția soluțiilor.

Fie

$$\{F_e^{(s)}(M); F_h^{(s)}(M); I_k^{(s)}(p); V_j^{(s)}(p)\} \quad (67)$$

<sup>1)</sup> Dacă discontinuitățile sînt de tipul  $\delta(t)$ ,  $\delta'(t)$ , etc., „funcțiunile” de timp considerate au sensul generalizat de *distribuții*.

un ansamblu de condiții de forma (57), (60) și (61), care conform teoremei de unicitate determină univoc o soluție caracterizată de vectorii câmp

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(s)}(M, p), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(s)}(M, p). \quad (67')$$

Fie

$$\left\{ \sum_s \lambda_s F_c^{(s)}(M); \sum_s \lambda_s F_k^{(s)}(M); \sum_s \lambda_s I_k^{(s)}(p); \sum_s \lambda_s V_j^{(s)}(p) \right\} \quad (68)$$

un ansamblu de condiții de forma (57), (60) și (61), definit de o combinație lineară și omogenă cu coeficienții  $\lambda_s$  a condițiilor (67).

Fie

$$\mathbf{E}(M, p) = \sum_s \lambda_s \mathbf{E}^{(s)}(M, p); \quad \mathbf{H}(M, p) = \sum_s \lambda_s \mathbf{H}^{(s)}(M, p) \quad (68')$$

combinațiile lineare corespunzătoare ale vectorilor câmp (67'). Pe baza linearității ecuațiilor și folosind teorema de unicitate rezultă:

*TEOREMA a III-a (de superpoziție):* Dacă în condițiile de unicitate (67) soluțiile ecuațiilor operaționale (58), (59) sînt (67'), atunci în condițiile de unicitate (68), definite de o combinație lineară și omogenă a condițiilor (67), soluțiile ecuațiilor operaționale (58), (59) sînt date de combinația lineară și omogenă (68'), cu aceeași coeficienți, a soluțiilor (67').

Teorema superpoziției permite prezentarea unor condiții de unicitate complexe ca reuniunea unor condiții de unicitate disjuncte și mai simple, care permit obținerea soluțiilor generale ale ecuațiilor prin suprapunerea soluțiilor unor probleme particulare corespunzătoare acelor condiții mai simple.

În particular, soluția generală a ecuațiilor (58), (59) poate fi considerată ca o superpoziție a soluțiilor corespunzătoare unor condiții inițiale omogene (de repaus) cu condiții la borne neomogene și a soluțiilor corespunzătoare unor condiții inițiale neomogene cu condiții la borne omogene. În acest fel se pot separa în soluții termenii care depind de condițiile inițiale de câmp (57) de cei care depind de condițiile la borne (60), (61), adică de interacțiunea cu exteriorul.

Vom căuta soluțiile ecuațiilor (57)–(61) prin superpoziție în următoarele două situații extreme de formulare a condițiilor la borne: fie cînd pentru toate cele  $n - 1$  borne „independente” se dau curenții aduși din exterior (ceea ce corespunde cazului  $l = n - 1$  în relațiile (60) și (61)); — fie cînd pentru toate cele  $n - 1$  borne „independente” se dau potențialele față de borna ( $n$ ) de referință (ceea ce corespunde cazului  $l = 0$  în relațiile (60) și (61)), determinînd de fiecare dată relațiile dintre mărimile la borne date și mărimile la borne necunoscute.

### 3.1. Exprimarea potențialelor bornelor în funcțiune de curenții aduși din exterior.

Căutăm soluțiile  $\mathbf{E}(M, p)$  și  $\mathbf{H}(M, p)$  ale ecuațiilor operaționale (58) (59) cu condițiile la borne

$$\oint_{\Gamma_k} \mathbf{H}(M, p) \, dr = I_k(p) \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1) \quad (69)$$



sub forma

$$E(M, p) = \sum_{k=1}^{n-1} e_i^k(M, p) \cdot pI_k(p) + E_i^0(M, p), \quad (70)$$

$$H(M, p) = \sum_{k=1}^{n-1} h_i^k(M, p) \cdot pI_k(p) + H_i^0(M, p). \quad (71)$$

În aceste relații :

a)  $E_i^0(M, p)$  și  $H_i^0(M, p)$  sînt soluțiile acestor ecuații determinate exclusiv de condițiile inițiale de câmp  $F_e(M)$  și  $F_h(M)$ , adică cu condițiile la borne omogene

$$\oint_{\Gamma_i} H_i^0(M, p) dr = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (72)$$

corespunzătoare unui regim de mers în gol la toate bornele.

b)  $e_i^k(M, p)$  și  $h_i^k(M, p)$  (cu  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) sînt soluțiile ecuațiilor omogene

$$\text{rot } h_i^k - (p\varepsilon + \sigma) e_i^k = 0, \quad (73)$$

$$\text{rot } e_i^k + p\mu h_i^k = 0, \quad (74)$$

cu condițiile de frontieră și de trecere omogene corespunzătoare relațiilor (24) (26) și (37) și cu condițiile la borne ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\oint_{\Gamma_i} h_i^k(M, p) dr = \frac{1}{p} \delta_{ik}; \quad (\delta_{kk} = 1; \delta_{ik} = 0, i \neq k). \quad (75)$$

Aceste soluții sînt corespunzătoare alimentării circuitului prin bornele ( $k$ ) cu cîte un singur curent treaptă unitate care se întoarce prin borna ( $n$ ) de referință, toate celelalte borne fiind lăsate în gol, în condiții inițiale de „repaus” ( $F_e(M) = 0$ ,  $F_h(M) = 0$ ).

Din cauza linearității ecuațiilor e ușor de verificat cu ajutorul teoremei de unicitate că soluțiile (70) și (71) corespund efectiv problemei generale puse.

Presupunînd rezolvate cele  $n$  probleme parțiale considerate, imaginile  $V_j(p)$  ale potențialelor bornelor pot fi calculate cu (61) și (70) și se obțin relații de forma

$$V_j(p) = \sum_{k=1}^{n-1} Z_{jk}(p) I_k(p) + V_j^0(p) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (76)$$

în care

$$Z_{jk}(p) = p \int_{(j)c_{jn}}^{(n)} e_i^k(M, p) dr \quad (j, k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (77)$$

sînt impedanțele operaționale de intrare ( $k = j$ ) și de transfer ( $k \neq j$ ) dintre bornele ( $k$ ) și borna ( $j$ ), iar

$$V_j^0(p) = \int_{(j)c_{jn}}^{(n)} E_i^0(M, p) dr \quad (78)$$

este imaginea tensiunii care se stabilește între borna ( $j$ ) și borna ( $n$ ) când toate bornele sînt întrerupte (la  $t = 0 +$ ) iar circuitul evoluează exclusiv sub acțiunea condițiilor inițiale de câmp (de la  $t = 0 -$ ).

Dacă

$$\zeta_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \int_{(j)}^{(n)} e_{jk}^{\dagger}(M, p) dr \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Z_{jk}(p)}{p} \right] \quad (79)$$

sînt potențialele instantanee la bornele ( $j$ ) cînd (în condiții inițiale de „re-paus”) se injectează un curent unitate prin borna ( $k$ ), cu întoarcere prin borna ( $n$ ) (celelalte fiind în gol), iar

$$v_j^0(t) = \mathcal{L}^{-1} [V_j^0(p)] \quad (80)$$

e potențialul instantaneu al bornei ( $j$ ) determinat (la mers în gol) de condițiile inițiale, relațiile în valori instantanee caracteristice multipolului se deduc din (76) și (77) cu teorema produsului imaginilor (Borel) și cu teorema derivării, sub formă:

$$v_j(t) = \sum_k \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \zeta_{jk}(t-\xi) i_k(\xi) d\xi + v_j^0(t), \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (81)$$

Funcțiunile  $\zeta_{jk}(t)$  sînt funcțiunile de răspruns tranzitoriu la alimentarea cu curenți unitate, în regim de mers în gol, și pot caracteriza multipolul din punctul de vedere al interacțiunii lui cu exteriorul. Aceste funcțiuni sînt nule pentru  $t < 0$

$$\zeta_{jk}(t) = 0, \quad t < 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (82)$$

și au dimensiunea unor impedanțe.

### 3.2. Exprimarea curenților aduși din exterior în funcțiune de potențialele bornelor

Căutăm soluțiile  $\mathbf{E}(M, p)$  și  $\mathbf{H}(M, p)$  ale ecuațiilor operaționale (61) – (64), cu condiția la borne

$$\int_{(j) c_{jn}}^{(n)} \mathbf{E}(M, p) dr = V_l(p) \quad (l = 1, 2, \dots, n-1) \quad (83)$$

sub forma

$$\mathbf{E}(M, p) = \sum_{l=1}^{n-1} e_{ll}^{\dagger}(M, p) \cdot p V_l(p) + \mathbf{E}_{ll}^0(M, p) \quad (84)$$

$$\mathbf{H}(M, p) = \sum_{l=1}^{n-1} h_{ll}^{\dagger}(M, p) \cdot p V_l(p) + \mathbf{H}_{ll}^0(M, p) \quad (85)$$

În aceste relații:

a)  $\mathbf{E}_{ll}^0(M, p)$  și  $\mathbf{H}_{ll}^0(M, p)$  sînt soluțiile acestor ecuații determinate exclusiv de condițiile inițiale de câmp  $\mathbf{F}_e(M)$  și  $\mathbf{F}_h(M)$ , adică cu condițiile la borne omogene

$$\int_{(i) c_{in}}^{(n)} \mathbf{E}_{ll}^0(M, p) dr = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (86)$$

corespunzătoare unui regim de scurtcircuit la toate bornele.

b)  $e_{II}^l(M, p)$  și  $h_{II}^l(M, p)$  cu  $l = 1, 2, \dots, n - 1$  sînt soluțiile ecuațiilor omogene

$$\text{rot } h_{II}^l - (p\varepsilon + \sigma) e_{II}^l = 0, \quad (87)$$

$$\text{rot } e_{II}^l + p\mu h_{II}^l = 0, \quad (88)$$

cu condițiile de frontieră și de trecere omogene corespunzătoare relațiilor (24) (26) și (37) și cu condițiile la borne ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\int_{(i)C_{in}}^{(n)} e_{II}^l(M, p) dr = \frac{1}{p} \delta_{il}; \quad (\delta_{il} = 1; \delta_{il} = 0, i \neq l). \quad (89)$$

Acste soluții sînt corespunzătoare alimentării circuitului cu cîte o singură tensiune treaptă unitate între borna ( $l$ ) și borna ( $n$ ) de referință, toate celelalte borne fiind scurtcircuitate la borna de referință, în condiții inițiale de repaus ( $F_e(M) = 0, F_h(M) = 0$ ).

Din cauza linearității ecuațiilor e ușor de verificat cu ajutorul teoremei de unicitate că soluțiile (84) și (85) corespund efectiv problemei generale puse.

Presupunînd rezolvate cele  $n$  probleme parțiale considerate, imaginile  $I_k(p)$  ale curenților pot fi calculate cu (60) și (85) și se obțin relații de forma

$$I_k(p) = \sum_{l=1}^{n-1} Y_{kl}(p) V_l(p) + I_k^0(p) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (90)$$

în care

$$Y_{kl}(p) = p \oint_{\Gamma_k} h_{II}^l(M, p) dr \quad (l, k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (91)$$

sînt *admitanțele operaționale de intrare* ( $k = l$ ) și *de transfer* ( $k \neq l$ ) dintre bornele ( $l$ ) și borna ( $k$ ), iar

$$I_k^0(p) = \oint_{\Gamma_k} H_{II}^0(M, p) dr \quad (92)$$

este *imaginea curențului care trece prin conductorul bornei* ( $k$ ) *cînd toate bornele sînt scurtcircuitate* (la  $t = 0+$ ) *între ele, iar circuitul evoluează exclusiv sub acțiunea condițiilor inițiale de cîmp* (de la  $t = 0-$ )

Dacă

$$\eta_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \oint_{\Gamma_k} h_{II}^l(M, p) dr \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Y_{kl}(p)}{p} \right] \quad (93)$$

sînt curenții instantanei care intră prin bornele ( $k$ ) cînd (în condiții inițiale de repaus) se aplică o tensiune unitate între borna ( $l$ ) și borna ( $n$ ) de referință (celelalte fiind scurtcircuitate), iar

$$i_k^0(t) = \mathcal{L}^{-1} [I_k^0(p)] \quad (94)$$

este curențul instantaneu din borna ( $k$ ) determinat (la mersul în scurtcircuit) de condițiile inițiale, relațiile în valori instantanee caracteristice multi-

polului se deduc din (90) și (91) cu teorema produsului imaginilor (Borel) și cu teorema derivării, sub forma :

$$i_k(t) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \eta_{kl}(t-\xi) v_l(\xi) d\xi + i_k^0(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (95)$$

Funcțiunile  $\eta_{kl}(t)$  sînt *funcțiunile de răspuns tranzitoriu, în regim de scurtcircuit, la alimentarea cu potențiale unitate* și pot caracteriza multipolul din punctul de vedere al interacțiunii lui cu exteriorul. Aceste funcțiuni sînt nule pentru  $t < 0$

$$\eta_{kl}(t) = 0, \quad t < 0 \quad (k, = 1, 2, \dots, n), \quad (96)$$

și au dimensiunile unor *admitanțe*.

Ținînd seama de relațiile (84) și (97) rezultă între mărimile  $Z_{jk}(p)$ ,  $V_j^0(p)$  și  $Y_k(p)$ ,  $I_k^0(p)$  relațiile

$$\sum_{k=1}^{n-1} Z_{jk}(p) Y_{kl}(p) = \delta_{jl} \begin{cases} = 0 & j \neq l \\ = 1 & j = l, \end{cases} \quad (97)$$

(adică matricile corespunzătoare sînt inverse una alteia) și

$$V_j^0(p) = - \sum_{k=1}^{n-1} Z_{jk}(p) I_k^0(p); \quad I_k^0(p) = - \sum_{l=1}^{n-1} Y_{kl}(p) V_l^0(p), \quad (98)$$

care permit determinarea unora în funcție de celelalte.

Ținînd seama de analiza efectuată în §§ 2 și 3 rezultă următoarele :

Caracterizarea regimurilor circuitelor lineare nefiliforme și cu pierderi suplimentare de putere se poate face cu ajutorul valorilor instantanee ale tensiunilor la borne și ale curenților dacă elementele de circuit pot fi definite cu ajutorul unor suprafețe de separație pe care să fie satisfăcute condițiile (24), (25) și (26) și numai în condiții inițiale de repaus (la  $t = 0$ ). Efectul condițiilor inițiale consistă în apariția unor termeni aditivi în expresiile mărimilor de la borne, termeni care — fiind în general determinați de repartitia inițială a cîmpului magnetic și electric (în regim cuasistationar, a densităților de curent și de sarcină) — *nu sînt univoc determinați de valorile inițiale ale mărimilor la borne*. Spre deosebire de cazul circuitelor filiforme, condițiile inițiale de cîmp nu pot fi deci înlocuite prin surse fictive echivalente lor. În absența condițiilor inițiale de cîmp, relațiile în valori instantanee dintre tensiuni și curenți sînt integrale de convoluție de forma celor din relațiile (81) sau (95) ireductibile în general la ecuații diferențiale cu coeficienți constanți de forma (1), (2), (3), datorită caracterului transcendent al funcțiunilor de  $p$  reprezentate de impedanțele și admitanțele operaționale. Elementele de circuit nefiliforme și cu pierderi suplimentare nu admit, în general, scheme echivalente cu elemente de circuit ideale în număr finit.

#### 4. PARAMETRII TRANZITORII AI ELEMENTELOR DE CIRCUIT NEFILIFORME

În cele ce urmează vom considera numai condiții inițiale de repaus ( $F_e(M) = 0$ ,  $F_h(M) = 0$ ), cu scopul de a introduce parametri tranzitorii adecvați caracterizării elementelor nefiliforme de circuit din punctul de vedere al relațiilor dintre tensiunile la borne și curenți. În astfel de con-

diții, aceste relații [(76), (81), (90) și (95)] iau formele omogene operaționale

$$V_j(p) = \sum_{k=1}^{n-1} Z_{jk}(p) \cdot I_k(p), \quad (99)$$

$$I_k(p) = \sum_{l=1}^{n-1} Y_{kl}(p) \cdot V_l(p), \quad (100)$$

respectiv în valori instantanee

$$v_j(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \zeta_{jk}(t-\xi) i_k(\xi) d\xi; \quad (101)$$

$$i_k(t) = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \eta_{kl}(t-\xi) v_l(\xi) d\xi. \quad (102)$$

Funcțiunile de răspuns tranzitoriu  $\zeta_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z_{jk}(p)/p]$  respectiv  $\eta_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{kl}(p)/p]$  depind numai de structura elementului de circuit oricare ar fi regimul lui de funcționare. Cu toate acestea ele nu sînt adecvate pentru a fi utilizate în aplicații ca parametri tranzitorii ai unui astfel de element din următoarele motive:

În majoritatea aplicațiilor referitoare la problemele de regim evasitaționar funcțiunile  $\zeta_{jk}(t)$  sau  $\eta_{kl}(t)$  includ singularități de tip  $\delta(t)$  în origine. De aceea integralele de convoluție (101) și (102) au fost scrise cu aceste funcțiuni luate în momentele retardate  $t-\xi$ , iar intervalul de integrare a fost extins pînă la infinit pentru a include singularitatea din momentul  $\xi = t$ , deși pentru  $\xi > t$  integrandul respectiv se anulează. Astfel în cazul circuitului *filiform* ( $r, l$ )-*serie* există relațiile

$$Z(p) = r + pl = \frac{1}{Y(p)}; \quad \zeta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Z(p)}{p}\right] = I(t)r + \delta(t)l, \quad (103)$$

iar în cazul circuitului *filiform* ( $g, c$ )-*paralel* există relațiile

$$Y(p) = g + pc = \frac{1}{Z(p)}; \quad \eta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y(p)}{p}\right] = I(t)g + \delta(t)c. \quad (104)$$

Prezența singularităților  $\delta(t)$  în funcțiunile de răspuns tranzitoriu caracteristice elementului de circuit face principial imposibilă determinarea lor experimentală. Totodată din punctul de vedere metodologic interesează acei parametri tranzitorii care pot fi generalizarea naturală a parametrilor constanți  $r, g, l$  și  $c$  ai elementelor ideale de circuit și anume care coincid cu acești parametri constanți ca valori asimptotice sau în cazul cînd aproximațiile teoriei circuitelor filiforme și fără pierderi suplimentare sînt practic acceptabile. Cum funcțiunile de răspuns tranzitoriu care intervin în relațiile (101) și (102) prezintă inconvenientul prezenței „funcțiunilor”  $\delta(t)$  și totodată nu se reduc la parametri obișnuiți în cazul circuitelor filiforme, cum se poate observa din relațiile (103) și (104), în cele ce urmează se vor introduce parametri tranzitorii care să nu prezinte aceste inconveniente.

4.1. Elementul de circuit dipolar

Considerăm un element de circuit dipolar ( $n = 2$ ), linear și pasiv (v. fig. 2), în condiții inițiale de repaus, pentru a introduce parametri tranzitorii care să îndeplinească condițiile menționate mai sus. Regimul elementului de circuit dipolar poate fi caracterizat prin tensiunea la borne instantanee

$$u(t) = \int_{(1)(c)\Sigma}^{(2)} \mathbf{E}(M, t) \, d\mathbf{r} = \mathcal{L}^{-1} [U(p)] \tag{105}$$

cu imaginea Laplace

$$U(p) = \int_{(1)(c)\Sigma}^{(2)} \mathbf{E}(M, p) \, d\mathbf{r} = \mathcal{L} [u(t)], \tag{106}$$

sau prin curentul instantaneu

$$i(t) = \oint_{\Gamma, c\Sigma} \mathbf{H}(M, t) \, d\mathbf{r} = \mathcal{L}^{-1} [I(p)] \tag{107}$$

cu imaginea Laplace

$$I(p) = \oint_{\Gamma, c\Sigma} \mathbf{H}(M, p) \, d\mathbf{r} = \mathcal{L} [i(t)]. \tag{108}$$

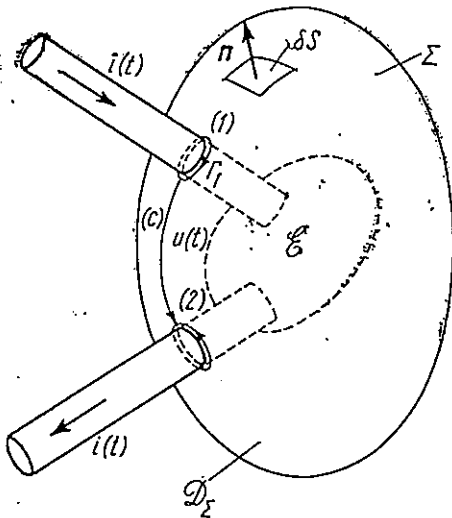


Fig. 2. — Element de circuit dipolar, linear și pasiv.

În acest caz particular, relațiile (99), (100), (97), și respectiv (63), iau formele

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p), \quad I(p) = Y(p) \cdot U(p), \tag{109}$$

$$Z(p) \cdot Y(p) = 1, \tag{110}$$

respectiv

$$\begin{aligned} pU(p) \cdot I(p) &= pZ(p) \cdot I^2(p) = pY(p) \cdot U^2(p) = \\ &= \frac{1}{p} \int_{D_\Sigma} \sigma(p\mathbf{E})^2 \, \delta v + \int_{D_\Sigma} [\mu(p\mathbf{H})^2 + \varepsilon(p\mathbf{E})^2] \, \delta v. \end{aligned} \tag{111}$$

În cazul injectării unui curent treaptă  $i(t) = I_0 I(t)$  cu  $I(p) = I_0/p$  se obține din această relație egalitatea

$$\begin{aligned} \frac{U(p)}{I_0} = \frac{Z(p)}{p} &= \frac{1}{I_0^2 p} \left[ \int_{D_\Sigma} \frac{1}{\sigma} (p\mathbf{J})^2 \, \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} + \\ &+ \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{D_\Sigma} [\mu(p\mathbf{H})^2 + \varepsilon(p\mathbf{E})^2] \, \delta v \right]_{i=I_0 I(t)}. \end{aligned} \tag{112}$$

În cazul aplicării unei tensiuni treaptă  $u(t) = U_0 I(t)$  cu  $U(p) = U_0/p$  se obține din relația (111) egalitatea

$$\frac{I(p)}{U_0} = \frac{Y(p)}{p} = \frac{1}{U_0^2 p} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \sigma(p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} + \frac{1}{U_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} [\mu(p\mathbf{H})^2 + \varepsilon(p\mathbf{E})^2] \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} \quad (113)$$

Relațiile operaționale de mai sus permit să se interpreteze fizic anumite expresii limită cu ajutorul teoremei valorilor inițiale :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0+), \quad (114)$$

și cu ajutorul teoremei valorilor finale (aplicabilă numai dacă  $F(p) = \mathcal{L}[f]$  nu are singularități în semiplanul  $\text{Re}(p) \geq 0$ ):

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \quad (115)$$

În particular :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \sigma(p\mathbf{E})^2 \delta v = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} (p\mathbf{J})^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2(M, 0+) \delta v = p_j(0+) \geq 0, \quad (116)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon(p\mathbf{E})^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon \mathbf{E}^2(M, 0+) \delta v = 2W_e(0+) \geq 0, \quad (117)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu(p\mathbf{H})^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu \mathbf{H}^2(M, 0+) \delta v = 2W_m(0+) \geq 0, \quad (118)$$

iar

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \sigma(p\mathbf{E})^2 \delta v = \lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} (p\mathbf{J})^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2(M, \infty) \delta v = p_j(\infty) \geq 0, \quad (119)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon(p\mathbf{E})^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon \mathbf{E}^2(M, \infty) \delta v = 2W_e(\infty) \geq 0, \quad (120)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu(p\mathbf{H})^2 \delta v = \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu \mathbf{H}^2(M, \infty) \delta v = 2W_m(\infty) \geq 0, \quad (121)$$

dacă toate aceste limite există.

Cu ajutorul ecuațiilor (58), (59) și al condițiilor la borne (106), (108), în condiții inițiale de repaus ( $F_e(M) \equiv 0$ ,  $F_h(M) \equiv 0$ ), se poate demonstra existența următoarelor limite, referitoare la valorile inițiale ale puterii disipate  $p_j(t)$ , ale energiei magnetice  $W_m(t)$  și ale energiei electrice  $W_e(t)$  la

injecțarea unui curent treaptă  $i(t) = I_0 I(t)$  sau la aplicarea unei tensiuni treaptă  $u(t) = U_0 I(t)$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2 p} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{\sigma} (p\mathbf{J})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = 0, \quad (122)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{U_0^2 p} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \sigma (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = 0, \quad (123)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu (p\mathbf{H})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \frac{2W_m(0+)}{I_0^2} \Big|_{i=I_0 I(t)} \geq 0, \quad (124)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \frac{2W_e(0+)}{I_0^2} \Big|_{i=I_0 I(t)} = 0, \quad (125)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{U_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu (p\mathbf{H})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = \frac{2W_m(0+)}{U_0^2} \Big|_{u=U_0 I(t)} = 0, \quad (126)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{U_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = \frac{2W_e(0+)}{U_0^2} \Big|_{u=U_0 I(t)} \geq 0. \quad (127)$$

În adevăr, în *regim general variabil* nu se neglijează în ecuațiile cîmpului (61), (62) nici fenomenul inducției electromagnetice (nu se consideră formal  $\mu = 0$ , v. § 4.2) și nici curentul de deplasare (nu se consideră formal  $\varepsilon = 0$ , v. § 4.3). Dar în acest caz ecuațiile cîmpului admit numai soluții sub formă de unde cu *viteză de front finită*. Din acest motiv, în condițiile inițiale de repaus, la aplicarea unei tensiuni treaptă  $u = U_0 I(t)$  sau la injecțarea unui curent treaptă  $i = I_0 I(t)$ , cîmpul electric și cîmpul magnetic din  $\mathcal{D}_\Sigma$  sînt nule la  $t$  pozitiv și arbitrar de mic, peste tot, cu excepția unei vecinătăți de măsură arbitrar de mică a suprafeței de separație  $\Sigma$ , astfel că integralele (122)–(127) sînt sigur nule nu numai la  $t = 0$  – (condiții inițiale de repaus), ci și la  $t = 0 +$ .

În §§ 4.2 și 4.3 vom demonstra că pentru regimul evasistationar această proprietate se păstrează pentru toate aceste integrale; exceptînd pentru una dintre integralele (124) sau (127) care poate avea o valoare diferită de zero, dar finită, în condițiile la borne arătate.

Din relațiile de mai sus, cu (112) și (113) rezultă că există și limitele pozitive sau nule

$$l(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} = \frac{2W_m(0+)}{I_0^2} \Big|_{i=I_0 I(t)}, \quad (128)$$

respectiv

$$c(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p} = \frac{2W_e(0+)}{U_0^2} \Big|_{u=U_0 I(t)}, \quad (129)$$

pe care — în acord cu interpretarea energetică cunoscută a inductivității, respectiv capacității — le vom numi *inductivitate inițială*, respectiv *capacitate inițială* ale elementului de circuit dipolar.



În cazul elementelor de circuit reale, cu pierderi ( $\sigma \neq 0$  și  $\frac{1}{\sigma} \neq 0$  într-un subdomeniu finit și conex al lui  $\mathcal{D}_Z$ , care include și bornele de acces) există și limitele pozitive (v. (112), (113), (119))

$$r_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Z(p) = \frac{1}{I_0^2} p_J(\infty) \Big|_{i=I_0, I(t)} > 0, \quad (130)$$

respectiv

$$g_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} Y(p) = \frac{1}{U_0^2} p_J(\infty) \Big|_{u=U_0, I(t)} > 0, \quad (131)$$

egale cu rezistența de curent continuu, respectiv conductanța de curent continuu ale elementului de circuit, legate prin relația

$$r_0 g_0 = 1 \quad (132)$$

care rezultă imediat din (110).

Numai în cazul unor circuite idealizate, cu părți fără pierderi, putem avea sau  $r_0 = 0$  și  $g_0 = \infty$  (există o cale perfect conductoare între cele două borne de acces, datorită, de exemplu, unei bobine ideale conectată în paralel cu orice alte elemente) sau  $g_0 = 0$  și  $r_0 = \infty$  (nu există nici o cale conductoare între borne, datorită, de exemplu, unui condensator ideal conectat în serie cu orice alte elemente). În cele ce urmează vom presupune de obicei că operăm cu elemente de circuit reale, pentru care ambele limite (130) și (131) există și vom considera cazurile idealizate ale elementelor fără pierderi numai prin trecere la limită în expresiile finale cu

$$r_0 \rightarrow 0 \quad (g_0 \rightarrow \infty) \quad (133)$$

dacă rezistența de curent continuu e practic neglijabilă, sau cu

$$g_0 \rightarrow 0 \quad (r_0 \rightarrow \infty) \quad (134)$$

dacă conductanța de curent continuu e practic neglijabilă.

Ținând seama de existența limitelor (128), (129), (130) și (131), vom defini pentru elementul de circuit dipolar în funcțiune de impedanța lui operațională  $Z(p)$ , respectiv de admitanța lui operațională  $Y(p) = 1/Z(p)$ , următorii parametri tranzitorii, funcțiuni de timp caracteristice elementului și definite pentru  $t \in (0, \infty)$ :

rezistența tranzitorie

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(p)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Z(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} \right], \quad (135)$$

cu imaginea Laplace

$$R(p) = \mathcal{L}[r(t)] = \frac{Z(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} = \frac{Z(p)}{p} - l(0+); \quad (136)$$

conductanța tranzitorie

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}\right], \quad (137)$$

cu imaginea Laplace

$$G(p) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{Y(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p} = \frac{Y(p)}{p} - c(0+); \quad (138)$$

inductivitatea tranzitorie (dacă  $g_0 \neq 0$ )

$$l(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2} (Z(p) - \lim_{p \rightarrow 0} Z(p))\right], \quad (139)$$

cu imaginea Laplace

$$L(p) = \mathcal{L}[l(t)] = \frac{1}{p^2} (Z(p) - \lim_{p \rightarrow 0} Z(p)) = \frac{Z(p) - r_0}{p^2}; \quad (140)$$

capacitatea tranzitorie (dacă  $r_0 \neq 0$ )

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2} (Y(p) - \lim_{p \rightarrow 0} Y(p))\right], \quad (141)$$

cu imaginea Laplace

$$C(p) = \mathcal{L}[c(t)] = \frac{1}{p^2} (Y(p) - \lim_{p \rightarrow 0} Y(p)) = \frac{Y(p) - g_0}{p^2}. \quad (142)$$

Mărimile  $r(t)$ ,  $g(t)$ ,  $l(t)$  și  $c(t)$  au fost numite ca mai sus deoarece au efectiv dimensiunile rezistenței, conductanței, inductivității și capacității. Imaginile Laplace ale lor,  $R(p)$ ,  $G(p)$ ,  $L(p)$  și  $C(p)$  — în opoziție cu imaginile Carson — nu mai au aceleași dimensiuni, deoarece transformarea (56) nu păstrează dimensiunile. De aceea *nu* vor fi numite rezistență operațională, conductanță operațională, inductivitate operațională, capacitate operațională. Pentru același motiv originalele  $z(t) = \mathcal{L}^{-1}[Z(p)]$ , respectiv  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$ , ale impedanței operaționale, respectiv admitanței operaționale *nu* trebuie numite impedanță tranzitorie, respectiv admitanță tranzitorie. Terminologia introdusă aici păstrează denumirile cunoscute din teoria regimului staționar pentru mărimi cu aceleași dimensiuni caracteristice studiului în valori instantanee (rezistența, conductanța, inductivitatea și capacitatea) și denumirile cunoscute din teoria reprezentării în complex pentru mărimi operaționale cu aceeași dimensiune (impedanță, admitanță).

Se verifică imediat că există limitele

$$\lim_{p \rightarrow \infty} R(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} G(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} L(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} C(p) = 0 \quad (143)$$

de unde rezultă că funcțiunile (136), (138), (140) și (142) satisfac o condiție necesară cerută unci *funcțiunii imagine* [7]. Parametrii tranzitorii cores-

punzători sînt funcțiuni de timp nesingulare, identice nule pentru  $t < 0$  (deși în general valorile lor inițiale, la  $t = 0 +$ , sînt diferite de zero)

$$r(t) = 0; g(t) = 0; l(t) = 0; c(t) = 0 \quad (t < 0) \quad (144)$$

Utilizarea transformării Laplace propriu-zise, în locul transformării Laplace — Carson, ale cărei imagini provin din înmulțirea imaginilor Laplace cu  $p$  și care păstrează dimensiunile, nu reflectă nimic esențial. Dacă s-ar fi operat cu imaginile Carson, s-ar fi obținut alte relații între imaginile parametrilor tranzitorii (uneori mai simple), dar relațiile finale, în valori instantanee, ar fi fost aceleași.

Parametrii tranzitorii  $r(t)$ ,  $g(t)$ ,  $l(t)$ ,  $c(t)$  mai au următoarele proprietăți remarcabile :

1. Pentru un *circuit filiform* ( $r, l$ ) — serie rezistența tranzitorie și inductivitatea tranzitorie sînt constante și coincid cu rezistența și inductivitatea definite în regim staționar

$$r(t) = I(t) r; \quad l(t) = I(t) l. \quad (145)$$

Demonstrația rezultă din (135), (136), (137) și (138) cu

$$Z(p) = r + p l \quad R(p) = r/p \quad \text{și} \quad L(p) = l/p.$$

2. Pentru un *circuit filiform* ( $g, c$ ) — paralel conductanța tranzitorie și capacitatea tranzitorie sînt constante și coincid cu conductanța și capacitatea definite în regim staționar

$$g(t) = I(t) g; \quad c(t) = I(t) c. \quad (146)$$

Demonstrația rezultă din (139), (140), (141) și (142) cu

$$Y(p) = g + pc, \quad G(p) = g/p \quad \text{și} \quad C(p) = c/p.$$

3. Între *impedanța operațională*, respectiv *admitanța operațională* și imaginile parametrilor tranzitorii rezultă relațiile

$$\boxed{Z(p) = p l(0+) + p R(p) = r_0 + p^2 L(p)} = \frac{U(p)}{I(p)}, \quad (147)$$

$$\boxed{Y(p) = pc(0+) + p G(p) = g_0 + p^2 C(p)} = \frac{I(p)}{U(p)}. \quad (148)$$

4. Valorile limită în origine ale inductivității tranzitorii, respectiv capacității tranzitorii, sînt chiar inductivitatea inițială (128), respectiv capacitatea inițială (129)

$$\lim_{t \rightarrow 0} l(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p L(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} = l(0+) \geq 0, \quad (149)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p C(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p} = c(0+) \geq 0. \quad (150)$$

Demonstrația rezultă din (139), respectiv (141), cu (130), respectiv (131).

5. În regim general variabil atât inductivitatea inițială cât și capacitatea inițială sînt nule

$$c(0+) = 0; \quad l(0+) = 0; \quad (\varepsilon \neq 0, \mu \neq 0). \quad (151)$$

În adevăr am demonstrat mai sus că în regim general variabil integralele (124) și (127) sînt sigur nule (și odată cu ele parametrii inițiali (128) și (129)).

6. În regim cuasistationar cel mult una dintre mărimile inițiale  $l(0+)$  și  $c(0+)$  este diferită de zero, deoarece în general

$$l(0+) \cdot c(0+) = 0. \quad (152)$$

Demonstrația rezultă din (110) cu (128) și (129). Dacă

$$l(0+) \neq 0, \quad c(0+) = 0 \quad (153)$$

elementul de circuit este de tip inductiv, iar dacă

$$l(0+) = 0, \quad c(0+) \neq 0 \quad (154)$$

elementul de circuit este de tip capacitiv.

7. Valoarea asimptotică a rezistenței tranzitorii e egală cu rezistența de curent continuu a elementului (dacă e diferită de zero)

$$r(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pR(p) = r_0 > 0. \quad (155)$$

Demonstrația rezultă cu (136), (128) și (130).

Pentru elemente idealizate, cu  $r_0=0$ , această proprietate poate să nu existe, deoarece teorema valorilor finale (115) nu mai e aplicabilă,  $R(p)$  avînd poli imaginari.

8. Valoarea asimptotică a conductanței tranzitorii e egală cu conductanța de curent continuu a elementului (dacă aceasta e diferită de zero)

$$g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pG(p) = g_0 > 0. \quad (156)$$

Demonstrația rezultă cu (138), (129) și (131). Pentru elemente idealizate cu  $g_0=0$  această proprietate poate să nu existe, pentru că  $G(p)$  are poli imaginari.

9. Între valorile asimptotice ale inductivității tranzitorii și capacității tranzitorii există relația

$$r_0 c(\infty) + g_0 l(\infty) = 0 \quad (r_0 \neq 0, \quad g_0 \neq 0) \quad (157)$$

În adevăr, cu (110), (132), (147) și (148) se obține relația

$$p^3 L(p) C(p) + r_0 p C(p) + g_0 p L(p) = 0 \quad (158)$$

din care, cu  $p \rightarrow 0$  și dacă există limitele

$$c(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p C(p), \quad (159)$$

$$l(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p L(p), \quad (160)$$

rezultă (157).

10. Între *parametrii tranzitorii*  $r(t)$  și  $l(t)$ , respectiv  $g(t)$  și  $c(t)$  există relațiile

$$r(t) = r_0 + \frac{dl}{dt} \quad (t > 0), \quad (161)$$

și

$$l(t) = l(0+) + \int_0^t (r(t) - r_0) dt \quad (t \geq 0), \quad (162)$$

respectiv

$$g(t) = g_0 + \frac{dc}{dt} \quad (t > 0), \quad (163)$$

și

$$c(t) = c(0+) + \int_0^t (g(t) - g_0) dt \quad (t \geq 0). \quad (164)$$

Aceste relații rezultă imediat din relațiile (147) și (148) puse sub forma

$$R(p) = \frac{r_0}{p} + pL(p) - l(0+) \quad (165)$$

$$G(p) = \frac{g_0}{p} + pC(p) - c(0+) \quad (166)$$

utilizînd teorema derivării și (144).

11. Între *parametrii tranzitorii*  $r(t)$  și  $g(t)$ , respectiv  $l(t)$  și  $c(t)$ , există relațiile

$$c(0+)r(t) + l(0+)g(t) + \int_0^t r(t-\xi)g(\xi) d\xi = t, \quad (t \geq 0) \quad (167)$$

respectiv (dacă  $r_0 \neq 0$ ,  $g_0 \neq 0$ )

$$r_0 c(t) + g_0 l(t) + \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t l(t-\xi)c(\xi) d\xi = 0, \quad (t \geq 0). \quad (168)$$

Aceste relații rezultă din (110), (147), (148) și (152) puse sub forma

$$c(0+)R(p) + l(0+)G(p) + R(p)G(p) = \frac{1}{p^2} \quad (169)$$

respectiv din (158) pusă sub forma

$$r_0 C(p) + g_0 L(p) + p^2 L(p) G(p) = 0 \quad (170)$$

cu teoremele integrării și produsului imaginilor.

12. Între valorile *inițiale* (la  $t = 0+$ ) ale parametrilor tranzitorii există relația

$$c(0+)r(0+) + l(0+)g(0+) = 0 \quad (171)$$

care se obține din (167) cu  $t \rightarrow 0$ , dacă există limitele

$$r(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} r(t) \quad \text{și} \quad g(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t)$$

4.2. Elementul de circuit dipolar inductiv în regim evasistaționar

În regim evasistaționar și în afara dielectricului condensatoarelor se neglijează densitatea curentului de deplasare, adică efectul variației în timp a câmpului electric asupra câmpului magnetic, care rezultă astfel univoc determinat de repartitia instantanee a curenților de conducție. Din cauza inducției electromagnetice, repartitia curenților din conductoare nu e cea de regim staționar și variază în timp. De aceea și repartitia câmpului magnetic e în general variabilă în timp și nu permite definirea unei inductivități constante (v. și [3] [4]).

Ecuatiile câmpului, sub forma operațională (58), (59) și în absența condițiilor inițiale de câmp iau forma

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}(M, p) - \sigma \mathbf{E}(M, p) &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E}(M, p) + p \mu \mathbf{H}(M, p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (172)$$

Relația (112) corespunzătoare este

$$\frac{Z(p)}{p} = \frac{U(p)}{I_0} \Big|_{i=I_0, I(t)} = \left[ \frac{1}{I_0^2} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{(p\mathbf{J})^2}{p\sigma} \delta v + \frac{1}{I_0^2} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu (p\mathbf{H})^2 \delta v \right]_{i=I_0, I(t)} \quad (173)$$

Aceste relații se obțin formal din relațiile regimului nestaționar (58), (59) și (112), în condiții inițiale de repaus cu valorile

$$\varepsilon \equiv 0, \quad \mu \neq 0, \quad (174)$$

care caracterizează *elementele inductive* în regim evasistaționar din punctul de vedere al teoriei generale.

În acest regim se demonstrează (cu 172) *teorema continuității* curentului de conducție

$$\text{div} (\sigma \mathbf{E}(M, p)) = \text{div } \mathbf{J}(M, p) = 0 \quad (175)$$

din care rezultă că  $I(p) \neq 0$  numai dacă există un tub de curent conținând material conductor ( $\sigma \neq 0$ ) care unește cele două borne (fig. 3).

Rezistența de curent continuu a unui element inductiv în regim evasistaționar e deci finită (eventual nulă), adică limita (130) există

$$r_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Z(p) = \text{finită}, \quad \left( g_0 = \frac{1}{r_0} \neq 0 \right). \quad (176)$$

Domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$  poate fi împărțit în două subdomenii disjuncte: subdomeniul  $\mathcal{D}_c$  multiplu conex, exterior conductoarelor, în care  $\sigma = 0$  și ecuațiile (172) se pot scrie

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } (p\mathbf{H}(M, p)) &= 0 \\ \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}(M, p) + (p\mathbf{H}(M, p)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (M \in \mathcal{D}_c) \quad (177)$$

și subdomeniul interior  $\mathcal{D}_i$  (eventual neconex, dacă există piese conductoare neconectate la borne și înconjurate de mediu perfect izolan) în care  $\sigma \neq 0$  și ecuațiile (172) se pot scrie cu  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p\sigma} \operatorname{rot} [p \mathbf{H}(M, p)] - \mathbf{E}(M, p) &= 0 \\ \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} + [p \mathbf{H}(M, p)] &= 0 \end{aligned} \right\} (M \in \mathcal{D}_i). \quad (178)$$

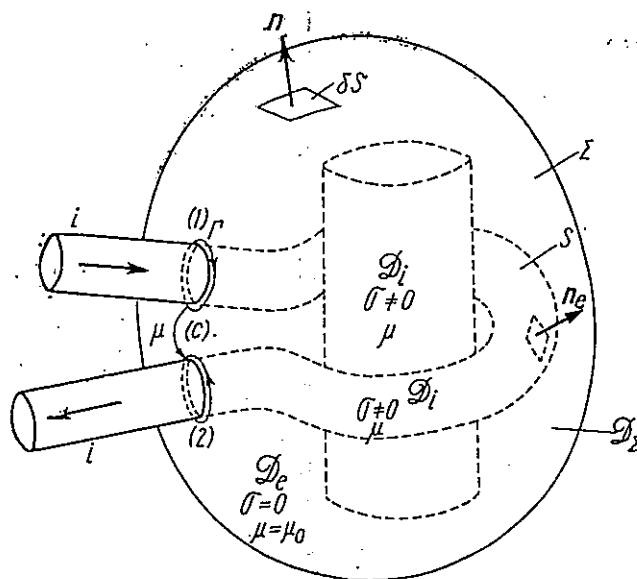


Fig. 3. — Element de circuit inductiv in regim evasistaționar.

Ecuațiile (177) și (178) cu condițiile de trecere (37) pe care le vom scrie

$$(\mathbf{E}_1)_t = (\mathbf{E}_2)_t; \quad (p \mathbf{H}_1)_t = (p \mathbf{H}_2)_t \quad (179)$$

și cu condiția la borne (108), care — în cazul injectării unui curent treaptă  $i = I_0 I(t) = \mathcal{L}^{-1} [I_0/p]$  — se scrie sub forma

$$\oint_{\Gamma_1} p \mathbf{H}(M, p) dr = I_0, \quad (180)$$

admit în  $\mathcal{D}_\Sigma$  o soluție unică. Din modul cum au fost scrise relațiile rezultă imediat că vectorii-câmp  $p\mathbf{H}$  și  $\mathbf{E}$  corespunzători acestei soluții depind de  $p$  și de  $\sigma$  numai prin intermediul produsului  $p\sigma$ , adică sînt funcții de acest produs și au aceleași repartiții la toate valorile mărimilor  $p$  și  $\sigma$  care satisfac condiția  $p\sigma = \text{constant}$ . De aici rezultă imediat următoarea consecință: În regim evasistaționar, câmpul electromagnetic al unui element de circuit inductiv, cărui, în condiții inițiale de repaus, i se injectează un curent treaptă are aceeași repartiție asimptotică a vectorilor-câmp

$p\mathbf{H}(M, p)$  și  $\mathbf{E}(M, p)$  fie la  $p \rightarrow \infty$  ( $\sigma$  oarecare), fie la  $\sigma \rightarrow \infty$  ( $p$  oarecare). În particular, din (178) rezultă (cu  $p\mathbf{J} = \text{rot } p\mathbf{H}$ )

$$\left. \begin{aligned} \lim_{p\sigma \rightarrow \infty} \mathbf{E}(M, p) &= 0 \\ \lim_{p\sigma \rightarrow \infty} p\mathbf{H}(M, p) &= 0 \\ \lim_{p\sigma \rightarrow \infty} p\mathbf{J}(M, p) &= 0 \end{aligned} \right\} (M \in \mathcal{D}_i), \quad (181)$$

și, cu teorema valorilor inițiale,

$$\mathbf{H}(M, 0+) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \sigma \text{ dat}}} p\mathbf{H}(M, p) = \lim_{\substack{\sigma \rightarrow \infty \\ p \text{ dat}}} p\mathbf{H}(M, p) = \begin{cases} 0 & (M \in \mathcal{D}_i) \\ \neq 0 & (M \in \mathcal{D}_e) \end{cases}, \quad (182)$$

deoarece din (180) rezultă

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H}(M, 0+) \, d\mathbf{r} = I_0 \neq 0. \quad (183)$$

În aceste condiții, *repartiția inițială* a câmpului magnetic este deci identică cu repartiția care s-ar stabili, la aceeași valoare a curentului dat, dacă conductivitatea ar fi infinită în întreg subdomeniul interior, pentru o aceeași configurație geometrică a elementului.

La conductivitate infinită, cu  $p$  oarecare și finit, rezultă din (181) un câmp magnetic interior nul

$$\mathbf{H}_i(M, p) = 0 \quad (M \in \mathcal{D}_i), \quad (184)$$

și un câmp magnetic exterior determinabil univoc cu ecuațiile

$$\text{rot } \mathbf{H}_e(M, p) = 0, \quad \text{div } \mu \mathbf{H}_e(M, p) = 0, \quad (M \in \mathcal{D}_e) \quad (185)$$

cu condițiile de frontieră (pe suprafața de separație  $\Sigma$  și pe suprafețele  $S$  ale conductoarelor, care separă domeniul exterior de cel interior):

$$n \mathbf{H}_e(M, p) = 0 \quad (M \in \Sigma, M \in S), \quad (186)$$

(deoarece  $n \mathbf{H}_e = n \mathbf{B}_e / \mu_e = n B_e / \mu_e = \frac{\mu}{\mu_e} n \mathbf{H}_e = 0$  cu (184)) și cu condiția

la borne

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{H}_e(M, p) = I(p) \quad (187)$$

Originalele ecuațiilor operaționale (185), (186), (187), în care variabila  $p$  nu mai apare explicit, coincid cu ecuațiile unui câmp magnetic staționar produs în ipoteza unei conductivități infinite a conductoarelor.

De aici rezultă că repartiția inițială a câmpului magnetic la injecțarea curentului treaptă în condiții inițiale de repaus e repartiția de regim staționar asociată valorii date a curentului în cazul unei conductivități infinite a conductoarelor. Din (186) rezultă că suprafețele conductoarelor



sînt suprafețe de cîmp pentru  $H_e$ , iar repartitia curentului din conductoare e strict superficială cu densitatea lineară

$$\mathbf{J}_s = \text{rot}_s \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_e |_s \quad (188)$$

Energia magnetică corespunzătoare, diferită de zero dacă prin ipoteză  $\mathcal{D}_e \neq \emptyset$ ,

$$W_m(0+) = \int_{\mathcal{D}_e} \frac{\mu}{2} \mathbf{H}_e^2(M, 0+) \delta v = W_{m, \text{ext}} \Big|_{i=I_0} > 0 \quad (189)$$

este *energia magnetică exterioară* asociată valorii date a curentului la conductivitate infinită a conductoarelor.

Se verifică fără dificultăți că aceste proprietăți subsistă oricare ar fi variația în timp a curentului injectat din exterior pentru  $t > 0$ , dacă  $I_0 = \lim_{t \rightarrow 0} i(t)$

e saltul de curent inițial ( $i(0-) = 0$ ).

Identitatea dintre repartitia inițială a cîmpului magnetic și repartitia lui corespunzătoare aceleiași valori a curentului în cazul unor conductoare perfecte cu o aceeași configurație geometrică permite să se demonstreze și existența limitelor (122) și (124)

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{p\sigma} (p\mathbf{J})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{1}{p\sigma} (p\mathbf{J})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = 0, \quad (190)$$

$$\begin{aligned} \frac{2W_m(0+)}{I_0^2} \Big|_{i=I_0 I(t)} &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu (p\mathbf{H})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{I_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \mu (p\mathbf{H})^2 \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \frac{2W_{m, \text{ext}}}{I_0^2} > 0 \end{aligned} \quad (191)$$

(ținînd seama de (181)).

Și relația (125) e satisfăcută datorită condiției (174); din același motiv se anulează și expresia (127). Relațiile (123) și (126) se demonstrează pe o cale analogă.

Cu (128), (152), (173), (171) și (191) rezultă următoarele proprietăți: În regim cvasistaționar inductivitatea inițială e egală cu *inductivitatea exterioară*  $l_{\text{ext}}$ , determinabilă în ipoteza unei conductivități infinite a conductoarelor, iar capacitatea inițială și conductanța inițială sînt nule

$$l(0+) = \frac{2W_{m, \text{ext}}}{I_0^2} = l_{\text{ext}} > 0, \quad c(0+) = 0; \quad g(0+) = 0. \quad (192)$$

Valoarea asimptotică a inductivității tranzitorii pentru  $t \rightarrow \infty$ , cînd repartitia cîmpului magnetic tinde asimptotic spre repartitia de regim staționar, este *inductivitatea de curent continuu* a elementului, care include atît inductivitatea exterioară cît și inductivitatea interioară

$$\begin{aligned} l(\infty) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} p L(p) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\mu (p\mathbf{H})^2}{I_0^2} \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\mu \mathbf{H}^2}{I_0^2} \delta v \right]_{i=I_0 I(t)} = \frac{2W_{m, \text{st}}}{I_0^2} \Big|_{\substack{i=I_0 \\ \sigma \neq \infty}} \end{aligned} \quad (193)$$

Pentru un element inductiv ecuațiile (147), (148) și (167), iau următoarele forme ( $c(0+) = 0$ ,  $g_0 = 1/r_0$ )

$$Z(p) = p l_{ext} + pR(p) = r_0 + p^2L(p), \quad (194)$$

$$Y(p) = pG(p) = g_0 + p^2C(p), \quad (195)$$

și

$$l(0+)g(t) + \int_0^t r(t-\xi)g(\xi)d\xi = t. \quad (196)$$

#### 4.3. Elementul de circuit dipolar capacitiv în regim cvasistaționar

În regim cvasistaționar câmpul electromagnetic din dielectricul unui condensator electric se studiază considerînd armăturile perfect conductoare și neglijînd câmpul electric indus, adică efectul variației în timp a câmpului magnetic asupra câmpului electric din dielectric, care e considerat practic irotațional. Dacă dielectricul are pierderi suficient de mari și este neomogen, repartiția câmpului electric nu este cea electrostatică, fiind variabilă în timp și influențată de repartiția curentului de conducție din dielectric ceea ce nu permite definirea unei capacități constante. În aproximația de câmp electric irotațional și în condiții inițiale de repaus ecuațiile câmpului iau forma

$$\text{rot } \mathbf{H}(M, p) + [\sigma(M) + p\varepsilon(M)] \mathbf{E}(M, p) = 0, \quad (197)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(M, p) = 0, \quad (198)$$

sau eliminînd câmpul magnetic

$$\left. \begin{aligned} \text{div} [\sigma(M) + p\varepsilon(M)] \mathbf{E}(M, p) &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E}(M, p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

Ecuația (113) corespunzătoare acestei aproximații rezultă a fi

$$\frac{Y(p)}{p} = \frac{I(p)}{U_0} \Big|_{u=U_0(t)} = \left[ \frac{1}{U_0^2} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\sigma}{p} (p\mathbf{E})^2 \delta v + \frac{1}{U_0^2} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0(t)} \quad (200)$$

Ecuațiile (197), (198) și (200) se obțin formal din ecuațiile generale (58), (59) și (113), în condiții inițiale de repaus, considerînd

$$\varepsilon \neq 0, \quad \mu \equiv 0. \quad (201)$$

Aceste valori caracterizează regimul cvasistaționar din dielectricul condensatoarelor din punctul de vedere al teoriei generale.

Ecuațiile (199) trebuie rezolvate cu condițiile de trecere corespunzătoare

$$(\mathbf{E}_1)_t = (\mathbf{E}_2)_t, \quad (202)$$

$$[(\sigma_1 + p\varepsilon_1) \mathbf{E}_1]_n = [(\sigma_2 + p\varepsilon_2) \mathbf{E}_2]_n, \quad (203)$$

pentru orice suprafață de discontinuitate și cu condițiile de frontieră (26), respectiv (25) (pe armaturile  $S_1$  și  $S_2$ , respectiv pe suprafața laterală  $S_l$  a dielectricului) care se pot scrie

$$E_t(M, p) = 0, \quad (M \in S_1, S_2), \quad (204)$$

$$E_n(M, p) = 0, \quad (M \in S_l). \quad (205)$$

În acest caz (v. fig. 4) suprafața de separație este  $\Sigma = S_1 \cup S_l \cup S_2$ , iar bornele de acces sînt armaturile perfect conductoare. Ecuațiile

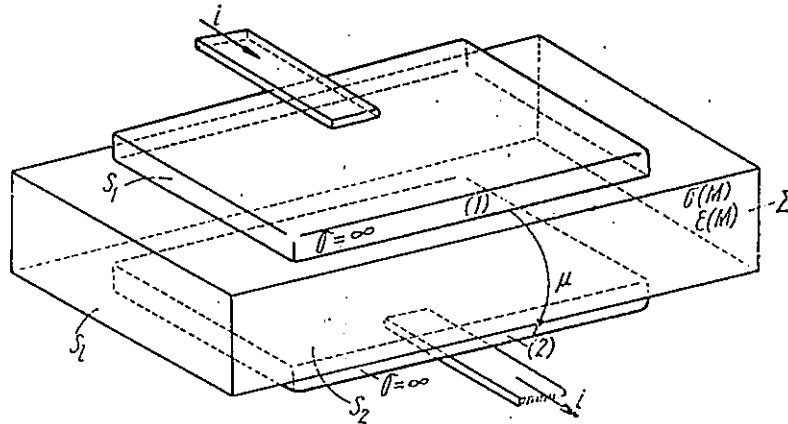


Fig. 4. — Element de circuit capacitiv în regim cvasistaționar.

omogene (199), (202) — (205) se rezolvă cu condiția la borne (106) sau (107).

Din ecuațiile (199) și (106) rezultă că  $E \rightarrow 0$  și  $U \rightarrow 0$  dacă  $\sigma \rightarrow 0$ . Conductivitatea trebuie deci considerată finită pentru ca elementul capacitiv să prezinte interes pentru studiu, adică în acest caz limita (131) există :

$$g_0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} Y(p) = \text{finită}, \quad r_0 \neq 0. \quad (206)$$

Practic această conductivitate trebuie să fie destul de mică pentru ca să nu devină neglijabil curentul de deplasare față de cel de conducție și totodată destul de mare pentru ca tratarea *electrostatică* a elementului (cu neglijarea pierderilor) să nu fie suficient de exactă. Totodată ecuațiile arată că, dacă dielectricul este omogen mărimea  $\sigma + p \epsilon$  e constantă și câmpul are de asemenea o structură electrostatică ( $\text{div } E = 0, \text{rot } E = 0$ ). Condensatorul linear cu dielectric omogen admite o schemă echivalentă ( $g, c$ )-paralel iar introducerea parametrilor tranzitorii nu mai aduce nimic nou [v. (146)].

Punînd ecuațiile (199) sub forma

$$\left. \begin{aligned} \text{div} \left( \frac{\sigma(M)}{p} + \epsilon(M) \right) p E &= 0 \\ \text{rot} (p E) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (207)$$

cu condiția la borne corespunzătoare aplicării unei tensiuni treaptă  $u = U_0 \cdot I(t) = \mathcal{L}^{-1}[U_0/p]$

$$\int_{(1)c}^{(2)} p \mathbf{E} \, dr = U_0 \quad (208)$$

și cu condițiile de trecere

$$(p\mathbf{E}_1)_t = (p\mathbf{E}_2)_t, \quad \left[ \left( \frac{\sigma_1}{p} + \varepsilon_1 \right) p \mathbf{E}_1 \right]_n = \left[ \left( \frac{\sigma_2}{p} + \varepsilon_2 \right) p \mathbf{E}_2 \right]_n, \quad (209)$$

se constată că aceste ecuații determină în mod unic vectorul câmp  $p \mathbf{E}(M, p)$  ca funcțiune de  $\frac{\sigma}{p}$ . Repartiția limită a acestui vector-câmp când  $p \rightarrow \infty$  coincide așadar cu repartiția lui limită când  $\sigma \rightarrow 0$  (izolant perfect) dacă tensiunea de alimentare  $U_0$  e aceeași.

Cu teorema valorilor inițiale (114) se demonstrează astfel următoarea proprietate: În regim evasistaționar câmpul electric al unui condensator cărui  $i$  se aplică o tensiune treaptă are în primul moment ( $t = 0 +$ ) aceeași repartiție ca în regim electrostatic, adică repartiția care s-ar stabili dacă dielectricul ar fi perfect izolant ( $\sigma = 0$ ) la aceeași tensiune și pentru aceeași configurație geometrică.

$$E(M, 0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \mathbf{E}(M, p) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} p \mathbf{E}(M, p) = E_{\text{elst}}(M) \Big|_{\substack{u=U_0 \\ \sigma=0}} \quad (210)$$

Se verifică fără dificultăți că această proprietate subsistă oricare ar fi variația în timp a tensiunii aplicate pentru  $t > 0$ , dacă  $U_0 = \lim_{t \rightarrow 0} u(t)$  e saltul de tensiune inițial ( $u(0-) = 0$ ).

În aceleași condiții rezultă că există limitele (123) și (127)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{U_0^2} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\sigma}{p} (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{U_0^2} \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\sigma}{p} (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = 0, \quad (211)$$

și

$$\begin{aligned} W_e(0+) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\varepsilon}{2} (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \frac{\varepsilon}{2} (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = W_{\text{elst}} \Big|_{\substack{u=U_0 \\ \sigma=0}} > 0. \end{aligned} \quad (212)$$

Energia electrică inițială (212) rezultă diferită de zero și calculabilă ca în regim electrostatic în dielectric de conductivitate nulă.

Și relația (126) e satisfăcută datorită condiției (201); din același motiv și expresia (124) se anulează. Relațiile (122) și (125) se demonstrează pe căi analoge.

Cu (129), (200), (211), (212), (152) și (171) rezultă următoarele proprietăți:

În regim evasistaționar capacitatea inițială e egală cu *capacitatea electrostatică*  $c_0$  a condensatorului determinabilă în ipoteza unei conducti-

vițăfi nule a dielectricului, iar inductivitatea inițială și rezistența inițială sînt nule :

$$c(0+) = \frac{2W_{elst}}{U_0^2} = c_0 < 0, \quad l(0+) = 0, \quad r(0+) = 0. \quad (213)$$

În mod analog, din ecuațiile cîmpului electric sub forma (199) rezultă că repartiția asimptotică a cîmpului electric din dielectric, după aplicarea unei tensiuni treaptă  $u(t) = U_0 I(t)$  se obține fie considerînd  $p \rightarrow 0$  (cu teorema valorilor finale) fie considerînd  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ceea ce arată că această repartiție e hotărîită de regimul electrocinetic staționar care se stabilește. Valoarea asimptotică a capacității tranzitorii la  $t \rightarrow \infty$  corespunde deci repartiției de regim electrocinetic staționar a cîmpului electric

$$\begin{aligned} c(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pC(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{U_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon (p\mathbf{E})^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{U_0^2} \left[ \int_{\mathcal{D}_\Sigma} \varepsilon \mathbf{E}(M, t)^2 \delta v \right]_{u=U_0 I(t)} = \frac{2W_{elst}}{U_0^2} \Big|_{\substack{u=U_0 \\ \sigma \neq 0}}. \end{aligned} \quad (214)$$

Pentru un element capacitiv ecuațiile (147), (148), (167) și (168) iau formele  $l(0+) = 0, r_0 = 1/g_0$

$$Z(p) = pR(p) = r_0 + p^2L(p), \quad (215)$$

$$Y(p) = pc_0 + pG(p) = g_0 + p^2C(p), \quad (216)$$

$$c_0 r(t) + \int_0^t g(t-\xi) r(\xi) d\xi = t. \quad (217)$$

#### 4.4. Elemente de circuit multipolare

Generalizarea conceptelor și proprietăților arătate la cazul elementelor de circuit multipolare nu prezintă dificultăți de principiu.

Folosind impedanțele operaționale  $Z_{jk}(p)$ , respectiv admitanțele operaționale  $Y_{kl}(p)$ , care intervin în relațiile (99) respectiv (100), se pot introduce parametri tranzitorii de intrare ( $j = k$ , respectiv  $k = l$ ) și de transfer ( $j \neq k$ , respectiv  $k \neq l$ ). Vom numi acești parametri coeficienți deoarece constituie generalizarea naturală a coeficienților de capacitate, respectiv de conductanță, din cunoscutele relații ale lui Maxwell privitoare la relațiile (din electrostatică) dintre sarcini și potențiale, respectiv (din electrocinetică) dintre curenți și potențiale. Ca și acești din urmă coeficienți de capacitate sau de conductanță, coeficienții tranzitorii de transfer pot fi negativi în cazul unor circuite idealizate filiforme (cînd se reduc la niște constante). Totodată spre a-i deosebi de parametrii proprii și mutuali care ar interveni în relațiile dintre curenți și tensiunile perechilor de borne, îi vom nota cu o bară deasupra.

Se pot introduce astfel : coeficienții de rezistență tranzitorii  $\bar{r}_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{R}_{jk}(p)]$ , coeficienții de conductanță tranzitorii  $\bar{g}_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{G}_{kl}(p)]$ , coeficienții de inductivitate tranzitorii  $\bar{l}_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{L}_{jk}(p)]$  (numai dacă coeficienții de rezistență și de curent continuu  $\bar{r}_{j,ko}$  sînt finiți) și coeficienții

de capacitate tranzitorii  $\bar{c}_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{C}_{kl}(p)]$  (numai-dacă coeficienții de conductanță de curent continuu  $\bar{g}_{k10}$  sînt finiți) prin relațiile

$$\bar{r}_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Z_{jk}(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z_{jk}(p)}{p} \right], \quad (218)$$

$$\bar{g}_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Y_{kl}(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y_{kl}(p)}{p} \right], \quad (219)$$

$$\bar{l}_{jk}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Z_{jk}(p) - \bar{r}_{jk0}}{p^2} \right], \quad (220)$$

$$\bar{c}_{kl}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Y_{kl}(p) - \bar{g}_{kl0}}{p^2} \right], \quad (221)$$

$$\bar{r}_{jk0} = \lim_{p \rightarrow 0} Z_{jk}(p), \quad (222)$$

$$\bar{g}_{k10} = \lim_{p \rightarrow 0} Y_{kl}(p). \quad (223)$$

Cu aceste definiții, impedanțele operaționale și admitanțele operaționale se scriu sub formele:

$$Z_{jk}(p) = p\bar{l}_{jk}(0+) + p\bar{R}_{jk}(p) = \bar{r}_{jk0} + p^2\bar{L}_{jk}(p) \quad (224)$$

și

$$Y_{kl}(p) = p\bar{c}_{kl}(0+) + p\bar{G}_{kl}(p) = \bar{g}_{k10} + p^2\bar{C}_{kl}(p), \quad (225)$$

iar relațiile (99), respectiv (100) devin (în condiții inițiale de repaus)

$$V_i(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{l}_{jk}(0+) \cdot pI_k(p) + \sum_{k=1}^{n-1} p\bar{R}_{jk}(p) I_k(p), \quad (226)$$

respectiv, dacă  $\bar{r}_{jk0} \neq \infty$ :

$$V_i(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{r}_{jk0} I_k(p) + \sum_{k=1}^{n-1} p^2\bar{L}_{jk}(p) I_k(p), \quad (227)$$

și

$$I_k(p) = \sum_{l=1}^{n-1} \bar{c}_{kl}(0+) \cdot pV_l(p) + \sum_{l=1}^{n-1} p\bar{G}_{kl}(p) V_l(p), \quad (228)$$

respectiv, dacă  $\bar{g}_{k10} \neq \infty$ :

$$I_k(p) = \sum_{l=1}^{n-1} \bar{g}_{k10} V_l(p) + \sum_{l=1}^{n-1} p^2\bar{C}_{kl}(p) V_l(p). \quad (229)$$

Elementele multipolare generale cu  $n$  borne de acces și  $n - 1$  curenți independenți nu sînt incluse în teoria clasică a rețelelor electrice lineare care consideră numai circuite constituite din elemente dipolare, eventual cuplate inductiv între ele. Aplicațiile mai noi ale teoriei circuitelor, privitoare la așa numitele *circuite integrate* sau la *schemele echivalente linearizate* ale tuburilor electronice și tranzistoarelor, impun însă introducerea de elemente multipolare, care nu sînt totdeauna reductibile la asociații de elemente dipolare.

## 4.5. Elementele multiport

Considerăm în cele ce urmează cazul particular, deosebit de important pentru teoria clasică a rețelelor lineare, al *elementelor multiport* care au  $n = 2m$  borne grupate în  $m$  perechi, fiecare pereche de borne constituind o *poartă de acces* și avînd curenți egali și de sensuri opuse, datorită fie

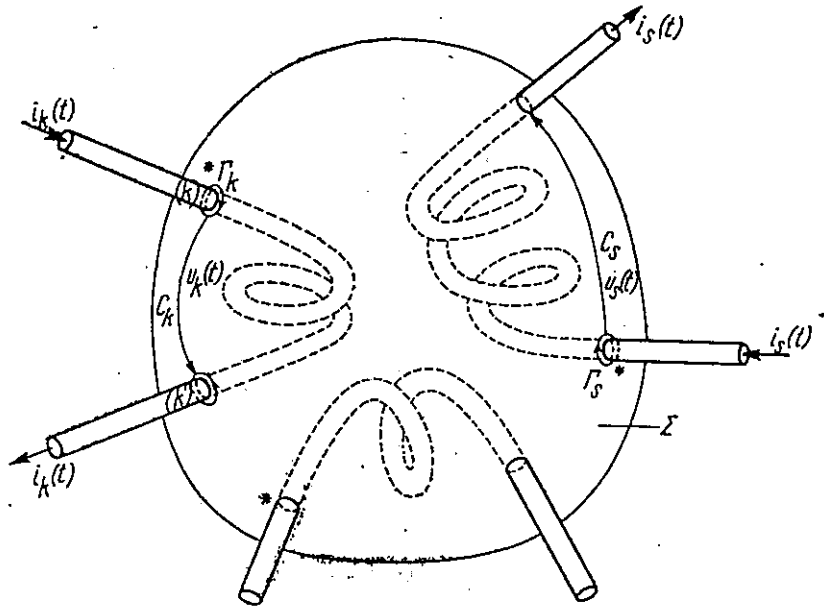


Fig. 5. — Element multiport inductiv.

structurii interioare a elementului, fie structurii rețelei exterioare la care el e conectat.

Pentru a nu impune nici o particularizare rețelei exterioare, vom considera în cele ce urmează numai elemente la care caracterul multiport este impus de structura lor interioară și anume datorită existenței între cele două borne ale fiecărei porți, a unor căi de curent neramificate spre alte borne.

Astfel de elemente multiport sînt în particular *sistemele de bobine cuplate inductiv* (v. fig. 5), sau sistemele de conductoare paralele [8].

Un element multiport ( $m$ -port) are numai  $m$  curenți independenți ( $s = 1, 2, \dots, m$ )

$$i_s(t) = \oint_{\Gamma_s \subset \Sigma} \mathbf{H}(M, t) \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{L}^{-1} [I_s(p)] \quad (230)$$

și  $m$  tensiuni la borne independente ( $k = 1, 2, \dots, m$ )

$$u_k(t) = \int_{(k) [C_k \subset \Sigma]}^{(k')} \mathbf{E}(M, t) \cdot d\mathbf{r} = \mathcal{L}^{-1} [U_k(p)]. \quad (231)$$

Expresia puterii instantanee primite pe la borne (33) ia în acest caz forma

$$p_{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) i_k(t) = p_J(t) + \frac{dW_m(t)}{dt} + \frac{dW_e(t)}{dt}, \quad (232)$$

și teorema de unicitate se poate acum demonstra cu condițiile la borne (230) sau (231).

Pentru ca sensurile de referință ale curenților și tensiunilor să fie univoc definite și, o dată cu ele, expresiile admitanțelor și impedanțelor operaționale definite mai jos, este necesar să se convină de la început asupra bornelor prin care *intră* curenții  $i_k$  (marcate cu un asterisc în figură

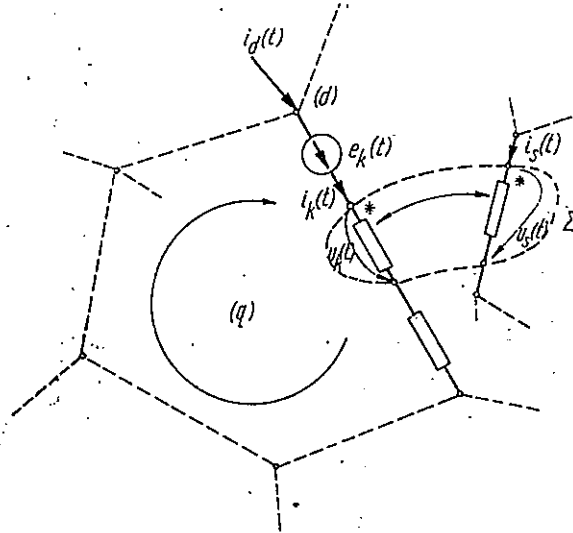


Fig. 6. — Rețea electrică cu elemente dipolare și sisteme de bobine cuplate.

(v. fig. 6) și de la care pornesc liniile de integrare pentru tensiunile  $u_k$  (convenția de asociere de la receptoare).

În condiții inițiale oarecare, prin rezolvarea ecuațiilor câmpului sub formă operațională, mărimile la borne necunoscute se pot exprima în funcție de mărimile la borne date prin relații de forma

$$U_k(p) = \sum_{s=1}^m Z_{ks}(p) I_s(p) + U_k^0(p) \quad (233)$$

sau

$$I_s(p) = \sum_{l=1}^m Y_{sl}(p) U_l(p) + I_s^0(p) \quad (234)$$

în care:  $Z_{ks}(p)$ , respectiv  $Y_{sl}(p)$  sînt impedanțe operaționale, respectiv admitanțe operaționale, *propriu* ( $k = s$ , respectiv  $s = l$ ) și *mutuale* ( $k \neq l$ , respectiv  $s \neq l$ ) ale porților respective;  $U_k^0(p)$  e imaginea tensiunii de la bornele ( $k, k'$ ) determinată de condițiile inițiale de câmp cînd toate legăturile la borne sînt întrerupte pentru  $t > 0$ ;  $I_s^0(p)$  e curentul de scurt circuit din poarta ( $s$ ) determinat de condițiile inițiale de câmp cînd toate porțile sînt scurtcircuitate pentru  $t > 0$ . Impedanțele mutuale și admitanțele mutuale sînt definite relativ la sensurile de intrare ale porților, marcate cu asterisc (borne polarizate).



În condiții inițiale de repaus, ecuațiile multiportului sînt omogene :

$$U_k(p) = \sum_{s=1}^m Z_{ks}(p) I_s(p) \quad (235)$$

$$I_s(p) = \sum_{l=1}^m Y_{sl}(p) U_l(p). \quad (236)$$

Între impedanțele operaționale și admitanțele operaționale există evident relația

$$\sum_{s=1}^m Z_{ks} Y_{sl} = \delta_{kl}. \quad (237)$$

În acest caz rezistențele de *curent continuu* și conductanțele de *curent continuu* sînt

$$r_{k0} = \lim_{p \rightarrow 0} Z_{kk}(p) = \frac{1}{g_{k0}} \neq \infty, \quad (238)$$

și

$$g_{s0} = \lim_{p \rightarrow 0} Y_{ss}(p) = \frac{1}{r_{s0}} \neq 0, \quad (239)$$

iar

$$\lim_{p \rightarrow 0} Z_{ks}(p) = 0 \quad (k \neq s), \quad (240)$$

și

$$\lim_{p \rightarrow 0} Y_{sl}(p) = 0 \quad (s \neq l), \quad (241)$$

deoarece nu există cuplaje de curent continuu între porți. Ca și în cazul dipolului există limitele

$$l_{ks}(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z_{ks}(p)}{p}, \quad (242)$$

diferite de zero la elementele inductive, la care ele reprezintă inductivitățile inițiale, egale cu inductivitățile exterioare proprii și mutuale, și

$$c_{ks}(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y_{ks}(p)}{p}, \quad (243)$$

egale cu zero la elementele inductive.

Parametrii tranzitorii ai elementului multiport sînt :

—rezistențele tranzitorii proprii și mutuale

$$r_{ks}(t) = \mathcal{L}^{-1} [R_{ks}(p)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Z_{ks}(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z_{ks}(p)}{p} \right], \quad (244)$$

cu valorile finale egale cu rezistențele de curent continuu și diferite de zero numai pentru indici egali

$$r_{ks}(\infty) = \delta_{ks} r_{k0} = \begin{cases} r_{k0} & (k = s) \\ 0 & (k \neq s) \end{cases}, \quad (245)$$

în conformitate cu (240) și (241);

— inductivitățile tranzitorii proprii și mutuale

$$l_{ks}(t) = \mathcal{L}^{-1} [L_{ks}(p)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Z_{ks}(p) - r_{k0} \delta_{ks}}{p^2} \right], \quad (246)$$

cu valorile inițiale (242) și valorile finale egale cu inductivitățile de curent continuu (interioare + exterioare);

— conductanțele tranzitorii proprii și mutuale

$$g_{sl}(t) = \mathcal{L}^{-1} [G_{sl}(p)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Y_{sl}(p)}{p} - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y_{sl}(p)}{p} \right], \quad (247)$$

cu valorile finale egale cu conductanțele de curent continuu și diferite de zero numai pentru indici egali

$$g_{sl}(\infty) = \delta_{sl} g_{s0} = \delta_{sl} \frac{1}{r_{s0}} = \begin{cases} g_{s0} & (s = l) \\ 0 & (s \neq l) \end{cases}, \quad (248)$$

și capacitățile tranzitorii proprii și mutuale

$$c_{sl}(t) = \mathcal{L}^{-1} [C_{sl}(p)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Y_{sl}(p) - g_{s0} \delta_{sl}}{p^2} \right], \quad (249)$$

cu valorile inițiale (243) nule la elementele inductive.

Cu ajutorul imaginilor acestor parametri, impedanțele operaționale și admitanțele operaționale se scriu cum urmează :

$$Z_{ks}(p) = p l_{ks}(0+) + p R_{ks}(p) = \delta_{ks} r_{k0} + p^2 L_{ks}(p), \quad (250)$$

$$Y_{sl}(p) = p C_{sl}(0+) + p G_{sl}(p) = \delta_{sl} g_{s0} + p^2 C_{sl}(p), \quad (251)$$

iar relațiile (233) și (234) se scriu sub forma

$$U_k(p) = \sum_{s=1}^m l_{ks}(0+) \cdot p I_s(p) + \sum_{s=1}^m p R_{ks}(p) I_s(p) + U_k^0(p), \quad (252)$$

sau

$$U_k(p) = r_{k0} I_k(p) + \sum_{s=1}^m p^2 L_{ks}(p) I_s(p) + U_k^0(p), \quad (253)$$

și

$$I_s(p) = \sum_{i=1}^m c_{si}(0+) \cdot p U_i(p) + \sum_{i=1}^m p G_{si}(p) U_i(p) + I_s^0(p), \quad (254)$$

sau

$$I_s(p) = g_{s0} U_s(p) + \sum_{i=1}^m p^2 C_{si}(p) U_i(p) + I_s^0(p), \quad (255)$$

în care ultimii termeni iau în considerare condițiile inițiale de cîmp.

## 5. RELAȚIILE INTEGRALE DINTRE TENSIUNILE INSTANTANEE ȘI CURENȚII INSTANTANEI ȘI GENERALIZAREA ECUAȚILOR LUI KIRCHHOFF

### 5.1. Ecuațiile integrale ale elementului de circuit dipolar

Cu ajutorul ecuației operaționale (147) scrisă sub formele

$$U(p) = l(0+)p I(p) + p R(p) \cdot I(p), \quad (256)$$

respectiv (dacă  $r_0 \neq \infty$ ),

$$U(p) = r_0 I(p) + p^2 L(p) \cdot I(p), \quad (257)$$

și al teoremelor produsului imaginilor și derivării rezultă (în condiții inițiale de repaus și chiar dacă curenții și tensiunile au un salt în momentul inițial) *ecuația integrală a curentului*, explicitată în raport cu tensiunea

$$u(t) = l(0+) \frac{di}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^t r(t-\xi) i(\xi) d\xi, \quad (258)$$

respectiv, dacă  $r_0 \neq \infty$ ,

$$u(t) = r_0 i + l(0+) \frac{di}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} l'(t-\xi) i(\xi) d\xi, \quad (259)$$

unde  $\varepsilon$  e pozitiv și arbitrar de mic.

Cu ajutorul ecuației operaționale (148) scrisă sub formele

$$I(p) = c(0+)p U(p) + p G(p) \cdot U(p), \quad (260)$$

respectiv, dacă  $g_0 \neq \infty$

$$I(p) = g_0 U(p) + p^2 C(p) \cdot U(p), \quad (261)$$

și al teoremelor produsului imaginilor și derivării, rezultă în aceleași condiții *ecuația integrală a tensiunii*, explicitată în raport cu curentul

$$i(t) = c(0+) \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^t g(t-\xi) u(\xi) d\xi, \quad (262)$$

respectiv, dacă  $g_0 \neq \infty$ ,

$$i(t) = g_0 u + c(0+) \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} c'(t-\xi) u(\xi) d\xi, \quad (263)$$

Ecuațiile (258), (259), (262) și (263) reprezintă generalizarea ecuațiilor (1), (2), (3), ale elementelor de circuit dipolare ideale, la elementele nefiliforme și cu pierderi suplimentare.

În condiții inițiale oarecare la relațiile (258) și (259), respectiv (262) și (263), se adaugă termenii  $u^0(t)$ , respectiv  $i^0(t)$ , pe care i-ar determina numai condițiile inițiale de câmp, dacă  $i(t) = 0$  ( $t > 0$ ), respectiv dacă  $u(t) = 0$  ( $t > 0$ ).

Ecuția (259) admite o interpretare imediată în cazul *elementelor de circuit inductive* (în regim cvasistaționar), la care  $l(0+) = l_{\text{ext}} > 0$ ,  $c(0+) = 0$ ,  $r_0 \neq \infty$ . În această ecuație apar: *căderea de tensiune rezistivă*  $r_0 i$ , determinată de rezistența de curent continuu a elementului; *căderea de tensiune inductivă*  $l(0+) \frac{di}{dt} = l_{\text{ext}} \frac{di}{dt}$  determinată de inductivitatea

exterioară (aeriană) a elementului și care conține un termen impulsiv de forma  $l(0+) i(0+) \delta(t)$  dacă curentul are un salt de la 0 la  $i(0+)$  în momentul inițial, și *căderea de tensiune suplimentară determinată de efectul pelicular tranzitoriu*. Această cădere de tensiune suplimentară este exprimată de derivata unei integrale de convoluție al cărei nucleu este derivata inductivității tranzitorii  $l(t)$  luată în momentul retardat  $t - \xi$ . Nucleul este simetrizabil deoarece integrala e luată pentru  $\xi \in (0, t)$  și se poate scrie  $l'(t - \xi) = l'(|t - \xi|) = l'(|\xi - t|)$ . Inductivitatea tranzitorie e o funcțiune continuă și derivabilă de timp în intervalul  $(0, \infty)$  care trece de la valoarea  $l(0+) = l_{\text{ext}}$  din momentul inițial la valoarea  $l(\infty) = l_{\text{ext}} + l_{\text{int}}$  din momentul final (adică la inductivitatea de curent continuu (193)). Căderea de tensiune suplimentară include și eventualele efecte de proximitate determinate de curenții turbionari induși în corpuri conductoare din vecinătatea conductorului bobinei (de ex. în miezul ei feromagnetic, studiat prin linearizare).

Ecuția (263) are o interpretare imediată în cazul *elementelor de circuit capacitive* (în regim cvasistaționar), la care:  $c(0+) = c_0 > 0$ ,  $l(0+) = 0$ ,  $g_0 \neq \infty$ . În această ecuație apare: *curentul de pierderi*  $g_0 u$ , determinat de conductanța de curent continuu a elementului; *curentul capacitiv*  $c(0+) \frac{du}{dt} = c_0 \frac{du}{dt}$  determinat de capacitatea electrosta-

tică (calculată la conductivitate nulă) a elementului și care conține un termen impulsiv de forma  $c(0+) u(0+) \delta(t)$  dacă tensiunea are un salt de la 0 la  $u(0+)$  în momentul inițial, și *curentul suplimentar determinat de redistribuirea tranzitorie a sarcinii*, a cărei repartiție finală e cea electrocinetică. Acest curent suplimentar e exprimat de derivata unei integrale de convoluție al cărei nucleu este derivata capacității tranzitorii  $c(t)$  luată în momentul retardat  $t - \xi$ . Nucleul e simetrizabil, deoarece integrala e luată pentru  $\xi \in (0, t)$  și se poate scrie  $c'(t - \xi) = c'(|t - \xi|) = c'(|\xi - t|)$ . Capacitatea tranzitorie e o funcțiune continuă și derivabilă de timp în intervalul  $(0, \infty)$  care trece de la valoarea  $c(0+) = c_0$  din momentul inițial la valoarea  $c(\infty)$  din momentul final (capacitatea echivalentă de regim staționar (214)).

Deși parametrii tranzitorii  $l(t)$  și  $r(t)$  au o interpretare imediată numai pentru elementele inductive, iar parametrii tranzitorii  $c(t)$  și  $g(t)$  au o interpretare imediată numai pentru elementele capacitive, în lucrarea de față au fost introduși *toți acești parametri tranzitorii* pentru orice element de circuit cu pierderi  $\left( r_0 \neq 0, g_0 = \frac{1}{r_0} \neq 0 \right)$ , fie că este inductiv, fie că este

capacitiv, fie că este studiat în regim variabil general, când aproximațiile regimului cvasistacionar nu mai sînt luate în considerare în interiorul suprafeței de separație  $\Sigma$ , iar clasificarea în elemente inductive și capacitive nu mai are semnificația dată. Procedînd astfel s-au putut obține ecuațiile integrale ale elementelor de circuit de orice fel, explicitate fie în raport cu tensiunea (258) și (259), fie în raport cu curentul (262) și (263).

Numai pentru elemente idealizate, unii dintre parametrii tranzitorii nu pot fi definiți, iar unele dintre ecuațiile (256)–(263) își pierd sensul. Astfel, în cazul elementelor idealizate cu  $r_0 = 0$  ( $g_0 = \infty$ ), de exemplu în cazul unei bobine ideale (chiar dacă este situată în vecinătatea unor piese conductoare de conductivitate finită în care se pot produce pierderi prin curenți turbionari), nu se poate defini o capacitate tranzitorie, deoarece limita (131) nu există și relația (141) nu are sens; de aceea nici ecuația (263) nu este utilizabilă cînd  $g_0 = \infty$  ( $r_0 = 0$ ). De asemenea în cazul elementelor idealizate cu  $g_0 = 0$  ( $r_0 = \infty$ ), de exemplu în cazul unui condensator ideal, nu se poate defini o inductivitate tranzitorie, deoarece limita (130) nu există și relația (139) nu are sens; de aceea nici ecuația (259) nu este utilizabilă cînd  $r_0 = \infty$  ( $g_0 = 0$ ).

Deoarece limitele (128) și (129) există întotdeauna, rezistența tranzitorie (135) și conductanța tranzitorie (137) pot fi definite pentru orice element de circuit și ecuațiile (258) și (262) au sens întotdeauna.

Capacitatea tranzitorie  $c(t)$  a unui element inductiv, a cărui energie electrică e permanent neglijată, nu mai are interpretarea energetică clasică a capacității unui condensator. Considerînd însă un element de circuit cu rezistența de curent continuu diferită de zero ( $r_0 = \frac{1}{g_0} \neq 0$ ) ca fiind alcătuit dintr-un rezistor filiform de conductanță  $g_0 \neq \infty$  dispus în paralel cu un element avînd conductanță de curent continuu nulă — și definind drept sarcină electrică echivalentă  $q_e(t)$ , acumulată de acesta, integrala în timp a diferenței dintre curentul total absorbit în condiții inițiale de repaus și dintre curentul de pierderi din rezistorul filiform dispus în paralel — se obține din (263)

$$q_e(t) = \int_{0-\varepsilon}^t [i(t) - g_0 u(t)] dt = \frac{d}{dt} \int_{0-\varepsilon}^t c(t-\xi) (u)\xi d\xi \quad (264)$$

cu

$$Q_e(p) = \mathcal{L}[q_e(t)] = \frac{1}{p} [I(p) - g_0 U(p)] = p C(p) U(p), \quad (265)$$

astfel încît

$$i(t) = g_0 u(t) + \frac{dq_e}{dt}, \quad (266)$$

cu derivata luată în sens generalizat.

Relațiile (264) și (266) constituie generalizările relațiilor  $q = c_0 u$  și  $i = g_0 u + \frac{dq}{dt}$  din cazul circuitelor filiforme ( $g, c$ )—paralel, pentru orice element de circuit dipolar cu  $r_0 \neq 0$ .

Inductivitatea tranzitorie  $l(t)$  a unui element capacitiv, a cărui energie magnetică e permanent neglijată, nu mai are interpretarea ener-

getică clasică a inductivității unei bobine. Considerînd însă un element de circuit cu conductanța de curent continuu diferită de zero ( $g_0 = \frac{1}{r_0} \neq 0$ ) ca fiind alcătuit dintr-un rezistor filiform de rezistență  $r_0 \neq \infty$  dispus în serie cu un element avînd rezistența de curent continuu nulă — și definiînd drept *flux magnetic echivalent*  $\Phi_e(t)$  al acestuia integrala în timp a diferenței dintre tensiunea totală la borne în condiții inițiale de repaus și căderea de tensiune din rezistorul filiform dispus în serie — se obține din (259)

$$\Phi_e(t) = \int_{0-\varepsilon}^t [u(t) - r_0 i(t)] dt = \frac{d}{dt} \int_{0-\varepsilon}^t l(t-\xi) i(\xi) d\xi \quad (267)$$

cu

$$\Phi_e(p) = \mathcal{L}[\Phi_e(t)] = \frac{1}{p} [U(p) - r_0 I(p)] = pL(p) I(p) \quad (268)$$

astfel încît

$$u(t) = r_0 i(t) + \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (269)$$

cu derivata luată în sens generalizat.

Relațiile (267) și (269) constituie generalizările relațiilor  $\Phi = li$  și  $u = ri + \frac{d\Phi}{dt}$  din cazul circuitelor filiforme ( $r, l$ )-serie, pentru orice element de circuit dipolar cu  $g_0 \neq 0$ .

Din (265) și (268) mai rezultă

$$\Phi_e(p) = -r_0 Q_e(p) \quad Q_e(p) = -g_0 \Phi_e(p), \quad (270)$$

și

$$\Phi_e(t) = -r_0 q_e(t) \quad q_e(t) = -g_0 \Phi_e(t). \quad (271)$$

### 5.2. Interpretări experimentale ale parametrilor tranzitorii

Cu ajutorul relațiilor (256)–(263) se pot stabili și următoarele relații care permit interpretarea experimentală a parametrilor tranzitorii:

— La injectarea unui curent treaptă unitate  $i = I(t)$  și  $I(p) = 1/p$

$$u(t) = l(0+) \delta(t) + r(t) \quad (272)$$

și

$$\int_{0-\varepsilon}^t u(t) dt = r_0 t + l(t). \quad (273)$$

— La injectarea unui curent rampă unitate  $i = t \cdot I(t)$  și  $I(p) = 1/p^2$

$$u(t) = r_0 t + l(t) \quad (274)$$

și

$$\frac{du}{dt} = l(0+) \delta(t) + r(t). \quad (275)$$

— La aplicarea unei tensiuni treaptă unitate  $u = I(t)$  și  $U(p) = 1/p$

$$i(t) = c(0+) \delta(t) + g(t), \quad (276)$$

$$\int_{0-\varepsilon}^t i(t) dt = g_0 t + c(t). \quad (277)$$

— La aplicarea unei tensiuni rampă unitate  $u = t \cdot I(t)$  și  $U(p) = 1/p^2$

$$i(t) = g_0 t + c(t), \quad (278)$$

$$\frac{di}{dt} = c(0+) \delta(t) + g(t). \quad (279)$$

Relațiile de mai sus confirmă faptul că parametrii tranzitorii introduși în această lucrare constituie o generalizare firească a parametrilor constanți ai circuitelor filiforme și fără pierderi suplimentare.

Astfel, la injectarea unui curent treaptă, respectiv rampă, tensiunea la bornele unui circuit filiform inductiv, ( $r, l$ )-serie, ar fi fost dată de relația

$$u(t) = l\delta(t) + r, \quad (i = I(t)), \quad (280)$$

respectiv de relația

$$u(t) = rt + l, \quad (i = t \cdot I(t)), \quad (281)$$

în loc de (272) și de (274).

Constatarea experimentală a abaterii răspunsului (274) al unui element inductiv de la forma lineară (281) permite să se evidențieze caracterul *nefiliform* al elementului și să se măsoare inductivitatea lui tranzitorie  $l(t)$ , ceea ce permite și deducerea rezistenței lui tranzitorii prin relația :

$$r(t) = r_0 + \frac{dl}{dt}, \quad (t > 0). \quad (282)$$

Analog, la aplicarea unei tensiuni treaptă, respectiv rampă, curentul unui circuit *filiform* capacitiv ( $g, c$ )-paralel ar fi fost dat de relația

$$i(t) = c\delta(t) + g, \quad (u = I(t)), \quad (283)$$

respectiv de relația

$$i(t) = gt + c, \quad (u = t \cdot I(t)), \quad (284)$$

în loc de (276) și de (278).

Constatarea experimentală a abaterii răspunsului (276) al unui element capacitiv de la forma lineară (284) permite să se evidențieze caracterul *nefiliform* al elementului și să se măsoare capacitatea lui tranzitorie  $c(t)$ , ceea ce permite și deducerea conductanței lui tranzitorii prin relația

$$g(t) = g_0 + \frac{dc}{dt}, \quad (t > 0). \quad (285)$$

Din relațiile (272) și (279) rezultă că, în cazul unui element capacitiv ( $u(0+) = 0$ ), variația în timp a tensiunii la borne, după injectarea unui curent treaptă unitate, reprezintă chiar *rezistența lui tranzitorie*

$$u(t) = r(t), \quad (u(0+) = 0; i = I(t)), \quad (286)$$

iar în cazul unui element inductiv ( $i(0+) = 0$ ) variația în timp a curentului, după aplicarea unei tensiuni treaptă unitate, reprezintă chiar *conductanța lui tranzitorie*

$$i(t) = g(t), \quad (i(0+) = 0; u = I(t)). \quad (287)$$

Cele mai comode condiții de determinare experimentală se obțin așadar pentru rezistența tranzitorie a elementelor capacitive și pentru conductanța tranzitorie a celor inductive.

### 5.3. Ecuațiile integrale ale unui element multiport

Cu ajutorul ecuațiilor operaționale (252)–(255) și al teoremelor produsului imaginilor și derivării se obțin următoarele relații în valori instantanee dintre tensiunile la borne și curenții unui element multiport

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^m l_{ks}(0+) \frac{di_s}{dt} + \sum_{s=1}^m \frac{d}{dt} \int_0^t r_{ks}(t-\xi) i_s(\xi) d\xi + u_k^0(t), \quad (288)$$

$$u_k(t) = r_{k0} i_k(t) + \sum_{s=1}^m l_{ks}(0+) \frac{di_s}{dt} + \sum_{s=1}^m \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} l'_{ks}(t-\xi) i_s(\xi) d\xi + u_k^0(t), \quad (289)$$

$$i_s(t) = \sum_{l=1}^m c_{sl}(0+) \frac{du_l}{dt} + \sum_{l=1}^m \frac{d}{dt} \int_0^t g_{sl}(t-\xi) u_l(\xi) d\xi + i_s^0(t), \quad (290)$$

$$i_s(t) = g_{s0} u_s(t) + \sum_{l=1}^m c_{sl}(0+) \frac{du_l}{dt} + \sum_{l=1}^m \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} c'_{sl}(t-\xi) u_l(\xi) d\xi + i_s^0(t). \quad (291)$$

Relațiile (288) și (290) de mai sus au sens și pot fi utilizate întotdeauna deoarece parametrii  $l_{ks}(0+)$ ,  $c_{sl}(0+)$ ,  $r_{ks}(t)$ ,  $g_{sl}(t)$  pot fi definiți întotdeauna. Relația (289) poate fi utilizată numai dacă  $g_{k0} \neq 0$ ,  $r_{k0} \neq \infty$  (ramuri care nu conțin condensatoare ideale, de exemplu înfășurări de bobine cuplate etc.) iar relația (291) poate fi utilizată numai dacă  $r_{k0} \neq \infty$ ,  $g_{k0} \neq \infty$  (ramuri care nu conțin bobine ideale).

Ecuațiile elementelor dipolare sînt cazuri particulare ale ecuațiilor (288)–(291) cu  $m = 1$ .

### 5.4. Forma generalizată a ecuațiilor lui Kirchhoff pentru rețele cu elemente nefiliforme

Teoria clasică a rețelelor electrice cu elemente filiforme în regim staționar sau cvasistaționar, care conduce la ecuațiile lui Kirchhoff, ia în considerare numai elemente dipolare și cel mult sisteme de bobine cuplate, adică elemente multiport inductive.



Vom considera în cele ce urmează o rețea cu generatoare ideale de tensiuni electromotoare  $e_k(t)$  în laturi și cu generatoare ideale de curent  $i_{(d)}(t)$  în noduri. Laturile pasive sînt elemente dipolare sau sînt constituite din porțile unor elemente multiport. Pentru generalitate vom presupune că toate laturile aparțin acestei ultime categorii, anularea mărimilor mutuale  $r_{ks}, l_{ks}, g_{st}, c_{st} (k \neq s, s \neq l)$  corespunzînd cazului elementelor dipolare. Notînd cu  $(q)$  ochiurile rețelei și cu  $(d)$  nodurile, care pot fi și numai punctele de întîlnire a cîte două laturi, dacã acest lucru e impus de modul cum au putut fi alese suprafețele de separație ale elementelor multiport, și notînd cu

$$e_{(q)}(t) = \sum_{k \in (q)} e_k(t) \quad (292)$$

tensiunile electromotoare ale generatoarelor din fiecare ochi, ecuațiile lui Kirchhoff se scriu sub formele

$$i_{(d)}(t) = \sum_{k \in (d)} i_k(t) \quad (293)$$

și

$$e_{(q)}(t) = \sum_{k \in (q)} u_k(t), \quad (294)$$

în care apar ca variabile și tensiunile și curenții.

Cu ajutorul ecuațiilor (288) se pot elimina tensiunile la bornele laturilor pasive și se obține forma generalizată a ecuațiilor lui Kirchhoff în variabilele curenți

$$i_{(d)}(t) = \sum_{k \in (d)} i_k(t) \quad (295)$$

$$e_{(q)}(t) = \sum_{k \in (q)} \left[ \sum_s \left( l_{ks}(0+) \frac{di_s}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^t r_{ks}(t-\xi) i_s(\xi) d\xi \right) + u_k^\circ(t) \right] \quad (296)$$

pentru orice nod  $(d)$ , respectiv pentru orice ochi  $(q)$  și în care  $s$  ia toate valorile corespunzătoare numerotării laturilor, inclusiv  $s = k$ .

Dacă  $g_{k0} = \frac{1}{r_{k0}} \neq 0$ , tensiunile se pot exprima și cu ecuațiile (289), iar ecuațiile Kirchhoff de ochi (296) se pot scrie

$$e_{(q)}(t) = \sum_{k \in (q)} \left[ u_k^\circ(t) + r_{0k} i_k(t) + \sum_s \left( l_{ks}(0+) \frac{di_s}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} l'_{ks}(t-\xi) i_s(\xi) d\xi \right) \right]. \quad (297)$$

Cu ajutorul ecuațiilor (289) se pot elimina curenții laturilor și se obține forma generalizată a ecuațiilor lui Kirchhoff în variabilele tensiuni, adică forma generalizată duală a lor

$$i_{(d)}(t) = \sum_{s \in (d)} \left[ \sum_l \left( c_{sl}(0+) \frac{du_l}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^t g_{sl}(t-\xi) u_l(\xi) d\xi \right) + i_s^\circ(t) \right], \quad (298)$$

$$e_{(q)}(t) = \sum_{s \in (q)} u_s(t), \quad (299)$$

pentru orice nod ( $d$ ), respectiv pentru orice ochi ( $q$ ) și în care  $l$  ia toate valorile corespunzătoare laturilor rețelei, inclusiv  $l = s$ .

Dacă  $r_{s0} = \frac{1}{g_{s0}} \neq 0$  curenții se pot exprima și cu ecuațiile (291), în care caz ecuațiile Kirchhoff de nod (298) se scriu

$$i_{(d)}(t) = \sum_{s \in (d)} \left[ i_s^\circ(t) + g_{s0} u_s(t) + \sum_l \left( c_{sl}(0+) \frac{du_l}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} c'_{sl}(t-\xi) u_l(\xi) d\xi \right) \right]. \quad (300)$$

### 5.5. Rețele cu condensatoare ideale

În numeroase aplicații, introducerea parametrilor tranzitorii este necesară numai pentru bobine, iar condensatoarele pot fi considerate ideale, eventual cu o rezistență echivalentă de pierderi în paralel, ceea ce introduce numai o nouă latură. În acest caz căderea de tensiune dintr-o latură, care conține o poartă a unui multiport inductiv în serie cu un condensator ideal de capacitate  $c_{k0}$ , se scrie însumând expresii de forma (288) sau (289) cu căderea de tensiune a condensatorului ideal.

În acest caz ecuațiile (295), (296) cu (292) iau forma

$$i_{(d)}(t) = \sum_{k \in (d)} i_k(t) \quad (301)$$

$$\sum_{k \in (q)} e_k(t) = \sum_{k \in (q)} \left[ u_k^\circ(t) + r_{k0} i_k(t) + \frac{1}{c_{k0}} \int_0^t i_k(\xi) d\xi + \sum_s \left( l_{ks}(0+) \frac{di_s}{dt} + \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} l'_{ks}(t-\xi) i_s(\xi) d\xi \right) \right]. \quad (302)$$

În aceste ecuații, alături de căderile de tensiune determinate de rezistențele de curent continuu, de condensatoarele ideale și de inductivi-

tățile exterioare, apar *căderile de tensiune suplimentare* condiționate de efectele pelicular și de proximitate, tranzitorii

$$\Delta u_k(t) = \sum_s \frac{d}{dt} \int_0^{t-\varepsilon} l'_{ks}(t-\xi) i_s(\xi) d\xi, \quad (303)$$

cum și căderea de tensiune  $u_k^\circ(t)$ , determinată de condițiile inițiale de cîmp, care s-ar stabili în latura considerată dacă ar fi întrerupte toate laturile la  $t = 0$  și care include și o eventuală tensiune inițială a condensatorului (de la  $t = 0 - \varepsilon$ ).

Forma operațională a ecuațiilor (301) și (302) este

$$I_{(d)}(p) = \sum_{k \in (d)} I_k(p), \quad (304)$$

$$\sum_{k \in (a)} E_k(p) = \sum_{k \in (a)} Z_k(p) I_k(p) + \sum_{k \in (a)} \sum_{s \neq k} Z_{ks}(p) I_s(p) + \sum_{k \in (a)} U_k^\circ(p), \quad (305)$$

cu

$$Z_k(p) = Z_{kk}(p) = r_{k0} + \frac{1}{pC_{k0}} + p^2 L_{kk}(p) \quad (306)$$

și

$$Z_{kp}(p) = p^2 L_{ks}(p), \quad (k \neq s). \quad (307)$$

Dacă, în particular, rețeaua este alimentată cu tensiuni electromotoare sinusoidale de aceeași frecvență de forma

$$e_k(t) = E_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_k) = \text{Im} \{E_k \sqrt{2} e^{j\omega t}\} \quad (308)$$

cu reprezentările în complex  $\underline{E}_k = E_k e^{j\alpha_k}$ , se caută soluții asimptotice (pentru  $t \rightarrow \infty$ , cînd  $u_k^\circ(t) \rightarrow 0$ ) ale ecuațiilor (301) și (302), de forma

$$i_k(t) = I_k \sqrt{2} \sin(\omega t + \gamma_k) = \text{Im} \{\underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t}\}, \quad (309)$$

cu reprezentările în complex  $\underline{I}_k = I_k e^{j\gamma_k}$ , ținînd seama că transformata Fourier<sup>1</sup>  $F(j\omega)$  a unui parametru tranzitoriu  $f(t)$  (nul pentru  $t < 0$ ) este

$$F(j\omega) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}} \int_0^t f(\xi) e^{-(c+j\omega)\xi} d\xi = \lim_{p \rightarrow j\omega} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (310)$$

Se obțin astfel ecuațiile satisfăcute de reprezentările în complex, cu forma cunoscută din teoria circuitelor filiforme:

$$\underline{I}_{(d)} = \sum_{k \in (d)} \underline{I}_k \quad (311)$$

și

$$\sum_{k \in (a)} \underline{E}_k = \sum_{k \in (a)} Z_k \underline{I}_k + \sum_{k \in (a)} \sum_{s \neq k} Z_{ks} \underline{I}_s \quad (312)$$

<sup>1</sup>) Vom considera transformarea Fourier în  $(0, \infty)$  ca limită a transformării Laplace cînd  $c = \text{Re}\{p\} \rightarrow 0$ .

în care

$$\underline{Z}_{kk} = Z_k(j\omega) = r_{k0} + \frac{1}{j\omega c_{k0}} + (j\omega)^2 L_{kk}(j\omega), \quad (313)$$

$$\underline{Z}_{ks} = Z_{ks}(j\omega) = (j\omega)^2 L_{ks}(j\omega) \quad (314)$$

și

$$L_{ks}(j\omega) = \lim_{p \rightarrow j\omega} L_{ks}(p) = \lim_{p \rightarrow j\omega} \mathcal{L}[L_{ks}(t)], \quad (k = l \text{ sau } k \neq s). \quad (315)$$

### 5.6. Forma generalizată a ecuațiilor telegrafistilor

Studiul liniilor electrice lungi și cu pierderi, la care se ia în considerare efectul pelicular tranzitoriu din fire și sol și eventual efectele de redistribuire tranzitorie a sarcinii din dielectric, adică efectele de relaxație se poate face după modelul arătat în această lucrare pentru circuite, introducând *parametri lineici tranzitorii*. Un astfel de studiu a fost dezvoltat de autori într-o lucrare anterioară [9] cu neglijarea efectului de relaxație.

Considerînd o linie multifilară omogenă cu  $n$  conductoare paralele dispuse deasupra solului (sau în interiorul unui ecran), notînd cu  $v_k(z, t)$  potențialele firelor față de sol (ecran) și cu  $i_k(z, t)$  curenții, la distanța  $z$  de începutul liniei se obțin ecuații de forma

$$-\frac{\partial v_k}{\partial z} = r_k^0 i_k + \sum_{m=1}^n l_{km}(0+) \frac{\partial i_m}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-\varepsilon} \left( \frac{dl_{km}}{dt} \right)_{t-\xi} i_m(z, \xi) d\xi - \left( \frac{\partial v_k}{\partial z} \right)_0 \quad (316)$$

și

$$-\frac{\partial i_k}{\partial z} = \sum_{m=1}^n g_{km}^0 v_m + \sum_{m=1}^n c_{km}(0+) \frac{\partial v_m}{\partial t} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{t-\varepsilon} \left( \frac{dc_{km}}{dt} \right)_{t-\xi} v_m(z, \xi) d\xi - \left( \frac{\partial i_k}{\partial z} \right)_0 \quad (317)$$

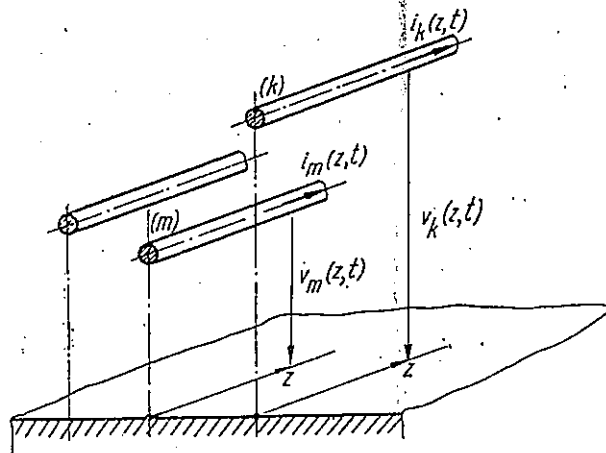


Fig. 7. — Linie multifilară omogenă în prezența solului.

care generalizează cunoscutele ecuații ale telegrafistilor de ordinul întâi pentru liniile cu pierderi. În aceste ecuații  $r_k^0$  sînt rezistențele lineice de curent continuu ale firelor,  $g_{km}^0$  coeficienții lineici de conductanță de izo-

lație de curent continuu,  $l_{km}(t)$  inductivitățile lineice tranzitorii, iar  $c_{km}(t)$  coeficienții lineici tranzitorii de capacitate. Termenii  $-\left(\frac{\partial v_k}{\partial z}\right)_0$  și  $-\left(\frac{\partial i_k}{\partial z}\right)_0$  depind numai de condițiile inițiale de câmp.

#### 6. CALCULUL UNOR PARAMETRI TRANZITORII

Calculul parametrilor tranzitorii  $r(t)$ ,  $g(t)$ ,  $l(t)$  și  $c(t)$  necesită în general integrarea ecuațiilor lui Maxwell în domeniul  $\mathcal{D}_\Sigma$ , mărginit de suprafața de separație  $\Sigma$  care definește elementul de circuit considerat, în condiții inițiale de repaus și cu condiții la borne particulare, corespunzătoare determinării parametrului tranzitoriu căutat.

De obicei cea mai potrivită este calea operațională, care consistă în integrarea ecuațiilor (58), (59) cu  $F_z = 0$ ,  $F_h = 0$ , cu condițiile de trecere (37), condițiile de frontieră (24), (25), (26) și cu condiții la borne adecvate identificării impedanței operaționale sau admitanței operaționale cu ajutorul căreia este definită imaginea Laplace a parametrului tranzitoriu căutat [cu una dintre relațiile (136), (138), (140) și (142)]. În regim evasi-staționar, pentru elemente inductive, respectiv capacitive, se integrează ecuațiile (171) și (172), respectiv (198) și (199). Odată determinat unul dintre parametrii tranzitorii ai unui element dipolar, determinarea celorlalți se poate face în principiu și cu ajutorul ecuațiilor diferențiale (161) și (163) sau al ecuațiilor integrale (167) și (168). Parametrii tranzitorii ai circuitelor filiforme se determină imediat pe baza expresiilor admitanțelor și impedanțelor lor.

Fără a urmări aici sistematizarea acestui calcul, prezentăm în cele ce urmează câteva exemple simple referitoare la elemente dipolare, dintre care primele se vor referi chiar la circuite filiforme pentru a pune în evidență, în situații idealizate, proprietățile generale demonstrate în § 4.

##### 6.1. Circuit filiform $(r, l)$ -serie

Din expresia (103) a impedanței operaționale,  $Z(p) = r + pl = 1/Y(p)$ , cu (128)–(141), se obțin expresiile

$$r_0 = r, g_0 = \frac{1}{r}, l(0+) = l, c(0+) = 0, \quad (318)$$

$$R(p) = \frac{r}{p}, \quad r(t) = r I(t) \geq 0, \quad (319)$$

$$L(p) = \frac{l}{p}, \quad l(t) = l I(t) \geq 0, \quad (320)$$

$$G(p) = \frac{1}{p(r + pl)}, \quad g(t) = \frac{1}{r} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{l}t} \right] I(t) \geq 0, \quad (321)$$

$$C(p) = -\frac{1}{pr(r + pl)}, \quad c(t) = -\frac{l}{r^2} \left[ 1 - e^{-\frac{r}{l}t} \right] I(t) \leq 0. \quad (322)$$

Aceste funcțiuni (reprezentate în fig. 8) au valorile limită

$$\begin{aligned} r(\infty) = r, \quad g(\infty) = \frac{1}{r}, \quad r(0+) = r, \quad g(0+) = 0, \\ l(\infty) = l, \quad c(\infty) = -\frac{l}{r^2}. \end{aligned} \quad (323)$$

Se verifică imediat proprietățile (132), (152), (155), (156), (157) și (171). Bobina *ideală* ( $r = 0$ ) are rezistența, inductivitatea și conductanța tranzitorii definite:

$$r(t) = 0, \quad l(t) = l, \quad g(t) = \frac{l}{l} I(t), \quad (324)$$

și o capacitate tranzitorie divergentă ( $c(0) = 0, c(t) = -\infty, t > 0$ ).

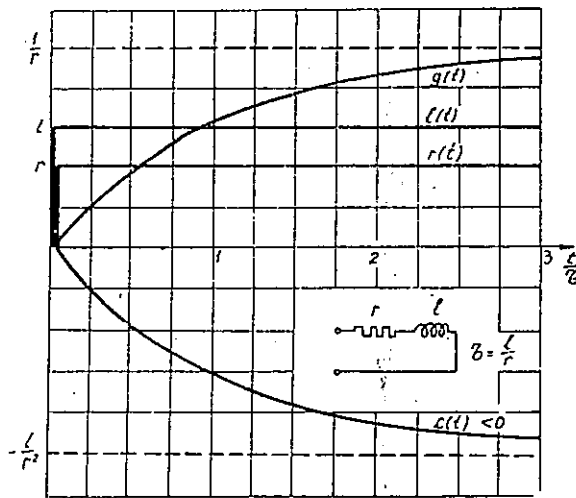


Fig. 8. — Parametrii tranzitorii ai circuitului ( $r, l$ )-serie.

### 6.2. Circuit filiform ( $g, c$ )-paralel

Din expresia (104) a admitanței operaționale,  $Y(p) = g + pc = 1/Z(p)$ , cu (128)–(141), se obțin expresiile

$$r_0 = \frac{1}{g}, \quad g_0 = g, \quad l(0+) = 0, \quad c(0+) = c, \quad (325)$$

$$R(p) = \frac{1}{p(pc + g)}, \quad r(t) = \frac{1}{g} \left[ 1 - e^{-\frac{g}{c}t} \right] I(t) \geq 0, \quad (326)$$

$$L(p) = -\frac{c}{pg(pc+g)}, \quad l(t) = -\frac{c}{g^2} \left[ 1 - e^{-\frac{g}{c}t} \right] I(t) \leq 0, \quad (327)$$

$$G(p) = \frac{g}{p}, \quad g(t) = gI(t) \geq 0, \quad (328)$$

$$C(p) = \frac{c}{p}, \quad c(t) = cI(t) \geq 0. \quad (329)$$

Aceste funcțiuni (reprezentate în fig. 9) au valorile limită :

$$r(\infty) = \frac{1}{g}, \quad g(\infty) = g, \quad r(0+) = 0, \quad g(0+) = g, \quad (330)$$

$$l(\infty) = -\frac{c}{g^2}, \quad c(\infty) = c.$$

Se verifică imediat proprietățile (132), (152), (155), (156), (157) și (171). Condensatorul ideal ( $g=0$ ) are rezistența, conductanța și capacitatea tranzitorii definite,

$$r(t) = \frac{t}{c} I(t), \quad g(t) = 0, \quad c(t) = cI(t), \quad (331)$$

și o inductivitate tranzitorie divergentă ( $l(0) = 0, l(t) = -\infty, t > 0$ ).

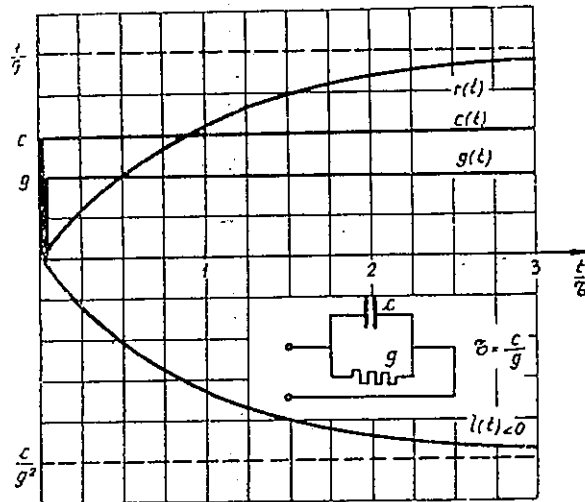


Fig. 9. — Parametrii tranzitorii ai circuitului ( $g, c$ )-paralel.

### 6.3. Element dipolar nefiliform, inductiv

Ca exemplu de element inductiv, studiat în regim evasistaționar, considerăm un tronson de conductă coaxială de înălțime  $h$ , constituit (v. fig. 10) dintr-un conductor cilindric central de rază  $a$ , avînd conductivi-

tatea  $\sigma$  și permeabilitatea magnetică  $\mu = \mu_r \mu_0$ , și o coajă cilindrică circulară  $S_1$  de rază interioară  $b > a$ , perfect conductoare ( $\sigma = \infty$ ), separată de conductorul cilindric central printr-un dielectric perfect izolant ( $\sigma = 0$ ) avind permeabilitatea magnetică  $\mu_0$ . La capătul inferior conducta este închisă cu un capac  $S_2$ , presupus, de asemenea, perfect conductor.

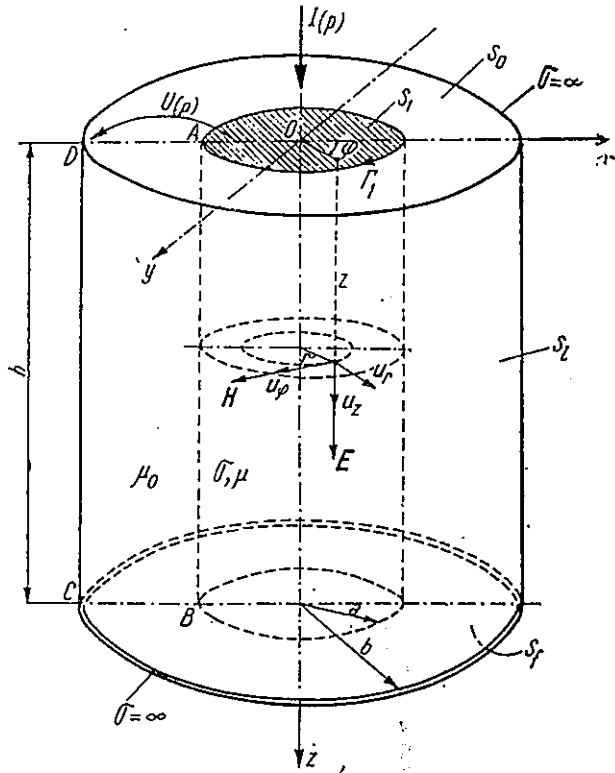


Fig. 10. — Exemplu de element dipolar inductiv.

În acest caz suprafața de separație este  $\Sigma = S_1 \cup S_1' \cup S_0 \cup S_1$ . S-a notat cu  $S_1$  secțiunea transversală a conductorului central la capătul de intrare, adică *borna de acces*, și cu  $S_0$  secțiunea transversală a dielectricului la capătul de intrare.

Sub formă operațională condițiile de frontieră (24)–(26) ce definesc suprafața de separație se scriu în acest caz

$$\left. \begin{aligned} n \cdot H(M, p) &= 0, & M \in \Sigma \\ n \cdot J(M, p) &= 0, & M \in S_1 \cup S_1' \cup S_0, \\ n \times J(M, p) &= 0, & M \in S_1. \end{aligned} \right\} \quad (332)$$

Elementul e alimentat cu curentul  $I(p)$  prin conductorul central, întoarcerea curentului efectuându-se prin coaja cilindrică.



Ținând seama de simetria cilindrică a problemei, alegem un sistem de coordonate cilindrice  $(r, \varphi, z)$  și, în interiorul conductorului central  $(r \leq a)$ , căutăm soluții ale ecuațiilor (171) și (172) de forma

$$H(M, p) = u_\varphi H(r, p), \quad \vec{E}(M, p) = u_z E(r, p), \quad (333)$$

care asigură satisfacerea tuturor condițiilor (332), deoarece  $\sigma = \infty$  în  $S_i$  și  $S_f$ . Din ecuațiile (171) și (172) rezultă pentru  $E(r, p)$  ecuația Bessel de ordinul zero

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + k^2 E = 0. \quad (334)$$

Notăm

$$k = \sqrt{-p\sigma\mu} = \frac{1}{a} \sqrt{-p\tau}, \quad \tau = a^2 \mu \sigma, \quad (335)$$

unde  $\tau$  e constanta de timp interioară.

Soluția, mărginită în ax ( $r = 0$ ), a ecuației (328) este

$$E(r, p) = C J_0(kr) \quad (0 \leq r \leq a), \quad (336)$$

$J_0(x)$  fiind funcțiunea Bessel de specia întâi și de ordinul zero. Constanta  $C$  se determină din condiția la borne care impune valoarea curentului total

$$I(p) = \oint_{\Gamma_1} H dr = \int_0^a \sigma E 2\pi r dr. \quad (337)$$

Se obține astfel pentru câmpul electric interior expresia

$$E(r, p) = I(p) \frac{\mu}{2\pi\tau} \frac{ka}{J_1(ka)} J_0(kr), \quad (0 \leq r \leq a), \quad (338)$$

în care  $J_1(x)$  e funcțiunea Bessel de specia întâi și de ordinul întâi. Câmpul magnetic exterior este

$$H(r, p) = \frac{I(p)}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (a \leq r \leq b) \quad (339)$$

și calculând circulația vectorului  $\vec{E}$  pe conturul ABCDA (fig. 10), ținând seama de legea inducției electromagnetice și de anularea câmpului electric pe  $S_i$  și  $S_f$ , se determină tensiunea la borne

$$\oint_{ABCD} \vec{E} dr = hE(a, p) - U(p) = -p\mu_0 h \frac{I(p)}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (340)$$

Cu (338) și (340) se obține impedanța operațională a elementului inductiv considerat

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = p \left[ \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu h ka}{\pi\tau} \frac{J_0(ka)}{2J_1(ka)} \right] \quad (341)$$

care, conform definițiilor date în această lucrare, se va scrie sub forma (147)

$$Z(p) = pl(0+) + pR(p) = r_0 + p^2L(p). \quad (342)$$

Inductivitatea inițială (128)

$$l(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Z(p)}{p} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = l_{\text{ext}} \quad (343)$$

rezultă egală cu inductivitatea exterioară (conform cu (192)), iar limita

$$r_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Z(p) = \frac{\mu h}{\pi \tau} = \frac{h}{\sigma \pi a^2} \quad (344)$$

rezultă egală cu rezistența de curent continuu (conform cu (130)).

Rezistența tranzitorie are imaginea

$$R(p) = \frac{Z(p)}{p} - l(0+) = \frac{r_0 J_0(ka)}{2p J_1(ka)}. \quad (345)$$

Această funcțiune de  $p$  satisface condițiile cerute unei imagini [7]. Se poate calcula originalul și se obține expresia rezistenței tranzitorii

$$r(t) = r_0 \left[ 1 + \sum_{s=1}^{\infty} e^{-x_s^2 \frac{t}{\tau}} \right] \cdot I(t) \quad (346)$$

în care:  $x_s$  sînt rădăcinile nenule ale funcțiunii  $J_1(x) = 0$ :  $x_1 = 3,832$ ,  $x_2 = 7,016$ , ...,  $x_s \approx s\pi + \pi/4$  ( $s \gg 1$ ).

Cu expresiile asimptotice ale funcțiunilor Bessel, se calculează expresia asimptotică la infinit a imaginii  $R(p)$ , din care se obține expresia asimptotică a lui  $r(t)$  în origine

$$r(t) \approx r_0 \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{t}}, \quad \left( \frac{t}{\tau} \ll 1, t > 0 \right). \quad (347)$$

Pentru  $t/\tau > 1$  seria (346) e extrem de rapid convergentă și se poate reține numai primul termen, ceea ce conduce la expresia asimptotică la infinit

$$r(t) \approx r_0 \left( 1 + e^{-14,67 \frac{t}{\tau}} \right), \quad \left( \frac{t}{\tau} > 1 \right), \quad (348)$$

Inductivitatea tranzitorie  $l(t)$  se deduce ușor din (161) ținînd seama de (343)

$$l(t) = \left[ \int_0^t (r(t) - r_0) dt + l(0+) \right] \cdot I(t), \quad (349)$$

se obține expresia <sup>1)</sup>

$$l(t) = \left[ l_{\text{ext}} + l_{\text{int}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{8}{x_s^2} \left( 1 - e^{-x_s^2 \frac{t}{\tau}} \right) \right] \cdot I(t), \quad (350)$$

<sup>1)</sup> Partea „interioară” a acestei inductivități a fost calculată prima dată (cu o altă definiție) de A. Avramescu [3].

în care

$$l_{\text{int}} = \frac{\mu h}{8\pi} = \frac{\mu_r}{4 \ln \frac{b}{a}} \cdot l_{\text{ext}} = \frac{\tau}{8} r_0 \quad (351)$$

este inductivitatea interioară a conductorului central.

Expresiile asimptotice ale inductivității tranzitorii în origine și la infinit sînt

$$l(t) \approx l_{\text{ext}} + l_{\text{int}} \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\tau}}} \sqrt{\frac{t}{\tau}}, \quad \left( \frac{t}{\tau} \ll 1, t > 0 \right), \quad (352)$$

și

$$l(t) = l_{\text{ext}} + l_{\text{int}} [1 - 0,545 e^{-14,67 \frac{t}{\tau}}], \quad \left( \frac{t}{\tau} > 1 \right), \quad (353)$$

(unde s-a ținut seama că  $\sum_{s=1}^{\infty} (1/x_s^2) = 1/8$ ), iar valoarea ei asimptotică rezultă  $l(\infty) = l_{\text{ext}} + l_{\text{int}}$ , în acord cu (193).

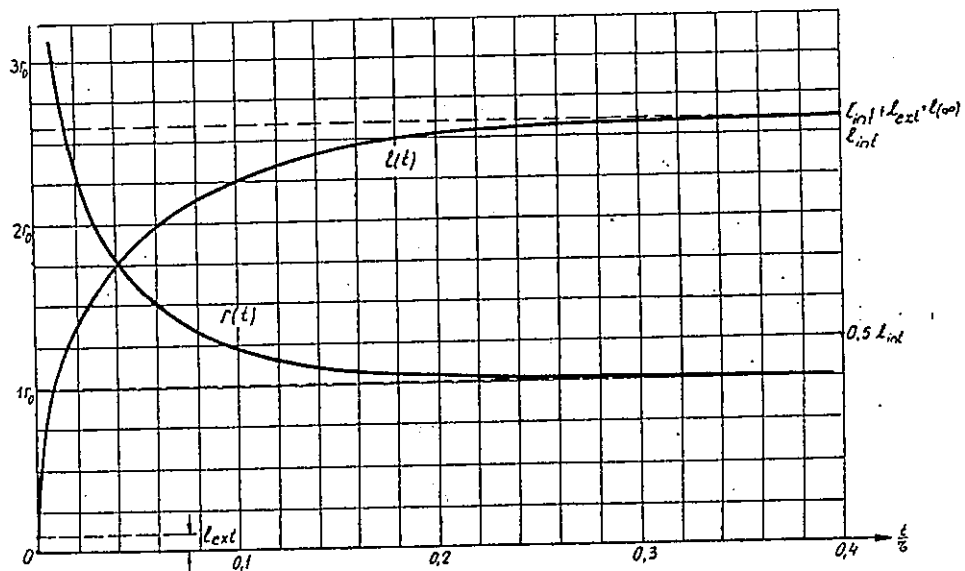


Fig. 11. — Rezistența și inductivitatea tranzitorii ale unui element inductiv, avînd  $l_{\text{int}} = 25 l_{\text{ext}}$ .

În fig. 11 sînt reprezentate funcțiunile  $r(t)$  și  $l(t)$ , considerînd  $l_{\text{ext}} = \frac{1}{25} l_{\text{int}}$ , iar în fig. 12 sînt reprezentate funcțiunile universale numerice

$$\rho(\theta) = \rho\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{r(t)}{r_0} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} e^{-x_s^2 \theta}, \quad (354)$$

$$\lambda(\theta) = \lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{l(t) - l_{\text{ext}}}{l_{\text{int}}} = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{8}{x_s^2} e^{-x_s^2 \theta}, \quad (355)$$

între care există relațiile

$$\rho(\theta) = 1 + \frac{1}{8} \frac{d\lambda(\theta)}{d\theta}, \quad \lambda(\theta) = 8 \int_0^\theta [\rho(\theta) - 1] d\theta, \quad (356)$$

care caracterizează toate elementele inductive de tipul considerat, oricare ar fi natura materialului sau dimensiunile. Pentru orientare, observăm că, dacă  $a = 0,5$  cm și  $b = 3,69$  cm, se obține în cazul cuprului, respectiv în cazul fierului moale la cîmpuri slabe, considerat linear și cu o permeabilitate inițială  $\mu_2 \approx 200$

$$\tau_{Cu} \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad \left( \frac{l_{int}}{l_{ext}} \right)_{Cu} \approx 1/8, \quad (357)$$

respectiv

$$\tau_{Fe} \approx 63 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad \left( \frac{l_{int}}{l_{ext}} \right)_{Fe} \approx 25. \quad (357')$$

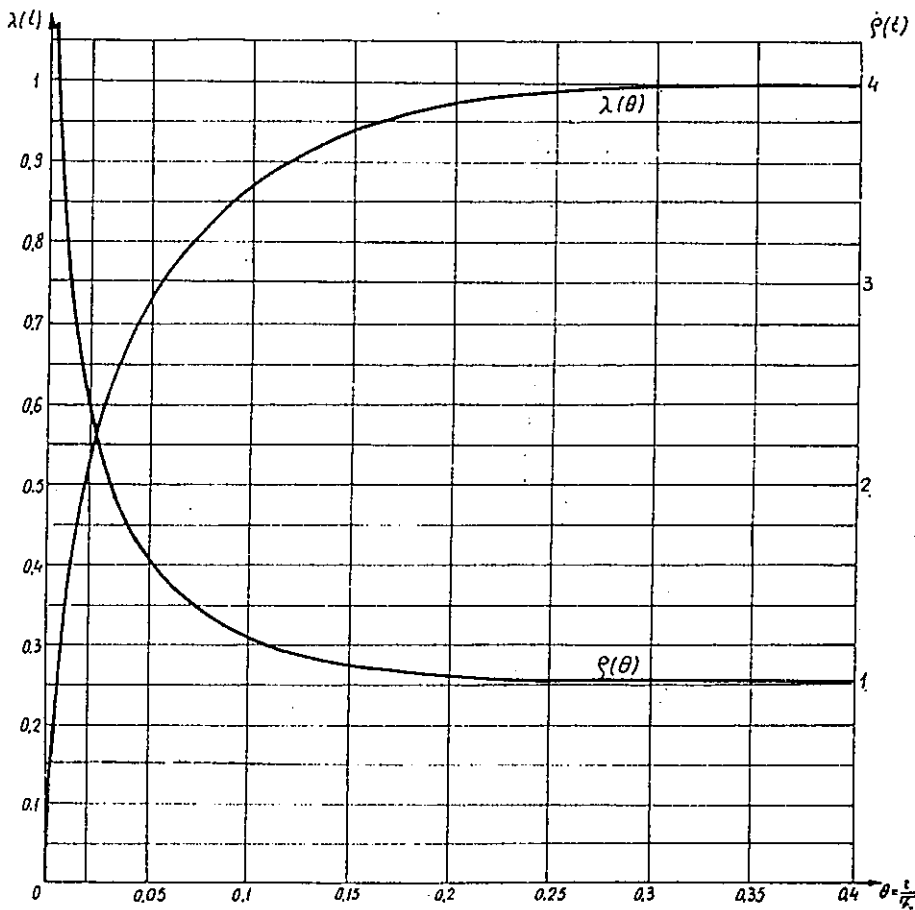


Fig. 12. — Funcțiunile universale numerice  $\rho(\theta)$  și  $\lambda(\theta)$ .

Cu (341), (343) și (344) se obține admitanța operațională

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{\frac{2}{ka} J_1(ka)}{l_{\text{ext}} p \frac{2}{ka} J_1(ka) + r_0 J_0(ka)}, \quad (358)$$

din care rezultă o capacitate inițială nulă

$$c(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p} = 0, \quad (359)$$

ca la orice element inductiv (v. (153)) și limita

$$g_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Y(p) = \frac{1}{r_0} = \frac{\pi \tau}{\mu h} = \frac{\pi a^2 \sigma}{h}, \quad (360)$$

egală cu conductanța de curent continuu.

Deoarece  $c(0+) = 0$  relația (148) se scrie

$$Y(p) = pG(p) = g_0 + p^2 C(p). \quad (361)$$

Conductanța tranzitorie are deci imaginea

$$G(p) = \frac{Y(p)}{p} = g_0 \frac{\frac{2}{ka} J_1(ka)}{p[J_0(ka) - m ka J_1(ka)]}, \quad (362)$$

cu

$$m = \frac{1}{\mu_r} \ln \frac{b}{a} = \frac{l_{\text{ext}}}{4l_{\text{int}}} = \frac{2l_{\text{ext}}}{\tau r_0}. \quad (363)$$

Prin inversiune se obține expresia conductanței tranzitorii

$$g(t) = g_0 \left[ 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_s^2 (1 + m^2 \xi_s^2)} e^{-\xi_s^2 \frac{t}{\tau}} \right] \cdot I(t) \quad (364)$$

în care  $\xi_s$  sînt rădăcinile ecuației transcendente de valori proprii ( $s = 1, 2, \dots, \infty$ )

$$J_0(\xi) - m\xi J_1(\xi) = 0 \quad (365)$$

care sînt date în lucrarea [10] din care extragem pentru orientare următoarele valori :

$m$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	$\xi_6$
0	2,405	5,520	8,654	11,792	14,431	18,071
$\frac{1}{100}$	2,381	5,465	8,568	11,675	14,783	17,893
$\frac{1}{10}$	2,180	5,033	7,957	10,827	13,857	16,918
$\frac{1}{2}$	1,599	4,291	7,288	10,366	13,472	16,591
1	1,256	4,080	7,156	10,271	13,398	16,531
2	0,941	3,959	7,086	10,222	13,361	16,501
10	0,442	—	—	—	—	—
100	0,141	—	—	—	—	—
$\infty$	0	3,832	7,016	10,174	13,324	16,471

Deoarece din (362) și în acord cu (359) și (171)

$$g(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pG(p) = 0$$

rădăcinile  $\xi_1$  verifică relația

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_s^2 (1 + m^2 \xi_s^2)} = 1. \quad (366)$$

În cazul unui conductor central feromagnetic  $m \ll 1$  și valorile proprii care prezintă interes [seria (364) fiind extrem de rapid convergentă] sînt practic rădăcinile  $\xi_{s,0}$  ale ecuației  $J_0(\xi) = 0$ , corespunzătoare liniei  $m = 0$  din tabelul de mai sus și cu  $\xi_{s,0} \approx s\pi - \frac{\pi}{4}$ , dacă  $x \gg 1$ .

Deoarece imaginea  $G(p)$  din (362) are expresia asimptotică

$$G(p) \approx \frac{2g_0}{m\tau} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2 l_{\text{ext}}}, \quad (|p| \rightarrow \infty), \quad (367)$$

rezultă pentru  $g(t)$  expresia aproximativă în origine

$$g(t) \approx \frac{t}{l_{\text{ext}}} = g_0 \frac{t}{\tau_{\text{ext}}} = \frac{2g_0}{m} \frac{t}{\tau}, \quad \left( \frac{t}{\tau} \ll 1, t > 0 \right), \quad (368)$$

în care

$$\tau_{\text{ext}} = \frac{l_{\text{ext}}}{r_0} = \tau \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\mu_r} = \tau \frac{m}{2}, \quad (369)$$

e constanta de timp calculată ca în teoria circuitelor filiforme cu inductivitatea exterioară și cu rezistența de curent continuu.

Pentru  $t \rightarrow \infty$  (din 364) se obține

$$g(t) = g_0 \left( 1 - \frac{4}{\xi_1^2 (1 + m^2 \xi_1^2)} e^{-\xi_1^2 \frac{t}{\tau}} \right), \quad \left( \frac{t}{\tau} > 1 \right), \quad (370)$$

sau, dacă  $m \ll 1$ , cu  $\xi_1 \approx \xi_{10} \approx 2,4$

$$g(t) = g_0 \left[ 1 - \frac{1}{1,44} e^{-5,76 \frac{t}{\tau}} \right]. \quad (371)$$

Din (322) rezultă că în cazul unui circuit filiform această expresie ar fi fost, (în ipotezele  $m \ll 1$ ,  $l_{int} \gg l_{ext}$ )

$$g(t) \approx g_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}}) \quad (372)$$

cu constanta de timp de curent continuu

$$\tau_0 = \frac{l_{int} + l_{ext}}{r_0} = (1 + 4m) \frac{l_{int}}{r_0} \approx \frac{l_{int}}{r_0} = \frac{\tau}{8}. \quad (372')$$

Constanta de timp a expresiei asimptotice (371) este  $\tau/5,76 \approx 1,38 \tau_0$ , adică este cu 38% mai mare decât aceea calculată cu inductivitatea totală ca în teoria circuitelor filiforme.

Capacitatea tranzitorie  $c(t)$  se deduce ușor din (163), ținând seama de (359)

$$c(t) = I(t) \cdot \int_0^t (g(t) - g_0) dt = -g_0 \tau \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4}{\xi_s^4 (1 + m^2 \xi_s^2)} (1 - e^{-\xi_s^2 \frac{t}{\tau}}) \cdot I(t). \quad (373)$$

Ea este permanent negativă și are valoarea asimptotică

$$\begin{aligned} c(\infty) &= \lim_{p \rightarrow 0} p C(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} (Y(p) - g_0) = \\ &= -\frac{1}{8} g_0 \tau (1 + 4m) = -g_0^2 l(\infty), \end{aligned} \quad (373')$$

în acord cu (157). Ținând seama de (373) rezultă că există și următoarea relație satisfăcută de rădăcinile ecuației transcendente (365)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{32}{\xi_s^4 (1 + m^2 \xi_s^2)} = 1 + 4m. \quad (374)$$

Pentru  $t \rightarrow 0$  se obține

$$c(t) = \int_0^t (g(t) - g_0) dt \approx -g_0 t = -|c(\infty)| \frac{t}{\tau_0}, \quad (375)$$

iar pentru  $t \rightarrow \infty$  se obține cu (373), (373') și (374)

$$c(t) \approx -|c(\infty)| \left( 1 - \frac{32}{(1+4m)\xi_1^4(1+m^2\xi_1^2)} e^{-\frac{32}{1+m^2\xi_1^2} \frac{t}{\tau}} \right), \quad (376)$$

sau, dacă  $m \ll 1$

$$c(t) \approx -|c(\infty)| (1 - 0,96 e^{-5,76 \frac{t}{\tau}}). \quad (376')$$

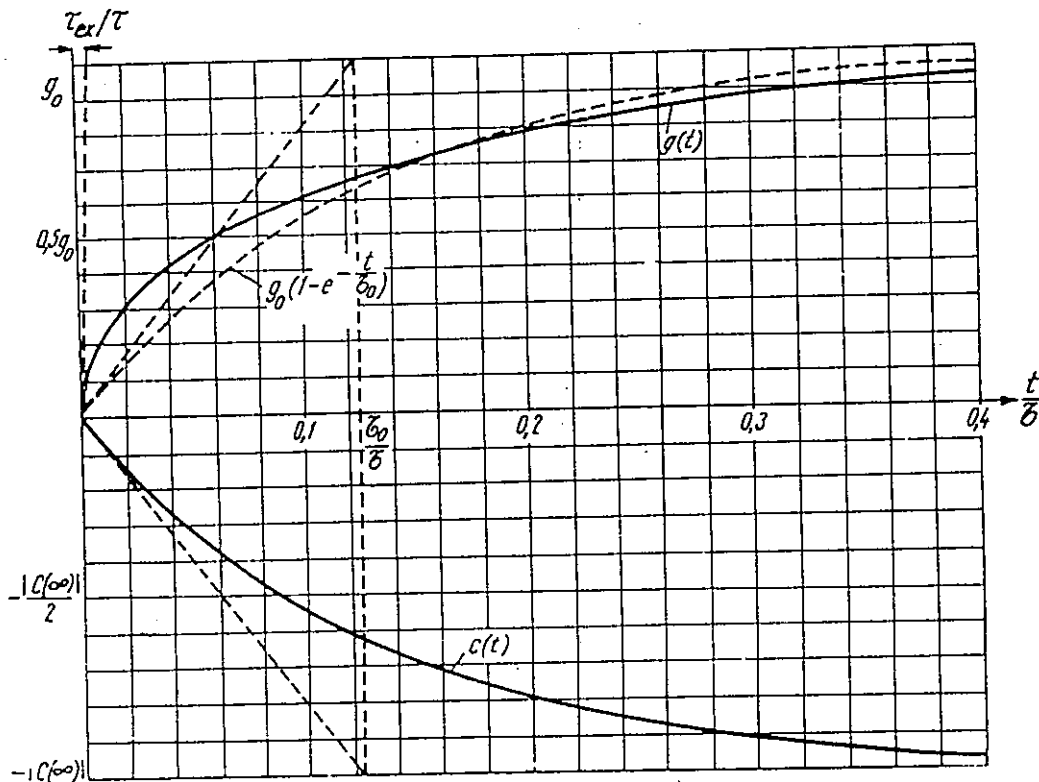


Fig. 13. — Conductanța și capacitatea tranzitorii ale unui element inductiv, avînd  $t_{int} = 25 t_{ext}$ .

Comparînd reprezentările grafice ale parametrilor tranzitorii ai unui element de circuit inductiv nefiliform (fig. 11 și 13) cu cele corespunzătoare unui element inductiv filiform (fig. 8) se constată abateri esențiale pentru  $\frac{t}{\tau} < 0,2$ . În particular, rezistența tranzitorie inițială a elementului nefiliform inductiv e infinită, iar inductivitatea tranzitorie inițială poate fi foarte mică dacă inductivitatea interioară e mult mai mare decît cea exterioară.

Din compararea alurii conductanțelor tranzitorii, care în acest caz coincid cu așa numitele admitanțe indiciale (curentul de răspuns la aplicarea unei tensiuni treaptă unitate), se observă că dacă inductivitatea



interioară e foarte mare, comportarea elementului inductiv nefiliform e diferită de aceea a elementului filiform care ar avea aceeași inductivitate în curent continuu, pentru valori oricât de mari ale timpului, constantele de timp ale expresiilor asimptotice (371) și (372) fiind diferite cu 38%.

#### 6.1. Element dipolar capacitiv neomogen

Ca exemplu de element capacitiv, studiat în regim evasistaționar, considerăm un strat de material imperfect izolant și neomogen din punctul de vedere al conductivității electrice, de exemplu un strat semiconductor cu impurificare dirijată, cuprins între două plăci plane, perfect conductoare (fig. 14). Vom admite ca model teoretic corespunzător un conden-

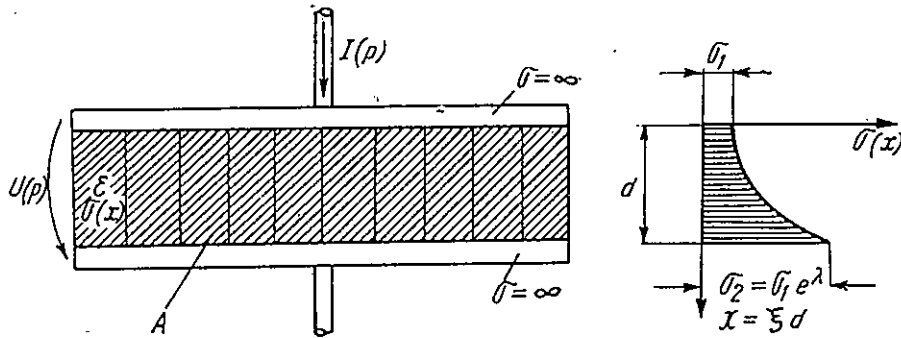


Fig. 14. — Element dipolar capacitiv cu izolant neomogen.

sator plan, cu pierderi, cu armături de arie  $A$  și dielectricul de grosime  $d$ , avînd permitivitatea  $\epsilon$  constantă, iar conductivitatea variabilă în lungul coordonatei  $x$  presupusă măsurată normal pe armături conform relației

$$\sigma(x) = \sigma_1 e^{\lambda \frac{x}{d}} = \sigma_1 e^{\lambda \xi} = \sigma_2 e^{-\lambda(1-\xi)} \quad (377)$$

Aici  $\xi = \frac{x}{d} \in [0,1]$  e valoarea relativă numerică, raportată la distanța  $d$  dintre armături, a coordonatei de poziție,  $\lambda$  e indicele de creștere exponențială a conductivității,  $\sigma_1$  e valoarea ei la  $x = 0$  ( $\xi = 0$ ), iar  $\sigma_2$  e valoarea ei la  $x = d$  ( $\xi = 1$ ). Neglijînd efectele de margine, mărimile de câmp depind numai de  $x = \xi d$  și liniile de câmp sînt normale pe planele armăturilor, iar suprafața de separație  $\Sigma$  e definită de armături și de marginea laterală a dielectricului. Din ecuația (199) rezultă pentru imaginea Laplace a intensității câmpului electric (cu sensul axei  $x$ ) expresia

$$E(x, p) = \frac{I(p)}{A[\sigma(x) + p\epsilon]} \quad (378)$$

Prin integrare se obține tensiunea dintre armături și se deduce impedanța operațională  $Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}$ , respectiv admitanța operațională,  $Y(p) = 1/Z(p)$ ,

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \frac{1}{pc_0\lambda} \ln \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p}. \quad (379)$$

Am notat cu  $c_0$  capacitatea electrostatică (calculată cu repartiția omogenă a cîmpului corespunzătoare cazului dielectricului perfect izolat,  $\sigma = 0$ ) a condensatorului și cu  $\tau_1$ , respectiv cu  $\tau_2$ , constantele de timp de relaxație corespunzătoare valorilor extreme  $\sigma_1 = \sigma(0)$  și  $\sigma_2 = \sigma(d)$  ale conductivității :

$$c_0 = \frac{\varepsilon A}{d}, \quad \tau_1 = \frac{\varepsilon}{\sigma_1}, \quad \tau_2 = \frac{\varepsilon}{\sigma_2} = \tau_1 e^{-\lambda} < \tau_1, \quad (380)$$

Prin ipoteză

$$\lambda = \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \ln \frac{\tau_1}{\tau_2} > 1. \quad (381)$$

Rezistența de curent continuu  $r_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Z(p)$  și conductanța de curent continuu  $g_0 = 1/r_0$ , rezultă

$$r_0 = \frac{1}{g_0} = \frac{d}{A} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2 \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} = \frac{1}{c_0} \frac{\tau_1 - \tau_2}{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}. \quad (382)$$

Cu (380) din (136), (138), (140) și (142) se obțin imaginile parametrilor tranzitorii ai acestui element :

$$R(p) = \frac{r_0}{(\tau_1 - \tau_2)p^2} \ln \frac{1 + p\tau_1}{1 + p\tau_2} = \frac{r_0}{(\tau_1 - \tau_2)p^2} \left[ \ln \frac{\tau_1}{\tau_2} - \ln \frac{1 + \frac{1}{\tau_2 p}}{1 + \frac{1}{\tau_1 p}} \right], \quad (383)$$

$$G(p) = c_0 \left[ \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{\ln \frac{1 + p\tau_1}{1 + p\tau_2}} - 1 \right] = c_0 \frac{\ln \frac{1 + \frac{1}{\tau_2 p}}{1 + \frac{1}{\tau_1 p}}}{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2} - \ln \frac{1 + \frac{1}{\tau_2 p}}{1 + \frac{1}{\tau_1 p}}}, \quad (384)$$

$$L(p) = \frac{r_0}{p^2} \left[ \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)p} \ln \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau_2 p} - 1 \right], \quad (385)$$

și

$$C(p) = c_0 \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{(\tau_1 - \tau_2)p^2} \left[ \frac{p(\tau_1 - \tau_2)}{\ln \frac{1 + p\tau_1}{1 + p\tau_2}} - 1 \right]. \quad (386)$$

Cu aceste imagini se obțin valorile limită

$$r(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p R(p) = 0, \quad (387)$$

$$r(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p R(p) = r_0, \quad (388)$$

$$g(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p G(p) = g_0 \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 \tau_2 \ln \frac{\tau_1}{\tau_2}} > g_0, \quad (389)$$

$$g(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p G(p) = g_0, \quad (390)$$

$$l(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p L(p) = 0, \quad (391)$$

$$l(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p L(p) = -r_0 \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} < 0, \quad (392)$$

$$c(0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p C(p) = c_0, \quad (393)$$

$$c(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p C(p) = c_0 \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} > c_0, \quad (394)$$

în acord cu proprietățile generale (154)–(157), (171) și (213).

Deoarece [11]

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{t} (e^{-at} - e^{-bt}) \right] = \ln \frac{p+b}{p+a} \quad (395)$$

originalul imaginii (383) se determină fără dificultăți și se obține rezistența tranzitorie

$$r(t) = r_0 \left[ 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + t \left( -\text{Ei} \left( -\frac{t}{\tau_1} \right) + \text{Ei} \left( -\frac{t}{\tau_2} \right) \right) \right] \right] \quad (396)$$

în care  $\text{Ei}(x)$  e funcțiunea exponențială integrală. Această rezistență tranzitorie crește monoton de la valoarea inițială nulă (387) la valoarea

finală de curent continuu  $r_0$  și are următoarele expresii (inițială, respectiv asimptotică) :

$$r(t) \approx r_0 \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{\tau_1 - \tau_2} t - \frac{t^2}{2\tau_1\tau_2} = \frac{1}{c_0} t - \frac{t^2}{2\tau_1\tau_2}, \quad (t \rightarrow 0), \quad (397)$$

$$r(t) \approx r_0 \left( 1 - \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_1}}}{t} + \frac{\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{t} \right), \quad (t \rightarrow \infty). \quad (398)$$

Cu (161) și (392) se calculează din (396) *inductivitatea tranzitorie* (negativă)

$$l(t) = - |l(\infty)| \left[ 1 + \frac{t^2 \left[ \text{Ei} \left( -\frac{t}{\tau_1} \right) - \text{Ei} \left( -\frac{t}{\tau_2} \right) \right] + t \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) - \left( \tau_1^2 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2^2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)}{\tau_1^2 - \tau_2^2} \right], \quad (399)$$

cu următoarele expresii inițială, respectiv asimptotică :

$$l(t) \approx - |l(\infty)| \left[ \frac{2}{\tau_1 + \tau_2} t - \frac{\ln \frac{\tau_1}{\tau_2}}{\tau_1^2 - \tau_2^2} t^2 \right] = - \left[ r_0 t - \frac{1}{c_0} \frac{t^2}{2} \right], \quad (t \rightarrow 0) \quad (400)$$

respectiv

$$l(t) \approx - |l(\infty)| \left[ 1 - \frac{2}{\tau_1^2 - \tau_2^2} \left[ \frac{\tau_1^3}{t} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2^3}{t} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \right], \quad (t \rightarrow \infty). \quad (401)$$

Prin dezvoltarea expresiilor (384) și (386) în serie de  $\frac{1}{p}$  se deduc expresiile aproximative ale conductanței tranzitorii și capacității tranzitorii, pentru  $t \rightarrow 0$

$$c(t) \approx c_0 \left[ 1 + \frac{g(0+) - g_0}{c_0} t - \frac{g(0+) r_0}{\tau_1 \tau_2} \left[ \frac{c(\infty)}{c_0} - 1 \right] \frac{t^2}{2} + \dots \right], \quad (402)$$

și

$$g(t) = g(0+) \left[ 1 - \frac{r_0 c_0}{\tau_1 \tau_2} \left[ \frac{c(\infty)}{c_0} - 1 \right] t + \dots \right]. \quad (403)$$

În fig. 15 sînt reprezentate curbele de variație ale mărimilor  $\frac{c(t)}{c(0+)}$ ,  $\frac{g(t)}{g(0+)}$ ,  $\frac{l(t)}{|l(\infty)|}$ ,  $\frac{r(t)}{r(\infty)}$  pentru elementul capacitiv studiat, ca funcțiune de timpul raportat la constanta de timp de relaxație  $\tau_1$ , cea mai mare, în cazul în  $\ln \frac{\tau_1}{\tau_2} = \lambda = 3$ .

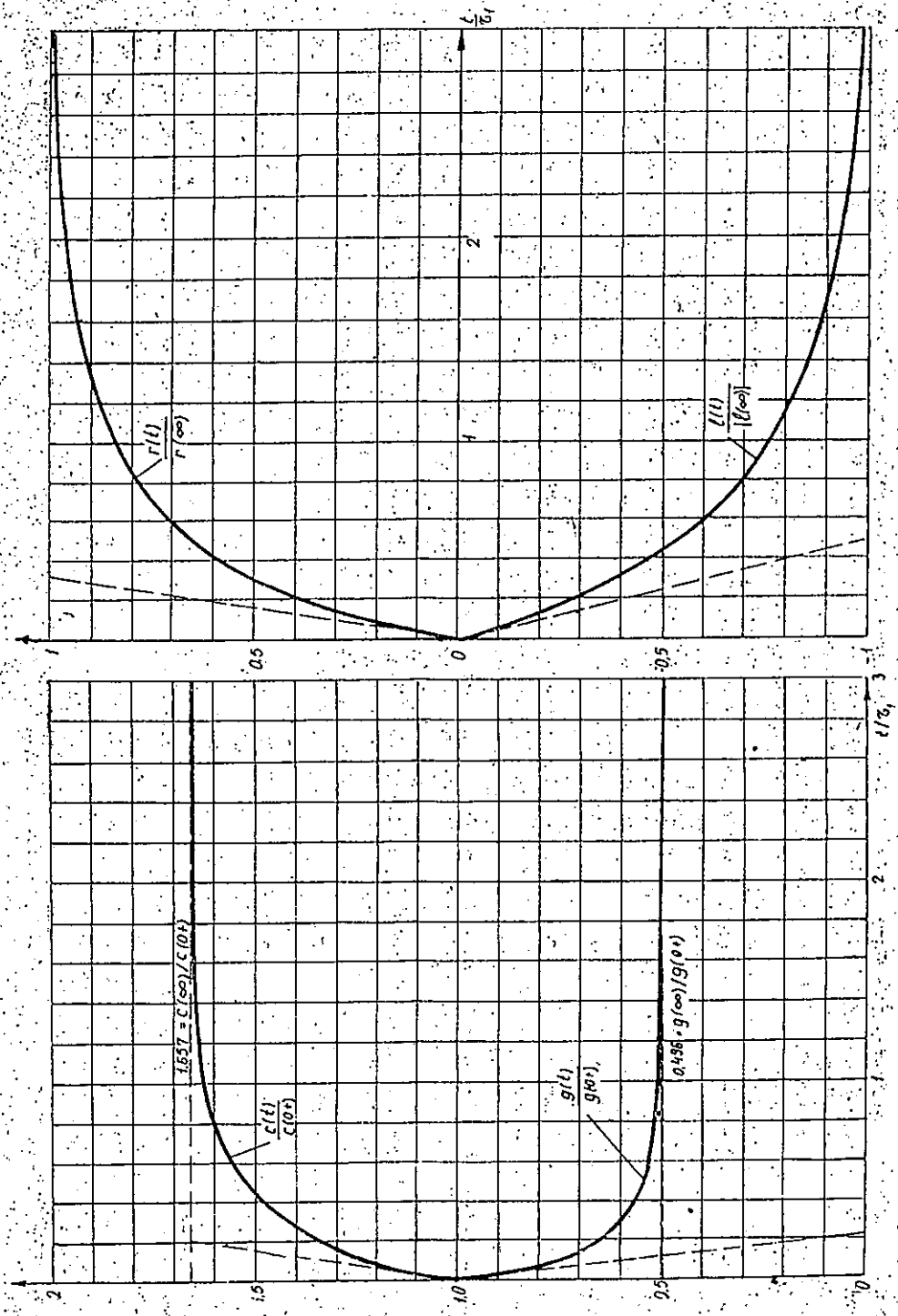


Fig. 15. — Parametrii tranzitorii ai unui element capacitiv cu izolan neomogen.

Se observă creșterea monotonă a capacității tranzitorii de la valoarea electrostatică  $c_0 = c(0+)$  la valoarea finală asimptotică  $c(\infty) = 1,657 c_0$  și scăderea monotonă a conductanței tranzitorii de la valoarea inițială  $g(0+)$  la valoarea finală de curent continuu  $g(\infty) = g_0 = 0,496 g(0+)$ . Pentru comparație s-a considerat variația rezistenței tranzitorii a unui circuit filiform ( $g, c$ )—paralel, avînd  $c = c_0$  și  $g = g_0 = \frac{1}{r_0}$  adică funcția

$$\frac{r(t)}{r_0} = 1 - e^{-\frac{t}{r_0 c_0}} = 1 - e^{-1,648 \frac{t}{\tau_1}} \quad (404)$$

care diferă sensibil de (397).

Curbele de variație a rezistenței tranzitorii și inductivității tranzitorii s-au determinat cu expresiile (396) și (399) utilizînd tabelele din [12]. Curbele de variație a capacității tranzitorii și conductanței tranzitorii s-au determinat cu aproximație, calculînd un număr mai mare de termeni ai seriilor (402) și (403), care sînt slab convergente și ținînd seama de valorile asimptotice ale mărimilor respective.

#### CONCLUZII

Principalele rezultate noi, stabilite în lucrarea de față, care reprezintă în principal o generalizare a teoriei circuitelor electrice lineare și cu parametri concentrați, la cazul cînd elementele acestor circuite prezintă pierderi suplimentare de putere în regim variabil — de exemplu, determinate de efectul pelicular în conductoare, sau de efectul de relaxație neomogen în dielectrice —, sînt următoarele:

1° Conceptul de *element de circuit electric* — ca parte a unui sistem electromagnetic a cărui interacțiune cu exteriorul o complet caracterizabilă prin valorile instantanee ale curenților și potențialelor bornelor de acces — se poate defini în condiții mult mai generale decît cele uzuale (caracter filiform, regim evasistaționar, neglijarea pierderilor suplimentare) cu ajutorul unei suprafețe de separație pe care sînt satisfăcute (practic, cu o anumită aproximație) condițiile de frontieră (24), (25) și (26). Soluțiile ecuațiilor cîmpului electromagnetic asociat elementului sînt univoc determinate de *condițiile la borne* (funcțiunile de timp care reprezintă mărimile date la borne — curenți sau potențiale) și de *condițiile inițiale de cîmp* (funcțiunile de punct care reprezintă repartițiile inițiale ale cîmpului magnetic și cîmpului electric în domeniul interior suprafeței de separație).

2° Spre deosebire de cazul elementelor de circuit filiforme, condițiile inițiale de cîmp, care intervin explicit și independent de condițiile la borne în determinarea regimului tranzitoriu al unui astfel de element, numit generic *nefiliform*, nu sînt reductibile la condiții inițiale definite exclusiv de valorile inițiale ale unor curenți sau ale unor tensiuni; însă teorema de superpoziție demonstrată în lucrare permite ca în soluții să se separe aditiv termenii determinați de condițiile inițiale de cîmp (din momentul  $t = 0 - \varepsilon$ ), de termenii determinați de condițiile la borne (formulate pen-

tru  $t > 0$ ). Un exemplu de studiu al influenței condițiilor inițiale de câmp e dat în [9].

3° În condiții inițiale numite *de repaus*, caracterizate prin valori identice nule ale funcțiilor de punct ce definesc repartițiile câmpurilor electrice și magnetice din momentul  $t = 0 - \varepsilon$ , s-au stabilit formele generale ale relațiilor dintre valorile instantanee ale tensiunilor (potențialelor) bornelor și curenți; ele sînt ecuații integro-diferențiale în care intervin integrale de convoluție și sînt ireductibile la sisteme de ecuații diferențiale. Elementele de circuit lineare dar nefiliforme nu mai pot fi deci caracterizate prin parametrii constanți, caracteristici elementelor filiforme: rezistență, inductivitate, conductanță și capacitate.

În particular, repartiția spațială a cîmpului magnetic al unei bobine variază în timp ca urmare a efectului pelicular și a curenților turbionari și, din acest motiv, raportul dintre fluxul magnetic instantaneu și curentul instantaneu care îl produce nu este constant și nu constituie o caracteristică a elementului, deoarece depinde și de regimul de funcționare, adică de modul de variație în timp a curentului injectat din exterior. De asemenea, repartiția spațială a cîmpului electric al unui condensator cu pierderi și dielectric neomogen variază în timp ca urmare a efectului de relaxație și, din acest motiv, raportul dintre sarcina instantanee a unei armături și tensiunea instantanee aplicată nu este constant și nu constituie o caracteristică a condensatorului, deoarece depinde și de regimul lui de funcționare, adică de modul de variație în timp a tensiunii aplicate. Nici rapoartele dintre tensiunile instantanee aplicate și curenții instantanei corespunzător, definite de unii autori drept impedanțe instantanee [5], nu sînt caracteristici ale elementelor de circuit, deoarece depind și de regimul de funcționare.

4° Caracterizarea intrinsecă, independentă de regimul de funcționare, a unui element de circuit nefiliform se poate face în mai multe moduri, cu ajutorul unor *parametri tranzitorii* care sînt funcțiuni de timp, însă determinate exclusiv de structura interioară a elementului considerat. Acești parametri tranzitorii au fost astfel definiți în lucrare, încît să reprezinte generalizarea firească a parametrilor constanți ai circuitelor filiforme, la care să se reducă în cazul acestor din urmă circuite, și anume, s-au definit pentru orice element de circuit o *rezistență tranzitorie*  $r(t)$  și o *conductanță tranzitorie*  $g(t)$ , iar pentru elementele avînd o rezistență de curent continuu *finită* (chiar și nulă), o *inductivitate tranzitorie*  $l(t)$ , respectiv pentru elementele avînd o conductanță de curent continuu *finită* (chiar și nulă) o *capacitate tranzitorie*  $c(t)$ . Se arată că, folosind acești parametri tranzitorii, ecuația care exprimă tensiunea la bornele unui element de circuit dipolar în funcțiune de curent include o integrală de convoluție al cărei nucleu e rezistența tranzitorie sau derivata în raport cu timpul a inductivității tranzitorii, iar ecuația care exprimă curentul elementului în funcțiune de tensiunea aplicată la borne include o integrală de convoluție al cărei nucleu e conductanța tranzitorie sau derivata în raport cu timpul a capacității tranzitorii.

5° Parametrii tranzitorii astfel introduși prezintă anumite proprietăți remarcabile. Rezistența tranzitorie, respectiv conductanța tranzitorie tind asimptotic, la elemente disipative, către rezistența, respectiv conductanța de curent continuu. Inductivitatea tranzitorie a unui element inductiv

(studiat în regim cuasistaționar) este o funcție monoton crescătoare, a cărei valoare inițială e egală cu inductivitatea exterioară (calculată cu conductivitate infinită a conductoarelor) și a cărei valoare asimptotică finală e inductivitatea de curent continuu (interioară plus exterioară). Capacitatea tranzitorie a elementului inductiv e nulă în momentul inițial și negativă în orice alt moment ulterior. Capacitatea tranzitorie a unui element capacitiv în regim cuasistaționar e o funcțiune monoton crescătoare, a cărei valoare inițială e egală cu capacitatea electrostatică, calculată cu conductivitate nulă a dielectricului, și a cărei valoare asimptotică finală e egală cu capacitatea corespunzătoare repartiției de regim staționar a câmpului electric în dielectricul slab conductor, considerat. Inductivitatea tranzitorie a elementului capacitiv e nulă în momentul inițial și negativă în orice alt moment ulterior.

6° Determinarea parametrilor tranzitorii, necesită fie rezolvarea unei probleme de câmp electromagnetic în regim variabil (cuasistaționar sau chiar nestaționar), fie efectuarea unor măsurători în regimuri de alimentare particulare, în care acești parametri tranzitorii coincid cu funcțiunile de răspuns tranzitoriu corespunzătoare. Cei patru parametri tranzitorii introduși nefiind independenți între ei, trebuie determinat în principiu unul singur dintre ei, pe una din căile de mai sus, ceilalți trei putând fi deduși apoi din expresia primului prin derivări, prin integrări sau prin rezolvarea unor ecuații integrale cu nucleu simetric, stabilite în lucrare.

7° Cu ajutorul parametrilor tranzitorii se pot formula, pentru o rețea electrică liniară cu elemente nefiliforme, *ecuații integro-diferențiale care generalizează ecuațiile lui Kirchhoff*. Forma operațională a acestor ecuații, respectiv forma lor în complex în regim armonic permanent, coincide cu forma operațională, respectiv complexă a ecuațiilor lui Kirchhoff, — cu impedanțe care depind prin funcții transcendente de variabila complexă respectivă, în primul caz numai dacă se consideră condiții inițiale de repaus în întreaga rețea.

8° Elementele nefiliforme de circuit nu admit în general scheme echivalente alcătuite dintr-un număr finit de elemente filiforme și cu parametri concentrați, nici măcar în regim permanent de frecvență dată; studiul lor exact, în valori instantanee, impune deci introducerea parametrilor tranzitorii.

9° Exemplele de calcul de parametri tranzitorii, pentru regimul cuasistaționar, ilustrează proprietățile generale, demonstrate; ele pun în evidență faptul că neglijarea efectelor care au dus la introducerea parametrilor tranzitorii poate atrage erori grosolane — nu numai pentru valori mici ale timpului trecut de la stabilirea condițiilor la borne, ci și în privința comportării asimptotice a funcțiunilor de răspuns tranzitoriu, necesare în practică — și că studiul exact, cu ajutorul parametrilor tranzitorii, permite să se aprecieze și condițiile în care, cu o aproximație corespunzătoare scopului urmărit, se poate considera o schemă echivalentă aproximativă, cu parametri constanți, pentru elementul de circuit considerat.

Eficacitatea practică a utilizării conceptelor noi, introduse, va putea fi apreciată mai bine după dezvoltarea unui număr suficient de aplicații.

Deoarece teoria dezvoltată permite ca în anumite condiții să se înlocuiască problemele de câmp electromagnetic privitoare la un ansamblu



de elemente nefiliforme cu problema integrării unui sistem de ecuații integro-diferențiale, ea deschide posibilitatea utilizării calculatoarelor analogice pentru o clasă de probleme încă neatacată.

Rezultatele lucrării sînt aplicabile în studiul tuturor proceselor tranzitorii din numeroase elemente ale instalațiilor electrice și sistemelor energetice, cum sînt : comportarea transformatoarelor la unde de șoc, regimurile de scurt-circuit ale mașinilor electrice, regimurile tranzitorii ale dispozitivelor de măsură și control, propagarea undelor pe linii electrice lungi, regimurile de șoc ale unor aparate electrice etc., în limita în care se pot neglija efectele de nelinearitate — și cu aceeași limitare în studiul prin linearizare al elementelor electronice de circuit și în special al elementelor integrate.

Lucrarea deschide calea unor noi cercetări teoretice, cum sînt cele privitoare la metodele de determinare a parametrilor tranzitorii prin integrarea ecuațiilor cîmpului, la extinderea teoriei la elemente cu părți mobile, la demonstrarea unor noi clase de proprietăți generale ale parametrilor tranzitorii, la metodele de rezolvare exactă sau numerică a ecuațiilor integrale care apar acum în studiul circuitelor, sau cele privitoare la metodele de aproximare a parametrilor tranzitorii.

Primit la redacție la 14 iunie 1966

#### BIBLIOGRAFIE

1. R. RĂDULEȚ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. III, IV, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1954.
2. K. W. WAGNER, *Operatorenrechnung und Laplace Transformation nebst Anwendungen in Physik und Technik*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1950 (ed. II).
3. A. AVRAȘCU, *Efectul pelicular tranzitoriu*, Bul. Șt. Acad. R.P.R., Șt. tehn. chim., IV, 3-4, 225-239 (1952).
4. N. W. MC LACHLAN, *Complex variable theory and transform calculus with technical applications*, Univ. Press, Cambridge, 1953 (ed. II).
5. SH. HAYASHI, *Surges on transmission systems*, Denki-shoin, Kyoto, 1955.
6. R. RĂDULEȚ, *Schimbul de energie electromagnetică pe la bornele comune a doi dipoli electrice*, Comunicările Academiei R.P.R., IV, 6, 779-786 (1956).
7. G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhäuser — Basel 1950, vol. I.
8. A. TIMOTIN, *Unicitatea soluțiilor și calculul puterii în cîmpul electromagnetic cvasistationar al unui sistem de conductoare paralele*, Șt. cerc. Energ. Electr. — sub tipar.
9. R. RĂDULEȚ, A. TIMOTIN, A. ȚUGULEA, *O teorie generală a parametrilor lineici tranzitorii ai liniilor electrice lungi în prezența solului*, Șt. cerc. energ. electr., 16, 3, 417-449 (1966).
10. G. FODOR, *Laplace Transforms in Engineering*, Akademiai Kiadó, Budapesta, 1965.
11. В. А. ДИТКИН, П. И. КУЗНЕЦОВ, *Справочник по операционному исчислению*, Госстехтеориздат, Москва, 1951.
12. E. JAHNKE, D. EMDE, *Funktionen Tafeln mit Formeln und Kurven*, Dover Publication, New York, 1945.