MODELAREA DISPOZITIVELOR ELECTROMAGNETICE

Daniel Ioan

Cuprins

Capitolul 0

Introducere

0.1 Obiectul disciplinei

Modelarea şi proiectarea asistată de calculator a dispozitivelor electromagnetice reprezintă o disciplină modernă cu un puternic caracter interdisciplinar, bazată pe cele mai noi cunoştinţe din tehnologia informaticii, electromagnetism şi matematică.

Scopul principal al acestei discipline îl constituie analiza cu ajutorul calculatorului a unor dispozitive electrice şi magnetice cu cele mai diverse utilizări, în a căror funcţionare câmpul electromagnetic joacă un rol esenţial. Scopul acestei analize este de a permite stabilirea comportării lor (inclusiv a solicitărilor la care ele sunt supuse), atât în regimuri normale cât şi în regimuri anormale de funcţionare. În acest fel calculatorul se foloseşte în mod profesional, ca unealtă de lucru în activitatea de inginerie electrică. Se urmăreşte atât analiza acestor dispozitive în vederea caracterizării lor cât şi (re)proiectarea lor în vederea optimizării diferitelor caracteristici tehnice sau economice.

Gama de dispozitive care pot fi modelate este extrem de diversă şi acoperă atât cazuri din domeniul curenţilor tari (electromagnetică, acţionări de putere, electrochimie, electrotermie) cât şi aplicaţii în domeniul curenţilor slabi (electronică, telecomunicaţii, transmisia şi prelucrarea semnalelor). În continuare sunt prezentate doar câteva din categoriile de dispozitive electromagnetice, care sunt sau pot fi modelate cu calculatorul:

- maşini electrice clasice şi speciale, de la micromaşini până la generatoarele de mare putere;
- aparate electrice şi de acţionare: microrelee, electromagneţi, contactoare, relee;
- linii de transmisie atât a semnalelor electrice cât şi a energiei electrice;
- elemente de circuit: condensatoare, rezistoare, bobine şi transformatoare cu aplicaţii în electronică, energetică, instalaţii electrice sau metrologice;
- senzori şi aparate de măsură: magnetoelectrice, electrodinamice, cu inducţie, instalaţii de defectoscopie nedistructivă cu curenţi turbionari ;
- instalaţii electrochimice, pentru acoperiri galvanice şi de producţie sau rafinare a metalelor Al, Cu, Ag, etc.;

- dispozitive de deflexie sau accelerare a fluxurilor de particule cu aplicaţii casnice (de exemplu TV) sau industriale şi ştiinţifice (acceleratoare de particule);
- instalaţii de încălzire electrică directă sau prin curenţi turbionari;
- instalaţii de radio frecvenţă: antene, ghiduri de undă, cavităţi rezonante, cuptoare cu microunde;
- instalaţie de inginerie biomedicală şi studiul fenomenelor bioelectrice.

Lista prezentată nu este exhaustivă ci doar exemplificatoare. Este de remarcat că practic toate domeniile ingineriei electrice şi în special cele avansate sunt puternic influenţate de progresele în domeniul modelării şi proiectării asistată de calculator.

0.2 Importanţa disciplinei

Utilizarea calculatorului în activitatea de inginerie electrică prezintă importanţă din mai multe puncte de vedere.

Un prim aspect îl reprezintă faptul că ea obligă la înţelegerea exactă a fenomenelor esenţiale în funcţionarea unui dispozitiv şi permite analiza influenţei acestor fenomene asupra caracteristicilor dispozitivelor.

Un alt aspect cu importante implicaţii financiar-economice îl reprezintă faptul că proiectarea şi verificarea cu ajutorul calculatorului a proiectului unui dispozitiv nou permite eliminarea execuţiei prototipurilor, care în multe cazuri este o operaţie costisitoare şi consumatoare de timp.

Un alt mod uzual de folosire a calculatorului în ingineria electrică se referă la reproiectarea şi optimizarea unor dispozitive aflate deja în producţia de serie, în vederea îmbunătăţirii performanţelor sau extinderii domeniului de aplicaţie. Se constată că societăţile care deţin controlul pieţelor de bunuri şi servicii tehnice folosesc intensiv calculatorul în activitatea de proiectare/dezvoltare, acesta fiind unul din secretele faptului că reuşesc să fie competitive şi flexibile. Un alt aspect care relevă importanţa acestei discipline îl constituie faptul că fabricaţia controlată de calculator (**CIM - Computer Integrated Manufacturing**) capătă o pondere tot mai mare. Acesta obligă ca etapa premergătoare de proiectare asistată (**CAD - Computer Aided Design**) să fie şi ea automatizată tot mai mult. În acest context activitatea de cercetare/dezvoltare (**CAE - Computer Aided Enginering**) este normal să evolueze tot mai mult în sensul utilizării intensive a sistemelor de calcul. În acest fel se obţine un lanţ CAE/CAD/CIM în care intervenţia manuală între etape este eliminată (prin transmiterea informaţiilor în format electronic), rezultatele obţinute fiind de maximă încredere iar performanţele optimizate.

0.3 Formularea problemelor

Modelarea asistată de calculator a dispozitivelor electromagnetice presupune în esenţă rezolvarea unei probleme de analiză a câmpului electromagnetic, numită **problemă directă**. Datele acestei probleme fac parte din trei mari categorii:

- **date geometrice**, care conţin toate informaţiile referitoare la formele şi dimensiunile părţilor componente ale dispozitivului şi felul în care acestea sunt asamblate;
- **caracteristicile de material**, care conţin proprietăţile şi comportarea materialelor din care sunt realizate părţile componente ale dispozitivului;
- **sursele de câmp**, care conţin datele referitoare la excitaţiile (cauzele) câmpului electromagnetic din dispozitiv, atât cele aflate în interiorul dispozitivului cât şi cele plasate în exteriorul acestuia.

Necunoscutele problemei directe se pot clasifica în trei mari categorii:

- **mărimile caracteristice câmpului electromagnetic**, ce caracterizează starea dispozitivului şi care pot avea un caracter local (cum sunt intensităţile şi inducţiile electrice şi respectiv magnetice $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, densitatea de curent $\mathbf{J}$ sau de sarcină ρ, densitatea de putere transferată p sau de energie w) sau un caracter global (cum sunt fluxurile şi tensiunile electrice şi respectiv magnetice ψ, u, φ, u_m, curentul i, sarcina electrică q sau puterea transferată P sau energia acumulată W);
- **mărimile caracteristice dispozitivului**, precum rezistenţa R, inductivitatea L, capacitatea C sau funcţia de transfer $Y(s)$, respectiv caracteristici de tipul $\varphi(i)$ la dispozitivele neliniare;
- **mărimile caracteristice efectelor câmpului**, precum forţa electromagnetică $\mathbf{F}$, viteza de mişcare $\mathbf{v}$ sub acţiunea forţei electromagnetice, temperatura θ sau masa transferată prin electroliză.

În proiectare interesează în schimb **problema inversă** asociată sintezei dispozitivului sau a câmpului. O astfel de problemă are ca date caracteristicile dorite, ca de exemplu: rezistenţa R, capacitatea C, inductivitatea L, puterea P, tesiunea de scurtcircuit sau o anumită dependenţă de frecvenţă sau de tip $\varphi(i)$, etc.

De această dată necunoscutele sunt:

- **de natură geometrică**, forma şi dimensiunile (inclusiv toleranţele) părţilor componente (eventual cu preluarea unor subansamble din standardele în vigoare);
- **tipurile de materiale** ce trebuie folosite în realizarea dispozitivului (de preferinţă preluate din standardele existente);
- **excitaţiile** (sursele de câmp) la care este supus dispozitivul, dacă este cazul (eventual valorile limită ale acestor excitaţii, în regimul normal de funcţionare).

Se constată că problema proiectării presupune o modelare îngrijită în vederea validării proiectului. În mod uzual problema inversă se rezolvă prin modelări succesive ale unor dispozitive, pornind de la un model iniţial de referinţă al unui dispozitiv existent sau imaginar. Acesta este motivul pentru care în continuare este acordată o atenţie deosebită, mai ales problemei directe. În faza actuală a cunoştinţelor tehnico-ştiinţifice rezolvarea automată a problemei inverse generate este încă un deziderat.

0.4 Etapele rezolvării problemei directe

Analiza asistată de calculator a unui dispozitiv electromagnetic nu este un proces integral automatizabil. Cu toate ca pachetele de programe pentru analiza numerică a câmpului electromagnetic oferă o mare bogăţie de funcţii, ele reprezintă totuşi doar o unealtă în activitatea de inginerie, urmând ca analistul să joace un rol central în activitatea de modelare.

Pentru a putea fi rezolvată cu ajutorul calculatorului o problemă trebuie descrisă în limbajul pe care sistemul de calcul îl înţelege. Trecerea de la dispozitivul electromagnetic real sau imaginar la descrierea sa pentru calculator presupune parcurgerea a trei etape preliminare (fig. 1) extrem de importante în analiză, şi anume:

- **Modelarea fizică**, în care sunt identificate fenomenele fizice esenţiale în funcţionarea dispozitivului; sunt neglijate în mod explicit cele neimportante şi sunt identificate mărimile fizice caracteristice fenomenelor esenţiale, cu această ocazie se stabileşte regimul câmpului electromagnetic care va fi considerat în analiza dispozitivului şi se fac aproximările şi idealizările de natură geometrică, temporală, de material sau ale surselor de câmp;
- **Modelarea matematică**, în care sunt scrise ecuaţiile ce descriu fenomenele esenţiale şi sunt identificate: structurile matematice prin care se reprezintă mărimile fizice, şi care sunt în fond spaţii algebrice şi/sau topologice (de exemplu: scalarii - elemente ale corpului numerelor reale sau complexe; spaţiile vectoriale ale vectorilor sau tensorilor), dar şi domeniile de definiţie şi codomeniile aplicaţiilor (funcţii sau operatori ce intervin în ecuaţii). Ideal, modelarea matematică ar trebui încheiată cu demonstrarea unei teoreme care să garanteze buna formularea a problemei directe şi care să asigure unicitatea, existenţa şi stabilitatea soluţiei (respectiv caracterul injectiv, surjectiv şi continuu faţă de date al operatorului asociat problemei). Din acest motiv, uneori trebuie corectat modelul fizic astfel încât el să genereze o problemă matematică bine formulată. După ce a fost formulată în mod corect, problema matematică poate fi rezolvată, iar dacă aceasta admite soluţie analitică se recomandă cu tărie determinarea şi evaluarea numerică a acestei soluţii. Dacă nu, se recomandă realizarea unor idealizări suplimentare, până când problema se simplifică, astfel încât să admită soluţie analitică. Chiar dacă modelul fizic devine grosier, existenţa unei soluţii analitice de referinţă este de mare folos în validarea soluţiei obţinute prin modelare numerică;
- **Modelarea numerică**, în care se urmăreşte discretizarea problemei în vederea rezolvării ei cu resurse finite de calcul (timp finit şi memorie necesară finită), ceea ce presupune aproximarea spaţiilor continue de funcţii care descriu variaţiile spaţio-temporale ale mărimilor fizice prin spaţii discrete, finit dimensionale precum şi discretizarea operatorilor care intervin în ecuaţiile câmpului (această ultimă discretizare este efectuată de obicei în mod automat, fiind incorporată în programul de calcul).

După etapa de modelare numerică problema directă ajunge într-o formă ce poate fi descrisă **programului de calcul**. Folosind algoritmii şi structurile de date asociate (care în majoritatea cazurilor sunt invizibile pentru analist) acestea generează o soluţie numerică a problemei directe.

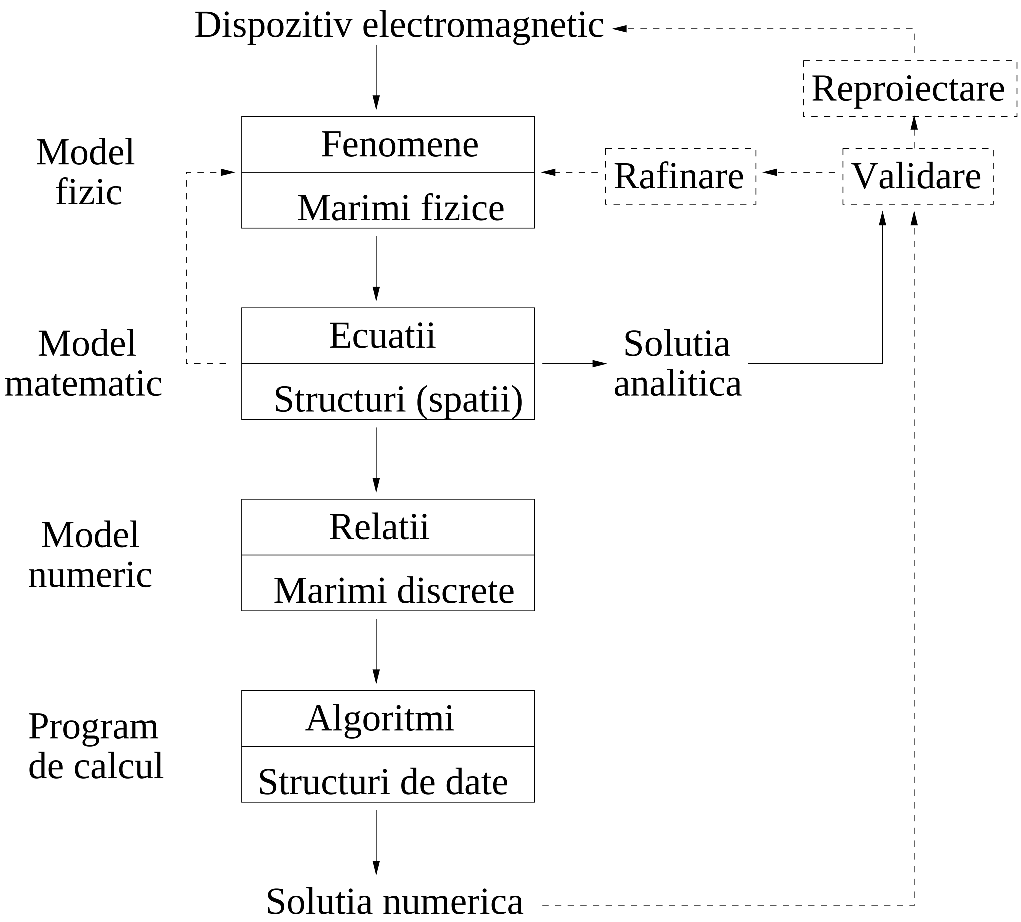

Figura 1: Etapele analizei unui dispozitiv

Prin obţinerea unei prime soluţii numerice procesul de analiză nu este încheiat, deoarece aceasta trebuie validată. Cea mai puternică metodă de **validare** constă în comparaţia cu datele măsurate experimental, dar în majoritatea cazurilor acestea din urmă nu sunt disponibile. În aceste condiţii, o metodă standard de validare constă în comparaţia cu soluţia analitică, cel puţin pentru un model rudimentar fizic al dispozitivului analizat. Alte tehnici de validare au la bază rafinarea modelului fizic (prin luarea în considerare a unor efecte considerate niţial secundare, dar care pot avea efect asupra funcţionării dispozitivului), utilizarea unui model matematic alternativ (de exemplu bazat pe ecuaţii integrale în locul ecuaţiilor diferenţiale), rafinarea modelului numeric prin mărirea dimensiunii spaţiului discret şi respectiv folosirea unui alt program de calcul în vederea rezolvării aceluiaşi model numeric. Folosind aceste tehnici, nu numai că soluţia numerică are un grad sporit de credibilitate, dar se poate asigura şi un control asupra erorilor de aproximare şi idealizare generate de fiecare etapă de modelare.

Reluarea succesivă a etapelor de analiză descrise anterior reprezintă metoda cea mai eficientă de rafinare a soluţiei numerice, până aceasta este satisfăcătoare din punct de vedere ingineresc. Acest proces iterativ, dar controlat după alte criterii este aplicat şi în cazul (re)proiectării sau optimizării unui dispozitiv.

Capitolul 1

Mărimile fizice caracteristice

După cum s-a menţionat anterior un model fizic al unui dispozitiv este bazat pe identificarea fenomenelor fizice esenţiale în funcţionarea dispozitivului şi pe mărimile fizice care caracterizează cantitativ starea dispozitivului şi procesele care au loc în acesta.

Mărimile ce caracterizează starea dispozitivului se pot clasifica în următoarele trei categorii:

- mărimile caracteristice câmpului electromagnetic;
- mărimile caracteristice corpurilor;
- mărimile ce caracterizează efectele câmpului electromagnetic.

1.1 Mărimile câmpului electromagnetic

Câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele **mărimi fizice locale**:

- $\mathbf{E}$ – intensitatea câmpului electric [V/m];
- $\mathbf{D}$ – inducţia electrică [C/m^2];
- $\mathbf{B}$ – inducţia magnetică [T];
- $\mathbf{H}$ – intensitatea câmpului magnetic [A/m],

şi de următoarele **mărimi globale** corespondente, obtinute prin integrarea marimilor locale:

- $u = \int_C \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{r}$ – tensiunea electrică de-a lungl curbei C [V];
- $\psi = \int_S \mathbf{D} \mathrm{d}\mathbf{A}$ – fluxul electric pe suprafata S [C];
- $\phi = \int_S \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{A}$ – fluxul magnetic pe suprafata S [Wb];
- $u_m = \int_C \mathbf{H} \mathrm{d}\mathbf{r}$ – tensiunea magnetică de-a lungl curbei C [A].

Se constată că intensităţile câmpului se integrează pe curbe (C) şi dau naştere tensiunilor iar inducţiile se integrează pe suprafeţe şi dau naştere fluxurilor. Atât curbele cât şi suprafeţele trebuie orientate (de obicei în mod convenţional), pentru a permite determinarea univocă a mărimilor globale. Se adoptă următoarele convenţii pentru semnele de referinţă: suprafeţele închise sunt orientate de la interior spre exterior iar cele deschise sunt orientate conform regulii burghiului drept faţă de curbele închise pe care se sprijină. Mărimile locale au un caracter vectorial tridimensional iar cele globale un caracter scalar.

Mărimile locale au avantajul că permit caracaterizarea completă a câmpului, dar dezavantajul că necesită o cantitate foarte mare de informaţie (în fiecare punct din spaţiu şi în fiecare moment de timp este necesară cunoaşterea celor patru vectori tridimensionali **E**, **D**, **B** şi **H**, deci a 12 valori scalare).

Mărimile globale dau o informaţie sintetică asupra comportării câmpului pe o mulţime de puncte, fiind mult mai potrivite pentru caracterizarea inginerească (sunt mai simplu de măsurat şi comunicat, necesitând o cantitate mult mai mică de informaţie decât cele locale).

Din păcate, cunoaşterea valorii unei mărimi globale nu permite determinarea mărimii locale asociate (distribuţia câmpului pe curba sau suprafaţa respectivă) ci numai a valorii medii a unei anumite componente, şi anume:

- $E_{tmed} = u/l_C$ – componenta tangenţială medie a intensităţii câmpului electric;
- $D_{nmed} = \psi/A_s$ – componenta normală medie a inducţiei magnetice;
- $B_{nmed} = \phi/A_s$ – componenta normală medie a inducţiei magnetice;
- $H_{tmed} = u_m/l_C$ – componenta tangenţială medie a intensităţii câmpului magnetic,

în care l_C este lungimea curbei C iar A_S este aria suprafeţei S.

O metodă intuitivă de reprezentare a câmpului electromagnetic o cosntituie spectrul acestuia. Fiecare componentă a câmpului electromagnetic: **E**, **D**, **B** şi **H** are câte un spectru asociat, care este alcătuit dintr-o mulţime de curbe orientate (linii de câmp), la care vectorii **E**, **D**, **B** şi respectiv **H** sunt tangenţiali în fiecare punct (figura 1.1).

1.2 Mărimile caracteristice ale corpurilor

Corpurile în interacţiunea lor cu câmpul electromagnetic îşi pot modifica starea. Pentru a caracteriza cantitativ aceste modificări se utilizează următoarele **mărimi locale asociate corpurilor**:

- ρ – densitatea de sarcină $[C/m^3]$;
- **J** – densitatea de curent $[A/m^2]$;
- **P** – polarizaţia $[C/m^2]$;
- **M** – magnetizaţia $[A/m]$,

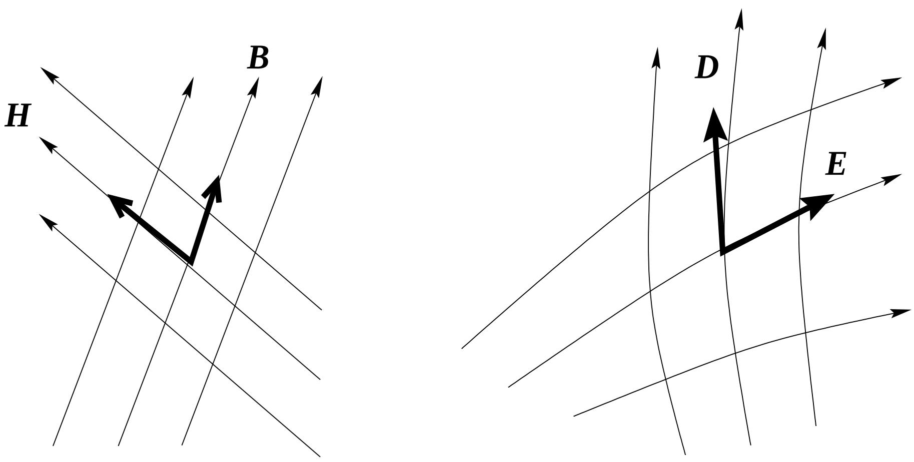

Figura 1.1: Spectrele câmpului electromagnetic

şi următoarle **mărimi globale asociate corpurilor** şi obţinute prin integrarea mărimilor locale:

- $q = \int_D \rho \mathrm{d}v$ – sarcina electrică a domeniului D $[C]$;
- $i = \int_S \mathbf{J} \mathrm{d}\mathbf{A}$ – curentul electric ce străbate suprafaţa S $[A]$;
- $\mathbf{p} = \int_D \mathbf{P} \mathrm{d}v$ – momentul electric al domeniului D $[Cm]$;
- $= \int_D \mathbf{M} \mathrm{d}v$ – momentul magnetic al domeniului D $[Am^2]$.

Cu excepţia curentului electric, celelalte mărimi globale caracteristice corpurilor se calculează prin integrare pe domeniul corpului. Curentul electric este de fapt fluxul densităţii de curent, deci este o mărime asociată unei suprafeţe S, care secţionează corpul. Cunoaşterea mărimilor globale permite determinarea următoarelor valori medi ale mărimilor locale:

- $\rho_{med} = q/V$ – densitatea medie de sarcină pe volumul V;
- $J_{nmed} = i/A_s$ – valoarea medie a componentei normale a densităţii de curent de pe suprafaţa S;
- $\mathbf{P}_{med} = \mathbf{p}/V$ – polarizaţia medie;
- $\mathbf{M}_{med} = /V$ – magnetizaţia medie,

în care V este volumul corpului (domeniului D).

Mărimile locale permit caracterizarea completă iar cele globale doar caracterizarea sintetică (în medie) a următoarelor stări:

- **starea de electrizare** a corpurilor (ρ, q) – respectiv excesul local respectiv global al numărului de protoni faţă de numărului de electroni dintr-un corp;

- **starea electrocinetică** ($\mathbf{J}$, i) – deplasarea după o direcţie privilegiată (suprapusă peste agitaţia termică) a purtătorilor liberi de sarcină (electroni şi/sau ioni) din interiorul corpului,
- starea de polarizare ($\mathbf{P}$, $\mathbf{p}$) – orientarea după o direcţie privilegiată a moleculelor polare (la care centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative) ale corpului;
- **starea de magnetizare** ($\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$) – orientarea după o direcţie privilegiată a spinilor (momentelor magnetice) microparticulelor care alcătuiesc corpul.

1.3 Mărimile caracteristice efectelor câmpului

Pentru a caracteriza **efectele locale ale câmpului electromagnetic** se utilizează următoarele mărimi prinicipale:

- p – densitatea de putere $[W/m^3]$;
- $\overline{\delta}$ – densitatea fluxului de masă $[kg/m^2s]$;
- $\mathbf{f}$ – densitatea de forţă $[N/m^3]$;
- $\overline{\overline{T}}$ – tensorul tensiunilor mecanice $[N/m^2]$,

şi respectiv următoarele **mărimi globale ale efectelor câmpului**, obţinute prin integrarea celor locale:

- $P = \int_D p\mathrm{d}v$ – puterea trasferată de câmp corpurilor din domeniul D $[W]$;
- $Q_m = \int_S \overline{\delta}\mathrm{d}\mathbf{A}$ – debitul masic transferat prin suprafaţa S $[kg/s]$;
- $\mathbf{F} = \int_D \mathbf{f}\mathrm{d}v = \int_\Sigma \overline{\overline{T}}\mathrm{d}\mathbf{A}$ – forţa exercitată asupra domeniului D cu $\Sigma = \partial D[N]$;
- $\mathbf{C} = \int_D \mathbf{r} \times \mathbf{f}\mathrm{d}v$ – cuplul forţelor ce acţionează asupra domeniului D $[Nm]$.

Prin integrarea în timp a mărimilor globale se obţin următoarele **mărimi de proces**:

- $W = \int_{t_1}^{t_2} P\mathrm{d}t$ – energia transferată corpurilor din domeniul D în intervalul (t_1, t_2) $[J]$;
$$(t - 314, t - 321)$$
- $m = \int_{t_1}^{t_2} Q_m\mathrm{d}t$ – masa transferată prin suprafaţa S pe intervalul de timp (t_1, t_2) $[kg]$;
- $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathrm{d}t$ – impulsul forţei în intervalul (t_1, t_2) $[Ns]$.

Mărimile prezentate caracterizează următoarele efecte ale câmpului electromagnetic:

- **transferul de energie** de la câmp la corp – p,P,W permit evaluarea **efectelor termice**, a încălzirii corpurilor în procesele irevesibile, cu caracter disipativ dar şi evaluarea energiei acumulate în procesele reversibile;

- **transferul de masă**, care însoţeşte de obicei procesul de conducţie electrocinetic – m, Q_m, $\overline{\delta}$ permit evaluarea masei depuse prin electroliză, a vitezei de depunere, a găsirii locale a stratului depus şi în general a intensităţii, direcţiei şi sensului transferului de masă;

- **efectele mecanice** ale câmpului electromagnetic – ($\mathbf{f}$, $\overline{\overline{T}}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{I}$) permit evaluarea acţiunilor ponderomotoare ale câmpului electromagnetic asupra corpurilor: forţe, cupluri, presiuni, tensiuni şi în final a vitezei şi deplasării corpurilor sub acţiunea acestor forţe.

Inventarul efectuat în acest paragraf nu este exhaustiv, el conţine doar mărimile fizice caracterisitce cele mai importante, care intervin cel mai frecvent în modelarea dispozitivelor electromagnetice.

În practica modelării electromagnetice se întâlnesc şi alte mărimi fizice, cum sunt cele caracteristice materialelor, cum sunt: permitivitatea ε, permeabilitatea μ, conductivitatea σ,ş.a. sau dispozitivelor: rezistenţa R, capacitatea C, inductivitatea L, ş.a., dar acestea vor fi prezentate pe parcursul lucrării.

Capitolul 2

Fenomenele electromagnetice fundamentale

Fenomenele fundamentale care stau la baza funcţionării dispozitivelor electromagnetice sunt cele de natură electrică şi magnetică. Aceste fenomene sunt descrise de legile câmpului electromagnetic, care se pot clasifica în trei mari categorii:

- legi generale;
- legi de material;
- legi ale efectelor câmpului.

Prima categorie este alcătuită de următoarele patru legi:

2.1 Legea fluxului electric

Fluxul electic de pe orice suprafaţă închisă Σ este egal cu sarcina electrică din domeniul mărginit de Σ:

$$\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma} \Leftrightarrow \int_\Sigma \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} \rho \mathrm{d}v \tag{2.1}$$

Forma locală a acestei legi (obţinută cu relaţia Gauss-Ostrograski) este:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \tag{2.2}$$

şi ea are următoarea semnificaţie fizică: orice corp electrizat ($\rho \neq 0$) produce în vecinătatea sa un câmp electric ($\mathbf{D} \neq 0$). Acesta este primul fenomen fundamnetal descris de legi şi el este ilustrat în figura 2.1.

Se constată că spectrul inducţiei electrice **D** produs de corpurile electrizate are liniile de câmp deschise, acestea părăsind (izvorând din) sarcinile pozitive şi îndreptându-se spre (dispărând în) sarcinile negative. În zonele neelctrizate liniile de câmp ale inducţiei

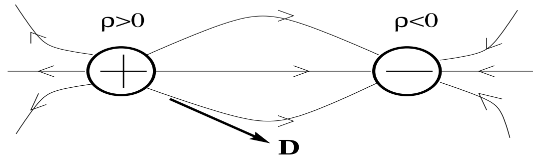

Figura 2.1: Câmpul electric produs de corpuri electrizate

electrice sunt curbe continui. La trecerea prin suprafeţe de discontinuitate neelectrizate (de la un corp la altul) componenta normală a inducţiei electrice se conservă.

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \Longleftrightarrow D_{n_1} = D_{n_2}.$$

2.2 Legea fluxului magnetic

Fluxul magnetic pe orice suprafaţă închisă Σ *este nul*:

$$\phi_\Sigma = 0 \Leftrightarrow \int_\Sigma \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \tag{2.3}$$

Forma locală a legii este:

$$\mathrm{d}iv\mathbf{B} = 0 \tag{2.4}$$

şi evidenţiază faptul că nu există “sarcini magnetice”.

În consecinţă, legea nu evidenţiază un fenomen ci o restricţie impusă câmpului magnetic, care având inducţia solenoidală va avea liniile de câmp fără început şi sfârşit (deci curbe închise). Un spectru tipic al inducţiei **B** este reprezentat în figura 2.2.

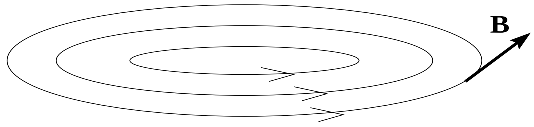

Figura 2.2: Spectrul inducţiei magnetice

La trecerea prin suprafeţele de discontinuitate componenta normală a inducţiei magnetice se conservă:

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \Longleftrightarrow B_{n_1} = B_{n_2},$$

în caz contrar fluxul magnetic pe un cilindru scurt cu capacele de o parte si de alta a suprafeţei n-ar mai fi nul.

2.3 Legea inducţiei electromagnetice

Tensiunea electrică pe orice curbă închisă Γ *este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic de pe o suprafaţă care se sprijină pe curba* Γ:

$$u_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\phi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \int_\Gamma \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{2.5}$$

sau în *forma locală* (obţinută prin aplicarea relaţiei Stokes):

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} \tag{2.6}$$

În cazul suprafeţei de discontinuitate imobile şi nepurtătoare de flux magnetic componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric se conservă:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \Longleftrightarrow E_{t_1} = E_{t_2},$$

în caz contrar legea nu ar mai fi satisfacută pe un dreptunghi cu laturile de-o parte şi de alta a funcţiei.

Legea are următoarea semnificaţie fizică: variaţia în timp a câmpului magnetic determină (induce) apariţia unui câmp electric. Liniile câmpului electric indus sunt curbe închise, care tind să înconjoare câmpul magnetic inductor (figura 2.3).

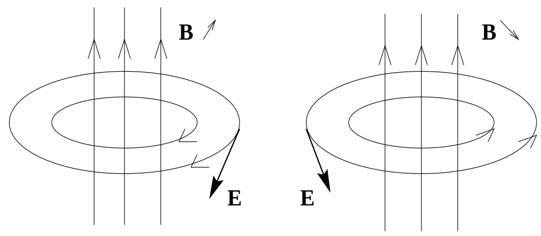

Figura 2.3: Spectrul câmpului electric indus

Acest fenomen fundamental este cunoscut sub numele de inducţie electromagnetică şi el reprezintă o a doua cauză posibilă a câmpului electric.

În teoria macroscopică Maxwell-Hertz curba Γ şi suprafaţa S_Γ sunt antrenate de corpuri în mişcarea lor.

Din acest motiv s-a folosit în forma locală *derivata substanţială* (de flux) a inducţiei magnetice:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \tag{2.7}$$

În consecinţă, *forma locală dezvoltată a legii inducţiei în medii mobile* este:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathrm{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) \tag{2.8}$$

iar forma integrală dezvoltată este:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{A} - \int_{\Gamma} (\mathbf{B} \times \mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2.9}$$

Inducţia electromagnetică poate avea două cauze principial diferite:

- *inducţia de transformare*, care apare în corpurile imobile dar în care $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$;
- *inducţia de mişcare*, care apare în corpuri mobile (cu viteza $\mathbf{v} \neq 0$), chiar dacă $\mathbf{B}$ este constant în timp.

În cazul particular al *mediilor imobile* legea inducţiei are următoarele forme integrală, respectiv locală:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{2.10}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.11}$$

În regim staţionar câmpul electric este irotaţional, deci spectrul intensităţii câmpului electric $\mathbf{E}$nu poate avea curbe închise.

2.4 Legea circuitului magnetic

Tensiunea magnetică pe orice curbă închisă Γ este egală cu curentul ce străbate suprafaţa S_{Γ} care se sprijină pe Γ plus viteza de variaţie a fluxului electric de pe S_{Γ}:

$$u_{m_{\Gamma}} = i_{S_{\Gamma}} + \frac{\mathrm{d}\psi_{S_{\Gamma}}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \int_{\Gamma} \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{S_{\Gamma}} \mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_{\Gamma}} \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{A} \tag{2.12}$$

Forma locală a legii este:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} \tag{2.13}$$

în care

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{D}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \tag{2.14}$$

este derivata substanţială de flux a inducţiei electrice.

În consecinţă,legea are următoarea *formă locală dezvoltată în medii mobile*:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v}) \tag{2.15}$$

iar *în medii imobile*:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{2.16}$$

Deoarece derivata faţă de timp a inducţiei electrice are aceleaşi unităţi de măsură ca densitatea de curent (de conducţie) $\mathbf{J}$ şi determină acelaşi efect magnetic ca şi curentul de conducţie, el a fost numit *densitatea curentului de deplasare*.

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

La trecerea prin suprafeţele de discontinuitate imobile, care nu sunt pânze de curent (de conducţie sau de deplasare) componenta tangenţială a câmpului magnetic se conservă:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$$

Semnificaţia fizică a legii este dată de fenomenele pe care aceasta le descrie:

- orice corp în stare electrocinetcă (parcurs de curent) determină în vecinătatea sa un câmp magnetic;
- variaţia în timp a câmpului electric determină apariţia unui câmp magnetic.

Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise care tind să înconjoare curentul (de conducţie sau deplasare) care le-a produs. În absenţa acestor surse de câmp magnetic liniile lui $\mathbf{H}$ nu pot fi curbe închise deoarece $\mathbf{H}$ este irotaţional.

Legea pune în evidenţă două fenomene fizice principial distincte, respectiv două cauze noi ale aparţiei câmpului magnetic:

- starea eletrocinetică (figura 2.4);
- variaţia în timp a câmpului electric (figura 2.5).

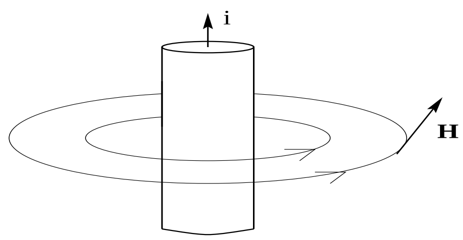

Figura 2.4: Liniile câmpului magnetic $\mathbf{H}$ produse de curenţii de conducţie

2.5 Legea conservării sarcinii electrice

Curentul electric ce părăseşte orice suprafaţă închisă este egal cu viteza de scădere a sarcinii electrice din domeniul mărginit de acea suprafaţă

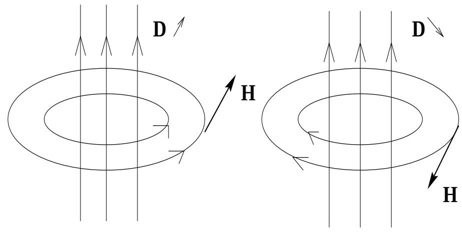

Figura 2.5: Liniile câmpului magnetic **H** produse de curentul de deplasare

$$i_\Sigma = -\frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} \Longleftrightarrow \int_\Sigma \mathbf{J}\mathbf{A} = -\frac{d}{dt}\int_{D_\Sigma} \rho dv \tag{2.17}$$

Relaţia (2.17) este de fapt o teoremă şi nu o lege, deoarece ea se poate demonstra pornind de la legea circuitului magnetic (aplicată pe o suprafaţă deschisă S_Γ, care la limită tinde către suprafaţa inchisă Σ atunci când Γ se reduce la un punct) şi de la legea fluxului electric ($\psi_\Sigma = q_{D_\Sigma}$):

$$u_{m\Gamma} = i_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow 0 = i_\Sigma + \frac{d\psi_\Sigma}{dt} = i_\Sigma + \frac{dq_{D_\Sigma}}{dt} \tag{2.18}$$

Cu toate acestea ecuţia (2.18) este cunoscută sub numele de legea conservării sarcinii şi nu teorema de conservăre a sarcinii, datorită importanţei ei remarcabile din punct de vedere teoretic şi practic.

Forma locală a legii conservării sarcinii este:

$$div(\mathbf{J} + \rho\mathbf{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{2.19}$$

în care $\mathbf{v}$ este viteza mediului, iar $\rho\mathbf{v}$ reprezintă *densitatea curentului electric de convecţie.* În medii imobile:

$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{2.20}$$

Legea conservării sarcinii pune în evidenţă legătura strânsă între starea de electrizare (sarcina electrică) şi cea electrocinetică (curentul electric). Dacă sarcina unui corp scade (respectiv creşte) în timp atunci corpul va fi părăsit de (respectiv în corp se va injecta) curent de convecţie (datorat deplasării macroscopice a sarcinilor) şi/sau de conducţie (stare electrocinetică ce reprezintă în ultimă instanţă deplasarea purtătorilor microscopici de sarcină).

În consecinţă, liniile de curent sunt curbe deschise care pornesc din coprurile a căror electrizare scade şi se opresc în corpurile a căror electrizare creşte.

În regim staţionar, corpurile sunt imobile şi sarcina este constantă în timp, deci curentul total pe o suprafaţă închisă este nul şi în consecinţă liniile de curent nu au început sau sfârşit (sunt curbe închise).

O consecinţă importantă a legii, care explică şi numele ei se referă la cazul sistemelor izolate de corpuri (înconjurate de un perete izolant), caz în care $i_\Sigma = 0$, deci sarcina totală a sistemului este invariantă în timp (se conservă), indiferent de ce transformări suferă sistemul de corpuri.

Legile generale sunt valabile în orice moment, în orice domeniu din spaţiu şi indiferent de tipul corpurilor în care ele se aplică.

Capitolul 3

Proprietăţi de material

Legile de material sunt reprezentate de următorele trei relaţii, a căror formă particulară depinde de tipul substanţei din care este alcătuit corpul ele se aplică.

3.1 Legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$

Inducţia electrică dintr-un punct din spaţiu depnde de intensitatea câmpului electric din acel punct (nu şi de intensiatea câmpului electric din alte puncte):

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}) \tag{3.1}$$

Relaţia de dependenţă dintre $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{E}$ impusă de această lege poate fi extrem de complicată şi ea este funcţie de tipul substanţei în care se consideră perechea $\mathbf{D} - \mathbf{E}$.

O formă echivalentă a acestei relaţii este următoarea:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.2}$$

în care s-au pus în evidenţă $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}$ F/m constanta universală numită permitivitatea vidului şi $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ polarizaţia corpului. Aceasta poate fi descompusă într-o componentă *permanentă* $\mathbf{P}_p = \mathbf{P}(0)$ şi una *temporară* $\P_t$, existentă doar în prezenţa câmpului electric ($\mathbf{E} \neq 0$), astfel încât $\mathbf{P} = \mathbf{P}_t(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_p$. Din acest motiv această lege mai poartă şi numele de legea polarizaţiei (temporare).

În absenţa corpurilor polarizaţia este nulă ($P \neq 0$), deci în vid $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, ceea ce evidenţiază faptul că în vid este suficient un singur câmp vectorial pentru a caracteriza câmpul electric. Deosebirea dintre inducţie şi intensitate are relevanţă doar în corpuri, urmând ca diferenţa $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$ să poată fi considerată definiţia polarizaţiei acestora.

O semnificaţie posibilă a acestei legi constă în faptul că intensitatea câmpului electric este evidenţiată ca o cauză a polarizării corpurilor şi că un corp polarizat produce câmp electric sau perturbă câmpul electric preexistent.

De multe ori relaţia $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ se aproximează cu o dependenţă afină (obţinută de exemplu prin reţinerea doar a primilor doi termeni din seria Taylor) de tipul:

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{3.3}$$

în care $\mathbf{P}_p$ este chiar polarizaţia permanentă iar $\overline{\overline{\varepsilon}}$ este tensorul permitivităţilor absolute care de multe ori are valorile principale egale, deci degenerează într-un scalar. Se constată că legea pune în evidenţă o nouă cauză a câmpului electric şi anume polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p$, care dacă este nenulă (cum se întâmplă în cazul electreţilor) este capabilă să producă un câmp electric $E \neq 0$, chiar dacă $D = 0$ şi invers.

Figura 3.1 prezintă spectrele intensităţii şi inducţiei electrice şi se constată că **D** are liniile de câmp închise (în acord cu legea fluxului electric), în schimb **E** are liniile de câmp deschise (în acord cu legea inducţiei). În aer cele două spectre se suprapun ($\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$) pe când în electric **D** şi **E** au sensuri opuse.

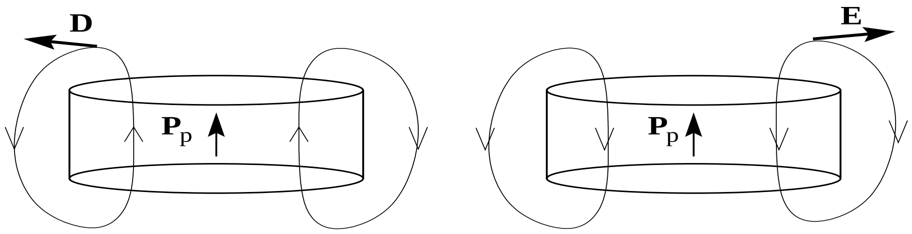

Figura 3.1: Spectrele **E**, **D** produse de un electret

Capacitatea corpurilor polarizate permanent de a produce câmp electric poate fi considerată un alt fenomen fizic fundamental, care evidenţiază a treia cauză posibilă a câmpului electric.

Mai mult, introducerea oricărui corp într-un câmp electric aflat initial în vid modifică acest câmp atât în interiorul corpului cât şi în vecinătatea sa, datorită polarizării temporare a corpului.

3.2 Legea legăturii B – H

Inducţia magnetică dintr-un punct din spaţiu depinde de intensitatea câmpului magnetic din acel punct:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \tag{3.4}$$

Şi în acest caz forma concretă a relaţiei $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ este funcţie de tipul materialului şi ea poate lua în unele cazuri forme foarte complicate.

O formă echivalentă a legii, care pune în evidenţă magnetizaţia corpurilor $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ este:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{3.5}$$

în care $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$ este *permeabilitatea vidului.*

Descompunând magnetizaţia $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p$ în componenta *temporară* $\mathbf{M}_t$ şi cea *permanentă* $\mathbf{M}_p = \mathbf{M}(0)$, rezultă:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_t(\mathbf{H}) + \mathbf{M}_p), \tag{3.6}$$

motiv pentru care legea legăturii $\mathbf{B}-\mathbf{H}$ se mai numeşte şi legea magnetizaţiei (temporare).

În absenţa corpurilor $M = 0$, deci în vid $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, fiind suficient un singur câmp vectorial pentru a caracteriza câmpul magnetic. În corpurile magnetizabile $\mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{H} \neq 0$ şi este necesară o pereche de vectori $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$ pentru a caracteriza câmpul. Prezenţa magnetizaţiei modifică câmpul magnetic reciproc, câmpul magnetic determină magnetizarea corpurilor.

Aproximând dependenţa $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ cu una liniară se obţine următoarea formă particulară de tip afin a relaţiei $\mathbf{B} - \mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M} \tag{3.7}$$

în care $\overline{\overline{\mu}}$ este *tensorul permeabilităţilor* absolute ale mediului.

Semnificaţia fizică a legii este relevată de fenomenul de producere a câmpului magnetic datorat corpurilor magnetizate permanent (dacă $M \neq 0$, atunci $B \neq 0$, chiar dacă $H = 0$). În acest fel se evidenţiază o a treia cauză principial diferită a câmpului magnetic şi anume corpurile magnetizate permanent (cazul magneţilor permanenţi)

Figura 3.2 prezintă spectrele câmpului magnetic în acest caz. Se constată că $\mathbf{B}$ are liniile de câmp închise (conform legii fluxului magnetic), în timp ce $\mathbf{H}$ are liniile de câmp deschise (în acord cu legea circuitului magnetic).

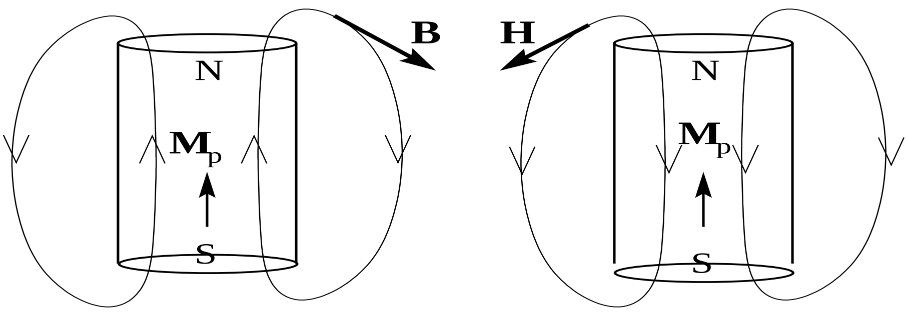

Figura 3.2: Spectrele $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ ale câmpului magnetic produs de un magnet permanent

3.3 Legea conducţiei

Densitatea de curent dintr-un punct depinde de intensitatea curentului electric din acel punct:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}) \tag{3.8}$$

Forma concretă a legii depinde de tipul mediului în care se consideră punctul.

Chiar dacă legătura **J**, **E** poate lua în unele cazuri forme foarte complicate, pentru majoritatea corpurilor este satisfăcătoare următoare aproximaţie afină:

$$\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) \tag{3.9}$$

în care $\overline{\overline{\sigma}}$ este tensorul conductivităţilor mediului iar $\mathbf{E}_i$ este intensitatea câmpului electric imprimat, sau echivalent:

$$\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \tag{3.10}$$

în care s-a notat $\mathbf{J}_i = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}_i$ densitatea curentului electric imprimat.

Dacă $\overline{\overline{\sigma}}$ este inversabil, atunci legea capătă forma echivalentă:

$$\mathbf{E} = \overline{\overline{\rho}}\mathbf{J} - \mathbf{E}_i \tag{3.11}$$

în care $\overline{\overline{\sigma}}^{-1}$ este tensorul rezistivităţilor.

Legea conducţiei are o dublă semnificaţie fizică, pe de o parte ea pune în evidenţă cauza stării electrocinetice şi anume câmpul electric iar pe de altă parte ea pune în evidenţă o a patra cauză posibilă a câmpului electric şi anume câmpul electric imprimat ($E \neq 0$ dacă $E_i \neq 0$, chiar atunci când $J = 0$). Acest nou fenomen fundamental are loc în cazul elementelor şi bateriilor electrochimice, în care $E_i \neq 0$. Figura 3.3 prezintă spectrul lui **E** în acest caz, evidenţiind caracterul deschis al liniilor de câmp (în acord cu legea inducţiei).

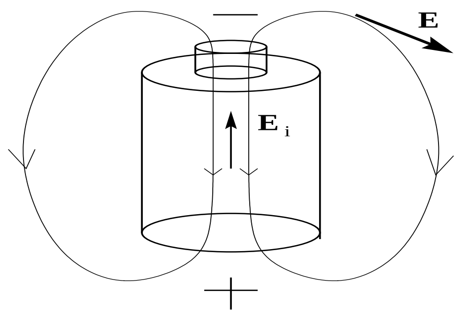

Figura 3.3: Spectrul câmpului electric **E** în cazul unui acumulator

Ultimile două legi ale câmpului alectromagnetic permit evidenţierea efectelor acestui câmp, realizând legătura între teoria electromagnetismului şi alte domenii ale ştiinţie: cum sunt termodinamica, mecanica, electrochimia, etc.

3.4 Clasificarea caracteristicilor de material

În construcţia dispozitivelor electromagnetice intervin materiale din cele mai diverse categorii. În modelarea electromagnetică interesează în primul rând caracterizarea proprietăţilor de material ale câmpului electromagnetic.

În consecinţă, orice material se poate caracteriza prin următoarele **tipuri ale proprietăţilor** sale:

- dielectrice (legătura $\mathbf{D} - \mathbf{E}$);
- magnetice (legătura $\mathbf{B} - \mathbf{H}$);
- conductoare (legătura $\mathbf{J} - \mathbf{E}$).

O caracterizare completă presupune cunoaşterea celor trei tipuri de relaţii pentru fiecare material care alcătuieşte dispozitivul. Câteva exemple sunt ilustrative:

- *aerul:*
  - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$;
  - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$;
  - din punctul de vedere al conducţiei: $J = 0$ ($\sigma = 0$ – izolant);
- *sticla:*
  - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ cu $\varepsilon = \epsilon_0\epsilon_r$, $\epsilon_r > 1$;
  - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$;
  - din punctul de vedere al conducţiei: $J = 0$ ($\sigma = 0$ – izolant);
- *oţelul:*
  - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$;
  - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$;
  - din punctul de vedere al conducţiei: $J = \sigma\mathbf{E}$;
- *cuprul:*
  - din punct de vedere dielectric: $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$;
  - din punct de vedere magnetic: $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$;
  - din punctul de vedere al conducţiei: $J = \sigma\mathbf{E}$.

Indiferent care este tipul de proprietate luat în considerare, se pot face următoarele **clasificări ale caracterisitcilor de material:**

- *Liniare – neliniare:*

  Dependenţa dintre cele două mărimi este caracterizată printr-o relaţie liniară (de proproţionalitate) în cazul mediilor liniare sau nu în cazul mediilor neliniare.

- *Izotrope – anizotrope:*

  Relaţia dintre cele două mărimi este independentă de direcţia lor în cazul mediilor izotrope şi dependentă de direcţie în cazul mediilor anizotrope.

- *Omogene – neomogene:*

  Relaţia dintre cele două mărimi este aceeaşi în orice punct în cazul mediilor omogene şi depinde de punct în cazul mediilor neomogene.

- *Invariante – parametrice:*

  Relaţia dintre cele două mărimi este aceeaşi în orice moment de timp la mediile invariante iar la cele parametrice depinde de un parametru care poate fi explicit timpul sau o altă mărime fizică cum este temperatura, care la rândul ei este funcţie de timp.

- *Cu sau fără surse permanente:*

  În cazul unor medii cu surse permanente, relaţia dintre cele două mărimi este astfel încât ele nu se pot anula simultan. În cazul mediilor fără surse permanente anularea uneia implică anularea şi a celeilalte mărimi.

- *Cu sau fără histerezis:*

  În cadrul mediilor cu histerezis valoarea unei mărimi la un moment dat depinde nu numai de valoarea celeilalte în acel moment ci şi de evoluţia ei anterioară (materialele au memorie).

Cel mai simplu caz este cel al materialelor liniare (implicit fără surse permanente), izotrope, omogene şi fără histerezis, la care:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \tag{3.12}$$

Proprietăţile acestor materiale sunt complet caracterizate de trei parametri scalari: permitivitatea ε, permeabilitatea μ şi conductivitatea σ.

Dacă materialul satisface condiţiile anterioare, dar este anizotrop atunci:

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}, \tag{3.13}$$

caracterizarea proprietăţilor făcându-se prin tensorii $\overline{\overline{\varepsilon}}$, $\overline{\overline{\mu}}$ şi $\overline{\overline{\sigma}}$.

Dacă materialul este liniar, izotrop dar neomogen, atunci parametrii săi de material sunt funcţii de punct (respectiv de vectorul de poziţie $\mathbf{r}$):

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}, \tag{3.14}$$

şi nu constanţi ca în cazul mediilor omogene.

În cazul materialelor parametrice, parametrii de material depind de timp:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(t)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu(t)\mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma(t)\mathbf{E}, \tag{3.15}$$

sau eventual de alte mărime, de exemplu temperatura θ: $\mu = \mu(\theta)$, sau în cazul materialelor cu efect Hall: $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Generalizând această ultimă relaţie se pot considera legi de material (care nu au în mod necesar semnificaţie fizică) de forma:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{H}). \tag{3.16}$$

După cum s-a menţionat anterior, o clasă largă de materiale poate fi caracterizată printr-o relaţie de tip afin:

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p, \quad \mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p, \quad \mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i). \tag{3.17}$$

În general aceste materiale sunt neliniare, anizotrope iar dacă parametri $\overline{\overline{\varepsilon}}, \overline{\overline{\mu}}$ sau $\overline{\overline{\sigma}}$ se modifică de la punct la punct ele sunt şi neomogene, sau parametrice dacă aceştia se modifică în funcţie de timp.

Legătura afină generalizează relaţiile de material anterior definite, deoarece prin particularizări se obţin cazurile mediilor:

- liniare ($P_p = 0$, $M_p = 0$, $E_i = 0$, iar ε, μ şi σ nu depind de E sau H);
- liniare şi izotrope ($\overline{\overline{\varepsilon}} = \epsilon\overline{\overline{1}}$, $\overline{\overline{\mu}} = \mu\overline{\overline{1}}$, $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma\overline{\overline{1}}$).

Folosind aceste clasificări se poate afirma că:

- aerul este liniar din toate punctele de vedere: dielectric, magnetic şi al conducţiei (el fiind în fond un izolant ($\sigma = 0$) nemagnetic ($\mu_r = 1$) şi fără proprietăţi dielectrice $\varepsilon_r = 1$);
- sticla este liniară din toate punctele de vedere, deosebindu-se de aer prin faptul că are permitivitatea relativă $\varepsilon_r > 1$ (este un dielectric propriuzis);
- oţelul electrotehnic este linear din punct de vedere dielectric, neliniar şi izotrop din punct de vedere magnetic (dacă este turnat şi nu laminat la rece) şi liniar din punctul de vedere al conducţiei;
- cuprul este liniar din toate punctele de vedere în schimb spre deosebire de aer este un conductor ($\sigma > 0$).

3.5 Modelarea materialelor neliniare şi cu histerezis

Caracterizarea mediilor neliniare este mai complicată decât a celor liniare. De exemplu, proprietăţile unui mediu magnetic neliniar, anizotrop fără histerezis se realizează nu prin constante de material ci prin funcţii "de magnetizare" de tipul:

$$\begin{aligned} B_x &= f_1(H_x, H_y, H_z) \\ B_y &= f_2(H_x, H_y, H_z) \\ B_z &= f_3(H_x, H_y, H_z) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dacă mediul este izotrop atunci este suficientă o singură funcţie reală f de o variabilă reală pentru a descrie caracteristica de magnetizare:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{H} f(H), \tag{3.19}$$

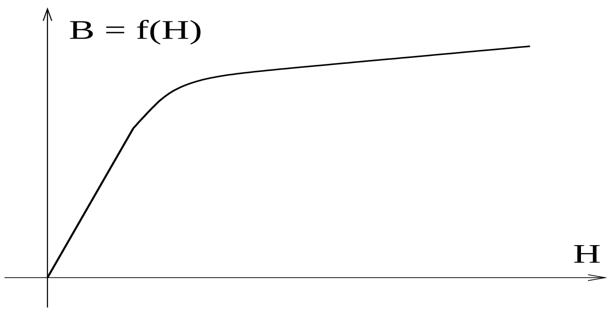

Figura 3.4: Caracteristica de magnetizare

B şi **H** fiind coliniare. Se poate arăta că permeabilitatea statică definită ca $\mu_S = B/H = f(H)/H$ depinde de intensitatea câmpului magnetic şi nu este o constantă ca în cazul materialelor neliniare.

În figura 3.4 se reprezintă caracterisitca de magnetizare tiptcă pentru un material feromagnetic fără histerezis ("moale").

Fenomenul de histerezis întâlnit mai ales la materialele magnetice este un fenomen deosebit de complex, care nu admite o descriere exactă şi simplă. Este de remarcat faptul că dependenţa $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ nu este în acest caz o funcţie în sens matematic, deoarece la un H dat pot corespunde mai multe valori posibile ale lui B.

De obicei materialele cu histerezis pronunţat sunt folosite la realizarea magneţilor permanenţi (materiale feromagnetice dure). Cel mai adesea febricanţii specifică în catalogul lor de produse doar cilclul fundamental (maximal) de histerezis, nu şi ciclurile minore. Un exemplu tipic de ciclu de histerezis este prezentat în figura 3.5.

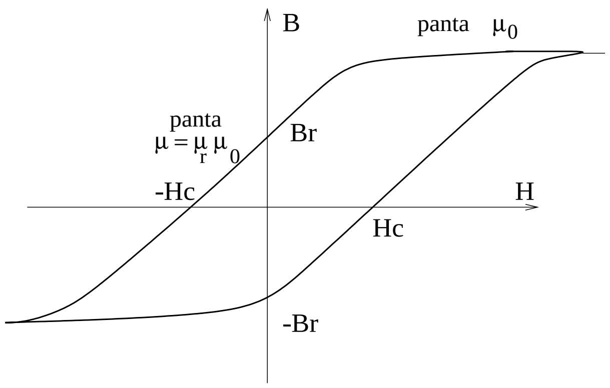

Figura 3.5: Exemplu de ciclu de histerezis

Procesul de modelare a proprietăţilor de material nu se bazează numai pe cunoaştera cât mai exactă a comportării materialelor ci şi pe aproximări şi idealizări care fac ca rezolvarea problemei să fie simplificată. Aceste simplificări trebuie totuşi efectuate cu grijă pentru a nu afecta în mod semnificativ soluţia numerică. În continuare vor fi prezentate câteva tehnici de modelare folosite pentru simplificarea caracteristicilor de material.

În dispozitivele cu magneţi permanenţi aceştia se află de obicei în starea caracterizată de faptul că perechea (B, H) se află poziţionată în cadranul doi al caracteristicii. Se constată că în acest cadran caracteristica de magnetizare se poate aproxima prin relaţia afină:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$$

(în care $\mu_0\mathbf{M}_p = \mathbf{B}_r$ este inducţia remanentă), deci printr-o dreaptă în planul $B - H$.

Evident, aceasta este o modelare simplificată a fenomenului de histerezis, dar care dă rezultate satisfăcătoare în multe cazuri de dispozitive în care singurele surse de câmp sunt magneţii permanenţi.

Un alt mod de modelare simplistă a fenomenului de histerezis aplicabil în cazul variaţiei periodice în timp a mărimilor caracterisitce este cel de aproximare a ciclului de histerezis printr-o elipsă. Această tehnică are avantajul linearităţii, numai că în reprezentarea în complex simplificat constantele de material μ (respectiv ε) nu au un caracter real ci unul complex (cu parte imaginară nenulă).

Liniearizarea caracteristicilor de material reprezintă o metodă des aplicată în modelarea fizică. În fond ea constă în aproximarea caracteristicii neliniare printr-o aplicaţie afină, obţinută prin reţinerea din dezvoltarea în serie Taylor doar a primilor doi termeni. De exemplu, considerând punctul de funcţionare $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(\mathbf{H}_0)$ de pe carecteristica unui material magnetizare a unui material neliniar fără histerezis, inducţia $\mathbf{B}$ corespunzătoare unui câmp de intensitate arbitrară este:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}\mathbf{H}}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) + \ldots \tag{3.20}$$

în care $\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}\mathbf{H}}$ este derivata Frechet a funcţiei $\mathbf{B}$ (dacă admitem abuzul de a nota şi funcţia şi variabila sa dependentă cu acelaşi simbol) reprezentată prin matricea Jacobian:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} & \frac{\partial B_x}{\partial H_z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} & \frac{\partial B_y}{\partial H_z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial H_x} & \frac{\partial B_z}{\partial H_y} & \frac{\partial B_z}{\partial H_z} \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Se constată că această matrice reprezintă tensorul permeabilităţilor dinamice $\overline{\overline{\mu_d}}$ în punctul de funcţiune considerat.

Prin această aproximare caracteristica de magnetizare ia forma:

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}_d\mathbf{H} + \mathbf{I}, \tag{3.22}$$

în care $\mathbf{I} = \mathbf{B}_0 - \overline{\overline{\mu}}_d\mathbf{H}_0$ este polarizaţia magnetică permanentă. Această modelare este potrivită mai ales în studiul problemelor cu mici variaţii ale punctului de funcţionare $\mathbf{B} - \mathbf{H}$, în vecinătatea punctului static de funcţionare $\mathbf{B}_0 - \mathbf{H}_0$. Dacă se alege $B_0 = 0$, $H_0 = 0$, atunci modelul obţinut este unul liniar:

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}_d\mathbf{H} \;\; cu \;\; \overline{\overline{\mu}}_d = \left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}\mathbf{H}}\right|_{\mathbf{H}=0}. \tag{3.23}$$

Această tehnică este des utilizată în practică pentru modelarea materialelor feromagnetice moi, atunci când saturaţia lor nu este importantă.

Dacă materialul este izotrop, atunci **B** şi **H** sunt coliniare iar prin aproximarea caracteristicii de magnetizăre $B = f(H)$ în vecinătatea originii se obţine relaţia:

$$\mathbf{B} = \mu_d \mathbf{H}$$

în care $\mu_d = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}H}$. În acest caz tensorul permeabilităţii dinamice se reduce la un scalar:

$$\overline{\overline{\mu}}_d = \begin{bmatrix} \mu_d & 0 & 0 \\ 0 & \mu_d & 0 \\ 0 & 0 & \mu_d \end{bmatrix} = \mu_d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mu_d \overline{\overline{1}}. \tag{3.24}$$

Trebuie remarcat că şi în cazul anizotrop tensorul $\overline{\overline{\mu}}_d$ este simetric şi pozitiv deinit, iar printr-o schimbare convenabilă de coordonate el poate fi diagonalizat:

$$\overline{\overline{\mu}}_d = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

Dacă valorile sale principale μ_1, μ_2 şi μ_3 sunt relativ apropiate, atunci el poate fi modelat printr-un scalar cu valoarea medie $\mu = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)/3$. În consecinţă, modelarea mediilor anizotrope prin medii izotrope se realizează considerând constanta de material $\mu = \frac{1}{3} Tr[\overline{\overline{\mu}}]$, în care Tr este urma matricei care reprezintă tensorul $\overline{\overline{\mu}}_d$, egală cu suma elementelor sale diagonale.

3.6 Modelarea mediilor neomogene

Cel mai adesea dispozitivele electromagnetice se modelează prin medii omogene pe subdomenii. Exisită totuşi situaţii în care corpurile sunt neomogene dar au o structură internă regulată (periodică sau cvasiperiodică), fiind alcătuite din granule, fire sau folii suprapuse cum se întâmplă în cazul materialelor compozite.

În dispozitivele electromagnetice apar des astfel de situaţii, cum sunt bobinele cu multe spire sau miezurile magnetice realizate din tole. De obicei aceste structuri neomogene se modelează prin medii omogene echivalente.

Se consideră spre exemplu o înfăşurare cu n spire alcătuită dintr-un fir conductor având conductivitatea σ şi aria secţiunii transversale A_c (figura 3.6).

Dacă A este aria secţiunii transversale S a întregii înfăşurări, inclusiv izolaţia conductoarelor, atunci factorul de umplere al bobinei este $k = n \cdot A_c / A$.

În condiţiile în care componenta de-a lungul firului a intensităţii câmpului electric E_t este uniformă în secţiunea S, densitatea de curent din conductor este $J = \sigma E$ iar curentul total prin suprafaţa S este $i = n\, J\, A_c = n\, \sigma\, E\, A_c$. Dacă se modelează bobina ca un conductor omogen de secţiune S, impunând acelaşi curent total $i = J_e A = \sigma_e E\, A$, rezultă *valoarea conductivităţii electrice echivalente* din modelul omogen:

$$\sigma_e = k\, \sigma \tag{3.26}$$

egală cu conductivitatea firului iniţial multiplicată cu factorul de umplere al bobinei.

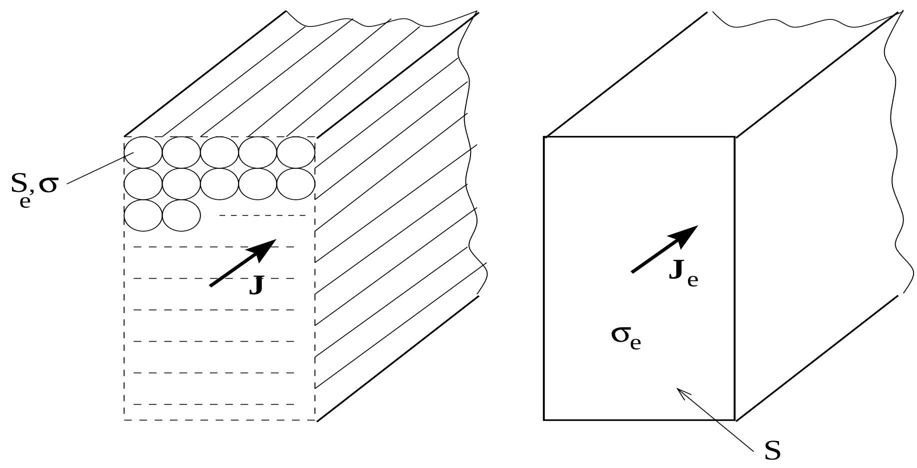

Figura 3.6: Modelarea spirelor unei bobine

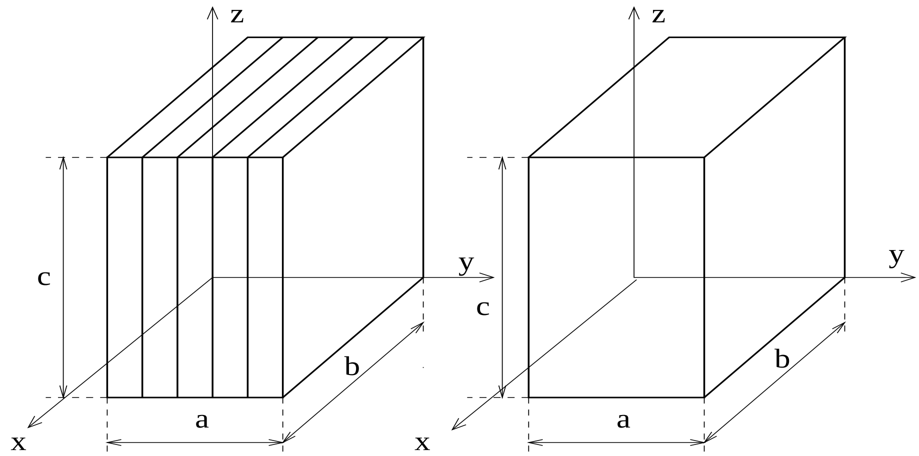

Figura 3.7: Modelarea omogenă a unui pachet de tole magnetice

Un alt exemplu de modelare cu medii omogene a unor materiale neomogene se referă la un pachet de tole magnetice laminate la rece şi izolate între ele cu un material nemagnetic (figura 3.7).

Se va presupune că tola este laminată la rece în direcţia z, deci anizotrop. Adoptând un model anizotrop liniar $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}$, rezultă pe componente relaţiile:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

în care se va presupune că tola este izotropă în planul perpendicular pe direcţia de laminare, deci $\mu_1 = \mu_2$

Aplicând un câmp magnetic orientat după axa Ox cu H_x uniform, rezultă în pachetul de tole fluxul:

$$\phi_1 = \mu_1 H_x k\, a\, c + \mu_0 H_x (1-k)\, a\, c \tag{3.28}$$

în care s-a notat cu k factorul de umplere (grosimea tolei neizolate raportată la grosimea tolei izolate) iar în pachetul omogen echivalent

$$\phi_1^{'} = \mu_1^{'} H_x \, a \, c \tag{3.29}$$

Egalând fluxurile ϕ_1 şi $\phi_1^{'}$, rezultă:

$$\mu_1^{'} = \mu_1 k + \mu_0 (1-k). \tag{3.30}$$

Acelaşi raţionament aplicat după direcţia axei Oz conduce la:

$$\mu_3^{'} = \mu_3 k + \mu_0 (1-k). \tag{3.31}$$

În schimb, după dircţia Oy se va presupune un câmp magnetic cu inducţia B_y uniformă (care se conservă la trecerea din tolă în izolaţie, fiind orientată normal pe această suprafaţă de discontinuitate). Tensiunea magnetică pe grosimea pachetului de tole va fi:

$$u_{m2} = \frac{B_y}{\mu_2} k \, a + \frac{B_y}{\mu_0}(1-k)a,$$

iar în modelul omogen echivalent:

$$u_{m2}^{'} = \frac{B_y}{\mu^{'}} a.$$

În consecinţă tensorul permeabilităţilor mediului omogen va avea valorile principale:

$$\overline{\overline{\mu}}^{'} = \begin{bmatrix} \mu_1 k + \mu_0(1-k) & 0 & 0 \\ 0 & 1/\left[\frac{k}{\mu_2} + \frac{(1-k)}{\mu_0}\right] & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 k + \mu_0(1-k) \end{bmatrix}$$

cu observaţia că $\mu_1^{'}$ este de această dată diferit de $\mu_2^{'}$.

3.7 Modelarea cu materiale perfecte

O metodă importantă în modelările fizice ale mediilor o constituie idealizarea comportării acestora.

Considerând spre exemplu, cazul **mediilor conductoare**, se deosebesc două situaţii limită (degenerate):

- cazul *izolatoarelor perfecte* ($\sigma = 0$ sau echivalent $\rho \to \infty$);
- cazul *supraconductoarelor* ($\sigma \to \infty$ sau echivalent$\sigma \to 0$).

Chiar dacă în realitate nu există izolanţi perfecţi, (şi chiar cele mai bune corpuri izolatoare au curenţi de pierderi), aceştia se pot neglija considerându-se conductivitatea nulă, $\sigma = 0$, ceea ce corespunde la $J = 0$.

Modelul conductorului perfect, la care rezistivitatea ρ este nulă şi implicit $\sigma \to \infty$ şi $E = 0$ (sau în cazul mediilor cu câmp imprimat $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = 0$) se poate adopta nu numai cu cazul supraconductoarelor ci şi în cazul corpurilor bune conductoare, dacă acestea sunt înconjurate de corpuri slab conductoare sau dacă nu interesează distribuţia câmpului electric în interiorul lor.

Proprietăţile magnetice pot fi şi ele idealizate. De exemplu, de multe ori mediile feromagnetice care au permeabilitatea foarte mare sunt modelate ca medii cu permeabilitate infinită, $\mu \to \infty$ numite *feromagnetice ideale*. În consecinţă $H = B/\mu$ va tinde în acest caz către zero (dacă inducţia B este finită). Cea mai mică valoare reală pe care o poate lua permeabilitatea este aproape de permeabilitatea vidului μ_0. Materialele care au această permeabilitate se numesc nemagnetice. Există totuşi situaţii când în modelare se adoptă formal $\mu = 0$, ceea ce corespunde la $B = 0$. Mediile de acest tip, numite *amagnetice* nu există în realitate, totuşi artificiul este util în rezolvarea unor probleme de modelare.

În mod similar, **dielectricii** de permitivitate foarte mare (cum sunt corpurile feroelectrice) pot fi modelate ca medii cu $\varepsilon \to \infty$, ceea ce conduce la anularea intensităţii câmpului electric $E = D/\varepsilon = 0$. Acest model numit *feroelectric ideal* poate fi aplicat, de exemplu, conductoarelor în regim electrostatic. Cu toate că în relitate $\varepsilon \geq \epsilon_0$, totuşi ca artificiu de modelare se pot considera medii la care formal $\varepsilon = 0$. Aceste medii, la care inductivitatea electrică estimată $D = \varepsilon E = 0$, sunt numite *medii anelectrice*. Idealizările obţinute în această manieră sunt prezentate sintetic în tabelul 3.1.

Tabela 3.1: Medii ideale (perfecte)

Mediul	Constanta de material	Câmpul
Anelectric	$\varepsilon = 0$	$D = 0$
Feroelectric ideal	$\varepsilon \to \infty$	$E = 0$
Amagnetic	$\mu = 0$	$B = 0$
Feromagnetic ideal	$\mu \to \infty$	$H = 0$
Izolant	$\sigma = 0$	$J = 0$
Supraconductor	$\sigma \to \infty$	$E = 0$

Capitolul 4

Efecte ale câmpului electromagnetic

4.1 Legea transformării energiei în conductoare

În procesul de conducţie, câmpul electromagnetic transferă corpului o putere cu densitatea de volum:

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E}. \tag{4.1}$$

Puterea trasferată întregului corp care ocupă domeniul D se calculează prin integrarea pe acest domeniu:

$$P = \int_D \mathbf{J}\mathbf{E}\mathrm{d}v. \tag{4.2}$$

Această putere este disipată ireversibil în cazul conductoarelor la care câmpul imprimat $\mathbf{E}_i$ este nul iar tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ este pozitiv definit:

$$p = \mathbf{J}\mathbf{E} = \mathbf{E}\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} \geq 0. \tag{4.3}$$

În acest caz are loc creştere a entropiei şi o încălzire a corpului (efectul Joule-Lentz).

În majoritatea dispozitivelor electromagnetice fenomenele de încălzire joacă un rol important, solicitările termice fiind cele care impun limite ale regimurilor normale de funcţionare. Analiza acestor solicitări (realizată prin rezolvarea problemelor cuplate electro – termic) reprezintă un punct important în activitatea de proiectare, influenţând puternic soluţia tipodimensională aleasă. De obicei analiza câmpului termic se face ulterior determinării câmpului electromagnetic, dar există totuşi situaţii (de exemplu, dacă parametri de material ϵ, μ sau σ depind puternic de temperatură), în care cele două probleme trebuie rezolvate simultan.

4.2 Legea transferului de masă

În procesul de conducţie are loc un transfer de masă cu densitatea fluxului de masă:

$$\overline{\delta} = k\mathbf{J}, \tag{4.4}$$

în care k este neglijabil în metale şi este egal cu coeficientul electrochimic în electroliţi.

Debitul masic depus prin fenomenul de electroliză este în consecinţă:

$$Q_m = \int_{\Sigma} k\mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A}, \tag{4.5}$$

în care Σ este suprafaţa anodului iar masa totală depusă în intervalul (t_1, t_2) este:

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} k\mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A}\mathrm{d}t. \tag{4.6}$$

În particular, dacă $k = ct$ şi $\mathbf{J}$ nu depinde de timp: $m = kIt$, în care $t = t_2 - t_1$ iar

$$I = \int_{\Sigma} \mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A}$$

este curentul ce străbate cuva electrolitică (figura 4.1).

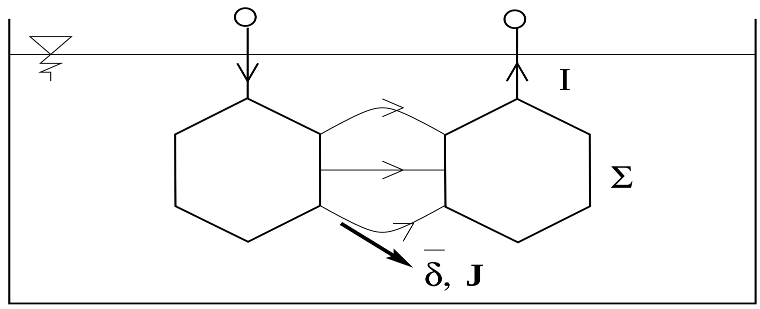

Figura 4.1: Transferul de masă în electroliză

După cum se constată, legile câmpului electromagnetic nu pun în evidenţă în mod direct efectele mecanice ale acestui câmp. Ele pot fi totuşi determinate folosind de exemplu teoremele forţelor generalizate, ale căror demonstraţie se bazează pe legile prezentate.

4.3 Teorema energiei electromagnetice.

Puterea transferată de câmpul electromagnetic unui domeniu imobil prin frontiera acestuia D_Σ *este egală cu puterea transferată corpurilor din domeniul* P_{D_Σ} *plus viteza de creştere a energiei câmpului electromagnetic* W_{em} *din domeniu*:

$$P_\Sigma = P_{D_\Sigma} + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}. \tag{4.7}$$

Pentru demonstrarea acestei afirmaţii se consideră un domeniu D_Σ, mărginit de suprafaţa închisă Σ, în care se află un sistem de corpuri imobile şi liniare din punct de vedere dielectric ($\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) şi magnetic ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$). Formele locale ale legilor inducţiei electromagnetice şi circuitului magnetic:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

permit stabilirea consecinţei:

$$\mathbf{E}rot\mathbf{H} - \mathbf{H}rot\mathbf{E} = \mathbf{J}E + \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Deoarece

$$div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = \nabla\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = \nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{E}}\times\mathbf{H}\right) + \nabla\left(\mathbf{E}\times\overset{\downarrow}{\mathbf{H}}\right) = \mathbf{H}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right) -$$

$$-\mathbf{E}\left(\nabla\times\mathbf{H}\right) = \mathbf{H}rot\mathbf{E} - \mathbf{E}rot\mathbf{H}$$

şi

$$\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E}\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}}{2}\right),$$

$$\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{BH}}{2}\right),$$

rezultă că:

$$-div\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) = \mathbf{JE} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{DE}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2}\right), \tag{4.8}$$

în care: $p = \mathbf{EJ}$ reprezintă conform legii transformării energiei în conductoare densitatea de volum a puterii transferată de câmp corpurilor, iar

$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ reprezintă vectorul Paynting, măsurat în W/m^2;

$w_e = \mathbf{DE}/2$ reprezintă densitatea de volum a energiei electrice, măsurată în J/m^3;

$w_m = \mathbf{BH}/2$ reprezintă densitatea de volum a energiei magnetice, măsurată în J/m^3.

Notând cu $w_{em} = w_e + w_m$ densitatea de volum a energiei câmpului electromganetic, rezultă că:

$$-div\mathbf{S} = p + \frac{\partial w_{em}}{\partial t}, \tag{4.9}$$

relaţie cunoscută sub numele de forma localaă a teoremei energiei electromagnetice.

Prin integrarea acestei relaţii diferenţiale locale pe domeniul D_Σ se obţine:

$$-\int_{D_\Sigma} div\mathbf{S}dv = -\int_\Sigma \mathbf{S}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} pdv + \frac{\partial}{\partial t}\int_{D_\Sigma} w_{em}dv$$

Notând cu $P_\Sigma = -\int_\Sigma \mathbf{S}d\mathbf{A} = \int_\Sigma \mathbf{S}d\mathbf{A}_{int}$, puterea transferată prin suprafaţa Σ de la exterior spre interior;

$P_{D_\Sigma} = \int_{D_\Sigma} pdv$, puterea transferată corpurilor din domeniul D_Σ şi

$W_{em} = W_e + W_m$, energia electromagnetică din domeniul D_Σ cu componentele:

$W_e = \int_{D_\Sigma} w_e dv$, energia câmpului electric şi

$W_m = \int_{D_\Sigma} w_m dv$, energia câmpului magnetic,

rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

4.4 Teorema impulsului electromagnetic

4.5 Teorema forţei generalizate în câmp electric

Forţa feneralizată X_k cu care câmpulelectric acţionează asupra sistemelor de corpuri, este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial x_k} \right|_{\psi = ct}, \tag{4.10}$$

în care

$$W_e = \int_D w_e \mathrm{d}v$$

cu

$$w_e = \int_0^D \mathbf{E} \mathrm{d} \mathbf{D} \tag{4.11}$$

este energia câmpului electric din sistem iar x_k este coordonata generalizată asociată forţei X_k.

Se constată că la flux (sarcină) constant(ă) sistemul evoluează în sensul minimizării energiei sale (figura 4.2).

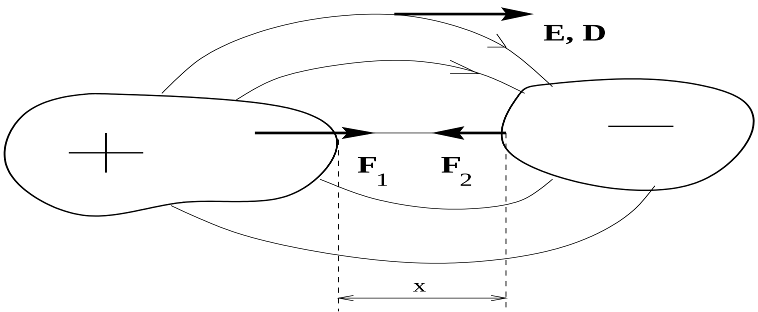

Figura 4.2: Efectul mecanic al câmpului electric

Tabelul 4.1 prezintă câteva exemple de perechi de forţe şi coordonate generalizate.

Tabela 4.1: Exemple de perechi de forţe şi coordonate generalizate

X_k	x_k
Forţa $[N]$	deplasarea $[m]$
Cuplu $[N/m]$	unghi $[rad]$
Presiunea $[N/m^2]$	volumul $[m^3]$

În cazul mediilor liniare la care $\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}} \mathbf{E}$ şi $\mathbf{P}_p = 0$, energia electrică are expresia:

$$W_e = \int_D \frac{\mathbf{DE}}{2} \mathrm{d}v. \tag{4.12}$$

4.6 Teorema forţei generalizate în câmp magnetic

Forţa generalizată X_k cu care câmpul magnetic acţionează asupra unui sistem de corpuri este:

$$X_k = - \left. \frac{\partial W_m}{\partial x_k} \right|_{\phi = ct} \tag{4.13}$$

în care

$$W_m = \int_D w_m \mathrm{d}v \quad cu \quad w_m = \int_0^B \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{B} \tag{4.14}$$

este energia câmpului magnetic din sistem iar x_k este coordonata generalizată asociată forţei X_k.

În cazul mediilor la care $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}$ şi $\mathbf{M}_p = 0$, energia magnetică are expresia.

$$W_m = \int_D \frac{\mathbf{BH}}{2} \mathrm{d}v \tag{4.15}$$

Se constată că şi în acest caz sistemul de corpuri tinde să evolueze astfel încât să se minimizeze energia câmpului magnetic (figura 4.3).

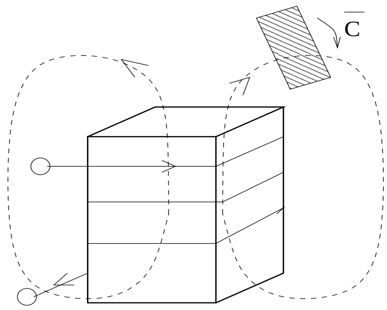

Figura 4.3: Efectul mecanic al câmpului magnetic

În multe dispozitive electromagnetice fenomenele mecanice joacă un rol important, mai ales atunci când acestea au piese în mişcare. Chiar şi în cazul dispozitivelor statice (cu parţi imobile) *solicitările mecanice* pot determina limitele regimurilor normale de funcţionare. De obicei analiza efectelor mecanice se face ulterior rezolvării problemei de câmp electromagnetic. Există totuşi situaţii în care cele două probleme nu pot fi separate ci trebuie tezolvate simultan, ca o problemă cuplată electromagnetică – mecanică. Acesta este mai ales cazul dispozitivelor cu părţi mobile (maşini electrice, dispozitive de acţionare, pompe magneto – hidrodonamice etc.) indiferent că acestea sunt rigide, deformabile, plastice, sau fluide.

Fenomenele fundamentale descrise de legile câmpului electromagnetic stabilesc relaţii de tip cauză efect cu referire la stările câmpului şi corpurilor. Ele sunt reprezentate schematic în figura 4.4. S-au folosit linii duble pentru relaţiile valabile atât în regim staţionar cât şi variabil şi linii simple pentru relaţiile valabile doar în regim variabil. Cu linii punctate s-au marcat fenomenele legate de efectele câmpul electromagnetic. S-a notat fiecare săgeată cu numărul corespunzător legii care descrie fenomenul (relaţia cauză – efect).

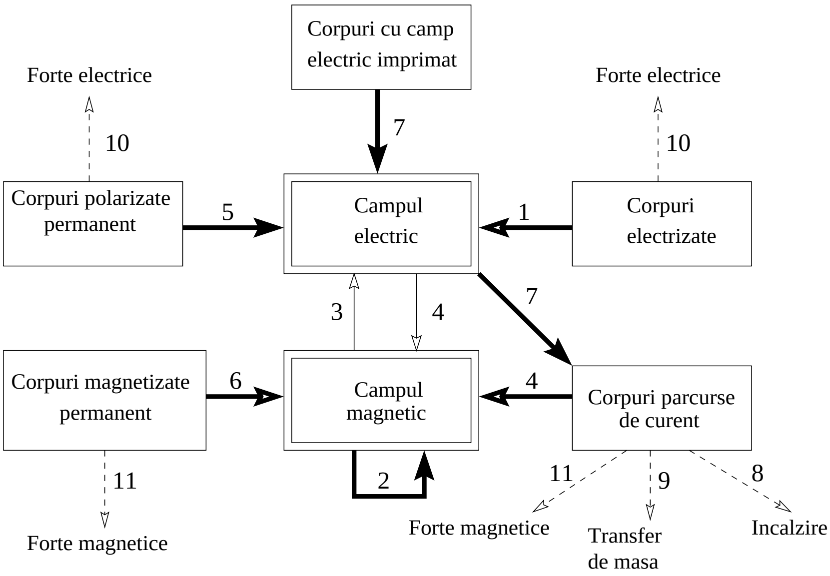

Figura 4.4: Fenomene fundamentale ale electromagnetismului

Într-un dispozitiv electromagnetic concret nu intervin toate aceste fenomene fundamentale, sau dacă intevin, nu toate au aceeaşi importanţă. În modelarea fizică trebuie identificate acele fenomene care sunt esenţiale pentru funcţionarea dispozitivului, diagrama din figura 4.4 simpificându-se corespunzător de la caz la caz. Este evident că acest lucru nu este posibil fără înţelegerea principiului de funcţionare al dispozitivului analizat.

Capitolul 5

Regimurile câmpului electromagnetic

5.1 Regimul general variabil

Legile câmpului electromagnetic, în forma lor locală alcătuiesc un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi combinate cu ecuaţii cu caracter algebric:

1. LFE: $div\mathbf{D} = \rho$
2. LFM: $div\mathbf{B} = 0$
3. LIE: $rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - rot(\mathbf{B} \times \mathbf{v})$
4. LCM: $rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho\mathbf{v} + rot(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$
5. LDE: $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ sau $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \mathbf{P_p}$
6. LBH: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ sau $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M_p}$
7. LJE: $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E_i})$
8. LTE: $p = \mathbf{JE}$
9. LTM: $\delta = k\mathbf{J}$

   La aceste relaţii se pot adăuga următoarele teoreme fundamentale:

10. LFGE: $X_k = -\frac{\partial W_e}{\partial x_k}|_{\psi=ct.}$
11. LFGM: $X_k = -\frac{\partial W_m}{\partial x_k}|_{\phi=ct.}$
12. LCS: $div\mathbf{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} - div(\rho\mathbf{v})$

?????

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în regim general variabil în medii în mişcare este o problemă foarte complictă, cu caracter cuplat electromagnetic-mecanic. În general mişcarea corpurilor (de exemplu ?? unei maşini electrice) este determinată de forţele electrice şi/sau magnetice, precum şi a forţelor de altă natură, dar în acelaşi timp câmpul electromagnetic este influenţat de mişcarea corpurilor. Sursele de câmp în acest regim (şi implicit datele problemei) sunt câmpurile vectoriale: $\mathbf{P_p}$, $\mathbf{M_p}$ şi $\mathbf{E_i}$, care reprezintă în fond cauze de natură electromagnetică. Necunoscutele problemei de analiză le reprezintă câmpurile $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, dar şi câmpul de viteze $\mathbf{v}$, pentru determinarea căruia trebuie adăugate ecuaţiile de mişcare precum şi modele mecanice de material (solide rigide, elastice sau plastice, fluide ideale incompresibile, fluide vâscoase, etc.), cum se întâmplă în magnetohidrodinamică. Se constată că distribuţia de sarcină ρ şi curent $\mathbf{J}$ sunt în acest caz necunoscute şi nu date, de altfel ele rezultă în mod univoc din legea fluxului electric şi din legea circuitului magnetic, dacă câmpul electromagnetic şi cel de viteze sunt complet determinate. Dupa determinarea câmpurilor se pot evalua şi efectele acestora, cum sunt 'sursele de caldură" sau transferul de masă.

Un caz simplificat al acestei probleme cuplate îl reprezintă cazul în care vitezele corpurilor sunt cunoscute apriori. Exemple de astfel de probleme sunt cele de analiză a fenomenului de inducţie prin mişcare în corpuri agflate în rotaţie sau translaţie cu viteze cunoscute sau calculul câmpului magnetic produs de corpuri electrizate sau polarizate aflate în mişcare cu viteze cunoscute. Menţionăm doar câteva din dispozitivele în care apar astfel de fenomene: maşini electrice liniare sau rotative (motoare, generatoare, frâne), dispozitive de acţionare electromagnetică, lansatoare electromagnetice, dispozitive de ??? electromagnetică, debitmetre electromagnetice, generatoare magnetohidrodinamice, pompe electromagnetice, etc.

5.2 Regimul electrostatic

În multe situaţii practice corpurile sunt imobile, iar câmpul electromagnetic este constant în timp. În aceste ipoteze spunem că ne aflăm în regim stţionar. Diagrama din figura ??? capătă o formă mult mai simplă, arborescentă.

Dacă în plus, nu au loc transformări energetice, atunci regimul se numeşte static. considerând că nu apare stare electrocinetică, puterea transferată este nulă, deci nu pot avea loc transformări de energie. În consecinţă în regim static diagrama di figura 1.13??? 'se sparge" în două diagrame disjuncte. Cea superioară se referă la câmpul electric, mai exact electrostatic, iar cea inferioară se referă la câmpul magnetic, mai exact magnetostatic. Cele două câmpuri pot coexista fără să se influenţeze reciproc în vreun fel.

Ecuaţiile fundamentale ale electrostaticii în forma locală:

$$div\mathbf{D} = \rho$$

$$rot\mathbf{E} = 0$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$$

sau în particular

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{D} + \mathbf{P_p}$$

la care se adaugă şi condiţia de echilibru electrostatic în conductoare:

$$\mathbf{E} + \mathbf{E_i} = 0$$

provin din legea fluxului electric, legea inducţiei, legea legăturii $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ şi legea conductiei.

Problema fundamentală a anlizei câmpului electrostatic constă în determinarea câmpurilor vectoriale $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ pornind de la sursele lor ρ, $\mathbf{P_p}$, $\mathbf{E_i}$, presupuse cunoscute. După cum se va vedea în continuare pentru ca această problemă să fie corect formulată mai trebuie cunoscute : forma şi dimensiunile domeniului spaţial de calcul, proprietăţile de material (în acest caz cele dielectrice date prin ϵ sau relaţia $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ în fiecare punct din domeniu), dar şi condiţiile de frontieră, care reprezintă prezenţa eventuală a unor surse externe de câmp.

Relaţiile cauză-efect, deci fenomenele fundamentale specifice regimului electrostatic sun prezentate în figura ????.

Soluţia problemei fundamentale poate fi folosită la calculul altor mărimi, cum sunt densitatea de energie, energia acumulată în câmpul electrostatic, efectele mecanice caracterizate de forţe, cupluri, presiuni sau tensiuni, dar şi alţi parametri specifici dispozitivelor electrostatice. Dintre acestea din urmă cea mai importantă este capacitatea, care este un parametru caracteristic dispozitivului numit condensator. Un condensator este alcătuit din două armături conductoare separate printr-un dielectric (izolant). Capacitatea unui condensator este definită prin raportul:

$$C = \frac{q}{u}, \tag{5.1}$$

în care q este sarcina unei armături, iar u este tensiunea dintre prima şi a doua armătură, în condiţiile în care a doua armătură are sarcina $-q$. Capacitatea se măsoară în $[F]$. Dacă dielectricul este liniar ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$), atunci capacitatea condensatorului nu depinde de starea acestuia (nici de q şi nici de u). Pentru calculul capacităţii unui condensator este necesară rezolvarea problemei fundamentale a anlizei câmpului electrostatic. Aceasta poate fi formulată în două moduri complementare:

- se presupune tensiunea u între armături cunoscută (sursă de câmp), se determină distribuţia de câmp şi apoi cea de sarcină, obţinându-se $q$prin integrare;
- se presupune o armătură încărcată cu sarcina q, iar celelalte cu $-q$ (sursa de câmp) şi apoi se determină distribuţia de câmp, prin integrarea căreia se obţine tensiunea u.

Trebuie observat că în ambele formulări, modul de distribuţie a sarcinii la suprafaţa conductoarelor este necunoscut şi rezultă luând în considerare condiţia de echilibru electrostatic ($\mathbf{E} = 0$) în armăturile conductoare (la care $\mathbf{E_i}$).

Cu toate că ipotezele electrostaticii par foarte restrictive, acest regim îşi găseşte multe aplicaţii practice. Aceasta deoarece rezultatele obţinute sunt valabile şi în regim variabil cu condiţia ca variaţiile să fie suficient de lente în timp.

Dintre aplicaţiile uzuale menţionăm: calculul capacităţilor diferitelor condensatoare sau al capacităţilor parazite, capacităţi care sunt ulterior folosite şi în regim dinamic (până la frecvenţe destul de mari), analiza solicitărilor dielectrice şi coordonarea izolaţiei (calculul câmpului maxim în izolanţi de diferite forme, plasaţi între diferiţi electrozi), analiza unor aparate de măsură electrostatice (cum este voltmetrul electrostatic) sau a micromotoarelor electrostatice (din microsistemelor integrate), analiza dispozitivelor cu electreţi (cum sunt microfoanele compacte).

5.3 Regimul magnetostatic

Ipotezele regimului sunt:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile sunt constante în timp;
- nu au loc transformări de energie;
- prezintă interes câmpul magnetic.

Ecuaţiile fundamentale ale magnetostaticii în forma locală:

$$div\mathbf{B} = 0$$
$$rot\mathbf{H} = 0$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

sau în particular

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M_p}$$

, provin din legea fluxului magnetic, legea circuitului magnetic şi legea legăturii $\mathbf{B} - \mathbf{H}$.

Relaţiile cauză-efect, deci fenomenele fundamentale specifice regimului magnetostatic sun prezentate în figura ????.

Problema fundamentală a anlizei câmpului magnetostatic constă în determinarea câmpurilor vectoriale $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ pornind de la sursa lor magnetizaţia permanentă $\mathbf{M_p}$ presupusă cunoscutăşi evident de la domeniul spaţial de calcul, caracteristica magnetică de material şi condiţiile de frontieră.

După calculul câmpului se pot determina şi alte mărimi cum sunt energia magnetică sau forţele şi cuplurile de natură magnetică, dar şi tensiuni induse prin mişcarea cu viteză cunoscută a magneţilor permanenţi.

Un dispozitiv magnetic simplu, dar frecvent întâlnit în practică pentru concentrarea şi dirijarea câmpului magnetic este tronsonul de circuit magnetic. Acesta este de obicei o parte componentă a unor dispozitive mai complicate şi are proprietatea că reprezintă un tub de flux magnetic, respectiv că suprafaţa sa laterală este suprafaţa de câmp (liniile de câmp sunt orientate tangenţial), iar cele două suprafeţe transversale, numite borne magnetice au liniile de câmp ortogonale pe ele. Parametrul caracteristic al unui astfel de dispozitiv este *reluctanţa magnetică*:

$$R_m = \frac{u_m}{\phi} \tag{5.2}$$

au inversa sa *permeanţa magnetică*:

$$\Lambda_m = \frac{\phi}{u_m}, \tag{5.3}$$

în care ϕ este fluxul ce străbate o bornă magnetică, iar u_m este tensiunea magnetică de la cealaltă bornă la cea pe care s-a calculat fluxul. Permeanţa se măsoară în $[H]$, iar reluctanţa în $[H^{-1}]$. Dacă materialul din care este alcătuit tronsonul este liniar din punct de vedere magnetic, atunci reluctanţa sa magnetică nu depinde de câmpul magnetic (nici de flux, nici de tensiune).

Pentru calculul permeanţei magnetice este necesară rezolvarea problemei fundamentale a magnetostaticii. Ea poate fi formulată în două moduri complementare:

- se cunoaşte fluxul ϕ şi trebuie determinat câmpul şi apoi calculată tensiune amagnetică prin integrarea lui $\mathbf{H}$ de-a lungul tronsonului;
- sau se impune tensiunea magnetică între borne u_m şi se determină câmpul şi apoi se calculează fluxul prin integrarea inducţiei $\mathbf{B}$ pe suprafaţa unei borne.

Dintre aplicaţiile uzuale ale regimului nmagnetostatic cea mai importantă se referă la determinarea câmpului magnetic produs de diferite sisteme cu magneţi permanenţi (maşini cu magneţi permanenţi, difuzoare, instrumente de măsură magnetostatice etc.). Multe rezultate obţinute în regim magnetostatic (cum este reluctanţa unor tronsoane de circuit magnetic sau întrefieruri) sunt folosite cu succes şi în regim variabil sau în studiul unor dispozitive complexe ce au părţi ce funcţionează şi în alte regimuri decât cel magnetostatic.

5.4 Regimul electrocinetic staţionar

În multe situaţii practice interesează felul în care se distribuie curentul electric în conductoare masive. Cel mai simplu studiu de acest tip se face în regim electrocinetic staţionar, caracterizat de următoarele ipoteze simplificatoare:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile fizice nu variază în timp;
- nu interesează distribuţia câmpului magnetic.

Ecuaţiile fundamentale ale acestui regim au următoarea formă locală:

$$div\mathbf{J} = 0;$$

$$rot\mathbf{E} = 0;$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$$

sau în particular

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E_i});$$

care sunt formele particulare î ipotezele menţionate ale legii conservării sarcinii, legii inducţiei electromagnetice şi legii inducţiei.

Relaţiile cauză-efect, deci principalele fenomene specifice electrocineticii sunt prezentate în figura ????. Din ecuaţiile regimului se constată că electrizarea sau polarizarea corpurilor nu influenţează distribuţia de curent.

Problema fundamentală a electrocineticii are ca necunoscute câmpurile de vectoriale **J** şi **E**, iar ca date câmpul imprimat $\mathbf{E_i}$, care este sursa internă a câmpului şi evident: domeniul spaţial de calcul, caracteristicile conductoarelor din domeniu şi condiţiile de frontieră.

După determinarea distribuţiei de curent se poate calcula puterea locală disipată (folosind legea transferului de energie în conductoare) şi masa transferată prin electroliză (folosind legea transferului de masă). Puterea disipată permite determinarea distribuţiei de temperatură în domeniul studiat (solicitările termice) prin rezolvarea ecuaţiei căldurii.

Principial singura sursă de curent în regim electrocinetic este câmpul electric imprimat, în realitate multe probleme au şi alte surse de câmp, dar acestea fiind externe, se reprezintă prin condiţii de frontieră.

Un parametru caracteristiv important care se poate determina prin rezolvarea problemei electrocineticii este *rezistenţa* $[\omega]$, respectiv conductanţa $[S]$ unui rezistor:

$$R = \frac{u}{i}, G = \frac{i}{u} \tag{5.4}$$

in care u este tensiunea la bornele rezistorului, iar i este curentul ce străbate rezistorul. Prin rezistor se înţelege o componentă conductoare scufundată într-un izolant şi străbătută de curent care intră normal printr-o bornă şi iese prin cealaltă, astfel încât rezistorul reprezintă un tub de curent. Ca şi în cazurile anterioare parametrul caracteristic se determină rezolvând una din următoarele două probleme complementare:

- se presupune tensiunea u între borne cunoscută şi se determină distribuţia de curent urmând ca valoarea curentului i să se calculeze prin integrarea lui **J** pe suprafaţa unei borne;
- se presupune curentul i cunoscut şi se determină câmpul electric în domeniul rezistorului, urmând ca tensiunea u să fie calculată prin integrare pe o curbă ce uneşte cele două borne.

Calculul rezistenţei electrice pentru diferite forme ale conductoarelor şi respectiv bornelor reprezintă o problemă frecvent întâlnită în practică. Rezultatele obţinute, chiar dacă au fost determinate în regim staţionar pot fi folosite şi în regim dinamic, cu condiţia ca viteza de variaţie a câmpului să nu fie prea mare.

Următoarele sisteme reprezintă aplicaţii tipice ale regimului electrocinetic: prize de pământ, băi electrolitice, cuve pentru electroliza aluminiului, cuptoare cu încălzire rezistivă sau directă, instalaţii de sudură prin puncte, dimensionarea siguranţelor fuzibile, etc.

5.5 Regimul magnetic staţionar

Acest regim are următoarele ipoteze simplificatoare:

- corpurile sunt imobile;
- mărimile sunt constante în timp;

- interesează distribuţia câmpului magnetic produs de o distribuţie cunoscută a curentului de conducţie.

Forma locală a ecuaţiilor fundamentale ale acestui regim:

$$div\mathbf{B} = 0$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$$

sau în particular

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M_p}$$

, se obţin în ipotezele menţionate anterior din: legea fluxului magnetic, legea circuitului magnetic şi legea legăturii $\mathbf{B}-\mathbf{H}$.

Relaţiile cauză-efect, deci principalele fenomene specifice acestui regim sunt prezentate în figura ????.

Problema fundamentală a analizei câmpului în acest regim are ca necunoscute determinarea câmpurilor vectoriale $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ şi ca date distribuţia densităţii de curent $\mathbf{J}$ şi a magnetizaţiei permanente $\mathbf{M_p}$ în condiţiile în care se cunosc: domeniul spaţial, proprietăţile magnetic'e de material şi condiţiile de frontieră. În acest regim sursele de câmp sunt: curentul de conducţie, magnetizaţia permanentă şi condiţiile de frontieră, care reprezintă sursele câmpului magnetic aflate în afara domeniului supus analizei. În consecinţă, probllema analizei câmpului magnetic staţionar trebuie precedată de rezolvarea unei probleme electrocinetice pentru determinarea densităţii de curent $\mathbf{J}$. Cele două probleme pot fi rezolvate secvenţial deoarece câmpul magnetic staţionar nu influenţează distribuţia de curent.

Dacă mediul este liniar din punct de vedere magnetic atunci câmpul magnetic produs de curentul de conducţie şi de magneţi permanenţi poate fi calculat prin superpoziţie rezolvând separat o problemă de regim magnetic staţionar la care $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ şi apoi o problemă de magnetostatică la care $\mathbf{M_p} \neq 0$. Dacă mediul este neliniar surse trebuie să fie considerate simultan.

După rezolvarea problemei fundamentale, se pot determina efectele câmpului magnetic: energii, forţe, cupluri de natură magnetică, dar şi tensiunile induse datorită mişcării sau variaţiei în timp a curentului inductor, cu condiţia ca viteza de variaţie să nu fie prea mare.

Dispozitivul cel mai întâlnit, care funcţionează în acest regim este bobina, alcătuită dintr-un conductor înfăşurat în aer sau pe un miez feromagnetic. Parametrul specific acestui dispozitiv este *inductivitatea* (măsurată în $[H]$):

$$L = \frac{phi}{i}, \tag{5.5}$$

în care ϕ este fluxul magnetic total al bobinei şi i este curentul ce produce acest flux. Dacă mediul este magnetic liniar, atunci inductivitatea bobinei nu depinde de curentul i.

Pentru determinarea inductivităţii unei bobine este necesară rezolvarea problemei fundamentale a regimului magnetic staţionar, respectiv determinarea câmpului magnetic produs de un curent i impus şi apoi calculul fluxului prin integrarea inducţiei pe o suprafţă, care se sprijină pe curba mediană a firului conductor al bobinei. O altă metodă de calcul a inductivităţii este cea energetică, bazată pe relaţia:

$$W_m = \frac{Li^2}{2}, \tag{5.6}$$

conform căreia inductivitatea este debitul energiei magnetice (calculată prin densităţii de energie a câmpului magnetic) raportată la pătratul curentului.

Inductivitatea unei bobine determinată în regim staţionar poate fi ulterior folosită în regim dinamic, pentru o plaje destul de largă de frecvenţe, de exemplu pentru calculul tensiunii autoindusesau a energiei acumulate sau a forţei de natură magnetică ce se exercită asupra unor piese in mişcare.

Dintre dispozitivele a căror analiză se face în regim magnetic staţionar menţionăm: bobine, maşini electrice, electromagneţi de acţionare sau de producere a câmpului magnetic pentru acceleratoarele de particule, rezonanţă magnetică de spin, deflexie magnetică, etc.

5.6 Regimurile cvasistaţionare

În regim cvasistaţionar câmpul electromagnetic este variabil în timp, dar suficient de lent pentru ca unele fenomene să poate fi neglijate.

În conductoare chiar şi la frecvenţe destul de mari curentul de deplasare are densităţi mult mai mici decât curentul de conducţie, în consecinţă el poate fi neglijat. Procedând în acest mod se adoptă de fapt ipotezele regimului **cvasistaţionar de tip inductiv (sau anelectric)**:

- corpurile sunt imobile;
- curentul de deplasare este considerat nul.

Formal cea de-a doua ipoteză se obţine considerând corpurile din domeniul de studiu de tip anelectric (cu $\epsilon = 0$); ceea ce implică anularea inducţiei electrice $\mathbf{D}$ şi implicit a curentului de deplasare.

Relaţiile cauzale se pot reprezenta schematic ca în figura ???, obţinută din figura ??? prin eliminarea săgeţii 4, astfel încât din cele două bucle rămâne una singură.

Ecuaţiile fundamentale ale regimului cvasistaţionar inductiv au forma locală:

$$div\mathbf{B} = 0;$$
$$div\mathbf{J} = 0;$$
$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J};$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H});$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}).$$

obţinută din legea fluxului magnetic, legea conservării sarcinii, legea circuitului magnetic, legea inducţiei şi legile de material $\mathbf{B} - \mathbf{H}$, $\mathbf{J} - \mathbf{E}$ în ipoteza în care $D = 0$.

Problema fundamentală a acestui regim este determinarea modului în care difuzează câmpul electric $\mathbf{E}$, cele magnetic $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ şi densitatea de curent $\mathbf{J}$ în interiorul domeniilor conductoare de formă cunoscută, caracteristici de magnetizare şi de conducţie cunoscute şi condiţii iniţiale şi de frontieră cunoscute. Aparent sursele decâmp în acest regim pot fi magnetizaţia permanentă şi câmpul imprimat, dar în realitate cel mai adesea sursele se află în afara domeniului spaţio-temporal analizat şi sunt reprezentate de condiţiile iniţiale şi de frontieră.

Regimul cvasistaţionar are mai multe efecte specifice dacât regimurile statice şi staţionare. Dintre acestea menţionăm două frecvent întâlnite:

- *curenţi turbionari* reprezintă curenţii induşi în corpurile conductoare aflate în câmp magnetic variabil (conform diagramei acesta induce un câmp electric, care conform legii conducţiei este însoţit de un curent electric, curent care produce un câmp magnetic ce se suprapune peste câmpul inductor, perturbându-l);
- *efectul pelicular* constă în redistribuirea curentului de aducţie de preferinţă la suprafaţa conductoarelor şi el este cu atât mai pronunţat cu cât curentul este mai rapid variabil în timp (explicaţia constă în faptul că orice curent variabil produce un câmp magnetic variabil care induce un câmp electric care se suprapune peste cel iniţial, perturbând distribuţia de curent).

Trebuie remarcat că în medii izolante curentul de conducţie este neglijabil sau nul, deci curentul de deplasare nu poate fi neglijat. Neglijând în schimb fenomenul de inducţie electromagnetică se obţine diagrama din figura ????, corespunzătoare regimului **cvasistaţionar capacitiv (sau amagnetic)**, care are următoarele ipoteze definitorii:

- corpurile sunt imobile;
- corpurile sunt amagnetice.

Ecuaţiile fundamentale ale acestui regim au următoare forma locală:

$$div\mathbf{D} = \rho$$
$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t};$$
$$rot\mathbf{E} = 0;$$
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E});$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}).$$

obţinute din legea fluxului electric, legea conservării sarcinii, legea inducţiei, legea circuitului magnetic, legile de material $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ şi $\mathbf{J} - \mathbf{E}$, particularizate în ipoteza $B = 0$.

Problema fundamentală a acestui regim constă în determinarea modului în care difuzează câmpul magnetic **H**, cele electric **D**, **E**, dar şi densitatea de sracină sî cea de curent în domeniile slab conductoare de formă cunoscută cu proprietăţi dielectrice şi de conducţie cunoscute, în condiţii iniţiale şi de frontieră date. Aceste condiţii reprezintă în mod uzual sursa câmpului electromagnetic în acest regim¿ Dintre efectele specifice acestui regim menţionăm:

- *difuzia sarcinilor*, spre deosebire de cazul regimului cvasistaţionar inductiv în care sarcinile se redistribuie practic instantaneu,în regimul capacitiv este necesar un timp pentru a se relaxa.

Exemple de aplicaţii în care este necesară analiza câmpului electromagnetic în regim cvasistaţionar inductiv: încălzire prin curenţi turbionari, aparate de măsură bazate pe curenţi turbionari cum sunt contoarele de inducţie, maşini electrice bazate pe inducţie cum sunt transformatoarele, motoarele asincrone şi frânele electromagnetice, instalaţii de defectoscopie nedistructivă cu curenţi turbionari, evaluarea pierderilor prin curenţi turbionari , etc. .

Regimul cvasistaţionar capacitiv este utilizat în studiul comportării izolanţilor în câmp variabil, ca de exemplu dielectricii condensatoarelor.

În cazul modelării unor dispozitive complexe se pot utiliza ambele tipuri de de regimuri cvasistaţionare, cel inductiov pentru părţile bune conductoare şi cel capacitiv pentru corpuri slab conductoare, urmând ca în izolanţi să fie utilizate ecuaţiile regimului cvasistaţionar capacitiv sau chiar cele ale ale regimurilor magnetic staţionar (pentru determinarea câmpului magnetic) şi electrostatic (pentru determinarea câmpului electric şi a distribuţiei de sarcină).

5.7 Regimul general variabil în mediile imobile. Ecuaţiile lui Maxwell

Dacă se consideră mediile imobile şi se iau în considerare atât curenţii de deplasare cât şi fenomenul de inducţie electromagnetică se spune că regimul este general variabil, indiferent dacă există curent de conducţie sau nu, cum se întâmplă în izolanţi şi în vid. Specific acestui caz este apariţia buclei de săgeţi $3 - 4$ în diagrma de cauzalitate a regimului (fig..????)¿ Această buclă pune în evidenţă legătura foarte strânsă între cele două componente ale câmpului electromagnetic, variaţia în timp a câmpului electric determină apariţia unui câmp magnetic şi invers¿ Generarea reciprocă şi succesivă a acestor două câmpuri explică fenomenul de *propagare* a undelor electromagnetice, specific acestui regim. Unda electromagnetică se desprinde de corpul care a produs-o şi se propagă cu viteză finită în întreg spaţiul, inclusiv prin vid. Din acest motiv în regimul general variabil, câmpul electric şi cel magnetic nu se pot analiza separat, ci ele trebuie studiate simultan.

Ecuaţiile acestui regim au următoarea formă locală:

$$div\mathbf{D} = \rho;$$

$$
\begin{aligned}
div\mathbf{B} &= 0;\\
rot\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\\
rot\mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};\\
\mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E});\\
\mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H});\\
\mathbf{J} &= \mathbf{J}(\mathbf{E}).
\end{aligned}
$$

cunoscută şi sub numele de *sistemul ecuaţiilor lui Maxwell.* Ele provin din legile generale şi de material ale câmpului electromagnetic în ipotez vitezei nule a corpurilor.

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în acest regim are ca necunoscute câmpurile vectoriale $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{H}$, dar şi cele specifice corpurilor ρ şi $\mathbf{J}$, pornind de la domeniul spaţio-temporal de calcul, de la proprietăţile de material dielectrice, magnetice şi de conducţie (eventual împreună cu sursele permanente de câmp $\mathbf{P_p}$, $\mathbf{M_p}$ şi $\mathbf{E_i}$), dar şi condiţiile iniţiale şi de frontieră. Soluţia problemei de câmp permite determinarea efectelor câmpului: energie acumulată, energie transferată, putere disipată (inclusiv încălzirea), cupluri şi presiuni exercitate asupra corpurilor.

Dintre aplicaţiile tipice ale ecuaţiilor acestui regim menţinăm: studiul ghidurilor de unde, studiul propagării undelor în spaţii descise, analiza antenelor, împrăştierea undelor pe diferite obiecte, analiza dispozitivelor pentru prelucrarea microundelor (filtre, amplificatoare, convertoare, etc.).

Capitolul 6

Modelarea spaţio-temporală a câmpului electromagnetic

6.1 Modelarea temporală a câmpului electromagnetic

În regimurile statice şi staţionare ale câmpului electromagnetic toate mărimile caracteristice sun t constante în timp, deci timpul nu apare ca variabilă independentă. Trebuie menţionat totuşi că în realitate nu există nici o mărime fizică absolut constantă în timp. În consecinţă regimurile statice şi staţionare sunt folosite pentru modelarea situaţiilor în care mărimile variază lent, frecvenţe scăzute sau sunt constante pe o lungă perioadă de timp.

În regimurile în care timpul apare în mod explicit, cum sunt regimurile cvasistaţionare sau general variabile se deosebesc următoarele forme de variaţie în timp atât pentru mărimile sursă (datele problemei de analiză), cât şi pentru cele caracteristice câmpului (necunoscutele problemei de analiză):

- armonic (sinusoidal);
- periodic (permanent nesinusoidal);
- tranzitoriu.

În cazurile regimurilor sinusoidale variabilele scalare: ρ sau oricare din cele trei componente ale câmpurilor vectoriale $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{P_p}$, $\mathbf{M_p}$, $\mathbf{E_i}$ sunt fie nule fie au o variaţie sinusoidală în timp de forma:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi) \tag{6.1}$$

în care A este amplitudinea, ω este pulsaţia, iar φ este faza iniţială. Toate mărimile unei probleme în acest regim au o valoare comună a pulsaţiei:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \tag{6.2}$$

în care $f[Hz]$ este frecvenţa, iar $T[s]$ este perioada. Deoarece datele au variaţie sinusoidală în timp rezultă că pulsaţia ω este conoscută¿ pentru ca ioproblemă să fie de regim armonic este necesar ca ea să fie liniară, iar excitaţiile să fie sinusoidale cu pulsaţie comună. Deoarece unei mărimi scalare îi corespund 2 necunoscute (amplitudinea şi faza iniţială). iar uneia vectoriale $3D$ îi corespund 6 necunoscute, rezultă că în regim armonic sinusoidal modelarea temporală dublează numărul necunoscutelor faţă de aceiaşi problemă formulată în regim staţionar.

Un alt regim de variaţie temporală a câmpului electromagnetic este cel periodic permanent nesinusoidal. În acest caz valoarea instantanee a unei mărimi se repetă cu perioda T:

$$x(t+T) = x(t) \tag{6.3}$$

deci este suficientă determinarea variaţiei pe intervalul $t \in [0, T]$, astfel încât $x(T) = x(0)$ pentru ca apoi prin extensie prin periodicitate să fie acoperită întreaga axă reală. Este evident faptul că regimul sinusoidal este un caz particular al regimului periodic. Ca şi în cazul regimului sinusoidal toate sursele de câmp trebuie să fie funcţii periodice cu perioda T comună. Utilizând dezvoltarea în serie Fourier se constată că fiecare mărime scalară periodică este caracterizată de un şir de armonici sinusoidale (deci o mulţime numărabilă), urmând ca armonicile superioare să aibă o importanţă tot mai mică.

Ultimul mod de variaţie în timp este cel tranzitoriu, în care soluţia $x(t)$ este o funcţie definită pe intervalul $t \in [0, \infty]$. Pentru ca o astfel de problemă să poată fi rezolvată este necesară cunoaşterea modului în care variază în timp sursele de câmp pe acelaşi interval semimărginit de timp care începe la momentul iniţial ales convenţional $t = 0$. Spre deosebire de cazul regimului sinusoidal în care nu sunt necesare condiţii la limită în domeniul timpului, în cazul regimului periodic (la $t = 0$ şi $t = T$) pe când în regim tranzitoriu este necesară precizarea unor condiţii iniţiale, la momentul $t = 0$. Condiţiile iniţiale reprezintă modul de variaţie a surselor de câmp înainte de momentul iniţial, pe intervalul $t \in [-\infty, 0]$. Condiţiile iniţiale permit determinarea stării câmpului (implicit a energiei acumulate) la momentul $t = 0$. Spre deosebire de celelalte tipuri de variaţie în cazul regimului tranzitoriu fără să fie impusă nici o restricţie asupra modului de variaţie a surselor de timp nu este suficientă o mulţime numărabilă de valori pentru a caracteriza evoluţia în timp a soluţiei. Totuşi din punct de vedere ingineresc, cunoaşterea soluţiei intr-un număr finit destul de mare de momente de timp din intervalul $[0, t_{max}]$ este suficientă.

6.2 Modelarea geometrică. Idealizări şi simetrii

6.2.1 Modelarea geometrica

Părţile componente ale dispozitivelor electromagentice actuale au o enormă varietate de forme şi dimensiuni. O problemă importantă a modelării acestor dispozitive o constituie modelarea geometrică (spaţială), care constă în aproximarea şi idealizarea formei acestor părţi componente, astfel încât problema analizei câmpului electromagnetic să fie cât mai simplă, dar totuşi soluţia sa să nu fie influenţată sensibil de aproximaţiile făcute.

Cel mai adesea părţile componente sunt asimilate cu corpuri geometrice relativ simple, ale căror suprafeţe sunt plane, cilindrice, sferice sau în cazuri mai rare, descrise de ecuaţii polinomiale pe porţiuni cu racordări "netede" ("β – spline" sau "conice"). În acest fel sunt neglijate toleranţele acestor piese precum şi rugozitatea suprafeţelor. De exemplu, un bloc rectangular (o "cărămidă") se poate modela printr-un paralelipiped geometric ideal.

Această aproximare geometrică, aparent naturală poate ridica probleme referitoare la tratarea muchiilor şi colţurilor, modelul geometric ideal fiind nepotrivit pentru determinarea, spre exemplu, a solicitărilor dielectrice. Datorită efectelor de muchie, câmpul electrostatic este nemărginit pe muchiile unui paralelipiped conductor. Iata de ce în acest caz trebuie luate în considerare razele de curbură reale ale racordurilor între feţe. În schimb, apar dificultăţi dacă blocul este dielectric sau dacă interesează spre exemplu, curentul turbionar indus în blocul paralelipipedic, cazuri în care se poate adopta modelul geometic ideal.

6.2.2 Idealizări geometrice şi simetrii

Pentru a evidenţia multitudinea de cazuri care intervin în modelarea geometrică se va efectua un studiu de caz considerând exemplul simplu al unui corp paralelipipedic cu laturile de lungime a, b şi c, plasat la înălţimea h faţă de suprafaţa plană a unei piese de bază, de mari dimensiuni (figura 6.1). Dacă în particular $a = b = c$, blocul este modelat printr-un *cub*.

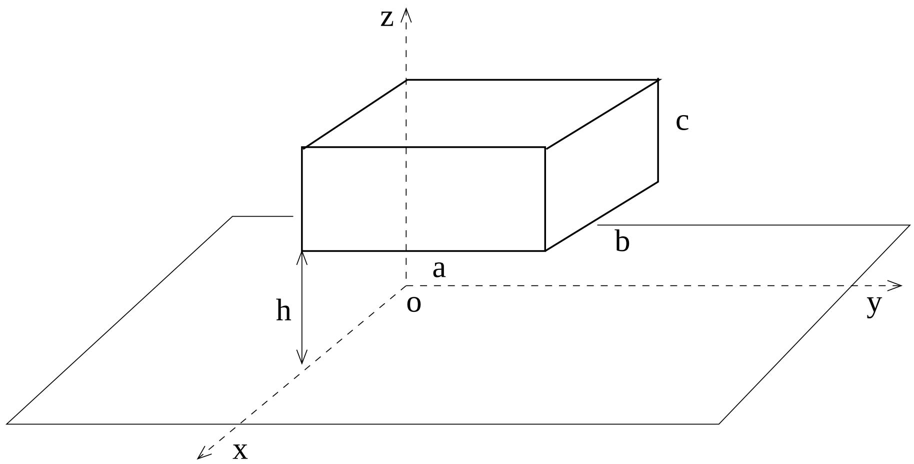

Figura 6.1: Model spaţial 3D

Această configuraţie reprezintă un caz tipic de *problemă tridimensională (3D)*, la care atât datele cât şi soluţia sunt funcţie de trei variabile spaţiale. Dacă se adoptă un sistem de coordonate cartezian (x, y, z), atunci atât datele cât şi soluţia sunt de forma:

$$y = f(x, y, z).$$

Dacă una din dimensiuni, de exemplu a este mult mai mică decât b şi c, blocul devine o *placă*. Dacă grosimea plăcii este neglijabilă, se poate poate considera $a \to 0$, care corespunde modelului din figura 6.2, în care blocul este modelat printr-o *folie* dreptunghiulară (geometric printr-o suprafaţă).

Dacă în schimb a este mult mai mare decât b, c sau h blocul devine o *bară*. Dacă bara este foarte lungă, atunci adoptând $a \to \infty$ ea este modelată printr-un *cilindru* infinit cu secţiune dreptunghiulară (figura 6.3).

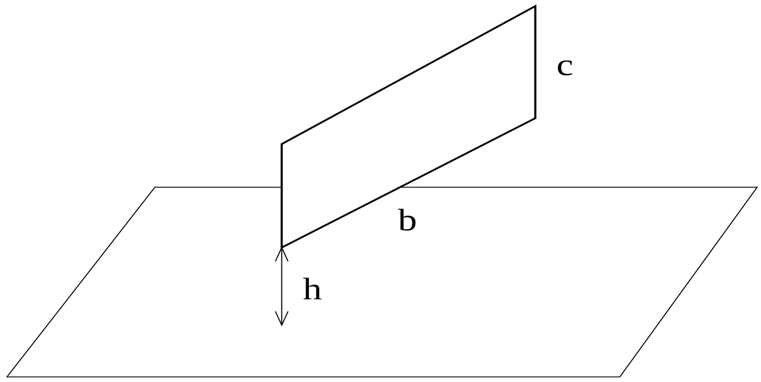

Figura 6.2: Model spaţial 3D cu folie

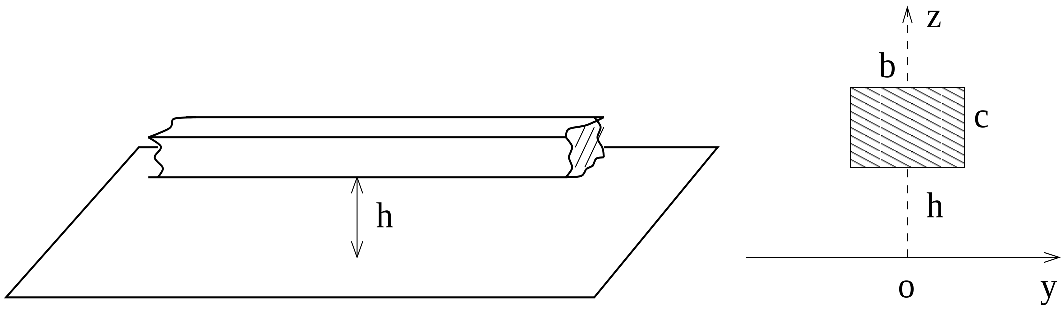

Figura 6.3: Model spaţial 2D

În acest caz, datele problemei şi soluţia ei poate admite o reprezentare de forma:

$$y = f(y, z),$$

care nu depinde de variabila spaţială x. Se spune că s-a adoptat un *model bidimensional plan–paralel (2D)*, deoarece soluţia are aceeaşi formă în toate planele paralele $x = ct$. Trebuie remarcat că în modelul 2D s-au neglijat efectele de capăt, care apar la începutul şi sfârşitul barei.

O discuţie similară poate fi făcută în funcţie de parametrul b, în schimb dacă $c \to \infty$, atunci modelul obţinut nu este unul plan–paralel. Dacă doi dintre cei trei parametri a, b, c au valori mult mai mici decât al treilea şi decât h, atunci bara de lungime finită se poate modela printr-un *fir*. De exemplu, alegând $b = c \to 0$ se obţine un fir paralel cu planul de bază (figura 6.4).

Dacă lungimea firului $a \to \infty$, atunci modelul geometric obţinut este plan – paralel (2D).

În schimb, dacă $a = b \to 0$, atunci firul este perpendicular pe planul de bază (figura 6.5). În acest ultim caz datele problemei şi soluţia ei pot admite faţă de sistemul de coordonate cilindrice care are firul plasat pe axă o reprezentare de forma:

$$y = f(r, z)$$

Se spune că s-a adoptat un model spaţial *bidimensional axi-simetric (2,5D).*

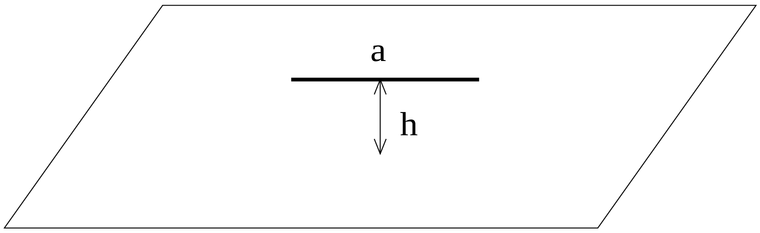

Figura 6.4: Model spaţial 3D cu fir

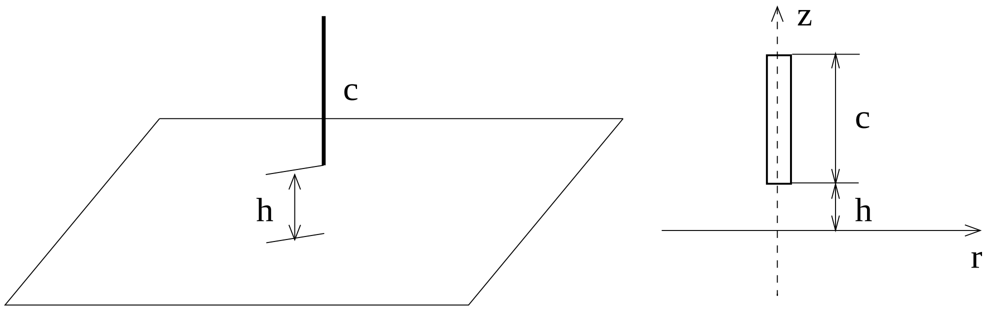

Figura 6.5: Model 2,5D

Dacă, în schimb, toţi parametri a, b şi c sunt neglijibili faţă de h se poate adopta pentru corpul paralelipipedic modelul *punctiform* ($a \to 0$, $b \to 0$, $c \to 0$).

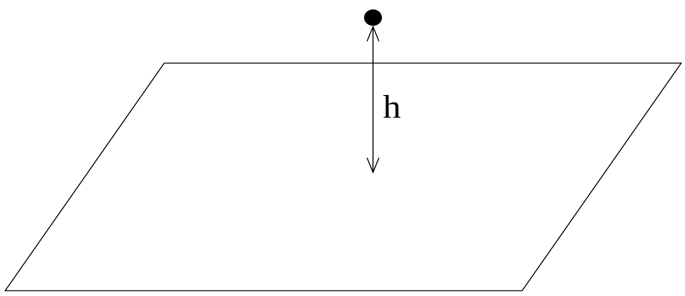

Figura 6.6: Model 2,5D cu corp punctiform

În acest caz (figura 6.6) forma corpului punctiform nu este relevantă, el putând fi modelat, de exemplu, printr-o sferă de mici dimensiuni. Iată cum cubul iniţial a devenit prin modelare o sferă!

Ultimul caz degenerat luat în considerare va fi cel în care dimensiunile a şi b sunt mult mai mari decât c sau h. În acest caz, considerând $a \to 0$ şi $b \to \infty$ se obţine o problemă (figura 6.7) la care soluţia poate fi de forma:

$$y = f(z),$$

deci dependentă de o singură variabilă spaţială. Aceasta este un model *plan–paralel* după două direcţii, deci *unidimensional (1D)*.

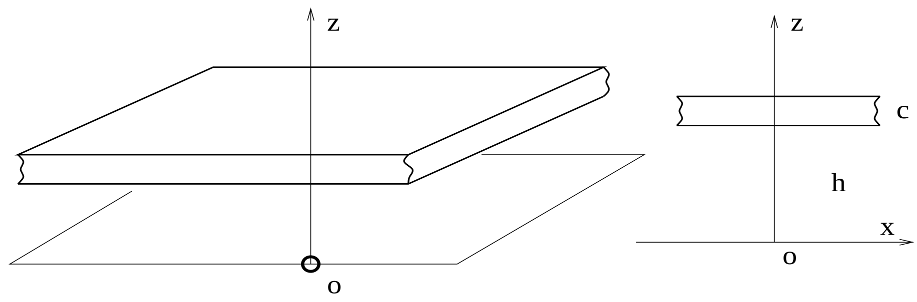

Figura 6.7: Model 1D

Dacă o problemă admite şi simetrie axială dar şi simetrie plan – paraleleă, atunci există un sistem de coordonate cilindrice, astfel încât soluţia problemei

$$y = f(r),$$

depinde doar de variabila radială. În acest caz se spune că problema are *dimensiunea 1,5D*, cum se întâmplă în figura 6.4, dacă lungimea firului $a \to \infty$, dar şi distanţa $h \to \infty$, obţinându-se în final doar un fir infinit lung. Tot în categoria 1,5D se pot considera problemele cu simetrie sferică (axială după două axe diferite).

În concluzie, problemele de câmp pot fi clasificate în funcţie de tipul de simetrie în clase caracterizate prin numărul convenţional de dimensiuni spaţiale ca în tabelul 6.1.

Tabela 6.1: Clasificarea problemelor de câmp electromagnetic

Dimensiunea problemei	Date şi soluţie
1D	f(x)
1,5D	f(r)
2D	f(x, y)
2,5D	f(r, z)
3D	f(x, y, z)

În urma modelării geometrice, prin idealizarea dimensiunilor corpurilor apar următoarele tipuri de obiecte degenerate:

- folii;
- fire;
- corpuri punctiforme.

Din punct de vedere geometric o folie se reprezintă printr-o suprafaţă, nu neapărat plană (de exemplu un cilindru sau o calotă sferică), dar nu se reduce la aceasta. O folie reprezintă un fel aparte de suprafaţă de discontinuitate, deoarece poate fi purtătoare de flux şi admite constante de material de tip electromagnetic şi mărimi specifice pentru caracterizarea câmpului din interiorul foliei. De exemplu, o folie conductoare de grosime g realizată dintr-un material liniar cu conductivitatea σ, scufundată într-un izolant va avea o relaţie de material de forma:

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s \mathbf{E}_t \tag{6.4}$$

în care $\mathbf{E}_t$ este componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric. Această relaţie este obţinută prin integrarea pe grosimea g a legii conducţiei ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) proiectată pe planul tangent la folie. Considerând grosimea g foarte mică, variaţia câmpului în direcţia transversală este neglijabilă, rezultă următoarele caracteristici ale foliei conductoare:

$\mathbf{J}_s = g\,\mathbf{J}$ – densitatea superficială de curent $[A/m]$;

$\sigma_s = g\,\sigma$ – conductivitatea superficială $[S]$.

Densitatea superficială de curent caracterizează starea electrocinetică a foliei şi este un câmp bidimensional de vectori orientat tangent la suprafaţa foliei. El depinde de cele două coordonate parametrice u, v ale suprafeţei S: $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s(u, v)$, deoarece datorită grosimii g foarte mici, densitatea de curent $\mathbf{J}$ are o variaţie nesemnificativă în direcţia normală pe folie.

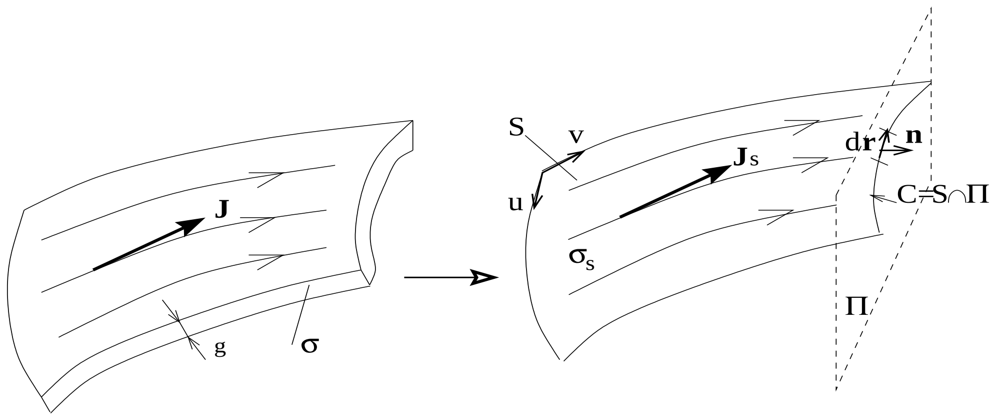

Figura 6.8: Modelarea unei folii conductoare

Pentru calcul curentului ce străbte folia se va folosi relaţia

$$i = \int_C \mathbf{J}_s \mathbf{n} \mathrm{d}r \tag{6.5}$$

obţinută prin trecerea la limită a relaţiei clasice $i = \int_S \mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A}$, şi în care C este intersecţia dintre S şi planul de secţiune Π, iar $\mathbf{n}$ este normala la Π.

În mod asemănător se obţin relaţiile de material specifice foliilor dielectrice şi respectiv magnetice:

$$\mathbf{D}_s = \epsilon_s \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{B}_s = \mu_s \mathbf{H}_t \tag{6.6}$$

în care $\mathbf{E}_t$ şi $\mathbf{H}_t$ sunt componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric, respectiv magnetic şi:

$\mathbf{D}_s = g\,\mathbf{D}$ – inducţia echivalentă superficială (densitatea pânzei de flux electric) $[C/m]$;

$\mathbf{B}_s = g\,\mathbf{B}$ – inducţia magnetică superficială (densitatea pânzei de flux magnetic) $[Tm]$;

$\epsilon_s = g\,\epsilon$ – permitivitatea superficială $[F]$;

$\mu_s = g\,\mu$ – permeabilitatea superficială $[H]$,

iar fluxul electric şi cel magnetic au expresiile:

$$\psi = \int_C \mathbf{D}_S \mathbf{n} \mathrm{d}r, \tag{6.7}$$

$$\varphi = \int_C \mathbf{B}_S \mathbf{n} \mathrm{d}r. \tag{6.8}$$

Chiar dacă grosimea reală g a foliei nu apare în modelul final (aceasta fiind reprezentată de o suprafaţă cu "grosime" nulă), ea joacă un rol important în modelarea fizică, atât pentru calculul parametrilor superficiali de material cât şi pentru interpretarea densităţilor pânzelor de flux.

6.3 Modelarea electromagnetică a foliilor şi firelor

Suprafeţele intervin în modelarea geometrică pentru a reprezenta mulţimea punctelor de pe frontiera domeniului analizat sau a domeniilor de omogenitate pentru proprietăţile de material (frontierele pieselor componente ale dispozitivului). Discontinuitatea proprietăţilor de material determină de obicei şi discontinuitatea mărimilor caracteristice câmpului.

Curbele şi punctele reprezintă muchiile şi vârfurile părţilor componente, deci puncte în care suprafeţele de discontinuitate nu sunt netede. Din acest motiv în astfel de curbe şi puncte câmpul poate avea discontinuităţi de ordin superior, de exemplu să ia valori nemărginite.

Să considerăm pentru început, o suprafaţă de discontinuitate simpla S_d, ce separă două medii liniare cu constante de material diferite (6.9).

La trecerea prin suprafaţa S_d, de la mediul 1 la mediul 2 liniile câmpului electric suferă o discontinuitate a direcţiei (o refracţie). Notând cu α_1 şi α_2 unghiul dintre vectorul câmp electric şi normala la suprafaţă rezultă:

$$tg\alpha_1 = \frac{D_{t1}}{D_{n1}} = \frac{\epsilon_1 E_t}{D_n}, \qquad tg\alpha_2 = \frac{D_{t2}}{D_{n2}} = \frac{\epsilon_2 E_t}{D_n}$$

deci

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \tag{6.9}$$

deoarece conform cu legea inducţiei $E_{t1} = E_{t2} = E_t$ şi conform cu legea fluxului electric $D_{n1} = D_{n2} = D_n$.

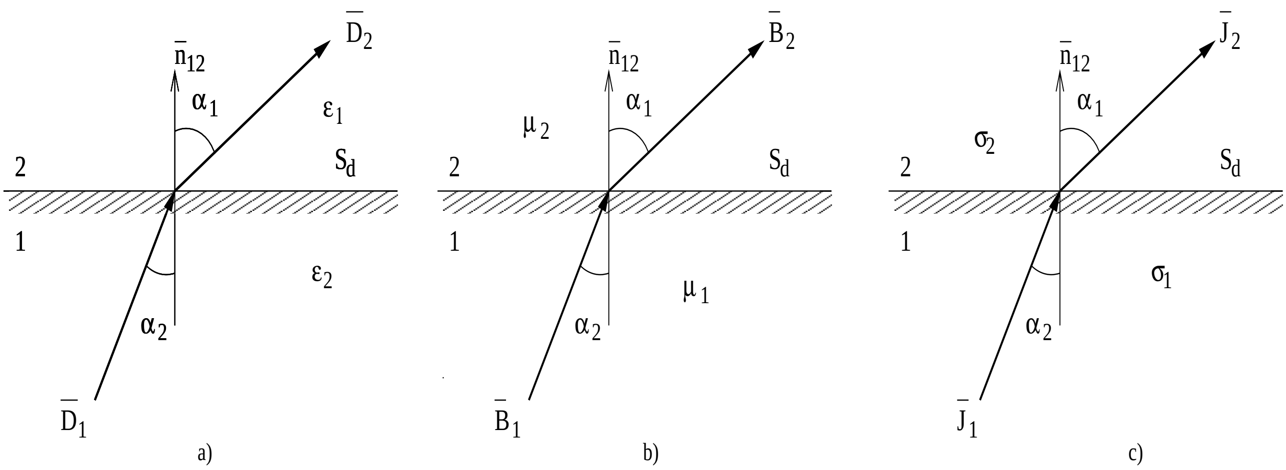

Figura 6.9: Refracţia liniilor de câmp

Dacă unul dintre medii, de exemplu 1 este anelectric ($\epsilon_1 \leftarrow 0, D_1 = 0$), rezultă $D_{n2} = 0$, deci faptul că liniile de câmp trec tangenţial pe la suprafaţa mediului respectiv ($\alpha_2 \leftarrow \pi/2$), ca în figura 6.10 *a*. Dacă în schimb mediul 1 este feroelectric ideal ($\epsilon_1 \leftarrow \infty, E_1 = 0$), rezultă că $E_{t2} = 0$, deci faptul că liniile de câmp sunt orientate în exterior perpendicular pe suprafaţa corpului respectiv ($\alpha_2 \leftarrow 0$), ca în figura 6.10 *b*.

Folosind raţionamente asemănătoare se demonstrează relaţia referitoare la liniile câmpului magnetic:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{6.10}$$

şi faptul că liniile de câmp magnetic sunt orientate perpendicular ($\alpha = 0$) pe suprafaţa corpurilor feromagnetice ideale (cu $\mu \leftarrow \infty$) şi se preling ($\alpha = \pi/2$) pe la suprafaţa corpurilor amagnetice (cu $\mu \leftarrow 0$).

Liniile de curent în regim electrocinetic staţionar satisfac relaţia:

$$\frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \tag{6.11}$$

urmând ca în vecinătatea corpurilor izolante ($\sigma = 0$) liniile de curent să fie orientate tangenţial ($\alpha = \pi/2$) la suprafaţa corpurilor, iar în cazul corpurilor supraconductoare ($\sigma \leftarrow \infty$) liniile de curent să fie orientate ortogonal.

Relaţiile 6.9, 6.10 şi 6.11 sunt cunoscute sub numele de teoremele refracţiei liniilor de câmp.

Trebuie remarcat că în regim electrostatic corpurile conductoare fără câmp imprimat au intensitatea câmpului electric nulă ($E = 0$), conform condiţiei de echilibru electrostaticc($J = 0$). În consecinţă conductoarele se comportă ca domenii feroelectrice ideale şi putem presupune formal $\epsilon \leftarrow \infty$. Liniile câmpului electric din domeniul izolant exterior sunt perpendiculare pe suprafaţa conductorului (figura 6.10, *b*). În realitate în conductor $\epsilon = \epsilon_0$, ceea ce face ca în interiorul conductorului să se anuleze nu numai E, ci şi D. Dispariţia, respectiv apariţia liniilor de câmp electric la suprafaţa conductorului evidenţiază faptul că această suprafaţă este electrizată negativ, respectiv negativ. Chiar dacă iniţial conductorul avea sarcină nulă, prin introducerea sa în câmp electric

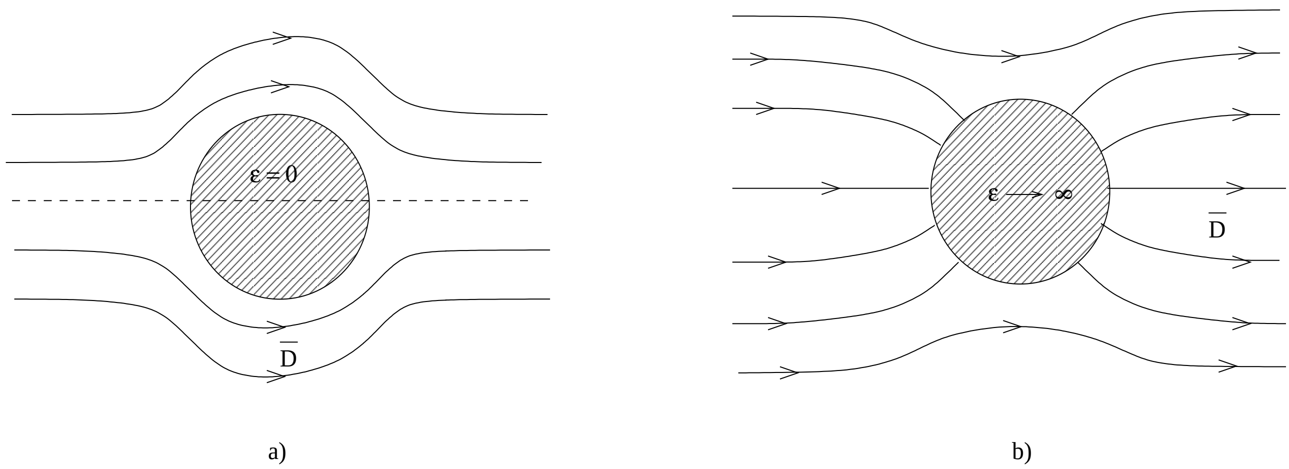

Figura 6.10: Spectrul câmpului în vecinătatea corpurilor cu proprietăţi ideale: a) Câmpul **D**, **B**, **J** pentru ϵ, μ, respectiv $\sigma = 0$; b) Câmpul **D**, **B**, **J** pentru ϵ, μ, respectiv $\sigma \leftarrow \infty$.

sub acţiunea acestuia sarcina se redistribuie şi se separă la suprafaţa sa *sarcini* numite de *influenţă* care au valoare totală nulă şi care fac ca în interior E să se anuleze. Pentru a caracteriza starea starea de electrizare superficială se defineşte mărimea scalară ρ_s măsurată în $[C/m^2]$ şi numită *densitate superficială de sarcină.* Sarcina totală a corpului se obţine prin integrare pe suprafaţă:

$$q = \int_S \rho_s dA. \tag{6.12}$$

În aceste condiţii, legea fluxului electric are următoarea formă pe supraftţe de discontinuitate:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \tag{6.13}$$

sau echivalent $div_s\mathbf{D} = \rho_s$. Componenta normală a inducţiei are salt nul ("se conserva") doar dacă suprafaţa nu este electrizată.

Problema determinării distribuţiei de sarcină pe suprafaţa electrozilor conductori este strâns legată de problema fundamentală a electrostaticii. O dată determinat câmpul în izolant, prin aplicarea relaţiei (6.13) rezultă $\rho_s = \mathbf{nD} = D_n$.

În figura 6.11 a se reprezintă modul în care este distribuită densitatea de sarcină la suprafaţa unui electrod plan-paralel care are o muchie cu raza de curbură r. Se constată că cea mai mare densitate de sarcina $\rho_{smax} = D_{nmax}$ are loc pe muchie, acolo unde cămpul este maxim. Această valoare maximă creşte puternic o dată cu scăderea razei de curbură, urmând ca valoarea sa să fie nemărginită atunci când $r = 0$. Această comportare este cunoscută sub numele de *efect de muchie.*

În figura 6.11 b este prezentată variaţia densităţii ρ_{smax} în funţie de r, calculată cu un model simplificat (metoda imaginilor cu sarcini echivalente distribuite filiform cu densitatea ρ_l), în care:

$$V_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} ln \frac{r}{2a}; \tag{6.14}$$

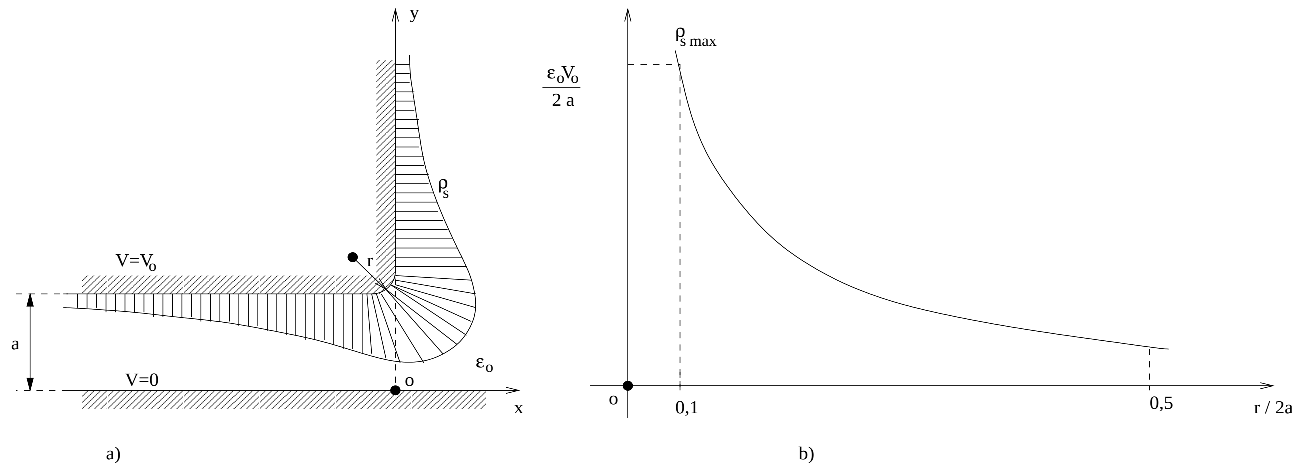

Figura 6.11: Distribuţia sarcinii la suprafaţa unui electrod

$$D_{max} = \frac{\rho_l}{2\pi}(\frac{1}{r} + \frac{1}{2a}); \tag{6.15}$$

deci

$$\rho_{smax} = D_{nmax} = \frac{\epsilon_0 V_0}{2a}(\frac{2a}{r} + 1)\frac{1}{ln\frac{r}{2a}}.$$

Folosind acelaşi tip de raţionament se constată că în cazul vârfurilor şi al intersecţiilor de muchii, densitatea superficială de sarcină şi câmpul maxim tind şi mai rapid către infinit pe măsură ce raza de curbură r a vârfului tinde către zero:

$$\rho_{smax} = D_{nmax} = \frac{\epsilon_0 V_0}{2a}(\frac{2a}{r} + 1). \tag{6.16}$$

Această comportare este cunoscută sub numele de *efect de vârf.*

Datorită efectelor de michie şi de vârf este imposibil şi să se analizeze solicitările dielectrice (câmpul electric maxim comparat cu rigiditatea dielectrică) adoptând forme geometrice simplificate pentru electrozi, mai exact să se neglijeze razele de curbură ale muchiilor şi vârfurilor acestora sau să se reprezinte prin curbe şi puncte (modele filiforme şi punctiforme)

AICI TEXTUL DE LA PAG. 30, 31, 32. ???????

Foliile pot fi şi surse de câmp, dacă sunt polarizate, magnetizate sau sunt sediul unor câmpuri imprimate. În acest caz relaţiile (**??**) şi (**??**) au forma:

$$\mathbf{J}_s = \sigma_s(\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_{\mathbf{i}t}), \qquad \mathbf{D}_s = \epsilon_s\mathbf{E}_t + \mathbf{P}_{\mathbf{p}t}, \qquad \mathbf{B}_s = \mu_s\mathbf{H}_t + \mu_0\mathbf{M}_{\mathbf{p}t}$$

în care:

- $\mathbf{E}_{\mathbf{i}t}[V/m]$ este câmpul electric imprimat, orientat longitudinal la S;
- $\mathbf{P}_{\mathbf{p}t} = g\mathbf{P}_{\mathbf{p}}[C/m]$ este componenta tangenţială a polarizaţiei permanente superficiale

- $\mathbf{M}_{\mathbf{p}t} = g\mathbf{M}_{\mathbf{p}}[C/m]$ este componenta tangenţială a magnetizaţiei permanente superficiale

Foliile pot fi polarizate sau magnetizate nu numai tangenţial, ci şi normal, caz în care se utilizează vectorii orientaţi normal la suprafaţa $\mathbf{P}_{\mathbf{pn}}[C/m]$ şi $\mathbf{M}_{\mathbf{pn}}[A]$ obţinuţi prin integrare de-a lungul grosimii g a vectorilor $\mathbf{P}_{\mathbf{p}}$ şi $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}$ şi numiţi polarizaţie, respectiv magnetizaţie superficială normală. Procedând asemănător cu$\mathbf{E}_{\mathbf{i}}$ se obţin $\mathbf{E}_{\mathbf{in}}$ măsurat în $[V]$ care reprezintă saltul de potenţial intre feţele foliei caz în care apare un dublu strat de sarcină.

Adunând cele două componente se obţine:

- $\mathbf{P}_{\mathbf{p}s} = \mathbf{P}_{\mathbf{p}t} + \mathbf{P}_{\mathbf{pn}}$ - densitatea pânzei de polarizaţie permanentă $[C/m]$;
- $\mathbf{M}_{\mathbf{p}s} = \mathbf{M}_{\mathbf{p}t} + \mathbf{M}_{\mathbf{pn}}$ - densitatea pânzei de magnetizaţie permanentă $[A]$;
- $\mathbf{E}_{\mathbf{i}s} = g\mathbf{E}_{\mathbf{i}t} + \mathbf{E}_{\mathbf{in}}$ - intensitatea superficială a câmpului electric imprimat $[V]$.

Densitatea superficială de sarcină ρ_s reprezintă o altă sursă de câmp specifică foliilor electrizate, mai ales în cazul foliilor dielectrice (izolante), la care electrizarea de obicei de natură neelectrică, obţinându-se de exemplu prin frecare. În cazul foliilor conductoare sarcina totală q este sursă de câmp, în schimb se poate considera că distribuţia sarcinilor induse ρ_s perturbă doar câmpul asigurând echipotenţialitatea foliei.

La traversarea foliilor câmpul electromagnetic suferă salturi (discontinuităţi) ale unor componente. Acestea sunt date de forma legilor câmpului pe suprafeţe de discontinuitate imobile:

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \Longleftrightarrow div_s\mathbf{D} = \rho_s; \tag{6.17}$$

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \Longleftrightarrow div_s\mathbf{B} = 0; \tag{6.18}$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial t} \Longleftrightarrow rot_s\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial t}; \tag{6.19}$$

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial t} \Longleftrightarrow rot_s\mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial t}; \tag{6.20}$$

$$\mathbf{n}_{12}(\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \Longleftrightarrow div_s\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}. \tag{6.21}$$

Firele se reprezintă geometric prinn curbe, nu neapărat drepte (de exemplu, un arc de cerc sau o linie poligonală), dar au în plus proprietăţi dielectrice, magnetice sau de conducţie. Definitoriu pentru un fir este faptul că diametrul transversal este mult mai mic decât lungimea sa, astfel încâtîn secţiunea transversală de arie A, câmpul şi parametrii de material au variaţie neglijabil', iar firul se reprezintă prin curba sa mediană şi este caracterizat local în cazul în care este liniar prin relaţii de forma:

$$i = G_l E_t, \qquad \psi = R_{dl} E_t, \qquad \varphi = R_{ml} H_t \tag{6.22}$$

sau echivalent

$$E_t = R_l i, \qquad E_t = \Lambda_{dl}\psi, \qquad H_t = \Lambda_{ml}\varphi \tag{6.23}$$

în care $E_t[V/m]$ şi $H_t[A/m]$ sunt componentele tangenţiale ale intensităţii câmpului electric, respectiv magnetic, iar

- $G_l = 1/R_l = \sigma A$ este conductanţa lineică $[Sm]$ egală cu inversa rezistenţei lineice $[\Omega/m]$;
- $R_{dl} = 1/\Lambda dl = \epsilon A$ este reluctanţa dielectrică lineică $[Fm]$ egală cu inversa permeanţei dielectrice lineice $[1/Fm]$;
- $R_{ml} = 1/\Lambda ml = \mu A$ este reluctanţa magnetică lineică $[Hm]$ egală cu inversa permeanţei magnetice lineice $[1/Hm]$.

Relaţiile (6.22) şi (6.23) se obţin prin integrarea relaţiilor de material pe secţiunea transversală de arie A, deci i, ψ şi φ reprezintă curentul, fluxul electric şi fluxul magnetic în secţiunea curentă a firului.

Firele pot fi surse de câmp, dacă ele sunt elctrizate, polarizate, magnetizate sau sediul unor câmpuri electrice imprimate. Pentru caracterizarea acestor surse se utilizează mărimile fizice obţinute prin integrarea mărimilor caracteristice surselor pe secţiunea transversală a firului de arie vectorială $\mathring{A} = \mathbf{n}A$:

- $\rho_l = \rho A[C/m]$ - densitatea lineică de sarcină;
- $P_{pl} = \mathbf{P_p}\mathring{A}[C]$ - densitatea lineică a polarizaţiei permanente;
- $M_{pl} = \mathbf{M_p}\mathring{A}[Am]$ - densitatea lineică a magnetizaţiei permanente;

cu excepţia tensiunii lineice imprimate $e_{il} = \mathbf{E_i n}$, care se obţine doar prin proiectarea câmpului imprimat pe direcţia tangenţială.

Intergrând relaţiile ??? fire de material pe suprafaţa de arie A se obţin formulele lor locale pe fire:

$$\begin{aligned} \psi &= R_{dl}E_t + P_{pl}; \\ \varphi &= R_{ml}H_t + \mu_0 M_{pl}; \\ i &= G_{lt}(E_t + e_{il}). \end{aligned} \tag{6.24}$$

Notând cu $E_t = u_l$ tensiunea lineică, în cazul firelor conductoare relaţia de material are forma $u_l + e_{il} = R_l i$, care integrată de-a lungul firului conduce la relaţia clasică a lui Joubert din teoria circuitelor electrice filiforme.

Corpurile de dimensiuni neglijabile sunt reprezentate în modelarea electromagnetică prin “puncte materiale”. Spre deosebire de folii şi fire corpurile punctiforme cu proprietăţi de material diferite nu modifică spectrul câmpului electromagnetic, de exemplu o impuritate conductoare scufundată într-un izolant perturbă câmpul cu atât mai puţin cu cât diametrul ei este mai mic. În schimb, corpurile punctiforme pot influenţa puternic câmpul electromagnetic atunci când sunt surse ale câmpului. Pentru a caracteriza calitativ aceste surse de câmp se utilizează:

- $q = \rho V[C]$ - sarcina corpului punctiform;
- $\mathbf{p_p} = \mathbf{P_p}V[Cm]$ - momentul dipolar electric permanent;
- $\mathbf{m_p} = \mathbf{M_p}V[Am^2]$ - momentul dipolar magnetic permanent;

- $\mathbf{j_i} = \sigma \mathbf{E_i} V [Am]$ - curentul electric imprimat de un corp punctiform.

Se constată că toate aceste mărimi se obţin prin integrarea mărimilor locale corespunzătoare pe volumul V al corpului, şi deoarece acesta este neglijabil prin înmulţirea cu acest volum.

Forma globală a legilor câmpului electromagnetic trebuie să ţină cont de prezenţa foliilor, firelor şi punctelor materiale:

- sarcina totală care intervine în legea fluxului electric sau în cea a conservării sarcinii are expresia:
$$q = \int_D \rho dv + \int_{Sd} \rho_s dA + \int_{Cd} \rho_l dr + \sum_{k=1}^{n} q_k \tag{6.25}$$
obţinută prin suma contribuţiilor corpurilor de volum nenul D, foliilor Sd, firelor Cd şi corpurilor punctiforme $k = 1, n$.

- curentul de conducţie care intervine în legea circuitului magnetic sau în cea a conservării sarcinii este:
$$i_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \mathbf{JdA} + \int_{C=S_\Gamma \cap Sd} \mathbf{J_s n} dr + \sum_{k=1}^{n} i_k \tag{6.26}$$

- fluxul electric care intervine în legea fluxului electric sau în legea circuitului magnetic este:
$$\psi_S = \int_S \mathbf{DdA} + \int_{C=S \cap Sd} \mathbf{D_s n} dr + \sum_{k=1}^{n} \psi_k \tag{6.27}$$

- fluxul magnetic care intervine în legea fluxului magnetic sau în legea inducţiei este:
$$\varphi_S = \int_S \mathbf{BdA} + \int_{C=S \cap Sd} \mathbf{B_s n} dr + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \tag{6.28}$$

- puterea transferată de câmp corpurilor este:
$$P = \int_D \mathbf{JE} dv + \int_{Sd} \mathbf{J_s E} dA + \int_{Cd} i E_t dr \tag{6.29}$$
obţinută prin suma integralelor din densitatea de volum a puterii, densitatea superficială a puterii disipate în folii şi densitatea lineică a puterii disipate în fire conductoare.

6.4 Serii ierarhice de modele

Pentru a evidenţia faptul că acelaşi dispozitiv admite mai multe modele cu grade diferite de rafinare va fi efectuat un studiu de caz pentru un dispozitiv foarte simplu şi anume cablul coaxial.

Cablul coaxial (figura 6.12) este alcătuit dintr-un fir conductor cu secţiune circulară (de obicei din Cu) înconjurat de un izolant (de obicei polietilenă), care în exterior este înconjurat de o manta cilindrică conductoare (Cu). Acest dispozitiv este utilizat pentru transmiterea semnalelor electrice, astfel încât:

– semnalul să nu se modifice, chiar la frecvenţe înalte sau când acestea sunt foarte rapid variabile în timp;

– dispozitivul să nu producă perturbaţii electromagnetice în jurul său;

– semnalul transmis să nu fie perturbat de câmpuri electromagnetice exterioare.

În regim staţionar (c.c.) sau la frecvenţe joase, curentul electric produs de sursa de la intrare străbate longitudinal conductorul central, consumatorul şi se întoarce prin mantaua exterioară, astfel încât în condiţiile în care izolantul este perfect (fără curenţi de pierderi) curentul din sursă este egal cu cel din consumator.

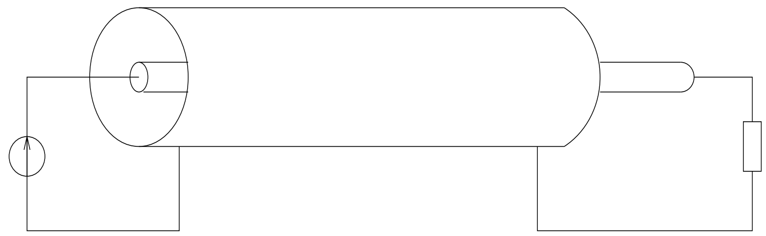

Figura 6.12: Cablu coaxial

Tensiunea electrică între terminalele de ieşire nu este egală cu tensiunea la intrare, decât la mersul în gol, deoarece de-a lungul conductorului are loc a cădere longitudinală de tensiune. În consecinţă în regim staţionar singurul parametru caracteristic este rezistenţa lineică a cablului coaxial. Regimul câpului electromagnetic care prezintă interes în acest caz este regimul electrodinamic staţionar. Problema este foarte simplă deoarece este plan-paralelă, iar curentul se distribuie uniform în secţiunea transversală atât în firul central (A_i) cât şi în manta (A_m) urmând ca valoarea rezistenţei lineice R_l să fie egală cu raportul dintre rezistivitate şi aria secţiunii transversale: $R_l = R_c/l + R_m/l = \rho(1/A_c + 1/A_m)$. Circuitul echivalent este prezentat în figura 6.13 *a*.

Pe măsură ce frecvenţa tensiunii de alimentare creşte intervin alte două efecte în funcţionarea cablului: efectul capacitiv (curentul de deplasare orientat transversal prin izolantul dintre conductorul central şi manta) şi cel inductiv (tensiunea autoindusă, datorată câmpului magnetic ce încojoară conductorul central). Pentru caracterizarea acestor efecte se pot folosi capacitatea lineică C_l şi respectiv inductivitatea lineică L_l.

Pentru calculul acestor parametri lineici trebuie rezolvată o problemă electrostatică şi respectiv una de regim magnetic permanent. Parametrii R_l, C_l şi L_l calculaţi în regim permanent pot fi utilizaţi la analiza comportării dinamice. Cel mai simplu model de circuit cu parametri concentraţi pentru cablul coaxial în regim dinamic este cel prezentat în figura 6.13 *b*.

Schema în T este o aproximare utilă doar pentru cabluri relativ scurte. Un cablu lung poate fi prin înlănţuirea a n astfel de scheme, valabile pentru tronsoane de lungime l/n. În realitate, parametrii unui cablu nu sunt concentraţi, ci distribuiţi. Considerând $n \Longleftarrow \infty$ rezultă o schemă în T pentru fiecare tronson de lungime infinit mică, urmând ca întreg cablul să fie caracterizat de un model de linie lungă (de transmisie), ca în figura 6.13 *c*, caracterizat de ecuaţiile telegrafiştilor (Thomson). Un astfel de model permite simularea

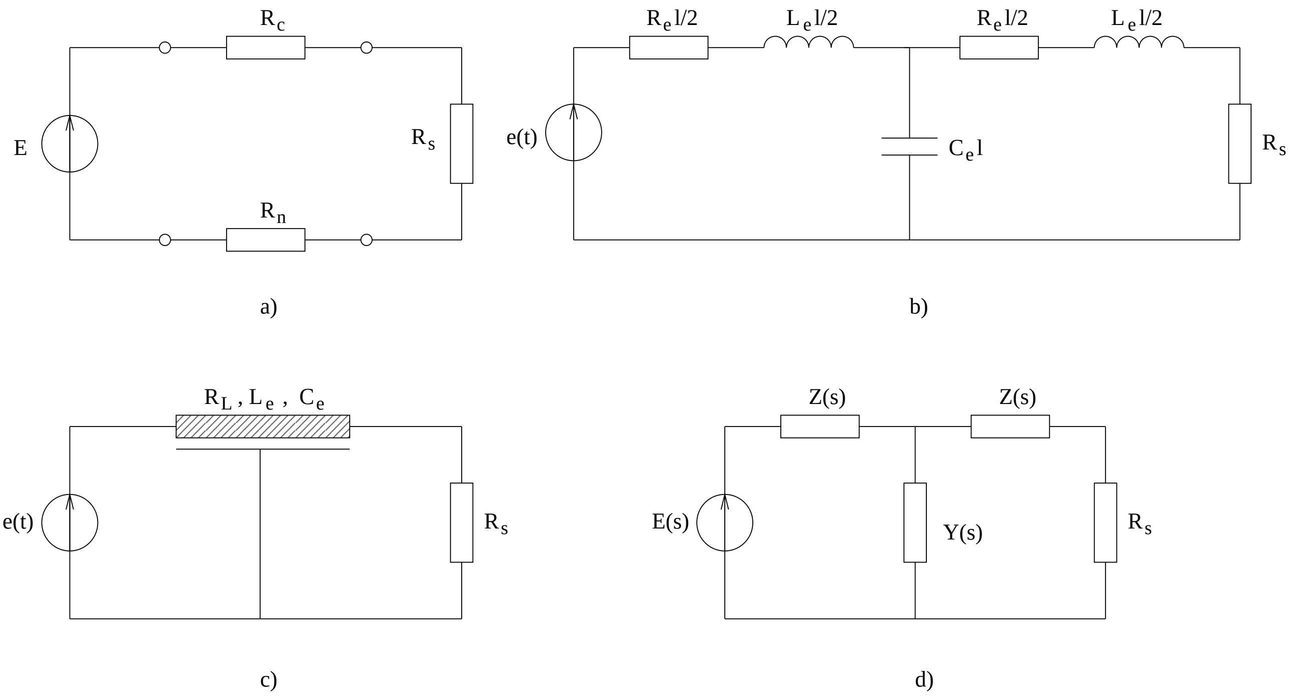

Figura 6.13: Modele ale cablului coaxial. a) Model staţionar; b) Model cu parametrii concentraţi; c) Model cu parmetrii distribuiţi; d) Model operaţional.

fenomenului de propagare şi determinarea vitezei de propagare a frontului de undă (semnalul electric), a timpilor de întârziere, precum şi a dispersiei datorate pierderilor sau a reflexiilor la capetele liniei.

Utilizând domeniul frecvenţei modelele prezentate anterior au reprezentarea operaţională din figura 6.13 *d*, caracterizată de impedanţa longitudinală $Z(s)$ şi de admitanţa transversală $Y(s)$. În cazul modelelor cu parametri concentraţi, funcţiile de circuit $Z(s)$ şi $Y(s)$ sunt funcţii raţionale cu un număr finit de poli şi zerouri, de exemplu în cazul modelului 6.13 *b* $Z(s) = (R_l + sL_s)l/2, Y(s) = sC_l l$. În schimb în cazul modelelor cu parametri distribuiţi funcţiile de circuit $Z(s)$ şi $Y(s)$ au o infinitate de poli şi zerouri.

Un efect important, specific regimului cvasistaţionar, care apare şi în cablul coaxial este efectul pelicular. Curentul electric de conducţie ce parcurge conductoarele cablului produce un câmp magnetic variabil în timp, dacă şi curentul variază în timp. Câmpul electric indus de acest câmp magnetic perturbă distribuţia iniţială de curent, urmând ca firul central să fie străbaţut de curent variabil care se distribuie de preferinţă superficial, la periferia acestuia. În consecinţă rezistenţa lineică întâmpinată la trecerea unui curent alternativ creşte odată cu frecvenţa, aria aparentă prin care trece curent fiind tot mai mică. Pentru a caracteriza cantitativ acest efect este necesară analiza cablului coaxial în regim cvasistaţionar, de tip anelectric în interiorul conductoarelor şi tip amagnetic înh izolant. În final se obţine o schemă echivalentă ca cea din figura 6.13 *d*, dar cu expresii mai complicate pentru $Z(s)$ şi $Y(s)$.

Seria modelelor posibile pentru cablul coaxial nu este încheiată, modelele mai complicate putând lua în considerare unul sau mai multe dintre următoarele efecte: curenţi de pierdere prin izolanţul imperfect, efectele de capăt (unde câmpul electric nu mai este în mod necesar plan-paralel), imperfecţiunile geometrice atât cele longitudinale (modificarea diametrului firului), cât sî cele transversale (abateri de la forma circulară perfectă), etc. Pentru a analiza efectul acestor perturbaţii este necesară rezolvarea unor probleme de câmp care de obicei nu admit soluţie analitică şi care pentru a obţine rezultate utile la frecvenţe foarte înalte sunt formulate în regim general variabil.

Iată deci că din păcate analiza unui singur model pentru un dispozitiv nu permite stabilirea acurateţii sale. Deci pentru a delimita domeniul de aplicabilitate al unui model acesta trebuie studiat comparativ cu un model mai complicat al aceluiaşi dispozitiv.

În figura ??? se prezintă variaţia factorului de transfer în tensiune α la mers în gol funcţie de frecvenţă printr-un cablu coaxial de impedanţă caracteristică $Z_c = 50\Omega$. Acest factor a fost calculat cu patru modele diferite:

- $\alpha = 1$, modelul de regim staţionar figura 6.13 a;
- $\alpha = \frac{|1/j\omega C|}{R+j\omega L+1/j\omega C|} = \frac{1}{sqrt((1-\omega^2 LC)^2+\omega^2 C^2)}$ modelul cu parametri concentraţi (schema în T din figura 6.13 b);
- $\alpha =$??? modelul de linie lungă cu parametri distribuţi (figura 6.13 c;
- $\alpha =$??? modelul de linie de transmisie cu efect pelicular (figura 6.13 d în care Z(s) şi Y(s) corespund parametrilor tranzitivi pentru liniile lungi).

Pentru cazul particular considerat, frecvenţele de separţie pentru cele patru modele sunt:

$$f_1 = ??? \qquad f_2 = ??? \qquad f_3 = ???$$

dacă eroarea acceptabilă este de 1% şi respectiv:

$$f_1 = ??? \qquad f_2 = ??? \qquad f_3 = ???$$

dacă eroarea acceptabilă este de 0.1%.

Iată cum acelaşi obiect fizic admite o serie ierarhică de modele, fiecare corespunzând unor anumite ipoteze simplificatoare şi fiind valabil pentru o clasă a surselor de câmp. În cazul nostru fiecare model este valabil pentru o plajă de frecvenţe a semnalului transmis.

Trebuie remarcat că în activitatea inginerească de modelare ţinta nu este de a obţine modelul de maximă acurateţe, ci esenţial este compromisul optim între acurateţe şi simplitate. Studiul, analiza şi proiectarea unui dispozitiv trebuie făcute cu modelul cel mai simplu, dar care are o eroare de modelare satisfăcătoare (de obicei nu mai mică de 1) pentru scopul propus. Utilizarea unui model mult mai sofisticat decât cel adecvat conduce la o risipă inacceptabilă de resurse (efort de cercetare, măsurare, timp de calcul şi în ultimă instanţă bani). Iată de ce ar trebui determinate pentru fiecare model şi doameniul său de valabilitate, mai exact de aplicabilitate prin aflarea felului în care variază eroarea de modelare (de neglijare a unui efect) faţă de una sau mai multe mărimi caracteristice, de xemplu, în cazul cablului coaxial caracterizat în principal prin factorul de transmisie (raportul dintre tensiunea de ieşire sî cea de intrare), acurateţea unui model îl reprezintă variaţia cu frecvenţa a abaterii factorului de transmisie al respectivului model faţă de modelul superior din punct de vedere ierarhic (sau modelul la care un anumit efect nu a fost neglijat).

Capitolul 7

Aplicaţii

7.1 Cablu coaxial

Se va analiza cablul coaxial descris anterior în următoarel ipoteze simplificatoare:

- Se neglijează toleranţele şi rugozitatea suprafeţelor;
- Se neglijează efectele de capăt care apar la începutul şi sfrârşitul cablului;
- Se consideră dielectricul neelectrizat liniar, izotrop, omogen şi fără pierderi ($\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \sigma = 0$);
- Se consideră că toate materialele sunt nemagnetice ($\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$);
- Se consideră cablul imobil şi că mărimile nu variază în timp.

Scopul analizei este de a determina capacitatea lineică C_l şi inductivitatea lineică L_l.

Pentru primul parametru se va considera cablul alimentat la o sursă de tensiune constantă cu ieşirea în gol. Firul central şi mantaua conductoare reprezintă cei doi electrozi ai unui condensator. Ei sunt electrizaţi cu sarcini egale, dar de semn opus şi produc în dielectric un câmp electric radial. Regimul câmpului în care va fi determinat parametrul C_l este cel electrostatic, cu ecuaţiile: $div\mathbf{D} = \rho$, $rot\mathbf{E} = 0$ şi $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$.

Pentru calculul inductivităţii se va considera cablul cu ieşirea în scurtcircuit şi alimentat cu os ursă de curent dat, constant în timp. Curentul ce străbate firul central şi se întoarce prin manta produce un câmp magnetic constant în timp, ce va înconjura firul central.

Pentru determinarea parametrului L_l se va considera regimul magnetic staţionar, cu ecuaţiile: $div\mathbf{B} = 0$, $rot\mathbf{H} = \mathbf{J}$ şi $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$.

Firul central se consideră un cilindru din Cu ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma \neq 0$), cu raza a şi lungimea L, iar mantaua un tub cilindric circular tot din Cu cu raza internă b şi cea exterioară c. Dielectricul izolant ocupă spaţiul dintre razele a ;si b şi are constantele de material ϵ, μ_0, $\sigma = 0$. Configuraţia geometrică evidenţiază două tipuri de simetrii: axisimetrică şi plan-paralelă. În consecinţă, problema este de tip $1.5D$, dar poate fi rezolvată sî ca o problemă $2D$, cu reţinerea în domeniul de calcul doar a unui sfert din secţiune, deoarece atât Ox, cât şi Oy sunt axe de simetrie. Domeniul de calcul este un sfert dintr-o coroană circulară (figura 7.1). Deoarece dielectricul este neelectrizat, sursele interne de câmp sunt nule, iar câmpul electrostatic fiind produs exclusiv de sarcinile distribuite la suprafaţa celor doi electrozi ($\rho = 0$, $\rho_s \neq 0$). El se datorează unor surse externe domeniului de calcul (reprezentate prin condiţii de frontieră nenule).

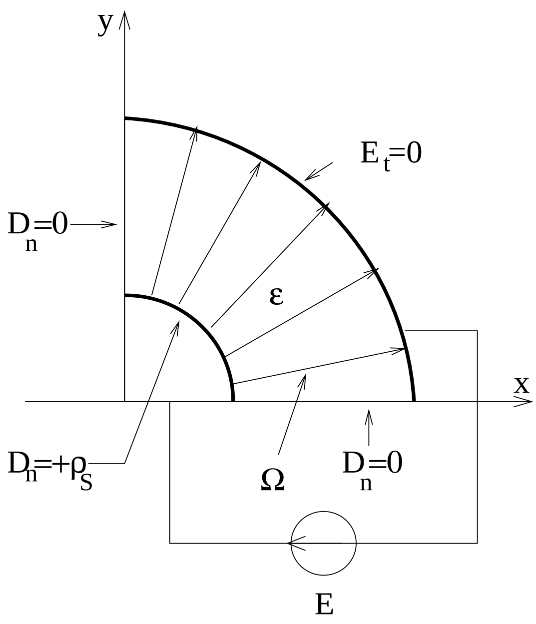

Figura 7.1: Cablu coaxial – secţiune

În regim magnetic staţionar sursele interne de câmp sunt nenule în conductoare şi nule în dielectric, în schimb sursele externe sunt nule ($H_{ext} = 0$).

Mărimile globale ce caracterizează cablul în regim electrostatic sunt:

$$u = \int_{c_{AB}} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \qquad \psi = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{A},$$

u fiind tensiunea între electrozi, calculată pe o curbă radială de la $r = a$ la $r = b$, iar $\psi = \rho_s \pi l a/2$ este fluxul electric ce străbate dielectricul, calculat pe suprafaţa unui sfert de cilindru de rază $r \in (a, b)$ şi lungime l. Conform legii fluxului electric sarcina firului este $q = 4\psi$. Capacitatea lineică este:

$$C_l = \frac{C}{l} = \frac{q}{lu} = \frac{4\psi}{lu} = \frac{2\rho_s \pi}{u}$$

Problema calculului capacităţii s-a redus astfel la problemna fundamentală a electrostaticii. Dintre cele două alternative exicitaţie a electrozilor s-a ales varianta în care este cunoscută sarcina şi trebuie calculată tensiunea prin integrarea câmpului. Datorită simetriei axiale sarcina se distribuie uniform pe cei doi electrozi $\rho_{s1} = q/(2\pi a l)$, $\rho_{s2} = -q/(2\pi b l)$. Pentru $r = b$ se poate impune condiţia $E_t = 0$, care este preferabilă condiţiei $D_n = \rho_{s2}$.

Mărimile globale ce caracterizează cablul în regim magnetic staţionar sunt:

$$i = \int_S \mathbf{J} d\mathbf{A}, \qquad W_m = \int_D w dv,$$

i fiind curentul ce trece prin firul central de secţiune S al cablului, iar W_m este energia magnetică obţinută prin integrarea densităţii de energie $w_m = \mathbf{BH}/2 = \mu_0 H^2/2$ pe un sfert din domeniul cablului. Deoarece conductoarele sunt masive este indicat să se evite calculul inductivităţii cu formula liniară şi se prefere metoda energetică. Energia totală este $4W_m = Li^2/2$, iar inductivitatea lineică are expresia:

$$L_l = \frac{L}{l} = \frac{8W_m}{i^2 l} = \frac{4\pi}{i^2}\int_0^c w_m r dr = \frac{2\pi\mu_0}{i^2}\int_0^c H^2(r) r dr.$$

Problema calculului inductivităţii se reduce la problema determinării câmpului magnetic produs de o distribuţie dată de curent.

7.2 Cuva electrolitică

Se consideră o cuvă electrolitică de formă paralelipipedică, având pereţii izolaţi cu excepţia unuia din cei laterali care este catodul metalic, foarte bun conductor. În mijlocul cuvei se introduce vertical anodul, care este un electrod metalic, cilindric circular cu lungimea egală cu adâncimea cuvei.

Să se analizeze fenomenele din cuvă şi să se calculeze grosimea stratului de metal depus dacă între cei doi electrozi se aplică un interval de timp o tensiune constantă cunoscută.

Datorită câmpului electric din cuvă (aparent datorită tensiunii aplicate între electrozi) electrolitul va trece în stare electrocinetică. El va fi parcurs de curent, care se închide prin electrozi şi sursa exterioară. Cu cât tensiunea aplicată va fi mai mare, cu atât densitatea de curent va fi mai mare (curentul fiind proporţional cu tensiunea şi conductanţa electrolitului). Datorită conducţiei are loc un transfer de masă în electrolit şi unul neglijabil în electrozi, ceea ce face ca pe anod să se depună cationi, care sunt extraşi din catod.

Pentru analiza cantitativă a acestor fenomene vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- Se neglijează toleranţele şi rugozitatea materialelor;
- Electrozii se consideră supraconductori ($\sigma \to \infty$);
- Electrolitul este un conductor liniar, izotrop şi omogen;
- Se neglijează poteţialul de electrod (mult mai mic decât tensiunea aplicată) deci şi dublul strat de sarcină de la suprafaţa electrozilor;
- Mediile sunt macroscopic imobile iar mărimile sunt constante în timp.

Fenomenul fundamental este distribuţia curentului de conducţie în cuvă, curent care generează transferul de masă (electroliză).

Deoarece nu interesează distribuţia câmpului magnetic analiza va fi făcută în regim electrocinetic staţionar, folosind ecuaţiile:

$$\mathrm{div}\mathbf{J} = 0; \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0; \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \tag{7.1}$$

Se va nota cu a, b şi c lungimea celor trei laturi ale cuvei. Diametrul electrodului central este d iar distanţa dintre axa sa şi catod este $h = b/2$.

Problema are caracter plan – paralel (2D) (figura 7.2), configuraţia câmpului fiind aceiaşi în diferite secţiuni orizontale. Datorită simetriei faţă de planul yOz se poate studia doar jumătate din dreptunghiul de laturi $a \times b$. Domeniul de calcul este dreptunghiul $(0, a/2) \times (0, b)$ din care s-a eliminat semicercul cu diametrul d şi centul în $x = 0, y = b/2$, corespunzător secţiunii prin anod. Domeniul supus analizei este alcătuit exclusiv din electrolit omogen şi are conductivitatea σ.

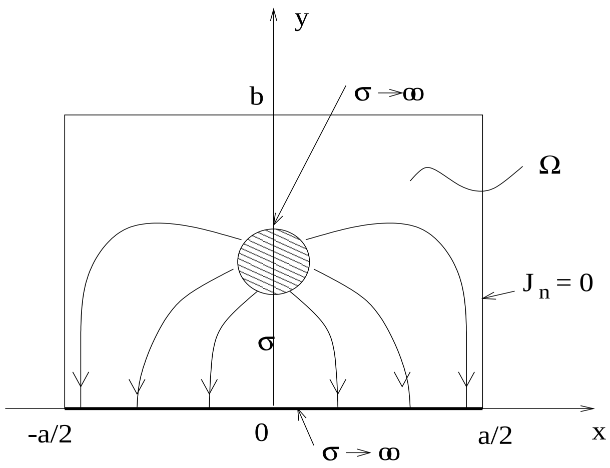

Figura 7.2: Cuva electrolitică

Câmpul electrocinetic nu are surse interne, mai mult datorită caracterului izolant şi tipului de simetrie, pe frontiera domeniului nu se injectează curenţi, decât prin electrozi.

Pentru a caracteriza global starea electrică a cuvei se utilizează:

$$u = \int_{C_{AB}} \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{r}, \quad i = \int_S \mathbf{J} \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{7.2}$$

tensiunea electrică u calculată pe o curbă C_{AB} ce uneşte electrozii şi curentul i calculat pe o suprafaţă S, transversală faţă de curent (de exemplu, pe suprafaţa unui electrod).

Parametrul cel mai important al cuvei este rezistenţa sa electrică $R = u/i$, pentru a cărui determinare trebuie rezolvată problema fundamentală a electrocineticii. Vom prefera formularea în care electrozii au fiecare caracter echipotenţial ($E_t = 0$) cu densitatea de curent J_n necunoscută, în schimb este cunoscută tensiunea u între electrozi. După determinarea distribuţiei de curent $\mathbf{J}$ se determină curentul total prin integrare.

Densitatea fluxului de masă transferată prin electroliză se determină cu ajutorul formulei locale a legii transferului de masă:

$$\delta = k\mathbf{J}, \tag{7.3}$$

urmând ca masa specifică depusă pe unitatea de suprafaţă $[kg/m^2]$ să fie:

$$\rho_S = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}A} = \delta_n t = kJ_n t, \tag{7.4}$$

în care J_n este componenta normală a densităţii de curent la suprafaţa electrodului iar t este timpul cât durează procesul de electroliză. Grosimea g a stratului depus se calculează prin împărţirea lui ρ_S la densitatea ρ $[kg/m^3]$ a materialului depus:

$$g = kJ_nt/\rho. \tag{7.5}$$

Iată deci că problema se reduce la determinarea densităţii de curent la suprafaţa electrozilor. Folosin forma integrală a legii electrolizei $m = kit$ se poate determina masa totală depusă, dar grosimea stratului şi neuniformitatea acestuia se poate determina doar folosind forma locală a legii şi soluţia problemei de câmp electrocinetic.

7.3 Electromagnetul plonjor

Se consideră o bobină circulară înconjurată de un circuit feromagnetic format dintr-o armătură fixă (solidară cu bobina) şi una mobilă, ce poate avea o mişcare axială de translaţie (figura 7.3). Se urmăreşte analiza câmpului electromagnetic şi determinarea forţei ce se exercită asupra armăturii mobile pentru diferite poziţii ale acesteia, în condiţiile în care bobina este alimentată în curent continuu sau la o tensiune alternativă dată.

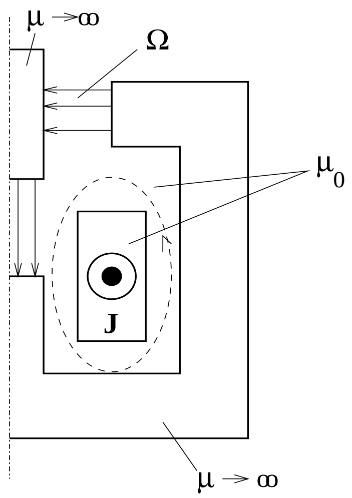

Figura 7.3: Electromagnet cu plonjor

Funcţionarea electromagnetului se bazează pe câmpul magnetic produs de curentul din bobină (conform legii circuitului magnetic). Liniile câmpului magnetic tind să înconjoare curentul ce le-a produs, dar sunt dirijate de materialele feromagnetice. Reluctanţa circuitului magnetic este tot mai mică pe măsură ce întrefierul scade, ceea ce face ca fluxul magnetic şi implicit inductivitatea bobinei să crească. Conform teoremei forţelor generalizate, la flux constant va acţiona asupra armăturii mobile o forţă care tinde să micşoreze energia câmpului magnetic ($\omega_m = \varphi^2/2L$), deci va mări inductivitatea. Forţa electromagnetului tinde deci să micşoreze întrefierul, indiferent cum este sensul curentului prin bobină.

Analiza cantitativă a acestor fenomene va fi făcută în următoarele ipoteze simplificatoare:

- Se neglijează imperfecţiunile tehnologice (cotele sunt exacte, fără toleranţe iar suprafeţele perfecte, fără rugozitate);
- Armăturile sunt considerate liniare, izotrope şi omogene din punct de vedere magnetic, şi pentru a simplifica modelul vor fi considerate feromagnetice ideale ($\mu \to \infty$);
- Se neglijează neuniformitatea distribuţiei de curent în bobină datorită factorului de umplere subunitar (explicat prin prezenţa izolaţiei între spire);
- Se consideră că în afara electromagnetului nu există surse de câmp magnetic;
- Corpurile se consideră imobile iar mărimile electromagnetice caracteristice constante în timp.

În consecinţă pentru analiza celui mai simplu model al electromagnetului se va adopta regimul magnetic staţioar, în care câmpul este caracterizat de ecuaţiile:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{7.6}$$

Datorită simetriei axiale a problemei, aceasta are dimensiunea 2,5D şi este suficient studiul câmpului într-un semiplan ce trece prin axa de simetrie. Domeniul de calcul va fi redus doar la bobina şi aerul din jurul ei, inclusiv din întrefieruri, excluzându-se piesele feromagnetice ideale. Înrefierul radial va trebui mărginit superior de o frontieră fictivă (care poate fi plasată la nivelul superior al armăturii fixe dacă se neglijează efectul de umflare a liniilor de câmp). În consecinţă, în întreg domeniul de calcul, materialul este nemagnetic, cu $\mu = \mu_0$i.

Câmpul magnetic este produs exclusiv de surse interne, respectiv de curentul din bobină. Pe frontiera feromagnetică a domeniului $H_t = 0$ (deoarece $\mu = 0$) iar pe frontiera superioară a întrefierului radial $B_n = 0$ (deoarece nu există surse externe de câmp).

Mărimile globale ce caracterizează acest sistem sunt:

$$\theta = ni = \int_S \mathbf{J}\mathrm{d}\mathbf{A}, \quad \varphi_f = \int_{S_\Gamma} \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}, \quad \varphi = n\varphi_{f_{med}} = \frac{n}{A}\int_S \varphi_f \mathrm{d}\mathbf{A} \tag{7.7}$$

în care n este numărul de spire, i este curentul prin bobină, θ solenaţia bobinei de secţiune S, φ_f fluxul fascicular pe o spiră S_Γ a bobinei (dependent de coordonatele r şi z), φ fluxul total obţinut prin produsul dintre numărul de spire şi fluxul fascicular mediu pe suprafaţa S.

Inductivitatea bobinei

$$L = \frac{\varphi}{i} \tag{7.8}$$

se calculează presupunând-o parcursă de un curent i şi determinând distribuţia de câmp magnetic $\mathbf{B}$ şi prin integrarea fluxului total φ.

Forţa care acţionează asupra armăturii mobile se calculează cu teorema forţelor generalizate:

$$F = -\left.\frac{\partial \omega_m}{\partial \delta}\right|_{\varphi} = +\left.\frac{\partial \omega_m}{\partial \delta}\right|_{i} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial \delta}, \tag{7.9}$$

în care s-a notat cu δ întrefierul principal (axial). Iată deci că pentru a calcula forţa este necesară determinarea variaţiei $L(\delta)$.

Pentru a studia comportarea electromagnetului atunci când bobina acestuia are la borne o tensiune alternativă dată $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$, vom utiliza cel mai simplu model bazat pe rezultatele din regim staţionar. Datorită liniarităţii, curentul absorbit de bobină este tot sinusoidal

$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i), \quad \text{cu} \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

în care R este rezistenţa bobinei şi L este inductivitatea sa. Inlocuind curentul instantaneu în expresia forţei se obţine o variaţie în timp de frecvenţă dublă suprapusă peste o componentă medie a forţei:

$$F_{med} = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial \delta}. \tag{7.10}$$

În acest fel variaţia inductanţei $L(\delta)$ calculată în regim staţionar poate fi folosită şi în regim armonic.

Următorul model al electromagnetului ar putea include în domeniul de calcul şi armăturile cu o permeabilitate finită, cu o caracteristică de magnetism neliniară şi/sau cu o conductivitate σ nenulă pentru a modela curenţii turbionari din miez.

7.4 Maşina cu magneţi permanenţi

Se consideră un motor electric cu rotorul realizat dintr-un magnet permanent şi cu statorul alcătuit din două perechi de poli, alimentaţi cu impulsuri de curent, care fac ca rotorul să funcţioneze în regim de "pas cu pas". Magnetul permanent din rotor produce un câmp magnetic care se închide prin stator (figura 7.4). Conform teoremei forţelor generalizate, sistemul va evolua către un minim al energiei magnetice, care corespunde unui minim al întrefierului (datorită "anizotropiei" constructive axa rotorului se va alinia cu o axă polară). Dacă bobinele din axa perpendiculară sunt alimentate, atunci câmpul magnetic produs de ele se va suprapune peste câmpul produs de rotor şi va determina un cuplu nenul care acţionează asupra rotorului şi îl învârte cu 90^o, până într-o nouă poziţie de echilibru. Problema pe care o formulăm este să se determine modul în care variază cuplul asupra rotorului în funcţie de poziţia sa, atunci când o pereche de poli este alimentată în curent continuu.

Pentru a efectua această analiză vom adopta următoarele ipoteze simplificatoare:

- se neglijează toleranţele şi rugozităţile suprafeţelor;
- statorul este alcătuit din material feromagnetic ideal ($\mu \to \infty$);

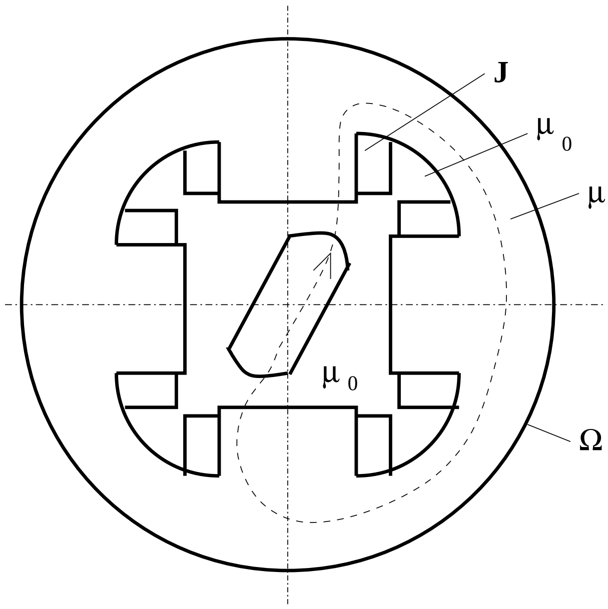

Figura 7.4: Motor cu magneţi permanenţi

- rotorul este alcătuit dintr-un material magnetic dur (magnet cu pământuri rare) cu o caracteristică de magnetizare ce se poate aproxima prin $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$, în care $\mathbf{M}_p$ este magnetizaţia permanentă iar $B_r = \mu_0 M_p$ este inducţia remanentă;
- bobinele sunt realizate din cupru şi se neglijează neuniformitatea distribuţiei curentului în structura transversală;
- se neglijează efectele de capete (fluxul de dispersie frontală) şi se presupune câmpul distribuit similar în toate planurile transversale;
- se neglijează efectul magnetic al oricărei perturbaţii exterioare;
- rotorul se presupune imobilizat şi curentul constant în timp.

Conform acestor ipoteze regimul câmpului este cel magnetic staţionar, problema fiind plan – paralelă (2D), dar spre deosebire de electromagnetul studiat anterior caracteristica neliniară (afină) a materialelor magnetice este esenţială în funcţionarea dispozitivului.

Ecuaţiile câmpului au forma locală:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p. \tag{7.11}$$

În modul cel mai simplu, modelul de calcul este redus la rotor ($\mu = \mu_0, \mathbf{M}_p \neq 0, \mathbf{J} = 0$), aerul din jurul său ($\mu = \mu_0, \mathbf{M} = 0, \mathbf{J} = 0$) şi bobinele ($\mu = \mu_0, \mathbf{M} = 0, \mathbf{J} \neq 0$), oprindu-se la frontiera cu statorul presupus feromagnetic ideal, deci cu câmp nul ($H = 0$). Dacă se doreşte analiza influenţei statorului (importantă în cazul unor curenţi mari care îl saturează) atunci domeniul de calcul se extinde până la aerul care mărgineşte exterior statorul şi se include un al patrulea tip de material, cel statoric (în acest caz pe frontieră $B_n = 0$).

Câmpul magnetic nu are surse externe dar are ca surse interne curentul din bobină şi magnetizaţia permanentă a rotorului.

Pentru calculul cuplului ce se exercită asupra rotorului rotit cu unghiul α se poate folosi fie teorema forţelor generalizate:

$$C = \left.\frac{\partial W_m}{\partial \alpha}\right|_i \quad \text{cu} \quad W_m = \int_D \omega_m \mathrm{d}v, \tag{7.12}$$

în care $\omega_m = \mathbf{BH} - B^2/2\mu$ (expresia densităţii de energie valabilă în interiorul materialelor afine) sau cuplul tensiunilor maxwelliene:

$$\mathbf{C} = int_\Sigma \mathbf{R} \times (\overline{\overline{T}} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}A \tag{7.13}$$

calculat prin integrarea pe o suprafaţă închisă Σ (sau pe o curbă închisă, în cazul problemelor 2D) ce trece prin aer şi înconjoară rotorul. Este de preferat cea de-a două metodă deoarece ea se poate aplica fără modificări în cazul în care se ia în considerare neliniaritatea magnetică a statorului.

7.5 Transformatorul monofazat

Se consideră un transformator realizat din două bobine înfăşurate una peste alta pe o carcasă montată pe un miez magnetic de tip monta $(E+I)$. Să presupunem că la bornele înfăşurării primare (bobinată în exterior) se aplică o tensiune sinusoidală şi interesează tensiunea la bornele înfăşurării secundare, între care este conectată o sarcină, de exemplu rezistenţa R.

Deoarece în spirele înfăşurării primare există un câmp electric caracterizat prin tensiunea aplicată, aceasta va fi parcursă conform legii inducţiei de curent primar. Acest curent variază periodic în timp şi produce un câmp magnetic periodic ce înconjoară bobina primară, dar este dirijat de-a lungul miezului feromagnetic (figura 7.5). Aceasta face ca cea de-a doua bobină să fie înlănţuită de flux magnetic variabil în timp, deci în ea să se inducă un câmp electric, caracterizat global de tensiunea secundară. Dacă circuitul secundar este închis prin rezistenţa de sarcină, atunci el va fi parcurs de curent secundar nenul. Trebuie remarcat că acest curent secundar modifică distribuţia câmpului în interiorul transformatorului. Dacă cele două bobine au număr diferit de spire, atunci transformatorul este coborâtor ($n_2 < n_1$) sau ridicător ($n_2 > n_1$) de tensiune. Randamentul energetic al transformării este subunitar, datorită pierderilor de putere în rezistenţele înfăşurărilor, pierderilor prin curenţi turbionari sau prin histerezis în miezul magnetic.

Pentru a caracteriza cantitativ aceste fenomene complexe vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

- se neglijează toleranţele şi rugozitatea suprafeţelor;
- se neglijează dispersia frontală, presupunând că distribuţia câmpului este aceiaşi în orice plan transversal;
- se neglijează întrefierul tehnologic din miezul magnetic;

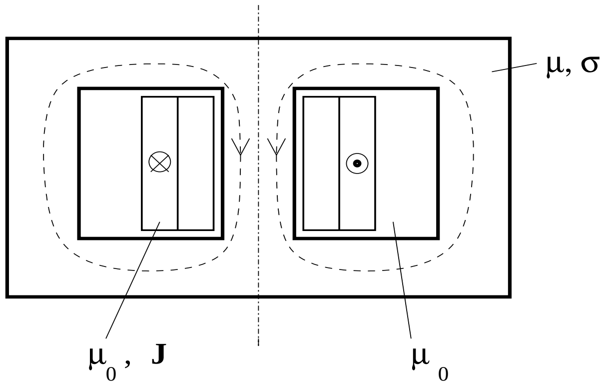

Figura 7.5: Transformator

- miezul este alcătuit dintr-un material magnetic liniar, izotrop şi omogen şi fără pierderi prin histerezis dar cu conductivitatea σ;
- curentul se presupune uniform în secţiunea transversală a bobinei primare, iar frecvenţa acestuia este suficient de mică (de exemplu cea industrială);
- se va presupune că bobina secundară funcţionează în gol ($R \to \infty$), deci curentul secundar este nul;
- nu există surse externe de câmp electromagnetic care să perturbe funcţionarea transformatorului.

În aceste condiţii câmpul electromagnetic din transformator se află în regim cvasistaţionar inductiv (anelectric), ecuaţiile fiind:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}; \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}; \quad \mathrm{div}\mathbf{J} = 0; \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_i. \qquad (7.14)$$

urmând ca toate mărimile locale să varieze sinusoidal în timp, cu aceiaşi frecvenţă.

Cele trei subdomenii din care este alcătuit domeniul transformatorului sunt:

- miezul magnetic ($\mu = \mu_{Fe}, \ \sigma = \sigma_{Fe}, \ J_i = 0$);
- bobina primară parcursă de un curent impas ($\mu = \mu_0, \ \sigma = 0, \ J_i \neq 0$);
- aerul în care se include şi bobina secundară, deoarece aceasta este parcursă de curentul ($\mu = \mu_0, \ \sigma = 0, \ J_i = 0$).

Datorită existenţei unui plan vertical de simetrie se poate studia doar jumătatea din dreapta a transformatorului. Antisimetria faţă de planul orizontal central permite studiul doar al unui sfert.

Singura sursă de câmp este curentul imprimat J_i în bobina primară, urmând ca pe frontiera dreptunghiulară a domeniului să nu se "injecteze" câmp magnetic exterior ($B_n = 0$).

După rezolvarea problemei fundamentale a analizei câmpului se determină distribuţia mărimilor locale $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ şi $\mathbf{E}$ care permit apoi determinarea mărimilor globale:

$$\varphi_f = \int_{S_\Gamma} \mathbf{B} \mathrm{d}\mathbf{A}, \quad \varphi_1 = n_1 \varphi_{1_{med}} = \frac{n_1}{A_1} \int_{S_1} \varphi_f \mathrm{d}A,$$

$$\varphi_2 = n_2 \varphi_{2_{med}} = \frac{n_2}{A_2} \int_{S_2} \varphi_f \mathrm{d}A,$$

$$u_1 = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}, \quad u_2 = \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t},$$

în care φ_f este fluxul fascicular al unei spire Γ (dependent de poziţia spirei), φ_1 este fluxul total al bobinei primare, egal cu numărul de spire n_1 înmulţit cu fluxul fascicular mediat pe suprafaţa transversală S_1 a bobinei primare de arie A_2, φ_2 este fluxul bobinei secundare iar u_1 şi u_2 sunt tensiunile induse în cele două bobine.

Puterea instantanee pierdută în miezul magnetic este

$$P = \int_D p \mathrm{d}v = \int_D \mathbf{J}\mathbf{E} \mathrm{d}v, \tag{7.15}$$

în care D este domeniul miezului magnetic.

Dacă se consideră şi cazul în care secundarul este scurtcircuitat se pot determina prin rezolvarea problemei de câmp parametrii ce intervin în schema echivalentă în T a transformatorului, ceea ce permite analiza funcţionării la orice sarcină cuplată în secundar.

Pentru ca rezultatele rereritoare la randament să fie mai apropiate de realitate este necesară îmbunătăţirea modului de calcul al pierderilor din fier, adăugând pierderile prin histerezis (de exemplu cu un model liniar cu ciclu eliptic) şi ţinând cont de grosimea tolelor.

Un alt model util în practică este cel care permite determinarea răspunsului transformatorului pe o bandă de frecvenţe (cu observaţia că la frecvenţe mai înalte efectele capacitive între înfăşurări şi faţă de miez devin importante) sau în regim tranzitoriu, de exemplu sub excitaţie sinusoidală care începe la $t = 0$ sau sub un impuls de tensiune (în acest caz neliniaritatea miezului magnetic poate ????)

7.6 Cuptor cu microunde

Se consideră o incintă cubică Ω cu pereţi foarte buni conductori, în centrul căreia se află o sferă dielectrică Ω_d (figura 7.6). În centrul unuia din pereţi se află o fantă circulară S care se prelungeşte în exterior cu un ghid de undă de forma unui tub foarte bun conductor.

În condiţiile în care prin ghidul de undă se propagă spre incintă o undă electromagnetică, aceasta trece prin fantă şi se propagă spre încărcătura dielectrică sau spre pereţi şi apoi după reflexie tot spre încărcătură. Considerând dielectricul imperfect (cu un factor de pierderi – tangenta unghiului de pierderi cunoscut) câmpul electromagnetic din dielectric determină o încălzire a acestuia (fie prin conducţie fie prin histerezis dielectric).

Pentru a analiza fenomenele din acest dispozitiv vor fi adoptate următoarele ipoteze simplificatoare:

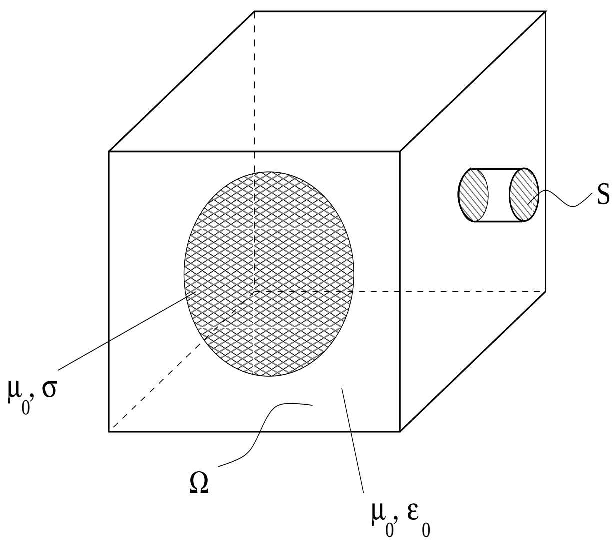

Figura 7.6: Cuptor cu microunde

- se neglijează toleranţele şi rugozitatea suprafeţelor şi corpurile sunt imobile;
- pereţii cavităţii ca şi cei ai ghidului de undă sunt supraconductori;
- aerul din cuptor este un izolant perfect;
- corpul din incinta cuptorului este un liniar, izotrop şi omogen din punct de vedere dielectric şi cel al conducţiei;
- întregul domeniu este nemagnetic ($\mu = \mu_0$);
- la începutul ghidului de undă se află un dispozitiv care produce un câmp electric cu componenta tangenţială sinusoidală în timp cunoscută.

Regimul câmpului electromagnetic este în acest caz cel general variabil în medii omogene. Câmpul electromagnetic satisface în acest regim ecuaţiile lui Maxwell:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \quad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}. \tag{7.16}$$

Domeniul supus analizei are două feluri de materiale:

- aerul, la care $\varepsilon = \varepsilon_0$ şi $\sigma = 0$;
- dielectricul, la care $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ şi $\sigma \neq 0$.

Problema este tridimensională (3D), dar datorită existenţei a două planuri de simetrie ortogonale (ce se intercalează pe axul ghidului de undă) se poate analiza doar un sfert din cubul de latură a prelungit cu cilindrul de rază r.

În afară de sursa de câmp de pe S pe care este cunoscut E_t (unda transversal electrică) sursele interne şi externe sunt nule, iar pe restul frontierei cubului şi cilindrului $E_t = 0$, datorită pereţilor supraconductori. Deoarece problema este liniară şi sursa de câmp sinusoidală soluţia căutată are tot variaţie sinusoidală în timp.

Puterea instantanee şi cea activă disipate în dielectric au expresiile:

$$P(t) \int_{\Omega} p \mathrm{d}v = \int_{\Omega_d} \mathbf{JE} \mathrm{d}v = \sigma \int_{\Omega_d} E^2 \mathrm{d}v, \tag{7.17}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \mathrm{d}t, \tag{7.18}$$

în care σ poate încorpora prin echivalenţă şi pierderile prin histerezis.

Capitolul 8

Concluzii referitoare la modelarea fizică

Modelarea fizică este o procedură de identificare a mărimilor şi fenomenelor esenţiale într-un dispozitiv şi neglijarea celor care nu influenţează substanţial funcţionarea acestuia. În consecinţă, modelarea fizică presupune înţelegerea perfectă a felului în care funcţionează un dispozitiv precum şi identificarea scopului analizei dispozitivului: prevederea comportării şi calculul caracteristicilor de performanţă, determinarea solicitărilor, aflarea limitelor de funcţionare normală, efectul perturbaţiilor externe sau al imperfecţiunilor constructive asupra funcţionării, optimizarea construcţiei sau reproiectarea în vederea îmbunătăţirii respectiv modificării caracteristicilor tehnice sau a preţului de cost.

Ca urmare a procedurii de modelare fizică trebuie dă rezulte:

- o listă de ipoteze simplificatoare (corespunzătoare unor fenomene sau efecte neglijate) şi o listă de efecte (fenomene) considerate în modelare;
- regimul câmpului electromagnetic, în care va fi analizat dispozitivul şi ecuaţiile câmpului electromagnetic în acel regim, specificându-se modul de variaţie în timp a mărimilor;
- forma şi dimensiunile fiecărei părţi componente a dispozitivului;
- tipul de material din care este alcătuită fiecare parte componentă a dispozitivului şi constantele caracteristice de material;
- dimensiunea (1D – 3D) şi simetria problemei de câmp;
- sursele de câmp electromagnetic, atât cele interne cât şi cele externe dispozitivului;
- lista mărimilor fizice ce caracterizează local şi respectiv global starea câmpului, corpurile, dispozitivul dar şi efectele de câmp sau parametrii caracteristici care prezintă importanţă în aplicaţia respectivă.

Trebuie remarcat că în funcţie de ipotezele simplificatoare, acelaşi dispozitiv are mai multe modele fizice cu grade diferite de realizare. De obicei modelele de mare acurateţe corespund unor liste cu mai puţine ipoteze simplificatoare dar ele au o complexitate sporită faţă de modelele de acurateţe scăzută. Fiecare model fizic are domeniul său de aplicabilitate. În ştiinţă şi inginerie trebuie adoptat modelul potrivit fiecărei aplicaţii, care corespunde unui compromis optim între simplitate şi acurateţe. Din acest motiv se poate afirma că modelarea fizică este nu numai o ştiinţă ci şi o artă al cărui rezultat depinde de experienţa şi ingeniozitatea personală.

Capitolul 9

Reprezentarea matematică a mărimilor fizice

Pentru reprezentarea matematică riguroasă a unei pronbleme de câmp trebuie stabilit cadrul funcţional, respectiv trebuie indicat domeniul şi codomeniul fiecărei funcţii care intervine în problema respectivă, fie ca dată, fie ca soluţie, precum şi clasa de funcţii (spaţiul) din care acea funcţie face parte. În fond, pentru reprezentarea problemei trebuie descrise matematic: domeniul problemei, proprietăţile de material, sursele de câmp şi soluţia.

9.1 Sisteme de coordonate

Pentru descrierea exactă a domeniului problemei, prima operaţie în modelarea matematică este alegerea unui sistem de coordonate şi a unuia temporal (alegerea originii axei timpului). Dintre tipurile de sisteme de coordonate cele mai des întâlnite în aplicaţii sunt:

- Sistemul cartezian (x, y, z);
- Sistemul cilindric (r, θ, z);
- Sistemul sferic (r, θ, φ);
- Alte sisteme mai puţin folosite, cum sunt sistemele curbilinii ortogonale de translaţie (cilindric, eliptic, parabolic, hiperbolic), de rotaţie sau generale (bisferic, elipsoidal etc).

Dacă problema este plan paralelă, atunci prin restrângere rezultă: sistemul cartezian (x, y), polar (r, θ) şi alte sisteme bidimensionale (fig.....).

Trecerea de la un sistem la altul se realizeză prin relaţii de tipul:

$$x = r \cos \theta;$$

$$y = r \sin \theta,$$

in care cele două coordonate polare au următoarele domenii de variaţie:

$$r \in [0, \infty)$$

şi

$$\theta \in [0, 2\pi),$$

pentru a acoperi intreg planul.

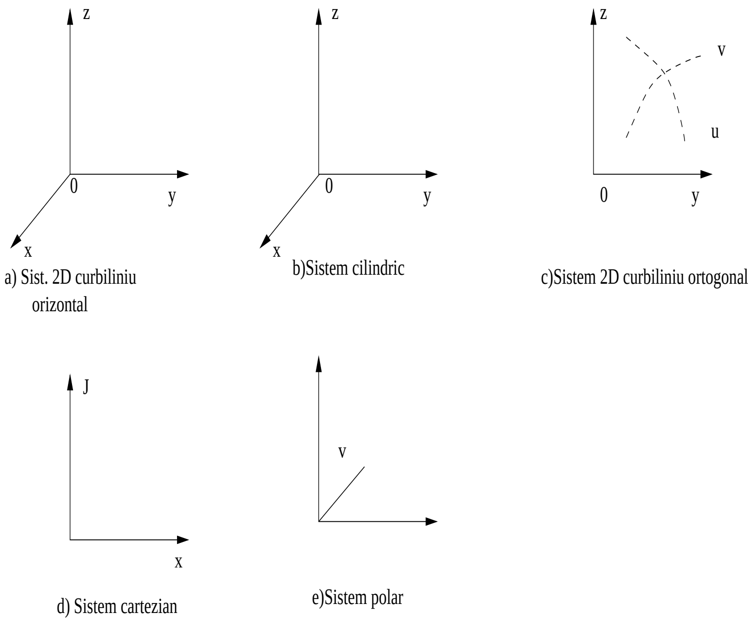

Figura 9.1: Sisteme de coordonate

Alegerea unui sistem de coordonate potrivit poate simplifica foarte mult rezolvarea problemei, modificând chiar şi dimensiunea sa. Dacă, de exemplu, în cazul unei probleme plan-paralele cu simetrie axială (1.5), când se foloseşte sistemul cilindric problema este unidimensională; când se foloseşte sistemul cartezian este bidimensională iar când se foloseşte sistemul sferic cu centrul plasat în afara axei problema este tridimensională.

9.2 Reprezentarea domeniului spatio – temporal

Domeniul de calcul Ω_t al unei probleme are în general un caracter spaţio-temporal, urmând ca în funcţie de regimul temporal să fie:

- $\Omega_t = \Omega$, în cazul regimurilor statice sau staţionare;
- $\Omega_t = \Omega \times [0, T)$, în cazul regimurilor periodice, cu perioadă T;
- $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, în cazul regimurilor tranzitorii.

În continuare se va considera $\Omega_t = \Omega \times [0, t_{max})$, în care t_{max} este 0, T sau ∞, în funcţie de regim. Domeniul spaţial Ω al problemei este parte din $\mathbb{R}^n$, urmând ca n să depindă de dimensiunea problemei:

- $\Omega \subset \mathbb{R}$, în cazul problemelor unidimensionale (1D şi 1,5D);
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, în cazul problemelor bidimensionale (2D şi 2,5D);
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, în cazul problemelor tridimensionale (3D),

iar incluziunea nu este in mod necesar strictă. În funcţie de caracterul mărginit sau nu al domeniului, deosebim:

- Ω mărginit, în cazul problemelor cu "frontieră închisă", numite şi probleme interne;
- Ω nemărginit, în cazul problemelor cu "frontieră deschisă", numite şi probleme externe.

Un caz limită de problemă cu frontieră deschisă este cel în care domeniul se extinde la întreg spaţiul $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

În stabilirea modelului matematic al domeniului fizic exprimat în coordonatele alese, intervin nu numai ecuaţiile frontierei domeniului dar şi suprafeţele (sau curbele) de separaţie între subdomenii cu proprietăţi de material diferite (părţile componente ale dispozitivului industrial în modelul fizic). Cel mai adesea, domeniul spatial este alcătuit din mai multe porţi disjuncte $\Omega = \cup_{k=1}^{m} \Omega_k$, fiecare având proprietăţi de material diferite.

După cum se va constata ulterior, domeniile multiplu conexe trebuie tratate cu deosebită atenţie, motiv pentru care ordinul de conexiune (numărul de tăieturi care face ca domeniul să devină simplu conex) trebuie determinat încă de la începutul modelării matematice.

9.3 Reprezentarea proprietăţilor de material

Reprezentarea matematică a proprietăţilor de material se face în funcţie de tipul acestora.

- *În medii liniare, omogene şi izotrope* sunt suficiente trei constante reale şi nenegative (ε, μ şi σ), dacă Ω este omogen pe porţiuni, atunci $\Omega = \cup_{k=1}^{m} \Omega_k$ este alcătuit din m subdomenii, carcterizarea fiind făcută prin vectorii m – dimensionali cu componente nenegative:
$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m]^T \in \mathbf{R} \to \mathbb{R};$$
$$\mu = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m]^T \in \mathbf{R} \to \mathbb{R};$$
$$\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m]^T \in \mathbf{R} \to \mathbb{R}.$$
- *În medii liniare,omogene şi anizotrope*, caracterizarea este făcută de trei tensori reprezentaţi prin matrice simetrice şi pozitiv definite cu dimensiuni $n \times n$, dependente de dimensiunea problemei:

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \overline{\overline{\varepsilon}}^T \in \mathbf{R^{nxn}}, \quad \overline{\overline{\mu}} \in \mathbf{R^{nxn}}, \quad \overline{\overline{\sigma}} \in \mathbf{R^{nxn}}. \tag{9.1}$$

- *În medii omogene, anizotrope* cu surse permanente sunt necesare pentru fiecare tip de caracterizare: dielectrică, magnetică şi de conducţie un tensor şi un vector:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}, \overline{\overline{\mu}}, \overline{\overline{\sigma}} \in \mathbf{R^{nxn}};\ \mathbf{P_p},\ \mathbf{M_p},\ \mathbf{E_i}\ \in \mathbf{R^n}.$$

- *În medii omogene, neliniare şi izotrope* se utilizează pentru fiecare tip de caracterizare o funcţie reală de variabilă reală nenegativă (ce indică dependenţa între modulele mărimilor de câmp):

  $D = \hat{D}(E)$, cu $\hat{D} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, caracteristica dielectrică;

  $B = \hat{B}(H)$, cu $\hat{B} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, caracteristica de magnetizare;

  $J = \hat{J}(E)$, cu $\hat{J} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, caracteristica de conducţie,

  urmând ca $\mathbf{D} = \hat{D}(E)\mathbf{E}/E$, $\mathbf{B} = \hat{B}(H)\mathbf{H}/H$, $\mathbf{J} = \hat{J}(E)\mathbf{E}/E$.

- *În medii omogene, neliniare şi anizotrope* fiecare caracteristică de material este o funcţie vectorială de variabilă vectorială:

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{E}),\ \text{cu}\ \hat{\mathbf{D}} : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n};$$
$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{H}),\ \text{cu}\ \hat{\mathbf{B}} : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n};$$
$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{E}),\ \text{cu}\ \hat{\mathbf{J}} : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}.$$

- *În medii liniare, izotrope şi neomogene* cei trei tensori caracteristici sunt funcţii definite pe Ω:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E},\ \text{deci}\ \ \varepsilon : \Omega \to \mathbf{R}_+;$$
$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H},\ \text{deci}\ \ \mu : \Omega \to \mathbf{R}_+;$$
$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E},\ \text{deci}\ \ \sigma : \Omega \to \mathbf{R}_+.$$

- *În medii liniare, anizotrope şi neomogene* cei trei tensori caracteristici sunt funcţii definite pe Ω:

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}(\mathbf{r})\mathbf{E},\ \text{cu}\ \ \overline{\overline{\varepsilon}} : \Omega \to \mathbf{R^{nxn}};$$
$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}(\mathbf{r})\mathbf{H},\ \text{cu}\ \ \overline{\overline{\mu}} : \Omega \to \mathbf{R^{nxn}};$$
$$\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{r})\mathbf{E},\ \text{cu}\ \ \overline{\overline{\sigma}} : \Omega \to \mathbf{R^{nxn}}.$$

- Dacă *mediile sunt anizotrope şi neomogene, cu surse permanente*, atunci la celelalte trei funcţii tensoriale se adaugă urmatoarele funcţii vectoriale definite tot pe Ω:

$$\mathbf{P}_p : \Omega \to \mathbf{R^n};\ \ \mathbf{M}_p : \Omega \to \mathbf{R^n};\ \ \mathbf{E}_i : \Omega \to \mathbf{R^n}.$$

- *Mediile neliniare, izotrope şi neomogene* sunt caracterizate de funcţii definite pe $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$:

$$D = \hat{D}(\mathbf{r}, E)\ \text{cu}\ \hat{D} : \Omega \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+;$$
$$B = \hat{B}(\mathbf{r}, H)\ \text{cu}\ \hat{B} : \Omega \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+;$$
$$J = \hat{J}(\mathbf{r}, E)\ \text{cu}\ \hat{J} : \Omega \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+.$$

- Dacă *mediile sunt neomogene, neliniare şi anizotrope* atunci funcţiile caracteristice sunt definite pe $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n}$:

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{D}} : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n;$$
$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \mathbf{H}) \text{ cu } \hat{\mathbf{B}} : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n;$$
$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{J}} : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

- Cazul general este cel al *mediilor parametrice, neomogene, neliniare şi anizotrope*, care sunt caracterizate prin funcţii definite pe Ω_t:

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{D}} : \Omega \times [0, t_{max}] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n;$$
$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{H}) \text{ cu } \hat{\mathbf{B}} : \Omega \times [0, t_{max}] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n;$$
$$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}) \text{ cu } \hat{\mathbf{J}} : \Omega \times [0, t_{max}] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Trebuie remarcat ca unele medii pot avea cele trei proprietăţi de material în categorii diferite, de exemplu, un domeniu poate fi: dielectric liniar, izotrop şi omogen; magnetic neliniar, anizotrop şi omogen iar din punct de vedere al conducţiei neomogen şi cu surse permanente.

În cazul problemelor cu folii sau fire se folosesc pentru caracterizarea materialelor funcţii definite pe suprafeţele şi curbele respective.

Sursele interne de câmp sunt în general reprezentate prin funcţii vectoriale definite pe domeniul spaţio-temporal de calcul:

- polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p : \Omega_t \to \mathbf{R^n}$;
- magnetizarea permanentă $\mathbf{M}_p : \Omega_t \to \mathbf{R^n}$;
- câmpul electric imprimat $\mathbf{E}_i : \Omega_t \to \mathbf{R^n}$,

dar în funcţie de regim ele pot fi şi:

- densitatea de sarcină $\rho : \Omega_t \to \mathbf{R}$,
- densitatea de curent $\mathbf{J} : \Omega_t \to \mathbf{R}^n$

cum este spre exemplu în electrostatică şi respectiv regimul magnetic staţionar. În regimul cvasistaţionar amagnetic ρ este soluţie iar în regimul electrocinetic $\mathbf{J}$ este soluţie şi nu sursă de câmp.

Sursele externe de câmp sunt reprezentate de condiţiile de frontieră, care sunt funcţii definite pe frontiera $\partial\Omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ a domeniului spaţial ca de exemplu:

- componenta tangenţială a intensităţii câmpului $\mathbf{E}_t : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \to \mathbf{R}^{n-1}$ sau $\mathbf{H}_t : \partial\Omega \times [0, t_{max}] \to \mathbf{R}^{n-1}$;

- componenta normală a inducţiei $D_n : \partial\Omega \times [0, t_{max}) \to \mathbf{R}$ sau $B_n : \partial\Omega \times [0, t_{max}) \to \mathbf{R}$;
- componenta normală a densităţii de curent $J_n : \partial\Omega \times [0, t_{max}) \to \mathbf{R}$.

În mod uzual, condiţiile de frontieră se referă la acele componente ale câmpului care se conservă la trecerea prin frontieră cum sunt componentele normale ale inducţiilor şi densităţilor de curent sau componenta tangenţială a intensităţii câmpului.

În cazul condiţiilor hibride, frontiera poate fi partajată în părţi disjuncte $\partial\Omega = \cup_{k=1}^{m} S_k$, urmând ca pe fiecare în parte S_k să fie impusă alt tip de condiţie de frontieră.

Trebuie menţionat că în cazul domeniilor multiplu conexe pot interveni şi un număr de surse scalare egal cu ordinul de conexiune al domeniului.

Soluţia problemei de câmp este alcătuită din unul sau mai multe câmpuri vectoriale

- inducţia electrică $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$;
- inducţia câmpului electric $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$;
- inducţia magnetică $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$;
- inducţia câmpului magnetic $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$;
- densitatea de curent $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$;
- densitatea de sarcină $\rho(\mathrm{r}, t)$

definite ca în exemplele:

$$\mathbf{D} : \Omega_t \to \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{E} : \Omega_t \to \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{B} : \Omega_t \to \mathbf{R}^n; \quad \mathbf{H} : \Omega_t \to \mathbf{R}^n.$$

Deoarece soluţia problemei trebuie să satisfacă ecuaţiile câmpului electromagnetic spunem că ea este o *soluţie tare* (în sens clasic), dacă este continuă, derivabilă şi satisface formele locale ale legii în orice punct din domeniul de calcul precum şi condiţiile de frontieră în orice punct de pe frontieră. În consecinţă soluţiile clasice se caută în spaţiile funcţiilor de clasă $C^1(\Omega_t, \mathbf{R^n})$. După cum se va vedea ulterior, problemele pot fi reformulate astfel încât soluţiile (numite slabe) să fie căutate în clase mai largi de funcţii.

Deoarece sursele de câmp nu intervin sub derivate spaţiale sau temporale, chiar în forma clasaică, ele pot fi elemente ale unor spaţii de funcţii mult mai largi. În mod uzual ele se consideră de pătrat integrabil, deci din clasă $L^2(\Omega_t, \mathbf{R^n})$. Densitatea de sarcina ρ aparţine deci, fie clasei $C^1(\Omega_t, \mathbf{R})$ sau $L^2(\Omega_t, \mathbf{R})$ după cum în funcţie de regim este soluţie sau respectiv sursă.

9.4 Reprezentarea obiectelor idealizate

Trebuie menţionat că în multe cazuri clasa surselor este extinsă şi mai mult, la clasa $\mathcal{D}(\Omega_t, \mathbf{R})$ a funcţiilor generalizate (distribuţiilor). Procedând în acest fel sursele distribuite superficial, lineic sau punctiform nu mai trebuie tratate separat ci ele devin cazuri particulare ale surselor distribuite volumetric.

De exemplu, un corp punctiform plasat în punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0), electrizat cu sarcina q are densitatea de volum a sarcinii:

$$\rho(x, y, z,) = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

în care δ este funcţia generalizată a lui Dirac (derivata funcţiei treapta unitate Heaviside $h(x) = 0$ pentru $x < 0$ şi $h(x) = 1$ în rest).

Funcţia Dirac $\delta(x)$ are suportul în origine iar, integrala sa pe orice interval care cuprinde originea este unitară:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

Un fir electrizat lineic şi cu densitate ρ_l şi suprapus pe axa Ox are densitatea de volum a sarcinii:

$$\rho(x, y, z) = \rho_l(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z),$$

iar planul de ecuaţie $z = z_0$ electrizat superficial are densitatea de sarcină:

$$\rho(x, y, z) = \rho_s(x, y) \cdot \delta(z - z_0).$$

Dacă se consideră $z_0(x, y)$ ecuaţia parametrică a unei suprafeţe, atunci sarcina va fi distribuită superficial pe acea suprafaţă şi nu pe plan.

Într-un sistem curbiliniu de coordonate ortogonale (u, v, w), un corp punctiform electrizat cu sarcina q şi plasat în punctul de coordonate (u_0, v_0, w_0) are densitatea de sarcină:

$$\rho(u, v, w) = \frac{q}{h_1 h_2 h_3} \cdot \delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0) \ ,$$

în care h_1, h_2, h_3 sunt parametrii Lame ai sistemului de coordonate în punctul $\mathbf{r}_0$. Sarcina unui domeniu Ω care include punctul $\mathbf{r}_0$ este:

$$q = \int_\Omega \rho dV = \int\int\int \rho{\cdot}h_1{\cdot}h_2{\cdot}h_3 dudvdw = q\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u{-}u_0)\delta(v{-}v_0)\delta(w{-}w_0)dudvdw$$

în care s-anotat cu dV elementul de volum.

De exemplu, densitatea de sarcină $\rho = \rho_l h(z)h(z_0 - z)\delta(0)\delta(r - a)/a$ reprezintă în coordonate cilindrice un fir de lungime z_0, electrizat uniform, cu densitatea ρ_e, plasat la distanţa 0,5 de Oz, paralel cu aceasta.

Capitolul 10

Formularea corectă a problemelor câmpului electromagnetic în diferite regimuri

Problema fundamentală a analizei câmpului electromagnetic în diferite regimuri se reduce din punct de vedere matematic la rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Pentru ca astfel de probleme să fie corect formulate este necesar ca:

- soluţia să existe;
- soluţia să fie unică;
- soluţia să depindă continuu de datele problemei.

Aceste proprietăţi ale soluţiei sunt asigurate de demonstrarea unor teoreme de existenţă, unicitate şi respectiv continuitate.

Dacă importanţa existenţei şi unicităţii este evidentă (în condiţiile în care se lucrează cu modele idealizate, valabile în anumite ipoteze simplificatoare, ipoteze care nu sunt riguros respectate în realitate), importanţa continuităţii a fost evidenţiată relativ târziu prin exemplul lui Hadamard, care pentru o ecuaţie Laplace într-un semiplan, cu condiţii Cauchy a obţinut o soluţie ce nu depinde continuu de condiţia de frontieră (sursa de câmp). Deoarece în majoritatea aplicaţiilor practice datele unei probleme nu sunt cunoscute cu acurateţe maximă, ci sunt acceptabile mici variaţii ale datelor, datorită erorilor de măsură sau chiar de reprezentare în calculator (de rotunjire a numerelor), dacă soluţia este discontinuă, atunci se pot obţine variaţii mari, necontroate ale ei chiar şi în cazul unor mici variaţii ale datelor.

Toate cele trei condiţii ce trebuie impuse soluţiei prezintă importanţă teoretică şi practică, totuşi teorema de unicitate este pe departe cea mai importantă în practică.

Aceasta deoarece dacă a fost obţinută o soluţie numerică aproximativă (cu calculatorul) a problemei de câmp, poate fi verificată măsura în care aceasta satisface ecuaţiile şi condiţiile de frontieră şi prin experimente numerice poate fi evaluată chiar şi stabilitatea numerică. În shimb, dacă solutia nu este unică, acest lucru nu poate fi verificat când avem la dispoziţie doar una din soluţiile posibile. Acea soluţie s-ar putea să nu fie soluţia cu semnificaţia fizică pe care o căutăm.

Din punct de vedere ingineresc, formularea corectă a unei probleme de câmp presupune demonstrarea cel puţin a unei teoreme de unicitate pentru soluţia problemei. Din fericire teoremele de unicitate se demonstrează relativ uşor faţa de celelalte teoreme. În continuare, vor fi prezentate câteva teoreme de unicitate pentru câmpul electromagnetic în diferite domenii. Ele se bazează pe raţionamente de tip "reducere la absurd", presupunând că există două soluţii distincte. Teoremele prezentate acoperă o largă clasă de probleme întâlnite în practică.

Dacă totuşi o problemă de câmp nu este un caz particular al acestor teoreme este necesară demonstrarea unicităţii (de obicei folosind ca model demonstraţia teoremei clasice). Demonstrarea sau identificarea teoremei de unicitate este un pas esenţial în modelarea matematică a problemelor de câmp electromagnetic.

10.1 Regimul electrostatic

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile conductoare şi cele anelectrice), funcţia caracteristică de material $\hat{D}$ (în particular, în cazul dielectricilor cu surse permanente este dată permeabilitatea $\overline{\overline{\varepsilon}}$) şi polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p$ în orice punct din domeniu şi distribuţia de sarcină ρ în interiorul domeniului Ω.

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{D}$ şi $\mathbf{E}$, care satisfac ecuaţiile: $\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$; $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{P}_p$.

Teoremă 10.1.1 *Teorema de unicitate a câmpului electrostatic*

Problema formulată anterior are soluţie unică dacă funcţia de material este strict monotonă, respectiv satisface relaţia:

$$(\hat{D}(\mathbf{E}_2) - \hat{D}(\mathbf{E}_1))(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) > 0,$$

în particular $\overline{\overline{\varepsilon}}$ este pozitiv definit şi este îndeplinită una din următoarele condiţii de frontieră:

- *în orice punct de pe frontieră $\partial\Omega$ este dată componeneta normală a inducţiei $D_n = \mathbf{n}\mathbf{D}$, astfel încât*
$$\int_{\partial\Omega} D_n dA = \int_{\Omega} \rho dv;$$
- *în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată componenta tangenţială a câmpului $\mathbf{E}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$;*
- *în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie D_n fie E_t, iar în plus dacă mulţimea punctelor S_E pe care este dat $\mathbf{E}_t$ nu este conexă ci formată din m părţi conexe $S_E = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$ trebuie cunoscute şi valorile a $m-1$ fluxuri electrice ξ_k pe suprafeţele S_k sau valorile tensiunii electrice u_k, pe curbe din $\partial\Omega$ ce formează un arbore cu nodurile în S_k (o parte din fluxuri pot fi înlocuite cu tensiuni şi reciproc).*

Pentru demonstraţia acestei teoreme va fi formulată o problemă care generalizează cazurile tuturor regimurilor statice şi staţionare în domenii simplu conexe. Soluţia acestei probleme este reprezentată de perechi de câmpuri $\mathbf{F}$ şi $\mathbf{G}$, care satisfac ecuaţiile: div$\mathbf{G} = \rho$; rot$\mathbf{F} = \mathbf{J}$ $\mathbf{G} = \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F})$ sau în particular $\mathbf{G} = \overline{\overline{\lambda}}(\mathbf{r})\mathbf{F} + \mathbf{G}_p(\mathbf{r})$, în care $\mathbf{G}_p$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G} : \Omega \to \mathbf{R}^n$; $\rho : \Omega \to \mathbf{R}^n$, iar $\hat{G} : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ sau în particular $\overline{\overline{\lambda}} : \Omega \to \mathbf{R}^{n\times n}$; satisfac condiţiile:

$$(\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_2))(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) > 0,$$

pentru orice $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \in \mathbf{R}^n$, cu $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_2$, sau $\mathbf{F}(\overline{\overline{\lambda}}, \mathbf{r}) > 0$ pentru orice $\mathbf{E} \neq 0$.

Să presupunem prin absurd că această problemă admite două soluţii $(\mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1)$ şi $(\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_2)$ distincte. Diferenţa $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2$ va satisface sistemul de ecuaţii: div$\mathbf{G} = 0$, rot$\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G}_1 = \hat{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{F}_1)$, $\mathbf{G}_2 = \hat{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{F}_2)$ sau în particular $\mathbf{G} = \overline{\overline{\lambda}}\mathbf{r}\mathbf{F}$, câmpul diferenţă $\mathbf{F}$ este irotaţional pe domeniu simplu conex şi deci are potenţial vector V univoc definit, astfel încât: $V_A - V_B = \int_{C_{AB}} \mathbf{F}d\mathbf{r}$ sau echivalent $\mathbf{F} = -gradV$.

Ţinând cont că:

$$div(\mathbf{G}V) = V div\mathbf{G} + \mathbf{G}gradV = \mathbf{G}gradV$$

$$\int_\Omega \mathbf{G}\mathbf{F}dv = -\int_\Omega \mathbf{G}gradV dv = -\int_\Omega div(\mathbf{G}V)dv = -\int_{\partial\Omega} G_n V dA = 0$$

deoarece în condiţiile de frontieră:

- $G_n = 0$ pe $\partial\Omega$;
- $E_t = 0$ pe $\partial\Omega$, deci $V = 0$ pe $\partial\Omega$;
- $G_n = 0$ pe $\partial\Omega \cdot S_E$ şi $E_t = 0$ pe $S_E = \bigcup S_k$, deci $V = V_k$ pentru fiecare parte S_k şi $\int_\Omega \mathbf{G}\mathbf{F}dv = -\int_{S_E} G_n V dA = -\sum_{k=1}^n V_k \int_{S_k} G_n dA$, alegând $V_k = 0$ rezultă, din condiţiile impuse fie $\phi_k = \int_{S_k} G_n dA = 0$, fie $V_k = \int_{C_{k1}} \mathbf{E}d\mathbf{r} = 0$ ceea ce contravine ipotezei (nu poate fi realizat decat dacă $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ şi $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$).

În consecinţă:

$$\int_\Omega \mathbf{G}\mathbf{F}dv = \int_\Omega (\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_1) - \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{F}_2))(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2)dv = \int_\Omega \mathbf{F}\overline{\overline{\lambda}}\mathbf{F}dv = 0$$

ceea ce contravine ipotezei, (nu poate fi realizat atunci decât dacă $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ şi $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$).

Condiţia de frontieră hibridă este destul de des utilizată. De exemplu, pentru calculul capacităţii între doi electrozi conductori, $E_t = 0$ pe aceştia, deci $m = 2$ (S_E fiind reuniunea celor doi conductori), în consecinţă mai trebuie cunoscut pentru unicitatea câmpului fie tensiunea u dintre cei doi electrozi, fie fluxul electric pe unul dintre ei (sarcina q în care este încărcat). În mod similar se tratează problema a m conductoare scufundate într-un dielectric, pentru fiecare conductor, cu excepţia unuia de referinţă trebuie cunoscută fie valoarea sarcinii totale (nu şi distribuţia acesteia) fie valoarea potenţialului. Trebuie remarcat că în domeniile nemărginite, $\Omega = \mathbf{R^n}$,la care domeniul este extins la intreg spaţiul, condiţia de frontieră este înlocuită de o comportare la infinit a soluţiei, care pe o sferă Σ de rază $R \to \infty$ să asigure $\int_\Sigma D_n V dA \to 0$.

Se verifică uşor că în cazul mediilor dielectrice active (cu polarizaţie permanentă) soluţia $(\mathbf{D}, \mathbf{E})$ depinde liniar de sursele de câmp interne şi externe $(\rho, \mathbf{P}_p, D_n, \mathbf{E}_t, \psi, u)$, putând fi calculată prin superpoziţie, deci fiecare tip de sursă poate fi studiată independent de celelalte, cu condiţia ca domeniul şi constantele de material $\overline{\overline{\varepsilon}}$ să nu se modifice.

10.2 Regimul magnetostatic

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile feromagnetice ideale cat şi cele amagnetice) şi funcţia caracteristică de material $\hat{B}$ (în particular, în cazul nediilor cu magnetizare permanentă se cunosc tensorul permeabilităţii $\overline{\overline{\mu}}$ şi magnetizaţia permanentă $\mathbf{M}_p$ în orice punct din Ω). Necunoscutele problemei sunt funcţiile vectoriale $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{H}$, care satisfac ecuaţiile:

$$div\mathbf{B} = 0;$$
$$rot\mathbf{H} = 0;$$
$$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H})$$

sau în particular $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$.

Teoremă 10.2.1 *Teorema de unicitate a câmpului magnetostatic*

Problema formulată anterior are soluţie unică dacă domeniul Ω este simplu conex, funcţia de material este monotonă:

$$(\hat{B}(\mathbf{H}_2) - \hat{B}(\mathbf{H}_1)(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) > 0,$$

în particular în cazul mediilor liniare sau afine tensorul $\overline{\overline{\mu}}$ este pozitiv definit (are valori proprii strict pozitive) şi dacă este îndeplinită una din condiţiile de frontieră:

- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta normală a inducţiei $B_n = \mathbf{nB}$ (cu valoare medie nulă pe $\partial\Omega$, pentru ca soluţia să existe);*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta tangenţială a intensităţii $H_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{n})$;*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dat fie $\mathbf{H}_t$ (pe $S_H \subset \partial\Omega$), fie B_n (pe restul $\partial\Omega - S_H$), cu condiţia că dacă S_H este neconexă şi alcătuită din m părţi $S_1, S_2, ...S_m$ conexe, atunci pe primele $m-1$ părţi trebuie cunoscut fie fluxul magnetic φ_k fie tensiunea magnetică U_{mk} a unui punct faţă de un punct situat în partea de referinţă S_m.*

Dacă domeniul este multiplu conex, atunci sunt necesare condiţii de unicitate suplimentare, şi anume pentru fiecare "gaură" în domeniu trebuie precizată fie tensiunea magnetică în jurul ei, fie fluxul magnetic pe o suprafaţă de tăieturi ce elimină gaura respectivă.

Teorema de unicitate a regimului magnetostatic este un caz particular al teoremei de unicitate din regimul magnetic staţionar.

În cazul mediilor liniare şi active (cu mgnetizaţie permanentă), soluţia $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$ depinde liniar de sursele interne şi cele externe de câmp $(\mathbf{M}_p, B_n, \mathbf{H}_t, \varphi, U_m)$, putând fi calculată prin superpoziţie, cu condiţia ca domeniul Ω şi constanta de material $\overline{\overline{\mu}}$ să nu se modifice.

10.3 Regimul electrocinetic staţionar

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile supraconductoare şi cele izolante) şi funcţia caracteristică de material $\hat{J}$ (în particular, în cazul mediilor liniare se cunoaşte tensorul conductivităţiilor $\overline{\overline{\sigma}}$ iar în cazul conductoarelor active se cunoaşte în plus şi $\mathbf{E}_i$ sau $\mathbf{J}_i$ în fiecare punct din domeniul Ω). Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{J}$ şi $\mathbf{E}$, care satisfac ecuaţiile:

$$\mathrm{div}\overline{J} = 0;\ \mathrm{rot}\ \overline{E} = 0;\ \mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}) \text{ sau în particular } \mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i.$$

Teoremă 10.3.1 *Teorema de unicitate a câmpului electrocinetic*

Problema formulată anterior are soluţie unică dacă funcía de material este monotonă:

$$(\hat{J}(\mathbf{E}_2) - \hat{J}(\mathbf{E}_1)(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) > 0,$$

în particular în cazul mediilor liniare şi al celor active tenorul $\overline{\overline{\sigma}}$ este pozitiv definit şi este îndeplinită una din condiţiile de frontieră:

- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta $J_n = \mathbf{nJ}$ (cu valoare medie nulă pe $\partial\Omega$, pentru ca soluţia să existe);*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată componenta tangenţială a intensităţii $E_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n})$;*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dat fie $\mathbf{E}_t$ (pe $S_E \subset \partial\Omega$), fie J_n (în rest), cu condiţia că dacă S_E este neconexă şi alcătuită din m părţi conexe pe fiecare din aceste părţi cu excepţia ultimei este dat fie curentul total I_k fie tensiunea U_k faţa de ultima parte.*

Teorema de unicitate este un caz particular al teoremei generale demonstrate în cazul regimului electrostatic. De altfel ecuaţiile electrocineticii sunt similare cu forme particulare ale ecuaţiilor electrostaticii (pentru $\rho = 0$).

Ultima condiţie de frontieră, cea hibridă este utilizată în calculul rezistenţei rezistoarelor. Acestea au cele două borne disjuncte echipotenţiale ($E_t = 0$) iar suprafaţa laterală este suprafaţa de câmp ($J_n = 0$). În cazul rezistoarelor multipolare cu m borne, suprafaţa S_E este alcatuită din m părţi conexe, în particular $m = 2$ în cazul rezistoarelor bifilare. Pentru ca problema de câmp ce trebuie rezolvată pentru determinarea rezistenţelor să fie corect formulată va trebui ca pentru fiecare bornă (cu excepţia celei de referinţă aleasă în mod convenţional) să se cunoască fie curentul injectat fie tensiunea faţă de borna de referinţă.

10.4 Regimul magnetic staţionar

Problema fundamentală a acestui regim are ca date domeniul Ω (din care au fost eliminate subdomeniile feromagnetice ideale şi cele amagnetice), funcţia caracteristică de magnetizare $\hat{B}$ (în particular, în cazul mediilor liniare tensorul $\overline{\overline{\mu}}$ iar în cazul corpurilor cu caracteristică de magnetizare afină se cunoaşte şi magnetizaţia permanentă $\mathbf{M}_p$) şi distribuţia curentului de conducţie $\mathbf{J}$ în domeniul Ω.

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale **B** şi **H**, care satisfac ecuaţiile:

$$div\mathbf{B} = 0;$$
$$rot\mathbf{H} = J;$$
$$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H})$$

sau în particular $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$.

Se constată că ecuaţiile regimului magnetostatic sunt o particularizare a ecuaţiilor regimului magnetic staţionar, obţinută pentru $J = 0$.

Teoremă 10.4.1 *Teorema de unicitate a câmpului magnetic*

Are exact acelasi enunţ cu teorema de unicitate a câmpului magnetostatic, cu observaţia că în formularea problemei intervine în plus printre date şi distribuţia densităţii de curent **J**.

În cazul domeniilor Ω simplu conexe aceste două teoreme sunt cazuri particulare ale teoremei de unicitate demonstrată în cazul electrostaticii. În cazul domeniilor multiplu conexe potenţialul scalar V nu se poate defini,în mod unic, mai exact el depinde de numărul de ori de care curba respectivă înconjoară golurile domeniului (fig. 9.1).

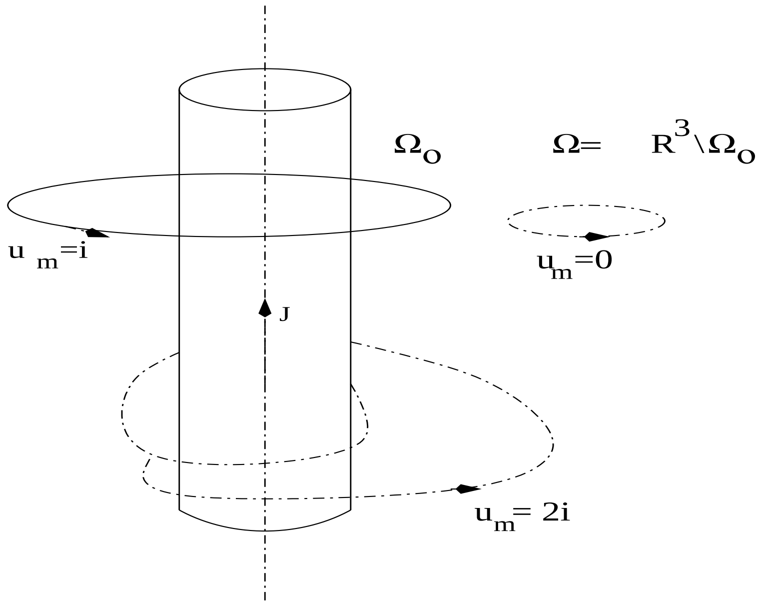

Figura 10.1: Domeniu multiplu conex

Din acest motiv este necesară transformarea domeniului multiplu conex intr-unul simplu conex prin efectuarea unor taieturi cu suprafeţele $T_1, T_2, ...T_q$. În aceste condiţii:

$\int_\Omega \mathbf{GF}dv = -\int_{\partial\Omega} G_n V dA = -\int_{S_G} G_n V dA - \int_{S_F} G_n V dA - \int_{T'\bigcup T''} G_n V dA = \quad = -\sum_{k=1}^{m} V_k \int_{S_k} G_n dA - \sum_{j=1}^{q} V_k \int_{T_j} G_n \Delta V_j dA = -\sum_{k=1}^{n-1} V_k \Psi_k - \sum_{j=1}^{q} U_j \Psi_j$,

deoarece $G_n = 0$ pe $S_G = \partial\Omega - S_F$, $S_F = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$, iar pe fiecare suprafaţă S_k, $E_t = 0$ deci $V = V_k$=const., cu $V_k = 0$, $T = \bigcup_{j=1}^{m} T_j$, $T' = \bigcup_{j=1}^{m} T_j'$, $T'\prime = \bigcup_{j=1}^{m} T'\prime_j$, în care T_j' şi $T'\prime_j$,sunt cele două feţe ale suprafeţei T_j.

S-a notat cu
$$\Delta V = V_j = \int_\Gamma \mathbf{F} d\mathbf{r}$$
saltul potenţialului pe tăieturi T_j egal cu tensiunea pe curba Γ_j ce înconjoară "golul" j şi cu:
$$\Psi_k = \int_{S_k} G_n dA, \quad \Psi_j = \int_{Y_j} G_n dA,$$
fluxurile prin suprafeţele S_k şi respectiv T_j.

Dacă pentru fiecare suprafaţă S_k (cu excepţia uneia,de exemplu $k = n$) se impune fie fluxul Ψ_k fie tensiunea V_k faţă de S_n şi pentru fiecare tăietură T_j se impun fie fluxul Ψ_k, fie tensiunea pe o curbă închisă ce înconjoară "golul" eliminat de T_j, atunci toţi termenii sumei sunt nuli şi $F = 0$, deci câmpul este determinat univoc deoarece $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$.

10.5 Regimul cvasistaţionar inductiv tranzitoriu

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul de calcul $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, funcţia caracteristică de magnetizare $\hat{\mathbf{B}}$ (în cazul particular al mediilor liniare este dat tensorul $\overline{\overline{\mu}}$, iar în cazul mediilor cu caracteristcă afină şi magnetizaţia permanentă $\mathbf{M}_p$) şi funcţia caracteristică de conducţie $\hat{J}$ (în cazul conductoarelor tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$, iar în cazul mediilor cu caracteristică afină şi densitatea de curent imprimat $\mathbf{J}_i = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}_i$).

Necunoscutele problemei sunt câmpurile $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ şi $\mathbf{E}$ care satisfac ecuaţiile:
$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J};$$

$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H})$ sau în particular $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_p$;

$\mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$,

şi condiţia iniţială:
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \text{ pentru } t = 0, \ \mathbf{r} \in \Omega,$$
care satisface restricţia: $\text{div}\overline{B}_0 = 0$.

Se verifică uşor, aplicând operatorul de divergenţă teoremei lui Ampere, că densitatea de curent are o distribuţie solenoidală, în acord cu legea conservării sarcinii particularizată la acest regim. Dacă inducţia magnetică este solenoidală în momentul iniţial, atunci ea se menţine tot aşa şi în timpul regimului tranzitoriu, deoarece conform legii inducţiei electromagnetice div$\mathbf{B}$ este constant în timp.

Teorema de unicitate va fi demonstrată în condiţiile în care $\hat{J}$ are caracter afin ($\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$), iar $\mathbf{B}$ este neliniar anizotrop ($\mathbf{B} = \hat{B}(H)\mathbf{H}/H$) cu $\hat{B}$ strict monotonă şi mărginită.

Să presupunem prin absurd că există două soluţii distincte $(\mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{E}_1)$ şi $(\mathbf{B}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{E}_2)$, care satisfac ecuaţiile problemei şi condiţiile iniţiale, soluţia diferenţă: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2$ şi $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, va satisface sistemul de ecuaţii:

rot$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, rot$\mathbf{H} = \mathbf{J}$.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 = \hat{B}(\mathbf{H}_1) - \hat{B}(\mathbf{H}_2), \quad \mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}$$

şi condiţia iniţială nulă $\overline{B}(\overline{r}, 0) = 0$.

Înmulţind prima ecuaţie în produs scalar cu $\mathbf{H}$ şi a doua cu $\mathbf{E}$ şi apoi scăzându-le, rezultă relaţia:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) dA = \int_{\Omega} H \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E}(\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}) dv.$$

Notând: $w = \int_0^t \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dv = \int_0^B \hat{H}(B) dB > 0$, rezultă

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dv + \int_{\Omega} \mathbf{E}(\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}) dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}_t) d\mathbf{A},$$

deoarece $\mathbf{n}(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E}(\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n}(\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}) = \mathbf{n}(\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}_t)$.

Dacă $\mathbf{E}_t$ sau $\mathbf{H}_t$ sunt nule, şi ţinând cont că $\mathbf{E}(\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}) > 0$, pentru $\overline{\overline{\sigma}} > 0$ şi $E \neq 0$, rezultă :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dv < 0$$

şi prin integrare în timp pornind de la $t = 0$ la care $w = 0$, rezultă inegalitatea

$$\int_{\Omega} w(t) dv < 0,$$

care împreună cu condiţia $w \geq 0$ conduce la consecinţa $w = 0$, deci $B = 0$ şi implicit $H = 0$, $J =$. Dacă $\overline{\overline{\sigma}} > 0$, atunci şi $E = 0$.

În consecinţă teorema de unicitate a câmpului cvasistaţionar inductiv are urmatorul enunţ:

Teoremă 10.5.1 *Problema regimului cvasistaţionar inductiv tranzitoriu formulată anterior are soluţie unică, dacă:*

- *caracteristica de magnetizare* $\mathbf{B} = \hat{B}(H)\mathbf{H}/H$ *are funcţia* $\hat{B} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, *continuă, inversabilă şi cu* $\hat{B}(0) = 0$;
- *caracteristica de conducţie de forma* $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$, *în care* $\overline{\overline{\sigma}}$ *este un tensor cu valorile proprii pozitive;*
- *în orice punct de pe* $\partial\Omega$ *este dată fie componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric* $\mathbf{E}_t$, *fie componenta tangenţială a intensităţii câmpului magnetic* $\mathbf{H}_t$.

Se constată că pentru a asigura unicitatea soluţiei, trebuie ca anularea condiţiilor de frontieră să implice anularea fluxului vectorului Poynting.

10.6 Regimul cvasistaţionar capacitiv tranzitoriu

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul de calcul $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, funcţia caracteristică dielectrică a domeniului $\hat{D}$ (în cazul particular al dielectricilor liniari tensorul $\overline{\overline{\varepsilon}}$, iar în cazul mediilor cu caracteristcă dielectrică afină în plus polarizaţia permanentă $\mathbf{P}_p$) şi funcţia caracteristică de conducţie $\hat{J}$ (în cazul conductoarelor liniare tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$, iar în cazul mediilor cu caracteristică de conducţie afină, în plus câmpul electric imprimat $\mathbf{E}_i$).

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{E}, \mathbf{D}$, $\mathbf{J}$ şi câmpul scalar ρ care satisfac ecuaţiile:

$$rot\mathbf{E} = 0;$$
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$
$$div\mathbf{D} = \rho;$$

$\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p$;

$\mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$

şi condiţia iniţială $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ pentru $t = 0,\ \mathbf{r} \in \Omega$, cu restricţia $\mathrm{rot}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$.

Trebuie remarcat că folosind relaţia $\mathbf{D} - \mathbf{E}$ şi legea fluxului electric din condiţia iniţială se determină distribuţiile iniţiale atât ale inducţiei electrice $\mathbf{D}_0 = \hat{D}(\mathbf{E}_0)$ cât şi a sarcinii $\rho_0 = div\mathbf{D}_0$.

Teoremă 10.6.1 *Teorema de unicitate a câmpului cvasistaţionar capacitiv.*

Problema fundamentală a regimului cvasistaţionar capacitiv formulată anterior are soluţie unică, dacă:

- *caracteristica dielectrică este afină şi tensorul $\overline{\overline{\varepsilon}}$ are valorile proprii pozitive;*
- *caracteristica de conducţie a mediului din Ω este afină şi tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ are valori proprii nenegative;*
- *în orice punct de pe $\partial\Omega$ este dată fie componenta tangenţială a intensităţii câmpului electric, $\mathbf{E}_t$ fie componenta tangenţială a intensităţii câmpului magnetic $\mathbf{H}_t$.*

Pentru demonstraţie se consideră că există două soluţii diferite iar $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, bfJ, \rho)$ este diferenţa lor, care satisface ecuaţiile:

$$rot\mathbf{E} = 0;$$
$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$
$$div\mathbf{D} = \rho$$

$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E}$ şi $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E})$, şi condiţia iniţială $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ şi condiţii de frontieră tot nule, $\mathbf{E}_t = 0$ şi $\mathbf{H}_t = 0$.

Teorema energiei electromagnetice pentru acest câmp diferenţă are următoarea formă locală:

$$div(\mathbf{H} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{JE},$$

şi următoarea formă globală:

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{E}\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} dv + \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dv,$$

cu $w = \mathbf{DE}/2 = (\mathbf{E}\overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E})/2 > 0$. Deoarece câmpul diferenţă are condiţii de frontieră nule, vectorul Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ are componentă normală nulă: $S_n = \mathbf{nS} = \mathbf{n}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{n}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) = 0$.

În consecinţă, între puterea P disipată în conductoarele domeniului şi energia acumulată în câmpul electric există relaţia:

$P + \frac{dW}{dt} = 0$, cu $P = \int_{\Omega} \mathbf{E}\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} dv > 0$ şi $W = \int_{\Omega} w dv > 0$.

Prin integrare în timp rezultă:

$$W(t) - W(0) = -\int_0^t P(t) dt \leq 0,$$

în care $W(0) = 0$, deoarece $E(0) = 0$, deci energia câmpului electric care este pozitiv definită este în mod necesar nulă $W(t) = 0$. Acest lucru este posibil doar dacă $E = 0$, $D = 0$, ceea ce implică $J = 0$, $\rho = 0$. În consecinţă, deoarece diferenţa celor două soluţii este nulă, ele sunt egale între ele, deci soluţia problemei de câmp este unică.

Dacă se doreşte determinarea unui câmp magnetic unic $(\mathbf{B}, \mathbf{H})$ se poate aplica teorema de unicitate de la regimul magnetic staţionar, deci adăugarea ecuaţiilor:

$$div\mathbf{B} = 0, \;\; \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

şi condiţii la frontieră referitoare la B, în punctele în care este dat $\mathbf{E}_t$, presupunând că punctele în care este dat $\mathbf{H}_t$, alcătuiesc o suprafaţă conexă.

10.7 Regimul cvasistaţionar tranzitoriu

Teoremele prezentate pentru regimurile cvasistaţionare nu sunt singurele teoreme de unicitate ale acestor regimuri. Orice condiţie de frontieră care anulează vectorul Poynting în toate punctele frontierei sunt condiţii care asigură unicitatea soluţiei. Un exemplu ilustrativ în acest sens este elementul electromagnetic de circuit, care este prezentat la sfârşitul acestui capitol.

10.8 Regimul general variabil tranzitoriu

Problema fundamentală a acestui regim are ca date: domeniul de calcul $\Omega_t = \Omega \times [0, \infty)$, funcţia caracteristică dielectrică $\hat{D}$ (în particular pentru dielectrici liniari tensorul $\overline{\overline{\varepsilon}}$ şi eventual $\mathbf{P}_p$ în medii polarizate permanent), funcţia caracteristică de magnetizare $\hat{B}$ (în particular în mediu liniar magnetic tensorul $\overline{\overline{\mu}}$ şi eventual $\mathbf{I}_p = \mu_0\mathbf{M}_p$ în medii magnetizate permanent) şi funcţia caracteristică a conducţiei (în particular, în medii conductoare liniare este dat tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ şi eventual $\mathbf{J}_i = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}_i$, în medii cu câmp dielectric imprimat).

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectoriale $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{J}$ şi câmpul scalar ρ care satisfac ecuaţiile:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t};$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$div\mathbf{D} = \rho;$$

$\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p$;

$\mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H})$ sau în particular $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mathbf{I}_p$;

$\mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E})$ sau în particular $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$;

şi condiţiile iniţiale:

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_0(\mathbf{r})$ pentru $t = 0,\ \mathbf{r} \in \Omega$;

$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ pentru $t = 0,\ \mathbf{r} \in \Omega$,

cu div $\mathbf{B}_0 = 0$.

Este uşor de observat că dacă inducţia magnetică este solenoidală (are divergenţa nulă) în momentul iniţial, atunci va păstra conform legii inducţiei electrolmagnetice această proprietate pentru orice moment de timp. Cunoaşterea distribuţiei inducţiei electrice permite determinarea distribuţiei de sarcină, conform legii fluxului electric, lege care poate fi eliminată din sistemul de ecuaţii, dacă nu interesează electrizarea corpurilor (ρ este eliminat dintre necunoscute). În orice caz, distribuţia iniţială de sarcină rezultă din condiţia iniţială referitoare la inducţia electrică. Relaţia dintre densitatea de curent $\mathbf{J}$ şi densitatea de sarcină ρ, impusă de legea conservării sarcinii este automat satisfăcută deoarece această relaţie este o consecinţă a ecuaţiilor 2 şi 3 din sistemul de ecuaţii.

Teoremă 10.8.1 *Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic tranzitoriu.*

Problema fundamentală a regimului general variabil formulată anterior are soluţie unică dacă:

- *tensorii $\overline{\overline{\varepsilon}}$ şi $\overline{\overline{\mu}}$ au valori proprii strict pozitive;*
- *tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ are valori proprii nenegative;*
- *în orice punct de pe frontiera $\partial\Omega$ este dată fie $\mathbf{E}_t$ fie $\mathbf{H}_t$.*

Pentru demonstarţia acestei teoreme vom considera ca mediile au caracteristici de material afine. Presupunând prin absurd că există două soluţii distincte pentru problema fundamentală, diferenţa lor va satisface ecuaţiile:

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t};$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$
$$div\mathbf{D} = \rho;$$

$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}$ şi $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}$.

Condiţiile iniţiale: $\mathbf{D}(\mathbf{r}, 0) = 0$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0) = 0$ şi condiţiile de frontieră: $\mathbf{E}_t = 0$ fie $\mathbf{H}_t = 0$.

Teorema energiei electromagnetice aplicată câmpului diferenţă are forma locală:

$$div(\overline{H} \times \overline{E}) = p + \frac{\partial w}{\partial t},$$

cu $p = \mathbf{JE}$, $w = w_e + w_m = \mathbf{DE}/2 + \mathbf{BH}/2$ şi forma integrală:

$$P_\Sigma = P + \frac{\partial w}{\partial t}$$

în care:

$$P_\Sigma = \int_\Omega div(\mathbf{H} \times \mathbf{E})dv = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H} \times \mathbf{E})d\mathbf{A} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{E}_t)d\mathbf{A} = 0,$$
$$P = \int_\Omega p dv = \int_\Omega \mathbf{JE}dv = \int_\Omega \mathbf{E}(\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E})dv > 0,$$
$$W = \int_\Omega (\frac{\mathbf{DE}}{2} + \frac{\mathbf{BH}}{2})dv = \frac{1}{2}\int_\Omega [\mathbf{E}(\overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E})dv + \mathbf{H}(\overline{\overline{\mu}}\mathbf{H})]dv > 0.$$

Integrând în timp pe intervalul $(0, t_m)$ şi ţinând cont că energia iniţială este nulă $W(0) = 0$, rezultă:

$$W(t) = -\int_0^{t_m} P(t)dt \leq 0,$$

ceea ce contrazice condiţia $W(t_m) > 0$ demonstartă anterior.

În consecinţă $w = 0$, deci $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{H} = 0$ cea ce implică şi $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, iar în final $\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$. Soluţia diferenţă fiind nulă, rezultă că cele două soluţii nu pot fi distincte, iar problema fundamentală are soluţie unică.

Trebuie remarcat faptul că ecuaţiile regimurilor cvasistaţionar inductiv şi capacitiv şi implicit poblemele fundamentale ale acestor regimuri se obţin din cele ale regimului general variabil considerând mediile în întregul domeniu de tip anelectric respectiv amagnetic.

10.9 Elementul electromagnetic de circuit

Elementele de circuit electrice cu parametrii concentraţi condensatorul, rezistorul şi bobina sunt caracterizate de parametrii C, R şi respectiv L (scalari pozitivi în cazul elementelor dipolare şi matrice patrate simetrice, pozitiv definite, în cazul elementelor multipolare).

Calculul acestor parametrii, presupune determinarea câmpului electric, distribuţia de curent sau a câmpului magnetic prin rezolvarea problemei fundamentale a regimurilor electrostatic, electrocinetic respectiv magnetic staţionar în condiţiile de frontieră specifice, care au fost prezentate anterior.

În cazul elementelor cu parametrii distribuiţi analiza trebuie efectuată în regimul cvasistaţionar sau general variabil, deoarece elementul de circuit cu efecte de câmp aste conectat în exterior cu un circuit electric cu parametrii concentraţi, descris de ecuaţiile lui Kirchhoff şi nu de ecuaţiile lui Maxwell, condiţiile de frontieră descrise anterior referitoare la $\mathbf{E}_t$ şi $\mathbf{H}_t$ nu unt potrivite în acest caz.

Ar trebui introduse condiţii de frontieră care să se refere la un număr finit de mărimi scalare definite astfel încât conceptele de bornă (terminal), curent prin bornă şi potenţial al bornei să aibă sens. Acest lucru este realizat prin *conceptul de element electromagnetic de circuit electric,* care este un domeniu spaţial Ω, a cărei frontieră $\partial\Omega$ este alcătuită din n părţi disjuncte $S_1, S_2, ..., S_n$ numite borne şi suprafaţa externă bornelor $S_l = \partial\Omega - \bigcup_{k=1}^{n} S_k$ numită şi suprafaţa tensiunilor la borne, şi pe care sunt îndeplinite următoarele condiţii de frontieră:

$$\mathbf{n} \cdot rot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in S_l, \text{ (A)}$$

$$\mathbf{n} \cdot rot\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in S_l, \text{ (B)}$$

$$\mathbf{n} \cdot rot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentru } \mathbf{r} \in \bigcup_{k=1}^{n} S_k. \text{ (C)}$$

Condiţia de frontieră (A) se referă la componenta tanegenţială a intensităţii câmpului electric şi conform legii inducţiei electromagnetice impune valoare constantă în timp a componentei normale a inducţiei magnetice B_n. Această condiţie elimină orice cuplaj magnetic între interiorul şi exteriorul domeniului Ω, iar câmpul magnetic exterior nu induce câmp electric în interior. Mai mult, faptul că $\mathbf{E}_t(\mathbf{r})$ este irotaţional pe $\partial\Omega$ permite definirea unui potenţial scalar V pe $\partial\Omega$, astfel încât $\mathbf{E}_t = -gradV$. Dacă se doreşte ca acest lucru să se poată face şi în cazul elementelor cu domeniul Ω multiplu conex, condiţia (A) trebuie înlocuită cu una mai tare:

$$\int_\Gamma \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = 0 \text{ pentruorice} \Gamma \subset S_l.$$

Condiţia de frontieră (B) se referă la componenta tangenţială a intensităţii câmpului magnetic, dar conform legii circuitului magnetic ea impune anularea componentei normale a curentului total (cel de conducţie $\mathbf{J}_n$ plus cel de deplasare $\mathbf{J}_{dn}$). În acest fel se anulează atât cuplajele galvanice, cât şi cele capacitive prin suprafaţa extermă bornelor, obligând curentul total să treacă exclusiv prin borne. Putem spune că (A) şi (B) se referă deci la componentele normale ale inducţiilor ($\mathbf{B}_n$, $\mathbf{J}_n$, şi $\mathbf{D}_n$).

Condiţia de frontieră (C) se aplică doar bornelor şi impune ca pe acestea componenta tangenţială a câmpului electric $\mathbf{E}_t$ să fie nulă. Acest lucru este realizat dacă fiecare bornă este echipotenţială (de exemplu realizată dintr-o folie supraconductoare). Dacă nu s-ar impune această condiţie o bornă ar putea avea o infinitate de valori ale potenţialului electric în diferite puncte ale sale, făcând ca elementul să nu mai fie compatibil cu circuitul electric exterior.

Excitaţia unui element electromagnetic de circuit este realizată exclusiv prin bornele sale, de curenţii şi potenţialele acestora definite de:

$$i_k = \int_{\Gamma_k} \mathbf{H} d\mathbf{r}, \quad V_k = \int_{C_k} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \text{ pentru } k = 1, 2, \ldots n,$$

în care $\Gamma_k = \partial S_k$ este bordura bornei S_k iar $C_k \subset \partial\Omega$ este o curbă ce uneşte borna S_k de borna de referinţă S_n.

Teoremă 10.9.1 *Teorema de unicitate pentru elementul electromagnetic de circuit electric.*

Problemele determinării câmpului electromagnetic variabil în regim cvasistaţionar sau general variabil, formulate anterior au soluţie unică, dacă:

- *tensorul $\overline{\overline{\varepsilon}}$ are valori proprii strict pozitive (sau este nul în regimul cvasistaţionar anelectric);*
- *tensorul $\overline{\overline{\mu}}$ are valori proprii strict pozitive (sau este nul în regimul cvasistaţionar amagnetic);*
- *tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ are valori proprii nenegative;*
- *sunt îndeplinite condiţiile de frontieră (A), (B) (C) sau (A') în cazul domeniului Ω multiplu conex, condiţii definitorii pentru elementul electromagnetic de circuit;*
- *cu excepţi ultimei borne, pentru toate celelalte $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ este dată fie variaţia în timp a curentului $i_k(t)$ fie valoarea potenţialului $V_k(t)$, pentru $t \in [0, \infty)$.*

Pentru demonstraţia acestei teoreme se va folosi din nou câmpul diferenţă a două soluţii diferite, în manieră asemănătoare celei utilizate în demonstraţia teoremei anterioare în condiţii nule de frontieră. Puterea transferată prin $\partial\Omega$ este: $\int_{\partial\Omega}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})d\mathbf{A} = \int_{\partial\Omega}(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t)d\mathbf{A} = -\int_{\partial\Omega}(gradV \times \mathbf{H}_t)d\mathbf{A} = \int_{\partial\Omega} V rot\mathbf{H}d\mathbf{A} - \int_{\partial\Omega} rot(V\mathbf{H}d\mathbf{A}) = \int_{S_l} V\mathbf{n}rot\mathbf{H}d\mathbf{A} + \sum_{k=1}^{n} v_k \int_{S_k} \mathbf{n}rot\mathbf{H}d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} v_k \int_{\Gamma_k=\partial S_k} \mathbf{H}d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^{n-1} v_k i_k$

şi se anulează pentru $V_k = 0$ sau $i_k = 0$, cu $k = 1, 2, 3...., n-1$. În consecinţă, soluţia problemei de câmp este unică.

Să presupunem că primele $m < n$ terminale sunt excitate cu potenţialele $v_a = [V_1, V_2, ..., V_m]^T$ iar diferenţa lor $n-m$ terminale cu curenţii $i_b = [i_{m+1}, ..., i_n]^T$. După ce a fost determinat câmpul se poate calcula prin integrare pe curba de pe frontieră curenţii $i_a = [i_1, i_2, ..., i_m]^T$ prin terminalele excitate în tensiune şi potenţialele $v_b = [V_m, V_{m+1}, ..., V_n]^T$ ale terminalelor excitate în curent. Utilizând operatorii hibrizi de admitanţă y, de impedanţă z, de transfer în tensiune α şi de transfer în circuit β, care leagă semnalele de excitaţie de cele de răspuns, rezultă:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{aa} & \beta_{ab} \\ \alpha_{ba} & z_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_a \\ i_b \end{bmatrix}. \tag{10.1}$$

Dacă $n = 0$, atunci elementul este caracterizat numai de operatori de impedanţă şi $v = zi$ iar dacă $n = n-1$, atunci elementul este caracterizat numai de operatori de admitanţă şi $i = yv$.

În cazul elementului electromagnetic liniar cu condiţii iniţiale nule, operatorii de circuit astfel definiţi sunt liniari. Din acest motiv comportarea elementului în aceste condiţii este caracterizată de $(n-1)^2$ funcţii indiciale, care reprezintă răspunsul unui terminal la excitaţie treaptă a altui terminal, în condiţiile în care celelalte terminale au excitaţie nulă.

Capitolul 11

Analiza câmpului electromagnetic în domeniul frecvenţei

11.1 Reprezentarea în complex a ecuaţiilor câmpurilor sinusoidale

Cel mai des întâlnit şi în acelaşi timp mai simplu regim periodic permanent al câmpului electromagnetic este regimul sinusoidal, în care variaţia în timp a mărimilor fizice caracteristica câmpului este de forma:

$$x(t) = X\sqrt{2}sin(\omega t + \phi_x)$$

în care x este valoarea instantanee, $t \in (-\infty, \infty)$ este variabila timp, X este valoarea efectivă, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ este pulsaţia, f frecvenţa şi T perioada iar Φ_x este faza iniţială. În regimul de variaţie sinusoidală (numită şi armonică) toate mărimile unei probleme au frecvenţaă comuna de variaţie, fiecare mărime scalară având specific doar doi parametrii reali valoarea efectivă X şi faza iniţială Φ_x. Din acest motiv putem asocia fiecărei funcţie $x : [0, t] \to \mathbb{R}$ cu variaţie sinusoidală ($x \in \mathcal{S}$ - clasa funcţiilor sinusoidale de pulsaţie ω) în mod biunivoc un număr complex X $\in$ C şi definit de relaţia $\underline{X} = X_e j\varphi_x$ în care j este unitatea imaginară, $j^2 = -1$.

Reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale este o transformată $\mathcal{C} : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ cu următoarele proprietăţi remarcabile:

- $\mathcal{C}$ este bijectivă, iar $\mathcal{C}^{-1} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ este definită de $\mathcal{C}^{-1}[\underline{X}] = \sqrt{2}Im[\underline{X}e^{j\omega t}]$;
- $\mathcal{C}$ este un operator liniar, fiind valabilă relaţia

  $$\mathcal{C}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] = \lambda_1 \mathcal{C}[x_1] + \lambda_2 \mathcal{C}[x_2],$$

  în care $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ iar $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$;
- $\mathcal{C}$ transformă operaţiile diferenţiale în operaţii algebrice, conform relaţiei:

  $$\mathcal{C}[\frac{dx}{dt}] = j\omega \mathcal{C}[x],$$

  în care $x \in \mathcal{S}$ este o funcţie sinusoidală de pilsaţie ω.

Principalul avantaj al reprezentării complexe constă în faptul că ecuaţiile diferenţiale în variabila timp se transformă în ecuaţii algebrice (este adevărat complexe), dar în care variabila timp nu intervine (ecuaţiile au un caracter staţionar). Din acest motiv, analiza câmpurilor cu variaţie temporală sinusoidală tehnica este făcută aproape exclusiv prin reprezentare complexă.

Primul lucru care trebuie remarcat este faptul că un sistem se poate afla în regim armonic, doar dacă ecuaţiile sale au un caracter liniar. În cazul câmpului electromagnetic, acesta presupune ca toate cele trei relaţii de material sunt liniare: $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}$, $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}$. În caz contrar, dacă un câmp dintr-o relaţie de material este sinusoidal (de exemplu intensitatea câmpului), atunci celălalt (de exemplu inducţia) nu va mai avea variaţie armonică în timp.

Să considerăm o problemă 2D componenetele intensităţii câmpului magnetic cu variaţie sinusoidală:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}H_x(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}H_y(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}H_x\sqrt{2}sin(\omega t + \varphi_1) + \mathbf{j}H_y\sqrt{2}sin(\omega t + \varphi_2).$$

Prin reprezentarea în complex a acestor componente se obţine:

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}H_x e^{j\varphi_1} + \mathbf{j}H_y e^{j\varphi_2} \in \mathbf{C^2},$$

adică un vector bidimensional cu componente complexe.

Raţionamente asemănătoare pot fi făcute fie în 2D, fie în 3D, pentru toate câmpurile vectoriale sau scalare. În consecinţă, în regim armonic câmpul electromagnetic este caracterizat de următoarele funcţii vectoriale cu componenete complexe:

- inducţia electrică în complex $\mathbf{D} : \Omega \to \mathbf{C^n}$;
- intensitatea câmpului electric în complex $\mathbf{E} : \Omega \to \mathbf{C^n}$;
- densitatea de curent în complex $\mathbf{J} : \Omega \to \mathbf{C^n}$;
- inducţia magnetică în complex $\mathbf{B} : \Omega \to \mathbf{C^n}$;
- intensitatea câmpului magnetic în complex $\mathbf{H} : \Omega \to \mathbf{C^n}$;
- densitatea de sarcină în complex$\rho : \Omega \to \mathbb{C}$,

în care $n = 1, 2$ sau 3 în funcţie de dimensiunea problemei.

Problema fundamentală a regimului general variabil armonic are ca date: domeniul spaţial Ω, tensorul permitivităţii $\overline{\overline{\varepsilon}}$, tensorul permeabilităţii $\overline{\overline{\mu}}$ şi cel al conductivităţii $\overline{\overline{\sigma}}$, tensori cunoscuţi în orice punct din Ω şi eventual curentul electric imprimat $\mathbf{J_i}$.

Necunoscutele problemei sunt câmpurile vectorial – complexe $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$ care satisfac următorele ecuaţii obţinute din ecuaţiile lui Maxwell pirn aplicarea transformatei în complex $\mathcal{C}$ şi ţinând cont de proprietăţile acesteia:

$$rot\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\underline{\mathbf{E}};$$

$$rot\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{J} + j\omega\underline{\mathbf{D}};$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}}\underline{\mathbf{E}};$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \overline{\overline{\mu}}\underline{\mathbf{H}};$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \overline{\overline{\sigma}}\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{J}}_i.$$

Dacă interesează şi distribuţia de sarcină, atunci se calculează câmpul scalar complex:

$$\rho = div\overline{D}$$

În acest regim legea fluxului magnetic $div\mathbf{B} = 0$ este satisfăcută automat, ca o consecinţă a legii inducţiei electromagnetice. Constatăm spre deosebire de regimul tranzitoriu, în regimul sinusoidal nu sunt necesare condiţii iniţiale.

Prin particularizări ale constantelor de material se obţin diferite regimuri ale câmpului armonic:

- $\overline{\overline{\varepsilon}} = 0$ - regimul cvasistaţionar inductiv (anelectric);
- $\overline{\overline{\mu}} = 0$ - regimul cvasistaţionar capacitiv (amagnetic);
- $\overline{\overline{\sigma}} = 0$ - regimul general variabil în medii izolante.

Cei trei tensori de material sunt simetrici şi au componente reale, iar valorile proprii sunt şi ele reale. Un artificiu interesant de modelare constă în considerarea unor constante de material cu caracter complex, de exemplu $\underline{\varepsilon} = \varepsilon' + j\varepsilon''$, $\underline{\mu} = \mu' + j\mu''$ cu părţi imaginare ε'' şi sau μ'' nenule. Efectul acestor parametrii constă în apariţia unor cicluri eliptice de histerezis pentru comportarea electrică, respectiv magnetică. Din punct de vedere al comportării în domeniul timpului, acest model corespunde unor relaţii de material cu caracter dinamic. De exemplu, $\underline{\mathbf{D}} = (\varepsilon' + j\varepsilon'')\underline{\mathbf{E}}$ este reprezentarea în complex a ecuaţiei:

$$\overline{D}(t) = \varepsilon'\mathbf{E}(t) + \frac{\varepsilon''}{\omega} \cdot \frac{dE}{dt}.$$

Teoremă 11.1.1 *Teorema de unicitate a câmpului armonic.*

Problema fundamentală a regimului general variabil armonic formulată anterior are soluţie unică, dacă:

- *tensorul $\overline{\overline{\varepsilon}}$ are valori proprii pozitive (sau este nul în regim anelectric);*
- *tensorul $\overline{\overline{\mu}}$ are valori proprii pozitive (sau este nul în regim amagnetic);*
- *tensorul $\overline{\overline{\sigma}}$ are valori proprii pozitive;*
- *în fiecare punct de pe frontieră este cunoscută componenta tangenţială fie a intensităţii câmpului electric $\underline{\mathbf{E}}_t$ fie a celui magnetic $\underline{\mathbf{H}}_t$.*

Ultima condiţie poate fi înlocuită cu condiţiile de frontieră specifice **elementului electromagnetic de circuit***:*

- *pe suprafeţele bornelor $E_t = 0$;*
- *pe suprafaţa externă bornelor, componentele normale ale rotorului intensităţii câmpului electric şi magnetic sunt nule:* $\mathbf{n} rot \mathbf{E} = 0, \ \ \mathbf{n} rot \mathbf{H} = 0$;
- *pentru fiecare bornă cu excepţia celei de referinţă este cunoscută fie valoarea potenţialului complex $\underline{V}_k$ fie a curentului complex $\underline{I}_k$ ce străbate borna.*

Pentru demonstraţia acestor două teoreme vom demonstra pentru început forma complexă a teoremei energiei electromagnetice în regim armonic (a nu se confunda cu reprezentarea în complex a teoremei energiei electromagnetice). În cazul unui element electromagnetic de circuit electric, membrul stâng al egalităţii este:

$$\int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_k \underline{I}_k^*$$

dacă I_k are sensul de referinţă spre exterior.

Dacă se notează cu $\underline{\mathbf{H}}^*$, $\underline{\mathbf{J}}^*$, $\underline{\mathbf{D}}^*$ câmpurile $\underline{\mathbf{H}}$, $\underline{\mathbf{J}}$, şi $\underline{\mathbf{D}}$ complex conjugate, rezultă din legea inducţiei şi cea a circuitului magnetic:

$$\underline{\mathbf{H}}^* rot \underline{\mathbf{E}} = -j\omega \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*, \quad \underline{\mathbf{E}} rot \underline{\mathbf{H}}^* = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* - j\omega \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*.$$

Scăzând aceste două realţii, rezultă forma locală:

$$-div(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* + j\omega(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*)$$

şi forma integrală:

$$-\int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv + j\omega \int_{\Omega} (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) dv.$$

Trebuie remarcat că în cazul mediilor fără histerezis $\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* = \underline{\mathbf{E}} \overline{\overline{\sigma}} \underline{\mathbf{E}}^*$ este un număr real nenegativ care reprezintă densitatea de volum a puterii active disipată de corpuri , a cărei integrală este puterea activă măsurată în W:

$$P = \int_{\Omega} \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

iar

$$\omega(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) = \omega(\underline{\mathbf{H}} \overline{\overline{\mu}} \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \overline{\overline{\varepsilon}} \underline{\mathbf{E}}^*)$$

este tot un număr real care reprezintă densitatea de volum a puterii reactive disipate de corpuri, a cărei integrală este puterea reactivă, măsurată în VAr. În consecinţă, $\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*$ reprezintă vectorul Poynting complex, ce caracterizeaza puterea transferată superficial, partea sa reala referindu-se la puterea activă $[W/m^2]$ iar partea imaginara la puterea reactivă $[VAr/m^2]$.

Să considerăm acum că problema fundamentală are două soluţii distincte. Diferenţa lor va satisface aceleaşi ecuaţii dar cu condiţii de frontieră nule. Din acest motiv componenta normală a vectorului Poynting complex pentru câmpul diferenţă este nul: $\underline{\mathbf{E}}_t \times \underline{\mathbf{H}}_t^* = 0$, atât pentru prima teoremă de unicitate cât şi pentru cea corespunzătoare elementului electromagnetic de circuit. Din forma complexă a teoremei energiei rezultă că atât puterea activă (partea reală) cât şi puterea reactivă (partea imaginară) sunt nule:

$$P = \int_\Omega \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv = 0, \; Q = \omega \int_\Omega (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^* - \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^*) dv = 0.$$

Din prima relaţie rezultă că $J = 0$ peste tot în Ω iar $E = 0$ cel puţin în conductoare. Pentru ca soluţia problemei fundamentale să fie unică este necesar ca E şi H să se anuleze peste tot în Ω. Dacă de exemplu, domeniul Ω este în întregime izolant, $J = 0$ în schimb atât E cât şi H pot fi nenule, chiar şi în condiţiile $P = 0$, $Q = 0$. Cele două câmpuri electric şi magnetic se pot afla în acest caz în rezonanţă, având velori nenule chiar şi în condiţii de frontieră nule. Din acest motiv pentru a asigura unicitatea câmpului în regim general variabil tot domeniul Ω trebuie să fie conductiv, sau cel puţin slab conductiv.

Totuşi **problema determinării frecvenţelor de rezonanţă** ale domeniului cu medii ideale, fără pierderi joacă un rol important în practică deoarece la aceste frecvenţe câmpul electromagnetic se poate întreţine un timp nemărginit, fără aport de energie din exterior.

În regim cvasistaţionar anelectric forma în complex a energiei este:

$$-\int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \int_\Omega \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv + j\omega \int_\Omega (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*) dv.$$

Anularea părţii reale implică $E = 0$, dacă domeniul Ω este integral conductor iar a celei imaginare implică $H = 0$, dacă $Re[\mu] > 0$, ceea ce determină unicitatea soluţiei.

În regim cvasistaţionar amagnetic, este valabilă relaţia:

$$-\int_{\partial\Omega} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) d\mathbf{A} = \int_\Omega \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{J}}^* dv - j\omega \int_\Omega (\underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{D}}^* dv$$

Anularea părţii imaginare implică $E = 0$, dacă $Re[\varepsilon] > 0$, ceea ce determină unicitatea soluţiei, chiar şi în cazul domeniilor integral izolante.

Trebuie remarcat că în cazul elementului electromagnetic de circuit relaţiile între curenţi şi potenţiale au forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{V}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa} & \underline{B}_{ab} \\ \underline{A}_{ba} & \underline{Z}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{I}_b \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

în care $\underline{I} = \mathcal{C}[i]$, $\underline{V} = \mathcal{C}[v]$, formă obişnuită prin reprezentarea în complex a relaţiei instantanee specifice elementului cu excitaţie hibridă. În forma complexă $\underline{Y}$ reprezintă admitanţa complexă, $\underline{Z}$ impedanţa complexă, $\underline{A}$ factorul complex de transfer în tensiune iar $\underline{B}$ reprezintă factorul complex de transfer în curent. Partea reală şi cea imaginară a impedanţiei complexe: $\underline{Z} = R + jX$ reprezintă rezistenţa şi respectiv reactanţa de curent alternativ.

În multe situaţii practice prezintă interes determinarea rezistenţei şi reactanţei (sau eventual parţile reale şi imaginare ale altor funcţii complexe de circuit) la o frecvenţă dată sau determinarea modulului în care aceşti parametrii depind de frecenţă. După cum s-a arătat puterea complexă transferată pe la borne de un element multipolar de circuit este:

$$\underline{S} = P + jQ = \sum_{k=1}^{n-1} \underline{V}_k \underline{I}_k^* = \underline{Z} I_b^2 + \underline{Y}^* V_a^2 + (\underline{A} + \underline{B}^*) \underline{V}_a \underline{I}_b^*.$$

În cazul $m = 0$ frecvenţele de rezonanţe corespund la $X = Im(\underline{Z}) = 0$ şi la $Im(\underline{Y}) = 0$, în cazul $m = n - 1$.

11.2 Analiza regimurilor periodice cu transformata Fourier discretă

În regimul periodic permanent al câmpului electromagnetic, mărimile caracteristice ale câmpului au variaţie periodică în timp:

$$x(t) = x(t+T),$$

în care T este perioada, comună pentru toate mărimile problemei. Din acest motiv, funcţia $x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ se poate restrânge doar la o singură perioadă $x : [0, T) \to \mathbb{R}$ şi prelungi ulterior prin periodicitate pe toată axa timpului.

Funcţiile periodice admit dezvoltări în serie Fourier, de forma:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

în care $\omega = 2\pi/T$ iar coeficienţii Fourier sunt:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt;$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos k\omega t dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin k\omega t dt.$$

Valoarea medie a pătratului funcţiei x pe o perioadă are expresia:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

deci dacă x are pătrat integrabil $x \in L^2(0, T)$, atunci şirurile a_k şi b_k sunt convergente către zero.

Dacă definim numerele complexe $\underline{C}_k = a_k + j_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, ...$ rezultă: $\underline{C}_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)e^{jk\omega t}dt$, proporţional cu numărul complex asociat funcţiei sinusoidale $a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$, numită şi armonica k. În plus, componenta continuă este reprezentată de $\underline{C}_0 = a_0$. În consecinţă orice funcţie x aparţinând spaţiului funcţiei periodice $\mathcal{P}$ de perioadă dată este reprezentată biunivoc de şirul convergent de numere complexe $\underline{C}_0, \underline{C}_1, \ldots, \underline{C}_k, \ldots \in^2 (\mathbb{C})$. Transformata $\mathcal{F} : \mathcal{P} \to l^2(\mathbb{C})$ astfel definită se numeşte transformata Fourier complexă şi are următoarele proprietăţi remarcabile:

- $\mathcal{F}$ este bijectivă şi $\mathcal{F}^{-1} : l^2(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}$ are expresia:

$$x(t) = Re[\sum_{k=0}^{\infty} \underline{C}_k e^{-jk\omega t}];$$

- $\mathcal{F}$ este liniară:

$$\mathcal{F}[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2] = \lambda_1 \mathcal{F}[x_1] + \lambda_2 \mathcal{F}[x_2],$$

  pentru orice λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2 \in \mathcal{P}$;

- $\mathcal{F}$ transformă operaţiile diferenţiale în operaţii algebrice conform relaţiei:

$$\mathcal{F}[\frac{dx}{dt}] = j\omega diag(0, 1, ..., k, ...)\mathcal{F}[x],$$

  în care $x \in \mathcal{P}$. Reprezentarea complexă a armonicii k a derivatei este obţinută prin înmulţirea cu $jk\omega$.

Utilizând transformata Fourier discretă, varabila timp este eliminată din ecuaţiile diferenţiale, dar acestea se transformă în sisteme cu un număr infinit de ecuaţii cu soluţii complexe (câte una pentru fiecare armonică).

În fiecare punct din domeniul spaţial Ω, în funcîe de dimensiunea problemei câmpul este caracterizat de vectori cu $n = 1, 2$ sau 3 componente. Prin reprezentare în complex, în domeniul frecvenţei, rezultă următoarele funcţii:

$$\underline{\mathbf{D}} : \Omega \to \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\mathbf{E}} : \Omega \to \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\mathbf{J}} : \Omega \to l^2(\mathbb{C}^n),$$

$$\underline{\mathbf{B}} : \Omega \to \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\mathbf{H}} : \Omega \to \mathbf{l}^2(\mathbb{C}^n), \quad \underline{\rho} : \Omega \to l^2(\mathbb{C}^n),$$

ce ??? complex al câmpului.

Problema fundamentală a regimului general variabil periodic permanent are ca date: domeniul spaţial Ω, tensorul permitivităţii $\overline{\overline{\varepsilon}}$, tensorul permeabilităţii $\overline{\overline{\mu}}$ şi al conductivităţii $\overline{\overline{\sigma}}$ în orice punct din Ω şi eventual transformata Fourier a curentului electric imprimat $\mathbf{J}_i : \Omega \to l^2(\mathbb{C}^n)$. *Necunoscutele problemei* sunt câmpurile vectorial-complexe (cu o infinitate de armonice) $\underline{\mathbf{E}}$, $\underline{\mathbf{D}}$, $\underline{\mathbf{B}}$, $\underline{\mathbf{H}}$ şi $\underline{\mathbf{J}}$, care satisfac următoarele ecuaţii (obţinute prin transformata Fourier discretă a ecuaţiilor lui Maxwell),

$$rot\underline{\mathbf{E}}_k = jk\omega\underline{\mathbf{B}}_k,$$
$$rot\underline{\mathbf{H}}_k = \underline{\mathbf{J}}_k + jk\omega\underline{\mathbf{D}}_k,$$
$$\underline{\mathbf{D}}_k = \overline{\overline{\varepsilon}}\underline{\mathbf{E}}_k, \quad \underline{\mathbf{B}}_k = \overline{\overline{\mu}}\underline{\mathbf{H}}_k, \quad \underline{\mathbf{J}}_k = \overline{\overline{\sigma}}\underline{\mathbf{E}}_k + \underline{\mathbf{J}}_{ik},$$

pentru armonicele $k = 1, 2, \ldots$.

Prin particularizarea constantelor de material se obţin diferite regimuri ale câmpului electromagnetic :

- $\overline{\overline{\varepsilon}} = 0$ - regimul cvasistaţionar inductiv;
- $\overline{\overline{\mu}} = 0$ - regimul cvasistaţionar capacitiv;
- $\overline{\overline{\sigma}} = 0$ - regimul general variabil în izolanţi.

În cazul elementului electromagnetic liniar de circuit electric este suficient să se determine felul în care variază cu frecvenţa funcţiile de circuit de regim armonic $\underline{Z}_{bb}(k\omega)$, $\underline{Y}_{aa}(k\omega)$, $\underline{A}_{ba}(k\omega)$, $\underline{B}_{ab}(k\omega)$, urmând răspunsul să se calculeze în funcţie de excitaţie cu formule de tipul:

$$\underline{V}_b = diag(\underline{Z}_{bb}(0), \underline{Z}_{bb}(\omega), \underline{Z}_{bb}(2\omega), \ldots)\underline{I}_b$$

valabilă pentru excitaţie în curent, şi în care $\underline{V}_b$, $\underline{I}_b \in l^2(\mathbb{C})$. Trebuie remarcat că analiza în domeniul frecvenă se aplică de regulă în problemele liniare, dar se poate aplica şi în cazul problemelor cu caracteristici de material neliniare folosind *metoda balanţei armonice.*

Dacă de exemplu, caracteristica de magnetizare este neliniară cu $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{H})$ atunci în locul relţiei $\underline{\mathbf{B}}_k = \overline{\overline{\mu}}\underline{\mathbf{H}}_k$ trebuie satisfăcută relaţia neliniară între armonici:

$$\underline{\mathbf{B}} = \mathcal{F}(\mathbf{B}), \quad \mathcal{F}(\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{H})) = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{B}}(\mathcal{F}^{-1}(\underline{\mathbf{H}}))).$$

Teoremă 11.2.1 *Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic periodic.*

Problema fundamentală a regimului periodic permanent formulată anterior are soluţie unică, dată:

- *tensorul* $\overline{\overline{\varepsilon}}$ *este pozitiv definit sau este nul în regim anelectric;*
- *tensorul* $\overline{\overline{\mu}}$ *este pozitiv definit sau este nul în regim amagnetic;*
- *tensorul* $\overline{\overline{\sigma}}$ *este pozitiv definit sau nenegativ în regim amagnetic;*
- *în fiecare punct de pe frontieră este dată transformata Fourier, discretă a componentei tanegenţiale a câmpului electric* $\underline{\mathbf{E}}_t \in l^2(\mathbb{C}^{n-1})$ *sau a câmpului magnetic* $\underline{\mathbf{H}}_t \in l^2(\mathbb{C}^{n-1})$.

Ultima condiţie poate fi înlocuită cu condiţiile de frontieră specifice elementului electromagnetic de circuit:

- *pe suprafaţa bornelor* $E_t = 0$*;*
- *pe suprafaţa externă bornelor, componentele normale ale rotorului câmpului magnetic şi electric sunt nule:*
$$\mathbf{n}rot\underline{\mathbf{E}} = 0, \quad \mathbf{n}rot\underline{\mathbf{H}} = 0,$$
- *pentru fiecare bornă, cu excepţia celei de referinţă este cunoscută transformata Fourier a potenţialului* $\underline{V} \in l^2(\mathbb{C})$ *sau a curentului injectat* $I \in l^2(\mathbb{C})$.

Pentru demonstraţia acestei teoreme este suficient să observăm că în cazul liniar soluţia problemei se obţine prin superpoziţia câmpurilor produse de diferite armonici ale excitaţiilor (surselor interne şi externe de câmp). Fiecare armonică fiind sinusoidală problema se reduce la una de regim armonic.

11.3 Analiza regimurilor tranzitorii cu transformatele Laplace şi Fouirier

Regimul tranzitoriu poate fi considerat ca un caz limită, degenerat al regimului periodic permanent, şi anume cazul în care perioada T tinde către infinit. Pentru această limită transformata Fourier discretă tinde către transformata Fourier (continuă), care transformă funcţia reală $x : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ în funcţia complexa de variabilă reală $X : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$ definită astfel:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt.$$

Transformata Fourier are următoarele proprietăţi:

- $\mathcal{F}$ este inversabilă şi $\mathcal{F}^{-1}$ are expresia:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{-j\omega t}dt$$

- $\mathcal{F}$ este liniară:

$$\mathcal{F}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1\mathcal{F}[x_1(t)] + \lambda_2\mathcal{F}[x_2(t)],$$

- $\mathcal{F}$ transformă operaţia de derivare într-una algebrică de înmulţire cu $j\omega$:

$$\mathcal{F}[\frac{dx}{dt}] = j\omega\mathcal{F}[x(t)]$$

Transformata Fourier este folosită la analiza câmpului electromagnetic în medii liniare, în regim tranzitoriu cu condiţii iniţiale nule. Prin aplicarea acestei transformări din ecuaţiile câmpului se elimină variabila timp şi toate derivatele faţă de aceasta. Ecuaţiile devin "staţionare", dar coeficienţii din aceste ecuaţii deci şi soluţiile lor au caracter complex. În locul variabilei "timp" apare o nouă variabilă "pulsaţia", dar nu apar derivate faţă de acestea. Din acest motiv se spune că analiza se efectuează în domeniul frecvenţei şi nu în domeniul timpului.

Transformata Fourier a câmpului electromagnetic este identică formal cu ecuaţiile complexe ale câmpului în regim armonic. În regim armonic ω este un număr fixat (dat) pe când în regim tranzitoriu ω este o variabilă reală simbolică (independentă, neprecizată).

Dacă sursele de câmp sunt transformatele Fourier ale surselor interne ($\underline{\mathbf{J}}_i = \mathcal{F}[\mathbf{J}_i(t)]$) sau externe, reprezentate prin condiţiile de frontieră de tipul $\underline{\mathbf{E}}_t = \mathcal{F}[\underline{\mathbf{E}}_t(t)]$ sau $\underline{\mathbf{H}}_t = \mathcal{F}[\underline{\mathbf{H}}_t(t)]$, atunci soluţia sistemului, care este unică în baza teoremei de unicitate din regimul armonic, este chiar transformata Fourier a soluţiei tranzitorii, din domeniul timpului obţinută în condiţii iniţiale nule. Spre deosebire de analiza în domeniul timpului, în care atât excitaţiile cât şi răspunsurile sunt funcţii reale de timp, în analiza în domeniul frecvenţei ambele semnale sunt funcţii complexe ale frecvenţei.

Dacă în domeniul timpului operatorii de circuit au un caracter integral-diferenţial, în analiza în frecvenţă ei sunt funcţii complexe de variabilă reală: $\underline{Z}_{bb}(\omega)$, $\underline{Y}_{aa}(\omega)$, $\underline{A}_{ba}(\omega)$, $\underline{B}_{ab}(\omega)$, cu părţi reale şi imaginare nenule, caracteristici de frecvenţă ale elementului electromagnetic de circuit.

Cunoaşterea caracteristicelor de frecvenţă permite determinarea răspunsului i_a, V_b, generat în condiţii iniţiale nenule de o excitaţie arbitrară V_a, i_b:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ v_b \end{bmatrix} = \mathcal{F}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \underline{Y}_{aa}(\omega) & \underline{B}_{ab}(\omega) \\ \underline{A}_{ba}(\omega) & \underline{Z}_{bb}(\omega) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{V}_a \\ \underline{I}_b \end{bmatrix}\right]. \tag{11.2}$$

Pentru analiza regimului tranzitoriu în sisteme liniare se utilizează o altă transformată integrală, înrudită cu transformata Fourier. Aceasta este transformata Laplace şi este definită de relaţia:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(s)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{st}dt,$$

în care $s \in \mathbb{C}$ este o variabilă complexă simbolică, numită "frecvenţa complexă".

Transformata Laplace are următoarele proprietăţi:

- $\mathcal{L}$ este inversabilă şi $\mathcal{L}^{-1}$ are expresia:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \int_{c+j\infty}^{c-j\infty} X(s)e^{st}ds,$$

- $\mathcal{L}$ este un operator liniar:

$$\mathcal{L}[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1\mathcal{L}[x_1(t)] + \lambda_2\mathcal{L}[x_2(t)],$$

- $\mathcal{L}$ transformă operaţia de derivare în una algebrică:

$$\mathcal{L}[\frac{dx}{dt}] = s\mathcal{L}[x(t)] - x(0)$$

  în care s-a notat cu

$$x(0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t<0}} x(t),$$

  condiţia iniţială, anterioară regimului tranzitoriu.

După aplicarea transformatei Laplace, mărimilor caracteristice câmpului se obţin următoarele funcţii complexe de varaibilă complexă:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, s) = \mathcal{L}[\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n;$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, s) : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n;$$
$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, s) : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n;$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, s) : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n;$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, s) : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n;$$
$$\rho(\mathbf{r}, s) : \Omega \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Prin transformări Laplace ecuaţiile lui Maxwell capătă forma:

$$rot\mathbf{E} = -s\mathbf{B} + \mathbf{B}_0,$$

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{J} + s\mathbf{D} - \mathbf{D}_0,$$

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{B}; \quad \mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i.$$

În condiţii iniţiale nule, elementul liniar de circuit electric este caracterizat de funcţiile operaţionale de circuit $Z(s)$, $Y(s)$, $A(s)$ şi (s), obţinute înlocuind variabila $j\omega$ din funcţiile Fourier cu variabila s. Relaţia constitutivă a elementului electromagnetic de circuit multipolar devine:

$$\begin{bmatrix} I_a \\ V_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & B_{ab} \\ A_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ I_b \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

în care $V(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ şi $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$. Se constată că, spre deosebire de analiza în domeniul timpului, în acest caz condiţiile iniţiale fac parte din ecuaţii şi nu sunt impuse separat. Pentru a satisface legile fluxurilor va trebui totuşi îndeplinite condiţia div $\mathbf{B}_0 = 0$ iar $\rho = \text{div}\mathbf{D}_0$ şi reprezintă distribuţia iniţială de sarcină. Teorema de unicitate este similară cu cea din domeniul timpului, cu deosebirea că $\mathbf{E}_t$ şi $\mathbf{H}_t$ sunt înlocuite cu transformatele Laplace ale componentelor tangenţiale ale intensităţii câmpului $\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, s)$ şi respectiv $\mathbf{H}_t(\mathbf{r}, s)$.

Capitolul 12

Formulări în potenţiale pentru ecuaţiile câmpului electromagnetic

12.1 Potenţialul scalar al câmpurilor statice şi staţionare irotaţionale

Ecuaţiile regimurilor electrostatic, magentostatic şi electrocinetic staţionar sunt similare:

$$
\begin{aligned}
div\mathbf{D} &= \rho;\\
div\mathbf{B} &= 0;\\
div\mathbf{J} &= 0;\\
rot\mathbf{E} &= 0;\\
rot\mathbf{H} &= 0;\\
rot\mathbf{E} &= 0;\\
\mathbf{D} &= \hat{D}(\mathbf{E});\\
\mathbf{B} &= \hat{B}(\mathbf{H});\\
\mathbf{J} &= \hat{J}(\mathbf{E}),
\end{aligned}
$$

având toate câmpul cu o intensitate irotaţională. Se constată că $\mathbf{E}$ este similar lui $\mathbf{H}$ iar $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{J}$ sunt similare. Deoarece divergenţa inducţiei este nenul'e $\rho \neq 0$ doar în regim electrostatic, va fi analizat acest regim, rezultatele obţinute fiind apoi particularizate în celelalte două regimuri.

Orice câmp irotaţional admite într-un domeniu simplu conex Ω un potenţial scalar $V : \Omega \to \mathbb{R}$, astfel încât :

$$\mathbf{E} = -gradV.$$

Integrând această relaţie pe o curbă C, care începe din punctul $\mathbf{r}$ şi se termină în punctul $\mathbf{r}_0$ se obţine:

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) + \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r}_0.$$

Potenţialul scalar este definit până la o constantă aditivă C, urmând ca $V'(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})+C$ să determine aceaşi câmp $\mathbf{E}$ ca şi potenţialul scalar $V(\mathbf{r})$. O metodă de a fixa această constantă este de a alege un punct $\mathbf{r}_0$, numit originea potenţialului pentru care potenţialul se consideră convenţional nul. Potenţialul unui punct este deci tensiunea electrică între acel punct şi punctul de referinţă. Tensiunea electrică este diferenţa de potenţial:

$$U_{12} = V_1 - V_2,$$

urmând ca pe o curbă inchisă această diferenţă să fie nulă.

Cele două câmpuri vectoriale pot fi eliminate din ecuaţii prin exprimare în funcţie de potenţialul V, obţinându-se în final ecuaţia diferenţială neliniară de ordinul doi satisfăcută de potenţialul scalar:

$$div\mathbf{D}(-gradV) = \rho.$$

Dacă mediul are caracteristică de material afină: $\mathbf{D}(\mathbf{E}) = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p$ potenţialul satisface ecuaţia Poisson generalizată:

$$div(\overline{\overline{\varepsilon}}gradV) = -\rho + div\mathbf{P}_p$$

Dacă mediul este omogen, ecuaţia satisfăcută de potenţial este cea Poisson clasică:

$$-\Delta V = \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1}(\rho - div\mathbf{P}_p).$$

Se constată că $\rho_p = -div\mathbf{P}_p$ are aceeaşi unitate de măsură cu ρ, motiv pentru care este numită densitate de volum a sarcinii de polarizaţie, urmând ca sarcina totală să fie $\rho_t = \rho + \rho_p$, iar în medii izotrope să se satisfacă ecuaţia Poisson:

$$-\Delta V = \rho_t/\varepsilon.$$

Sarcina de polarizaţie este o sarcină fictivă, dar care are acelaşi efect asupra potenţialului ca şi sarcina reală. Un corp polarizat permanent generează într-un mediu liniar cu permeabilitate $\overline{\overline{\varepsilon}}$ acelaşi potenţial V, deci implicit acelaşi câmp $\mathbf{E}$ ca şi unul electrizat cu ρ_p, în schimb inducţiile sunt diferite: $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E}$ în primul caz şi $\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}}\mathbf{E} + \mathbf{P}_p$ în al doilea caz.

Dacă mediul este neelectrizat şi dacă polarizaţia permanentă este nulă, atunci potenţialul V satisface ecuaţia Laplace generalizată:

$$div(\overline{\overline{\varepsilon}}gradV) = 0.$$

În cazul mediilor omogene, la care $\overline{\overline{\varepsilon}}$ nu depinde de punct, potenţialul V satisface ecuaţia Laplace:

$$\Delta V = 0.$$

În cazul regimului magnetic staţionar se utilizează potenţialul magnetic scalar V_m definit astfel încât:

$$\mathbf{H} = -gradV_m,$$

$$V_m(\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{H} d\mathbf{r}.$$

Prin utilizarea potenţialului scalar **problema fundamentală** a electrostaticii are distribuţia de sarcină totală $\rho_t : \Omega \to \mathbb{R}$ cunoscută, iar ca necunoscută 'câmpul scalar $V : \Omega \to \mathbb{R}$. După determinarea potenţialului scalar intensitatea câmpului electric şi inducţia sa se determină prin relaţiile:

$$\mathbf{E} = -gradV,$$
$$\mathbf{D} = \hat{D}(\mathbf{E}).$$

În medii liniare şi izotrope densitatea de energie a câmpului electrostatic are expresia:

$$w_e = \int_0^s \mathbf{E} d\mathbf{D} = \frac{\mathbf{DE}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2}(gradV)^2 > 0,$$

iar dublul energiei electrostatice din domeniul Ω este:

$$2W = \int_\Omega \varepsilon(gradV)^2 dv = -\int_\Omega \mathbf{D} gradV dv = \int_\Omega \rho gradV dv - \int_{\partial\Omega} V D_n dA,$$

calculată prin utilizarea relaţiei:

$$div(\mathbf{D}V) = V div\mathbf{D} + \mathbf{D} gradV = \rho V - \mathbf{DE}.$$

În cazul particular în care m corpuri conductoare sunt scufundate într-un dielectric neelectrizat, infinit extins, rezultă:

$$W = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \rho V dv = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} V_k \int_{\partial\Omega_k} \rho_S dA = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k V_k}{2},$$

în care q_k şi V_k sunt sarcina şi respectiv potenţialul conductorului k.

Utilizând superpoziţia, rezultă că sarcina unui conductor este o combinaţie liniară a potenţialelor tuturor conductoarelor:

$$q_k = \sum_{j=1}^{m} C_{kj} U_{kj},$$

unde $U_{kj} = V_k - V_j$, iar capacităţile parţiale $C_{kj} = -\alpha_{kj}$ pentru $k \neq j$, expresii cunoscute sub numele de relaţiile lui Maxwell pentru capacităţi.

De obicei conductorul referinţă de potenţial pentru care $V = 0$ este eliminat dintre corpurile considerate, astfel încât din cele $m + 1$ corpuri, doar m pot avea potenţial flotant.

Folosind relaţia vectorial-matriceală: $q = [q_1, q_2, \ldots, q_m]^T \in \mathbb{R}^n$, $V = [V_1, V_2, \ldots, V_m]^T \in \mathbb{R}^n$, $C = [C_{kj}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A = [\alpha_{kj}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $q = Av$, rezultă $W = \frac{1}{2}q^T V = \frac{1}{2}V^T A^T V = \frac{1}{2}V^T q = \frac{1}{2}V^T AV$.

Matricele A şi C sunt simetrice şi pozitiv definite deoarece $W > 0$, oricare ar fi potenţialele nenule ale conductoarelor.

Teoremă 12.1.1 *(***Teorema de unicitate pentru potenţialul electrostatic.***)*

Se consideră domeniul $\Omega \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$*, în care dielectricul are o caracteristică* $\mathbf{D}-\mathbf{E}$ *monotonă dată (în particular, în cazul mediilor cu caracteristică dielectrică afină, tensorul* $\overline{\overline{\varepsilon}}$ *este strict pozitiv şi cunoscut în orice punct din* Ω*, iar* $\mathbf{P}_p : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este o funcţie dată). Frontiera* $\partial\Omega$ *este partiţionată disjunct în* $\partial\Omega = S_D \bigcup S_N$*, în care* $S_D = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$*, cu* $S_1 \neq \emptyset$*.*

Dacă sunt date următoarele condiţii de frontieră:

- $V(\mathbf{r}) = C_k + f_k(\mathbf{r})$ *pentru* $\mathbf{r} \in S_k$ *cu* $f_k : S_k \to \mathbb{R}$ *funcţii date,* $C_1 = 0$ *şi* $C_2, C_3, \ldots, C_m$ *constante reale necunoscute;*
- $\int_{S_k} \hat{D}(-gradV)d\mathbf{A} = \Psi_k$*, pentru* $k = 2, 3, \ldots, m$*, în care* Ψ_k *sunt constante reale date;*
- $\mathbf{n}\hat{D}(-gradV) = g(\mathbf{r})$ *pentru* $\mathbf{r} \in S_N$ *cu* $g : S_N \to \mathbb{R}$ *funcţie dată (în particular se dă* $\frac{\partial V}{\partial n} = \overline{\overline{\varepsilon}}^{-1} g(\overline{r})$*),*

  atunci soluţia ecuaţiilor pentru potenţialul electrostatic este unică .

Teorema este o consecinţă directă a teoremei de unicitate pentru câmpul electrostatic, cunoaşterea potenţialului (chiar şi până la o constantă aditivă) pe S_D permite calculul componentei tangenţiale a intensităţii câmpului electric, iar cunoaşterea dervatei potenţialului după normala la suprafaţă permite în medii liniare şi izotrope calculul componentei normale a inducţiei.

Dacă $\mathbf{E}$ şi $\mathbf{D}$ sunt nule, atunci V este determinat până la o constantă arbitrară a cărei valoare rezultă din faptul că pe $S_D \neq \emptyset$ există cel puţin un punct în care potenţialul este cunoscut. Condiţia de frontieră satisfăcută de potenţial pe $S_1 \subset S_D$ se numeşte condiţie Dirichlet iar cea referitoare la derivata după normală a potenţialului, se numeşte condiţie Neumann. Problema determinării potenţialului în condiţii Neumann ($S_D = \emptyset, \partial\Omega = S_N$) nu are soluţie unică. În cazul a m conductoare scufundate într-un dielectric, cunoaşterea potenţialelor pentru unele conductoare şi a sarcinilor celorlalte conductoare, permite determinarea univocă a câmpul electrostatic. Potenţialul electrostatic este determinat univoc doar dacă valoarea sa este dată (prin condiţie de frontieră de tip Dirichlet) cel puţin într-un punct.

Ecuaţiile satisfăcute de potenţialul magnetic scalar V_m şi de cel electrocinetic scalar V au pentru diferite categorii de medii formele:

- general: $div\hat{B}(-gradV_m) = 0, \;\; div\hat{J}(-gradV) = 0;$
- afin: $div\hat{B}(\overline{\overline{\mu}}gradV_m) = div\mathbf{I}_p, \;\; div\hat{J}(\overline{\overline{\sigma}}gradV_m) = div\mathbf{J}_i;$
- liniar şi omogen: $-\Delta V_m = \overline{\overline{\mu}}^{-1}\rho_m, \quad -\Delta V_m = \overline{\overline{\sigma}}^{-1}\rho_j;$
- fără surse $div(\overline{\overline{\mu}}gradV_m) = 0$, $div(\overline{\overline{\sigma}}gradV) = 0;$
- liniare omogene şi fără surse: $\Delta V_m = 0$, $\Delta V = 0.$

Se constată că efectul magnetizaţiei permanente $\mathbf{M}_p$, caracterizată prin vectoul polarizaţiei magnetice permanente $\mathbf{I}_p = \overline{\overline{\mu}}_0\mathbf{M}_p$, poate fi simulată din punctul de vedere al potenţialului scalar $V_m = 0$ şi al câmpului $\mathbf{H}$ (dar nu şi din cel al inducţiei $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mathbf{I}_p$) cu prezenţa unor sarcini de polarizaţie magnetică ce au densitatea $\rho_m = -div\mathbf{I}_p = -\overline{\overline{\mu}}_0 div\mathbf{M}_p$.

Efectul câmpului electric imprimat $\mathbf{E}_i$, caracterizat de densitatea de curent electric imprimat $\mathbf{J}_i = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}_i$ poate fi simulat, din punct de vedere al potenţialului electrocinetic V într-un mediu liniar (dar nu şi din cel al densităţii de curent $\mathbf{J} = \overline{\overline{\sigma}}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i) = \overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$, care este un câmp solenoidal) cu prezenţa unor sarcini electrice fictive, ce au densitatea $\rho_j = -div\mathbf{J}_i = -div(\overline{\overline{\sigma}}\mathbf{E}_i)$. În consecinţă, toate proprietăţile observate în regim electrostatic (inclusiv teorema de unicitate) se transpun uşor in regimurile magnetostatic şi electrocinetic. Daca mediul este liniar si izotrop, în regim magnetostatic energia magnetică este W_m satisface relaţia:

$$2W_m = \int_\omega \mathbf{BH}dv = \int_\omega \mu(gradV_m)^2 dv = -\int_\omega \mathbf{B}gradV_m dv = -\int_{\partial\omega} V_m B_n dA > 0$$

iar puterea transferată de câmp corpurilor în regim electrocinetic este:

$$P = \int_\omega \mathbf{JE}dv = \int_\omega \sigma(gradV)^2 dv = -\int_\omega \mathbf{J}gradV dv = -\int_{\partial\omega} V J_n dA > 0.$$

Dacă vom considera Ω un element de circuit magnetic, respectiv electric, cu $m+1$ borne în regim staţionar, atunci energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_\omega \mathbf{BH}dv = -\frac{1}{2}\int_{\partial\omega} V_m B_n dA = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_{mk}\int_{S_k} B_n dA = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k V_{mk}}{2},$$

respectiv puterea transferată pe la borne este:

$$P = \int_\omega \mathbf{JE}dv = -\int_{\partial\omega} V J_n dA = -\sum_{k=1}^{n} V_k \int_{S_k} J_n dA = -\sum_{k=1}^{n} V_k i_k.$$

Dacă sensurile de referinţă pentru φ_k şi i_k vor fi schimbate spre interior pentru a fi în acord cu sensul convenţional pentru putere, atunci :

$$W_m = \sum \frac{\varphi_k V_{mk}}{2}$$

iar

$$P = \sum V_k i_k.$$

Câmpul magnetic (respectiv cel electric) se obţin în mod univoc, dacă pentru fiecare bornă este cunoscut potenţialul magnetic (respectiv electric) sau fluxul magnetic (respectiv curentul). Oricare dintre aceste două mărimi poate fi considerată excitaţie (sursă a câmpului) iar celelalte rezultă prin rezolvarea problemei fundamentale, ca răspuns.

Aplicând teorema superpoziţiei rezultă:

- în magnetostatică: $\varphi_k = \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{kj} V_j \longleftrightarrow V_{mj} = \sum_{k=1}^{m} R_{mjk}\varphi_k$;

- în electrocinetică: $i_k = \sum_{j=1}^{m} C_{kj} V_j \longleftrightarrow V_j = \sum_{k=1}^{m} R_{jk} i_k$,

sau cu notaţiile matrical - vectoriale:

$$\begin{array}{l} \varphi = \Lambda V_m, \quad V_m = R_m \varphi \longrightarrow W_m = \frac{1}{2} V_m^T \Lambda V_m = \frac{1}{2} \varphi^T R_m \varphi; \\ i = GV, \quad V = Ri \quad \longrightarrow P = V^T G V = i^T R i, \end{array}$$

în care φ, i, V şi V_m sunt vectorii flux, curent, potenţial şi potenţial magnetic iar Λ este matricea permeanţelor magnetice, R_m este matricea reluctanţelor, G este matricea conductanţelor şi R este matricea rezistenţelor. Cele patru matrice sunt simetrice şi pozitiv definite, iar pentru determinarea valorilor elementelor lor este necesară rezolvarea problemei de câmp şi apoi aplicarea relaţiilor liniare sau a celor energetice pătratice.

12.2 Potenţialul scalar pe suprafeţe de discontinuitate

Prezenţa suprafeţelor de discontinuitate în domeniu de calcul necesită o tratare specială a ecuaţiilor câmpului prin intermediul condiţiilor de trecere pe suprafeţele de discontinuitate.

Pentru început să presupunem că S_d reprezintă suprafaţa de separaţie dintre două medii cu permitivităţile ε_1 şi respectiv ε_2 (fig.a). Dacă se notează cu $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{E_1}$ şi $\mathbf{D_2}$, $\mathbf{E_2}$, inducţiile şi câmpurile din cele două medii (limitele inducţiei cămpului în puncte ce aparţin celor două medii dar care tind către un punct comun de pe suprafeţa frontieră "de separaţie" S_d), şi cu $\mathbf{n}_{12}$ normala la S_d orientată către mediul 2, atunci formele locale ale legilor inducţiei şi fluxului electric sunt:

$$rot\mathbf{E} = 0 \longleftrightarrow \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \longleftrightarrow \mathbf{E}_{t2} = \mathbf{E}_{t1};$$
$$div_s\mathbf{D} = \rho_s \longleftrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \longleftrightarrow \mathbf{D}_{n2} - \mathbf{D}_{n1} = \rho_s.$$

Deoarece $D_n = \varepsilon E_n = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$, rezultă următoarele condiţii de trecere pentru potenţial:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = \rho_s;$$

$$V_1 = V_2,$$

continuitatea potenţialului fiind dată de continuitatea componentei tangenţiale a câmpului, cu condiţia ca cel puţin într-un punct V_2 să fie egal cu V_1. Acest lucru se întâmplă la frontiera suprafeţei S_d sau chiar şi într-un punct intern, deoarece:

$$V_1 - V_2 = \lim_{a \to 0} \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = \lim 0^g \frac{D_n}{\varepsilon} dr = \lim_{a \to 0} (\frac{D_n}{\varepsilon})_{med} g = (D_{n1} + \frac{\rho_s}{2}) \frac{1}{\varepsilon}.????Vezimanuscrisul$$

Dacă unul din medii, de exemplu 2 este conductor omogen (fig b), cu $E_2 = 0$, atunci $E_t = 0$ iar condiţiile pe frontiera domeniului izolant sunt:

$$-\varepsilon \frac{\partial V}{\partial r} = \rho_s; \quad V = ct,$$

cu valoare nulă a potenţialului constant, atunci când conductorul este referinţa potenţialului. Dacă punctul de referinţă al potenţialului nu se află pe acel conductor, atunci el are un potenţial flotant necunoscut. Spre deosebire de corpurile izolante la care ρs este dat, în cazul corpurilor conductoare ρs şi $\overline{D}_2$ sunt necunoscute, sarcina, ρs redistribuindu-se astfel încât corpul conductor să fie echipotenţial.

Dacă vom considera o folie conductoare omogenă de grosime g foarte mică (fig b), atunci pe cele două feţe ale foliei conductoare se vor separa sarcini cu densităţile:

$$\rho_{s1} = \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n}, \quad \rho_{s2} = -\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n},$$

deci cu valoarea totală $\rho_s = \rho_{s1} + \rho_{s2}$, iar potenţialul va fi constant pe toată suprafaţa foliei conductoare:

$$V_1 = V_2 = ct.$$

Dacă folia conductoare urmăreşte forma unei suprafeţe iniţial echipotenţială, atunci $\rho_{s1} = -\rho_{s2}$ şi $\rho_s = 0$, iar liniile de câmp nu sunt perturbate în urma metalizării suprafeţei respective.

Mai mult, câmpul exterior nu se modifică dacă se metalizează tot domeniul cuprins între două suprafeţe echipotenţiale sau tot domeniul din interiorul unei echipotenţiale.

Trebuie remarcat că dublul strat de sarcină are efect nul atunci când grosimea $g \to 0$ şi $g\rho_{s1} \to 0$, prezenţa lui are rolul de a anula câmpul în spaţiul de grosime g şi de a asigura echipotenţialitatea între cele două feţe.

Există totuşi situaţii în care potenţialele celor două feţe ale foliei conductoare nu sunt egale. De exemplu, în cazul în care folia este sediul unor câmpuri imprimate orientate normal E_{in}, atunci saltul de potenţial este:

$$V_2 - V_1 = \int_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = E_{in} g \neq 0.$$

Prezenţa câmpului orientat tangenţial face ca diferite puncte ale foliei conductoare să aibă potenţiale diferite (dar egale de-o parte şi de alta a foliei):

$$V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E}_i d\mathbf{r}.$$

De exemplu, două folii sudate de-a lungul unei muchii comune si realizate din conductoare diferite au de-a lungul “liniei” de sudură C un câmp imprimat orientat tangenţial la suprafaţa foliei dar normal pe curba C, care face ca cele două conductoare să aibă potenţiale diferite, mulţimea punctelor de discontinuitate alcătuind curba $C \in S_d$. Cele două extremităţi ale curbei C dacă aceasta este deschisă sunt puncte de discontinuitate majoră (câmpul este nemărginit).

O altă situaţie extremă are loc atunci când într-un dielectric este scufundată o folie sau este practicată o fisură anelectrică. În acest caz în interiorul fisurii $D = 0$, deci dacă ea nu este electrizată rezultă că pe ambele feţe $D_n = 0$ şi implicit:

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial n} = 0.$$

Dacă fisura este orientată de-a lungul unei suprafeţe de câmp, atunci apariţia ei nu perturbă câmpul anterior şi $V_1 = V_2$. În caz contrar, dacă fisura apare de-a lungul unei suprafet'e echipotenţiale, modificarea spectrului este majoră, deoarece noile linii de câmp vor ocoli fisura, iar $V_1 \neq V_2$. Câmpul din fisură creşte invers proporţional cu grosimea acesteia. Pentru a modela o folie dielectrică, purtătoare a unei pânze de flux, vom aplica legea fluxului electric pe o suprafaţă cilindrică Σ de înălţime $g \to 0$,

$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{D} d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} div\mathbf{D} dv = \int_{D_\Sigma} div_2\mathbf{D} dv + \int_{D_\Sigma} \mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial n} dv = \int_S g div_2\mathbf{D} dA + \int_S \mathbf{n} \int_0^g \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial n} dA = \int_S [div_2\mathbf{D}_S + \mathbf{n}(\mathbf{D_2} - \mathbf{D_1})] dA = \int_S \rho_S dA.$

Relaţia este valabilă pentru orice bază S a cilindrului deci:

$$div_2\mathbf{D}_S + div_S\mathbf{D} = \rho_S$$

şi ţinând cont de relaţiile de material $\mathbf{D}_S = \varepsilon_S\mathbf{E}_t + \mathbf{P}_{ps}$, $\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1\mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_{p1}$, $\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2\mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_{p2}$, în care $\mathbf{E} = -gradV$, rezultă următoarea expresie a condiţiei de trecere:

$$div_2(\varepsilon_S grad_2 V) + \mathbf{n}_{12} \cdot (\varepsilon_2\frac{\partial V_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial n}) = -\rho_S + div_2\mathbf{P}_{ps} + div_S\mathbf{P}_{ps},$$

în care indicele 2 de la operatorii diferenţiali *div* şi *grad* indică derivarea spaţială doar în planul tangenţial al suprafeţei S_d.

Potenţialul este continuu $V_1 = V_2$, dacă polerizaţia permanentă a foliei este orientată exclusiv tangenţial.

Dacă folia este polarizată permanent, cu orientare normală, astfel încât $\mathbf{P}_{psn} = \mathbf{n}g\mathbf{P}_p \neq 0$, atunci sarcinile de polarizaţie vor creea un strat dublu cu densităţile de sarcină:

$$\rho_{S1} = -div_S\mathbf{P}_p = -P_{np},\ \rho_{S2} = -\rho_{S1} = P_{np},$$

care vor genera între ele un câmp cu:

$$D_n = \rho_S = \varepsilon E_n,$$
$$V_2 - V_1 = E_n g = \frac{\rho_{S2} g}{\varepsilon} = \frac{P_{ps}}{\varepsilon}.$$

În consecinţă, saltul potenţialului prin folie are valoarea:

$$V_2 - V_1 = \frac{P_{psn}}{\varepsilon}.$$

Dacă în relaţiile (...) şi (....) se consideră Σ_S şi $\varepsilon \to \infty$, atunci se obţin relaţiile de trecere specifice foliei conductoare:

$V_1 = V_2$ şi $V = ct$ $(gradV = 0)$.

Dacă în schimb se presupune $\varepsilon \to 0$ din (..) se obţin relaţiile de trecere pe suprafeţelede discontinuitate ce nu sunt pânze de flux (caşi cum $\varepsilon_S = g\varepsilon \to 0$, se datorează limitei $g \to 0$ şi nu $\varepsilon \to 0$).

Dacă se doreşte modelarea unui fir dielectric ce urmăreşte curba C şi este purtător de flux, atunci legea fluxului electric pe un cilindru ce înconjoară un segment de fir de lungime $l \to 0$ şi are raza $r \to 0$, rezultă:

$\Psi_\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_{D_\Sigma} div\mathbf{D}dv = \int_{D_\Sigma} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial l}\mathbf{t}dv + \int_{D_\Sigma} div_2\mathbf{D}dv = \int_0^l A\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial l}d\mathbf{r} + \int_{S_l} \mathbf{D}d\mathbf{A} = \int_0^l \rho_l dr, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial l} + div_l\mathbf{D} = \rho_\mathbf{l}$,

în care divergenţa lineică are expresia:

$$div_l\mathbf{D} = \int_{S_l} \mathbf{D}dA.$$

Ţinând cont de relaţiile de material din fir:

$$\Psi = \varepsilon_l E_t + P_{pl} = -\varepsilon_l \frac{\partial V}{\partial l} + P_{pl}$$

şi din mediul dielectric înconjurător:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon gradV,$$

rezultă relaţia satisfăcută de potenţialul pe fir şi în vecinătatea sa:

$$\frac{\partial}{\partial l}(\varepsilon_l \frac{\partial V}{\partial l}) + \int_{S_l} \varepsilon grad_2 V d\mathbf{A} = \rho_l + \frac{\partial P_{pl}}{\partial l},$$

în care s-a notat cu $\varepsilon_l = A\varepsilon$, $P_{pl} = \mathbf{P}_p\mathbf{t}A$, iar $grad_2$ reprezintă derivata spaţială în plan normal la fir.

Dacă $\varepsilon_l = 0$ şi $\rho_l \neq 0$ sau $P_{pl} \neq ct$, atunci pe curba C atât câmpul cât şi potenţialul sunt nemărginite. În schimb, dacă firul este neelectrizat şi nepolarizat, dar poate transporta flux nenul el are potenţialul mărginit, astfel încat:

$$\frac{\partial}{\partial l}((\varepsilon_l \frac{\partial V}{\partial l}) + div_l(\varepsilon gradV) = 0.$$

Pentru modelarea firelor polarizate transversal cu momentul dipolar lineic:

$$\mathbf{P}_l = \int_S \mathbf{P}_n dA$$

unde S este suprafaţa transversală a firului, se poate aplica modelul coulombian al sarcinilor de polarizaţie distribuite lineic, sarcini avand densitatea lineică ρ_l şi $-\rho_l$, plasate la distanţa $d \to 0$, astfel încât $\lim_{d\to 0} \rho_l\mathbf{d} = \mathbf{p}_l$.

Curba C este o curbă de discontinuitate esenţială, pe care atât potenţialul cât şi câmpul sunt nemărginite. Energia câmpului electrostatic W, într-un domeniu liniar Ω cu suprafeţe de discontinuitate S_d este :

$$2W_\Omega = \int_{\Omega\bigcup S_d \bigcup C_d} \mathbf{DE}dv = \int_\Omega \mathbf{DE}dv + \int_{S_d} \mathbf{D}_S\mathbf{E}dA = \int_\Omega \rho V dv - \int_{\partial\Omega} VD_n dA +$$

$$+ \int_{S_d} \rho_S V dA - \int_{\partial S_d} VD_{Sn} dl,$$

deoarece :

$$\int_{S_d} \mathbf{D}_S\mathbf{E}dA = -\int_{S_d} \mathbf{D}_S grad_2 V dA = \int_{S_d} V div_2 \mathbf{D}_S dA = \int_{\partial S_d} VD_{Sn} dl = \int_{S_d} \rho_S V dA -$$

$$- \int_{S_d} V(D_{n2} - D_{n1})dA - \int_{\partial S_d} VD_{Sn} dl,$$

urmând ca integrala pe S_d din VD_{n2} şi VD_{n1} să se reducă cu termenii corespunzători din integrala produsului VD_n pe $\partial\Omega$.

Această expresie a integralei de energie pune în evidenţă sursele interne ale câmpului şi anume:

- densitatea de volum a sarcinii ρ;
- densitatea superficială de sarcină ρ_S;
- densitatea lineică de sarcină ρ_l;
- sarcinile corpurilor punctiforme q_k
  dar şi condiţiile de frontieră care asigură unicitatea potenţialului;
- valoarea potenţialului V sau a inducţiei normale D_n pe ∂S_d;
- valoarea potenţialului sau a fluxului injectat în ∂C_d;
- potenţialul corpurilor punctiforme V_k, cu condiţia ca potenţialul să fie cunoscut cel puţin într-un punct.

Pentru ca potenţialul corpurilor punctiforme şi al firelor electrizate să fie mărginit (să aibă sens clasic) acestea sunt considerate suprafeţe sferice respectiv cilindrice de raze foarte mici (neglijabile dar nenule).

Folosind similitudinea între câmpurile electrostatice şi cele magnetice, respectiv electrocinetic, rezultatele obţinute se transpun uşor în celelalte două regimuri.

12.3 Potenţialul vector al câmpurilor statice şi staţionare solenoidale

Ecuaţiile regimurilor magnetostatic, electrocinetic şi magnetic staţionar sunt similare:

$$\begin{cases} div\mathbf{B} = 0; \\ rot\mathbf{H} = 0; \\ \mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H}); \end{cases} \quad \begin{cases} div\mathbf{J} = 0; \\ rot\mathbf{E} = 0; \\ \mathbf{J} = \hat{J}(\mathbf{E}); \end{cases} \quad \begin{cases} div\mathbf{B} = 0; \\ rot\mathbf{H} = \mathbf{J}; \\ \mathbf{B} = \hat{B}(\mathbf{H}); \end{cases}$$

având inducţia $\mathbf{B}$ şi respectiv densitatea de curent $\mathbf{J}$ solenoidale.

Se constată că $\mathbf{B}$ este similar lui $\mathbf{J}$ şi $\mathbf{E}$ este similar lui $\mathbf{H}$, cu observaţia că rotorul intensităţii câmpului este nenul doar în regim magnetic ($J \neq 0$).

Din acest motiv vom analiza doar acest ultim regim, ecuaţiile celorlalte două regimuri obţinându-se prin particularizări.

Inducţia magnetică $\mathbf{B} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ fiind solenoidală, admite ca potenţial vector: $\mathbf{A} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, în care:

$n = 3,\ m = 3$ - în probleme bidimensionale;
$n = 2,\ m = 1$ - în probleme bidimensionale (2D) cu curent longitudinal (1D);
$n = 1,\ m = 2$ - în probleme bidimensionale (2D) cu câmp magnetic longitudinal (1D);
$n = 1,\ m = 1$ - în probleme unidimensionale (1D).

Trebuie remarcat că $\mathbf{A}$ are aceaşi dimensiune vectorială cu $\mathbf{J}$.

Folosind potenţialul vector, fluxul magnetic ce străbate o suprafaţă se exprimă acum prin integrare pe curba frontieră a suprafeţei şi nu prin integrală dublă:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \int_S rot\mathbf{A} d\mathbf{s} = \int_{\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{r}.$$

Potenţialul magnetic vector este definit până la gradientul unei funcţii scădere arbitrare:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}(r) + grad\lambda$$

determinând aceiaşi inducţie ca şi $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ deoarece $rot(grad)\lambda = 0$ pentru orice λ. O metodă de a fixa funcţia λ este de a impune divergenţei potenţialului vector o valoare convenţională (printr-o relaţie de etalonare), de exemplu :

$$div\mathbf{A} = 0,$$

cunoscută sub numele de condiţie de etalonare Coulomb.

În acest caz, potenţialul magnetic vector este determinat până la gradientul unei funcţii armonice. Această funcţie este univoc determinată în Ω, dacă se impun condiţiile de frontieră, de exemplu de tip Neumann, ceea ce este echivalent cu a impune componenta normală $A_n = \mathbf{nA}$ a potenţialului magnetic vector pe $\partial\Omega$. Condiţia de tip Dirichlet este echivalentă cu a impune componenta tangenţială $\mathbf{A}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{n})$ pe $\partial\Omega$.

Exprimând în ecuaţiile regimului $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{H}$ în funcţie de $\mathbf{A}$ se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul doi satisfăcută de potenţialul magnetic vector:

$$rot\hat{H}(rot\mathbf{A}) = \mathbf{J},$$

în care $\hat{H} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este inversa funcţiei: $\hat{B} = \hat{H}^{-1}$.

În cazul caracteristicii de magnetizare de forma: $\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mathbf{I}_p$ cu $I_p = \mu_0 \mathbf{M}_p$, rezultă că atât $\hat{B}$ cât şi $\hat{H}$ sunt afine:

$$\hat{H} = \overline{\overline{\nu}}(\mathbf{B} - \mathbf{I}_p) = \overline{\overline{\nu}}\mathbf{B} + \mathbf{M}_p,$$

în care $\overline{\overline{\nu}} = \overline{\overline{\mu}}^{-1}$, $\mathbf{H}_p = -\overline{\overline{\nu}}\mathbf{I}_p = -\mu_0 \overline{\overline{\mu}}^{-1}\mathbf{H}_p$. În acest caz ecuaţia potenţialului magnetic vector este:

$$rot(\overline{\overline{\nu}} rot\mathbf{A}) = \mathbf{J} - rot\mathbf{H}_p$$

în care $\mathbf{J}_m = -rot\mathbf{H}_p = \mu_0 rot(\overline{\overline{\mu}}^{-1}\mathbf{M}_p)$ este densitatea curentului echivalent de magnetizare. Acesta este un curent virtual, dar care produce acelasi efect magnetic ca şi cel de conducţie, astfel încât curentul total $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \mathbf{J}_m$ se poate considera ca sursă a potenţialului vector.

Dacă mediul este omogen, atunci $rot(\overline{\overline{\nu}} rot\mathbf{A}) = \overline{\overline{\nu}} rotrot\mathbf{A} = \overline{\overline{\nu}}(graddiv\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}) = -\overline{\overline{\nu}}\Delta\mathbf{A}$, deci

$$-\Delta\mathbf{A} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{J}_t,$$

potenţialul vector satisfăcând ecuaţia Poisson vectorială.

În regim magnetostatic şi dacă mediile nu sunt polarizate permanent, nu există surse interne de câmp, iar potenţialul satisface ecuaţia Laplace vectorială generalizată:

$$rot(\overline{\overline{\nu}} rot\mathbf{A}) = 0,$$

sau în cazul mediilor omogene ecuaţia Laplace:

$$\Delta\overline{A} = 0.$$

În cazul regimului electrocinetic staţionar, potenţialul vector al densităţii de curent se notează de obicei cu $\mathbf{T}$ şi

$$\mathbf{J} = rot\mathbf{T},$$

$$i = \int_S \mathbf{J}d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{T}d\mathbf{r},$$

urmând ca ecuaţiile să aibă, în funcţie de tipul conductorului una din următoarele forme:

- medii neliniare $rot\hat{E}(rot\overline{T}) = 0$
- mediu MANUSCRIS

12.4 Potenţialul vector pe suprafaţa de discontinuitate

Să considerăm suprafaţa de discontinuitate S_d, frontieră comună a două medii notate cu 1 şi 2 şi având permeabilităţile magnetice μ_1 şi respectiv μ_2.

Se va presupune că S_d nu este nici pânză de flux magnetic nici de curent, în sensul că pentru nici o suprafaţă S de arie A şi diametru d care tinde către o curbă $C \subset S_d$, limita:

$$J_S = \lim_{A \to 0} \frac{i}{d} = 0,$$

în care i este curentul ce străbate suprafaţa S.

Dacă se notează cu $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{H}_1$ şi $\mathbf{A}_1$, respectiv $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{H}_2$ şi $\mathbf{A}_2$ inducţia, intensitatea câmpului şi potenţialul vector în regim staţionar, din cele două medii (mai exact limitele acestor mărimi în puncte care aparţin celor două medii către un punct comun de pe suprafaţa S_d), atunci formele locale ale legilor fluxului magnetic şi circuitului magnetic sunt:

- $div_S\mathbf{B} = 0 \longrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \longrightarrow B_{n1} = B_{n2}$;
- $rot_S\mathbf{H} = 0 \longrightarrow \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \longrightarrow \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}$.

Deoarece

$$\mathbf{B} = \mathbf{n}B_n + \mathbf{B}_t = \mathbf{n}(rot\mathbf{A}_t) + (rot\mathbf{A}_t) = \mathbf{n}rot\mathbf{A}_t + (rot\mathbf{A}_t, MANUSCRIS$$

şi

$$\mathbf{H} = \nu\mathbf{B} = \nu rot\mathbf{A} = \mathbf{n}\nu rot\mathbf{A}_t + \nu(rot\mathbf{A})_t$$

cu $\nu = 1/\mu$, rezultă:

$$\mathbf{A}_{t1} = \mathbf{A}_{t2}; \quad \nu_1(rot\mathbf{A}_1)_t = \nu_2(rot\mathbf{A}_2)_t$$

cu observaţia că dacă $\mathbf{A}_{t1}$ nu este egal cu $\mathbf{A}_{t2}$, atunci suprafaţa S_d este purtătoare de flux magnetic şi că a doua condiţie de trecere este îndeplinită dacă $\nu_1 A_{n1} = \nu_2 A_{n2}$.

Dacă unul din medii, de exemplu 2 este feromagnetic ideal, atunci $\mu_2 \to \infty$ şi $V_2 = 0$, deci:

$$\mathbf{n} \times (rot\mathbf{A} \times \mathbf{n}) = (rot\mathbf{A})_t = 0.$$

Alegând pentru etalonare $A_n = 0$ pe frontiera feromagnetică rezultă că şi derivata după normală a componentei tangenţiale a potenţialului vector este nulă. În consecinţă, suprafaţa unui mediu feromagnetic se anulează nu numai $\mathbf{H}_t$ ci şi $A_n = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}_t}{\partial n} = 0$.

Dacă în schimb unul din medii, de exemplu 2 este amagnetic, atunci $\mu_2 \to 0$ şi $\nu_2 \to \infty$, deci $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2 = 0$ şi $rot\mathbf{A}_2 = 0$.

Componenta normală a inducţiei $B_n = \mathbf{n} rot\mathbf{A}_t = 0$ şi fluxul pe orice suprafaţă $S \subset S_d$:

$$\varphi = \int_S \mathbf{B} \times d\mathbf{A} = \int_{\partial S} \mathbf{A}_t d\mathbf{r} = 0.$$

Această condiţie este îndeplinită dacă $\mathbf{A}_t$ este irotaţional, de exemplu constant sau nul.