Daniel Ioan

Calcul simbolic cu MAPLE V

Editura
Bucureşti, 1999

Daniel Ioan
Calcul simbolic cu MAPLE V

Referenţi ştiinţifici: Prof. dr. ing. Florin Constantinescu
Prof. dr. ing. Mihai Iordache

Editura, Bucureşti, 1999
Bucuresti

Cuprins

Prefata

Marea majoritate a programelor de calculator dedicate aplicatiilor stiintifice si ingineresti sunt bazate pe prelucrarea valorilor numerice. Spre deosebire de acestea, sistemele de calcul simbolic manipuleaza formule si expresii matematice. In acest fel se pot obtine solutiile exacte in forma analitica ale multor probleme practice formulate ca probleme matematice: integrale, derivate, sisteme de ecuatii diferentiale, ecuatii algebrice liniare sau neliniare.

Dintre sistemele de calcul simbolic cel mai cunoscut este Maple V, dezvoltat de Waterloo Maple Inc. din Canada impreuna cu reputati specialisti de la Universitatea Waterloo - Canada, ETH Zurich, INRIA - Franta si Universitatea Simon Fraser - Canada.

Maple V ofera utilizatorilor pe langa facilitatile de calcul simbolic si alte functii suplimentare extrem de utile in analiza si rezolvarea problemelor din cele mai diverse domenii ale stiintei si ingineriei, fiind in acest fel un excelent instrument in activitatea de cercetare. Dintre facilitatile suplimentare trebuie mentionate:

- rutine pentru vizualizarea unei mari varietati de obiecte matematice;

- rutine pentru evaluarea numerica, cu precizie impusa de utilizator, a solutiilor problemelor sau pentru rezolvarea lor numerica, utile mai ales cand solutiile analitice nu exista;

- un limbaj propriu de programare, util pentru dezvoltarea de rutine si aplicatii adaptate cerintelor utilizatorilor.

Lucrarea de fata reprezinta o introducere in calculul simbolic cu Maple V si se adreseaza in special studentilor in inginerie si stiinte, dar poate fi utila tuturor inginerilor si cercetatorilor. Utilizarea programului Maple V in activitatea de zi cu zi permite cresterea eficientei prin faptul ca elimina necesitatea utilizarii manualelor de referinta si tabelelor de formule matematice. Programul Maple V permite redactarea rapoartelor stiintifice si tehnice intr-o maniera profesionala.

Lucrarea este structurata in sapte capitole si trei anexe.

Primul capitol are un caracter introductiv, prezentand interfata dintre programul Maple V si utilizator.

Al doilea capitol este dedicat expresiilor matematice, prezentandu-se pe langa modul de reprezentare a valorilor numerice si principalele comenzi pentru manipularile simbolice.

In capitolul al treilea se prezinta modul in care pot fi rezolvate ecuatiile de diferite tipuri cu ajutorul programului Maple V.

Capitolul al patrulea este dedicat reprezentarilor grafice ale diferitelor obiecte matematice.

In capitolul al cincilea sunt detaliate comenzile dedicate manipularilor simbolice.

Capitolul al saselea contine mai multe exemple de probleme de analiza matematica relativ complicate, care sunt rezolvate complet folosind facilitatile programului Maple V.

In capitolul al saptelea sunt prezentate comenzile de intrare/iesire date si de import/export informatii, recunoscute de Maple V.

In cele trei anexe sunt prezentate: structura fisierului de asistenta "on line" (help), lista structurata a comenzilor Maple V si descrierea limbajului de programare Maple V.

Fiecare capitol contine o scurta prezentare a conceptelor specifice urmata de un numar de exemple de utilizare, ocazie cu care se detaliaza aceste concepte spre a fi cat mai lesne de inteles de utilizator. La finalul capitolului sunt propuse mai multe exercitii, care permit cititorului sa-si verifice corectitudinea intelegerii cunostintelor capatate.

Ca orice manual de utilizare a unui program, si aceasta lucrare nu are un caracter integral original. In acest caz ea este adaptata dupa documentul "Maple V Learning Guide" livrat cu versiunea "student" a programului si dupa sitemul de asistenta "on line".

Lucrarea contine urmatoarele componente originale: descrierea interfetei cu utilizatorul, exercitiile propuse, o parte din exemplele de utilizare, lista structurata a comenzilor si descrierea limbajului de programare Maple V.

Lucrarea nu este o referinta abstracta, bazata pe definitii formale ci promoveaza tehnica de "invatare prin exemple". Ea nu este exhaustiva si descrie doar cele mai importante si mai des folosite comenzi. Avand doar un caracter introductiv, se recomanda utilizarea sa doar pana la familiarizarea cu sistemul de calcul simbolic, urmand ca pentru rezolvarea unor probleme complexe sa se faca apel la informatia de referinta, cuprinsa in sistemul de asistenta "on line" (help).

Lucrarea a fost elaborata cu sprijinul proiectului intitulat "Metode simbolice de invatare in ingineria electrica si electronica", acordat pe baze competitive de Consiliul National de Finantare a Invatamantului Superior (CNFIS 24354/99) in cadrul programului de Reforma a Invatamantului, finantat de Banca Mondiala.

Autorul aduce multumirile sale colectivului de studenti din anul III al Facultatii de Electrotehnica din UPB alcatuit din: Marius Piper, Bogdan Funieru, Florin Dulgheru, Romeo Munteanu, Mariana Ion, Mihai Priboianu, Laurentiu Encica, Razvan Ionita si Nicolae Dinu, care in practica de vara a anului 1999 au contribuit la tehnoredactarea lucrarii in Laboratorul de Metode Numerice din Universitatea Politehnica din Bucuresti. Lucrarea a fost realizata folosind editorul din Maple V si ulterior exportata in LaTex prin grija lui Marius Piper, cu asistenta D-nei Conf. dr. ing. Irina Munteanu, carora le multumesc in mod special pentru eforturile lor deosebite.

Exprim de asemenea, multumirile mele celor doi referenti stiintifici ai lucrarii: Prof. dr. ing. Florin Constantinescu, directorul proiectului CNFIS 24354/99 si Prof. dr. ing. Mihai Iordache, din Catedra de Electrotehnica a Universitatii Politehnica din Bucuresti.

1 Introducere

Maple V este un pachet de programe care alcatuiesc un "sistem de calcul simbolic" dotat cu capacitatea de a manipula informatia in principal intr-o maniera simbolica si in subsidiar in forma numerica si grafica. Programele matematice obisnuite cer valori numerice pentru toate variabilele. Spre deosebire de acestea, Maple V mentine si manipuleaza formule si expresii matematice.

Aceste capabilitati simbolice se pot folosi pentru a se obtine solutii exacte sub forma de expresii matematice ("analitice") ale multor probleme, incluzind integrale, ecuatii diferentiale sau probleme de algebra liniara. Pe langa operatiile simbolice sunt disponibile rutine grafice pentru vizualizarea informatiei matematice complicate, algoritmi de rezolvare numerica avand precizie oricat de mare pentru evaluari in vederea rezolvarii problemelor unde solutiile exacte nu exista, precum si un puternic limbaj de programare pentru dezvoltarea aplicatiilor.

Facilitatile matematice ale programului Maple V sunt usor accesibile prin avansata sa interfata grafica, disponibila prin zona (sau foaia) de lucru. O zona de lucru permite explorarea ideilor matematice si crearea de rapoarte tehnice sofisticate.

Modul in care poate fi folosit Maple V este, in unele aspecte personal si dependent de necesitati, insa doua moduri particulare sunt predominante.

Primul dintre ele este un mediu interactiv de rezolvare a problemei. Cand se lucreaza la o problema intr-o maniera traditionala, solutionarea poate dura ore si poate cuprinde multe pagini, cu multe riscuri de erori. Maple V permite abordarea unor probleme dificile si elimina erorile de calcul "mecanic". Fie ca utilizatorul dezvolta un nou model matematic sau analizeaza o strategie financiara, el poate invata foarte multe despre problema pe care o abordeaza, intr-un timp foarte scurt si cu un efort minim. Dar trebuie mentionat ca Maple V nu "gandeste" in locul utilizatorului ci doar il asista pe acesta, degrevandu-l de eforturile unor operatii laborioase.

Al doilea mod in care poate fi utilizat Maple V este un sistem de generare a documentelor stiintifice si tehnice. Ecuatiile pot fi schimbate iar solutiile actualizate in mod automat. Limbajul matematic al programului Maple V permite descrierea fara efort a ecuatiilor. De asemenea, utilizatorul poate calcula si afisa grafic rezultatele obtinute, in modul in care doreste. In plus documentele pot fi structurate folosind instrumente moderne cum ar fi: stiluri, meniuri si referinte creand documente pe hartie sau in format electronic, care nu sunt numai clare si usor de folosit, dar si usor de intretinut.

In timp ce acasta carte este doar un ghid introductiv de utilizare, sistemul **help on-line** al Maple V reprezinta manualul de referinta pentru orice utilizator . Sistemul **Help** este usor de folosit, pentru ca informatia completa continuta de acesta poate fi cautata in mai multe moduri, facilitatile de cautare fiind la dispozitia utilizatorului.

In acest capitol introductiv se prezinta conceptele fundamentale ale interfetei intre utilizator si mediul integrat Maple V.

1.1 Interfata cu utilizatorul

Daca utilizatorul este familiarizat cu programe obisnuite cum ar fi editoarele de text, el detine deja majoritatea cunostiintelor de care are nevoie pentru a se descurca cu interfata Maple V.

Foaia sau **Zona** de lucru este un mediu integrat afisat pe ecranul calculatorului, in care utilizatorul poate sa rezolve in mod interactiv problemele si sa redacteze documente stiintifice (fig.1). Zonele de lucru pot contine nu numai texte ci si comenzi matematice insotite de rezultatele lor, care sunt generate in mod automat.

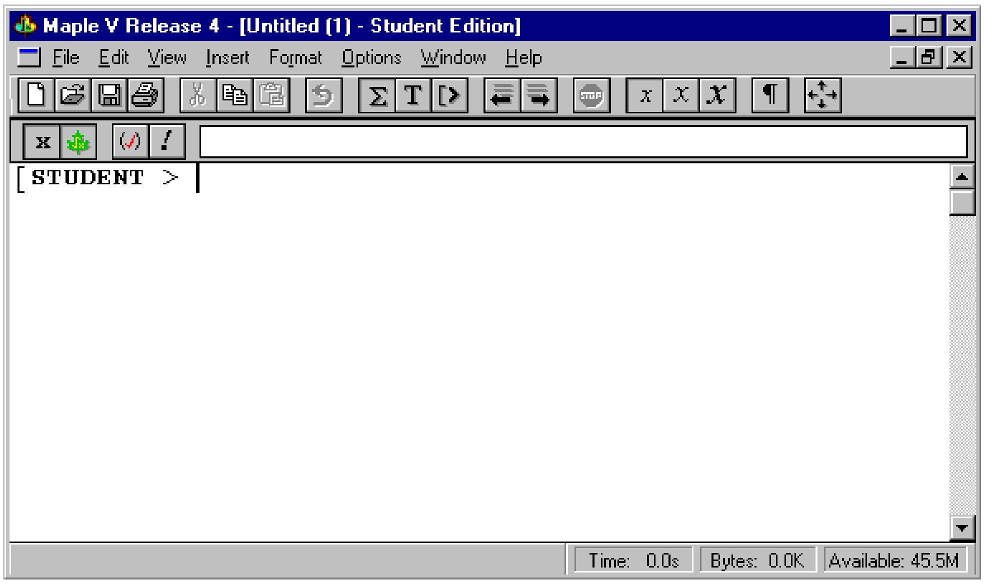
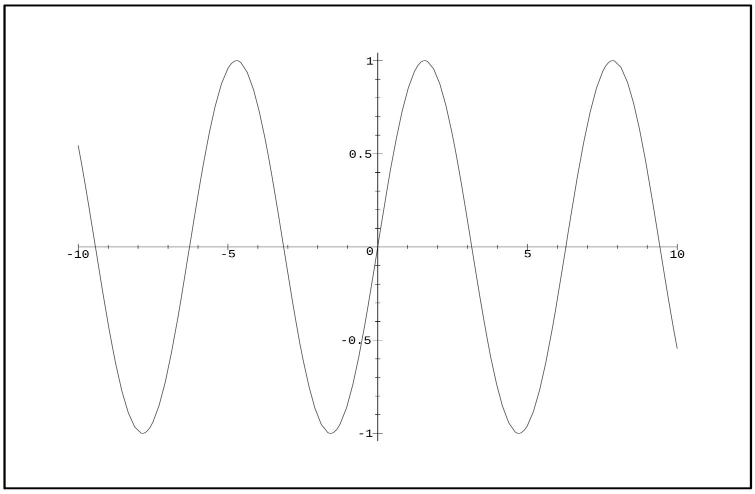


Fig.1 Foaia de lucru Maple V

Ca raspuns la prompt-ul care se afla in coltul din stanga sus a zonei de lucru (STUDENT >), utilizatorul introduce comanda in limbajul Maple, de exemplu:

```
> plot(sin);
```

In urma acestei comenzi in zona de lucru este afisat graficul:



In plus, se pot include in document multe alte tipuri de informatii:
- **paragrafe** de text;
- **expresii** matematice;
- ***ancore -*** zone de text care raspund prin salt la alta locatie (in orice zona de lucru sau alta pagina a documentului) cand este punctata cu mouse-ul;
- **zone si subzone de tip menu** ce se pot restrange;
- **obiecte** cum ar fi figuri sau tabele din alte aplicatii.

Exemplul 1.1 - Rezolvarea problemelor simple

Aceast exemplu descrie rezolvarea unei probleme simple (calculul unei integrale), ocazie cu care se vor prezenta:
- introducerea si executarea comenzilor Maple V;
- editarea comenzilor Maple V;
- lucrul cu grafice simple.

Odata inceput lucrul cu Maple V, trebuie tinute minte doua reguli simple dar importante:

1. Comenzile trebuie introduse asa cum apar in manual. Maple V este ***case-sensitive***, adica face diferenta intre literele mici si majuscule;

2. Intotdeauna o comanda se termina cu terminatorul ";". Daca se omite acest lucru nu este nici o problema, ";" se poate scrie pe linia urmatoare. Maple V nu va executa o comanda pana nu primeste terminatorul.

In prima lucrare practica ne propunem sa calculam integrala $\int x^2 \sin(x)\,dx$ si sa prelucram rezultatul. Se introduce urmatoarea comanda pentru calculul integralei, care foloseste cuvantul cheie ***Int***:

```
>  expr:=Int(x^2*sin(x),x);
```

Dupa ce se apasa ENTER, Maple V afiseaza rezultatul comenzii. In acest caz rezultatul consta in faptul ca am atribuit integralei pe care dorim sa o calculam numele *expr*. Mai mult, integrala este afisata in limbaj matematic clasic si nu in limbajul Maple V utilizat de noi la descriere, ceea ce usureaza urmarirea si verificarea de catre utilizator a corectitudinii descrierii:

$$expr := \int x^2 \sin(x)\, dx$$

De notat ca in partea stanga a promptului se afla o paranteza dreapta. Aceasta paranteza grupeaza fiecare comanda Maple V cu rezultatul corespondent:

```
STUDENT > expr:=Int(x^2*sin(x),x);
```

$$expr := \int x^2 \sin(x)\, dx$$

Cerem acum programului Maple V sa calculeze valoarea expresiei *expr* folosind comanda de evaluare bazata pe cuvantul cheie ***value***:

```
> rezultat:=value(expr);
```

$$rezultat := -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

Maple V evalueaza integrala simbolic si atribuie expresiei obtinute numele *rezultat*, astfel incat sa ne putem referi ulterior la aceasta.

Rezultat este o expresie functie de variabila x, dar putem cere programului Maple V sa calculeze valoarea sa pentru un x particular. Pentru inlocuirea lui x in *rezultat* vom folosi comanda de substitutie bazata pe cuvantul cheie ***subs***:

```
> subs(x=Pi/3,rezultat);
```

$$-\frac{1}{9}\pi^2\cos(\frac{1}{3}\pi) + 2\cos(\frac{1}{3}\pi) + \frac{2}{3}\pi\sin(\frac{1}{3}\pi)$$

Comanda realizeaza o inlocuire a lui x cu $\frac{\pi}{3}$ intr-o copie a lui *rezultat*. Comanda ***subs*** nu modifica expresia *rezultat* in sine ci intoace un rezultat modificat. Aparitia caracterului <”> in comanda urmatoare determina programul Maple V sa se refere la ultimul rezultat. Pentru a simplifica rezultatul obtinut se utilizeaza comanda ***simplify*** ca in exemplul:

```
> simplify(");
```

$$-\frac{1}{18}\pi^2 + 1 + \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}$$

Pentru a gasi valoarea integralei definite, de exemplu pe intervalul $(\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{4})$, putem scadea cele doua integrale nedefinite evaluate in $x = \frac{\pi}{3}$ si $x = \frac{\pi}{4}$:

```
> subs(x=Pi/3,rezultat)-subs(x=Pi/4,rezultat);
```

$$-\frac{1}{9}\pi^2\cos(\frac{1}{3}\pi)+2\cos(\frac{1}{3}\pi)+\frac{2}{3}\pi\sin(\frac{1}{3}\pi)+\frac{1}{16}\pi^2\cos(\frac{1}{4}\pi)-2\cos(\frac{1}{4}\pi)-\frac{1}{2}\pi\sin(\frac{1}{4}\pi)$$

Rezultatul acestui calcul inlocuieste rezultatul precedent. Putem folosi din nou comanda ***simplify*** pentru a face noul rezultat mai concis.

```
> simplify(");
```

$$-\frac{1}{18}\,\pi^2+1+\frac{1}{3}\,\pi\,\sqrt{3}+\frac{1}{32}\,\pi^2\,\sqrt{2}-\sqrt{2}-\frac{1}{4}\,\pi\,\sqrt{2}$$

Sa modificam acum integrala prin introducerea in integrant a unui parametru simbolic a, lucrul acesta putind fi facut prin editarea primei comenzi din acest exemplu, cea referitoare la *expr* prin deplasarea cursorului inapoi, inserarea lui a, urmata de ENTER:

```
> expr:=Int(x^2*sin(x-a),x);
```

$$expr:=\int x^2\sin(x-a)\,dx$$

Cursorul se afla acum la sfarsitul comenzii ***value***. Pentru a afla valoarea noii integrale trebuie doar sa apasam ENTER.

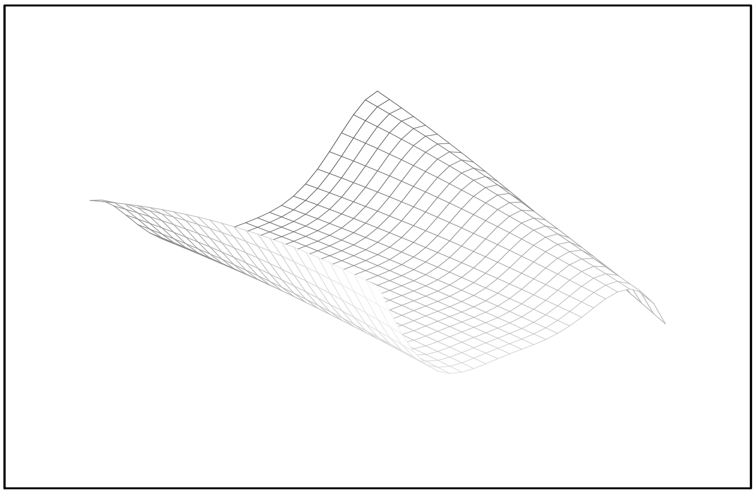
```
> raspuns:=value(expr);
```

$$\begin{aligned}raspuns &:= -(x-a)^2\cos(x-a)+2\cos(x-a)+2\,(x-a)\sin(x-a)\\&\quad+2\,a\,(\sin(x-a)-(x-a)\cos(x-a))-a^2\cos(x-a)\end{aligned}$$

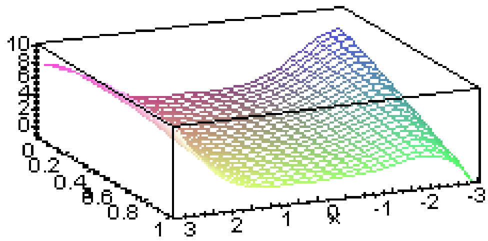
Pentru a investiga *raspuns* mai departe, trebuie mai intai sa inseram un nou prompt. Mutam cursorul in oricare din zonele de intrare sau de iesire ale *raspuns:=value(expr)*. Apoi intram in modul de editare Maple V.

O importanta parte a abordarii unei probleme matematice este vizualizarea ei. Expresia *raspuns* depinde de doua variabile: x si a astfel ca o putem reprezenta ca pe o suprafata in spatiul 3D. Scriem la noul prompt comanda de reprezentare grafica folosind cuvantul cheie ***plot3d*** si apasam ENTER. Cursorul se va schimba pentru cateva secunde (cat timp Maple V genereaza graficul) intr-un ceas (contor).

```
> plot3d(raspuns,x=-Pi..Pi,a=0..1);
```



Suprafata afisata furnizeaza o reprezentare concisa a efectului pe care variatia parametrului a il are asupra integralei. Putem modifica multe din detaliile modului cum Maple V afiseaza un grafic. De exemplu, daca dorim sa adaugam axe desenului suprafetei de mai sus, mai intai, cu mouse-ul, se face un click pe desen. Astfel barele de meniu si context (aflate deasupra zonei de lucru) se schimba si apar optiunile specifice reprezentarii grafice. Se alege optiunea *Boxed* din *Axes* si se clickeaza R pentru redesenarea suprafetei.



Maple V poate desena suprafata in mai multe moduri. Sa incercam alegerea optiunii *Patch and Contour* din meniul *Style*. Inainte sa spunem programului Maple V sa redeseneze graficul putem schimba unghiul de vedere. In bara de context unghiul de vedere este reprezentat de doi parametri: θ si ϕ. Putem schimba unghiul de vedere ori prin introducerea valorilor pentru cei doi parametri ori prin rotirea interactiva a cutiei ce limiteaza desenul "tragand" de cutie cu ajutorul mouse-ului.

Putem, de asemenea, sa afisam *raspuns* ca o animatie. Pentru aceasta folosim comanda ***animate*** care face parte din pachetul *plots*. Acest pachet trebuie incarcat cu instructinea ***with*** inainte de folosirea comenzii ***animate***. Daca nu dorim sa vedem efectele unei comenzi, la sfarsitul ei folosim terminatorul ":" in loc de ";".

```
> with(plots):
> animate(raspuns,x=-Pi..Pi,a=0..1);
```

Pentru a se porni animatia se selecteaza noul grafic co mouse-ul astfel incat barele de meniu si context se vor schimba in cele specifice pentru animatie. Animatia porneste atunci cand se apasa pe butonul PLAY.

Maple V poate afisa animatii in mai multe moduri. Daca se apasa butonul REPEAT si se porneste animatia prin apasarea butonului PLAY, aceasta va rula pana cand va fi apasat butonul STOP. Viteza se poate controla cu ajutorul butoanelor REWIND si FORWARD.

Comenzile de inlocuire si de simplificare de sub grafic nu mai sunt importante, deci le putem sterge. Acest lucru se poate face prin plasarea cursorului in una din regiunile pe care dorim sa le stergem si prin apasarea CTRL-DELETE. Procesul se poate repeta pana cand am sters toate regiunile care nu sunt necesare.

Exemplul 1.2 - Editarea unui raport

Acest exemplu descrie modul in care un document poate fi transformat intr-un raport, deci ilustreaza modul in care:
- se poate adauga text documentului;
- se pot adauga stiluri care folosesc anumite formate;
- se pot plasa expresii matematice in liniile de text.

Adaugarea unui titlu

Primul pas este acela al introducerii unui nou paragraf in partea cea mai de sus a zonei de lucru. Se selecteaza paranteza dreapta deschisa din fata comenzii de definire a expresiei.

Din meniul INSERT se alege optiunea *Paragaph*, iar din submeniul care apare se alege optiunea *Before*. Se scrie textul dorit si se apasa ENTER. Cuvintele introduse anterior pot arata ca un titlu, daca li se schimba stilul. Lista cu stiluri se afla in partea stanga a barei de context. Se apasa *Down* si se alege stilul *Title*.

Pentru a scrie numele autorului documentului se plaseaza cursorul la sfarsitul titlului si se apasa ENTER. Se scrie numele si se schimba stilul ca mai sus, insa se alege stilul *Author*.

Adaugarea de subtitluri

Urmatorul pas in constructia documentului este impartirea comenzilor din zona de lucru in cateva sectiuni:

1. Prima sectiune ar trebui sa contina cele doua comenzi care gasesc raspunsul analitic (simbolic) al problemei. Se selecteaza cu mouse-ul regiunile de intrare in

care se definesc *expr* si *rezultat* impreuna cu regiunile de iesire (rezultatele) care le corespund.Se selecteaza apoi optiunea *Indent* din meniul FORMAT.

2. Se plaseaza cursorul in regiunea de text de deasupra comenzii care defineste *expr*. Se introduce apoi subtitlul (spre exemplu **Calculul integralei definite**) si se apasa ENTER. Cursorul se va deplasa mai jos, iar Maple V atribuie acestei zone de text stilul *Normal*. Acum se poate scrie un text introductiv pentru prima comanda.

Pentru a se insera text intre doua comenzi se plaseaza cursorul la sfarsitul primeia, se intra in modul Maple V pentru a se genera o noua regiune apoi se intra in modul text pentru a transforma aceasta regiune in text.

Adaugarea expresiilor matematice in liniile text

Daca intr-o zona de text trebuie scrisa o expresie matematica, se selecteaza *Maple Input* din meniul INSERT, apoi se scrie codul Maple V corespunzator expresiei matematice dorite. Spre exemplu, codul corespunzator expresiei $\int x^2 \sin(x-a)\,dx$ este Int(x^2*sin(x-a),x).

Ca urmare a acestor comenzi de editare a documentului se poate obtine raportul:

Calculul integralei definite

Formularea problemei

Ne propunem calculul integralei definite $\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,dx$.

Rezolvarea problemei

Scriem expresia integralei nedefinite atribuindu-i numele *expr*:

$$expr := \int x^2 \sin(x)\,dx$$

Calculam integrala nedefinita atribuind rezultatului numele *rezultat*:

$$rezultat := -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x \sin(x)$$

Pentru a obtine valoarea integralei definite calculam diferenta dintre valorile rezultatului in cele doua limite de integrare:

$$rez1 := 2$$

$$rez2 := \pi^2 - 2$$

$$\pi^2 - 4$$

Am obtinut astfel urmatorul rezultat: $\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,dx = \pi^2 - 4$.

Exemplul 1.3 - Lucrul cu zone multiple

Maple V permite lucrul cu mai multe zone de lucru simultan. Acest exemplu arata:

- cum se folosesc comenzile *Cut* si *Paste*;

- cum se introduc *ancorele* de legatura intre zone;
- cum se introduc si se folosesc *reperele* (*Bookmarks*).

Cut si **Paste**

Folosind comanda *New* din meniul FILE deschidem o noua zona de lucru (goala) care poate fi utilizata in paralel cu cea editata anterior. Daca se alege optiunea *Vertical* din meniul WINDOW ambele zone de lucru se pot vedea simultan pe ecran.

Daca se doreste copierea unei parti dintr-o zona de lucru se apasa butonul *Copy*, se alege optiunea *Maple Input* din meniul INSERT, si se apasa *Paste*.

Adaugarea de ancore (*Hyperlink*)

O ancora este o zona de text activa, la selectarea careia sunteti transferati automat la alta locatie cu care zona respectiva este "conectata".

Intr-o zona de lucru se selecteaza cu mouse-ul unul sau mai multe cuvinte. Se alege, apoi optiunea *Convert* din meniul FORMAT si optiunea *Hyperlink* din submeniul urmator.

Apare o cutie de dialog in care Maple V a umplut deja campul pentru *Link Text* cu textul selectat anterior. In campul *Worksheet* se scrie numele fisierului care contine zona de lucru conectata (care contine spre exemplu detalii referitoare la cuvintele selectate din prima zona de lucru). Se apasa OK si operatia este completa.

Repere (*Bookmarks*)

Se pot insera repere care ne pot ajuta in gasirea anumitor locatii in documentele complexe. Daca se declara *Hyperlink* catre reper, la apelarea acestuia Maple V ne va duce in locatia reperului respectiv.

1. Se plaseaza cursorul in linia ce se doreste a fi marcata (careia se doreste a i se atribui un reper);

2. Se alege optiunea *Bookmarks* din meniul VIEW si optiunea *Edit Bookmark* din submeniul ce apare;

3. In cutia de dialog ce apare scriem textul reperului. Se apasa OK pentru a insera reperul. Se muta cursorul intr-o alta zona a documentului. Selectand optiunea *Bookmarks* din meniul VIEW si textul introdus anterior pentru reper, se observa ca pozitia cursorului s-a modificat, gasindu-se acum pe locatia reperului apelat.

Se salveaza zona de lucru cu reperul introdus. In cealalta zona de lucru se selecteaza un text care face referire la zona de lucru salvata anterior.

Se alege optiunea *Convert* din meniul FORMAT si *Hyperlink* din submeniul urmator. In cutia de dialog care apare, campul *Link Text* este umplut cu textul selectat.

In campul *Worksheet* se scrie numele fisierului ce contine zona de lucru salvata anterior. Se apasa OK pentru a insera *hyperlink*-ul.

Se inchide zona de lucru ce a fost salvata si se reactiveaza prin apelarea *hyperlink*-ului din zona de lucru ramasa activa.

Cursorul se afla acum in zona de lucru care fusese inchisa, iar pozitia acestuia este pe locatia caracterizata de reperul introdus anterior.

S-a aratat astfel, cum dintr-o zona de lucru, poate fi apelata o alta zona de lucru si, mai mult, cursorul poate fi pozitionat pe o anumita locatie.

1.2 Meniul Maple V

Interactiunea dintre Maple V si utilizator se poate realiza si in afara zonei de lucru prin intermediul meniurilor si butoanelor cuprinse in:

- bara de meniu;
- bara de instrumente;
- bara de context;
- bara de stare.

Bara de meniu

In partea de sus a ecranului Maple V se afla o *bara de meniu* care contine optiunile: FILE, EDIT, VIEW, INSERT, FORMAT, OPTIONS, WINDOW si HELP. La selectarea unei optiuni apar submeniuri din care se pot selecta alte optiuni. Arborele meniului Maple V este prezentat in continuare.

FILE Aceste meniu contine comenzi de intrare/iesire care pot fi aplicate asupra documentelor Maple.

New Creeaza un nou document.
Open... Deschide un document existent.
Save Salveaza zona de lucru activa intr-un fisier cu acelasi nume.
Save As... Salveaza zona de lucru activa intr-un fisier al carui nume trebuie specificat.
Export As Exporta documentul sub forma text, in format Maple V sau LaTeX intr-un fisier specificat.
Close Inchide documentul activ. Daca exista modificari care nu au fost salvate va fi solicitata salvarea acestora.
Save Settings Salvarea setarilor curente.
Auto Save Settings Salvarea setarilor curente la iesirea din Maple V.
Print... Tipareste documentul activ.
Print Preview... Afiseaza pe ecran modul in care va arata documentul dupa ce va fi tiparit.
Printer Setup... Alege imprimanta si diferite optiuni de printare.
Exit Iese din Maple V. Daca exista modificari va fi solicitata salvarea acestora.

EDIT Acest meniu contine comenzi de editare care se pot aplica unor zone de document.

Undo Delete Elimina efectul ultimei stergeri efectuate.
Cut Muta zona de document selectata in memorie (***clipboard***).
Copy Copiaza zona de document selectata in memorie (***clipboard***).
Copy as Maple Text Copiaza zona de document selectata in memorie (***clipboard***) in format Maple text.
Paste Isereaza continutul ***clipboard***-ului in documentul activ, incepand cu pozitia curenta a cursorului.
Paste Maple Text Interpreteaza continutul ***clipboard***-ului ca Maple text si il insereaza in documentul activ.
Delete Paragraph Sterge paragraful care contine cursorul.
Select All Selecteaza intregul document.
Find... Cauta o secventa de text specificata in documentul activ. Cautarea poate fi facuta inainte sau dupa pozitia curenta a cursorului.
Input Mode Selecteaza modul de scriere a documentului care poate fi: modul de introducere a comenzilor Maple V sau modul text.
Split or Join Imparte sau alatura sectiuni si grupuri de executie.
Split Execution Group Imparte un grup de executie in doua parti in functie de pozitia cursorului.
Join Execution Groups Alatura doua grupuri de excutie: pe cel care contine cursorul si pe cel care urmeaza.
Split Section Imparte o sectiune in functie de pozitia cursorului.
Join Sections Alatura doua sectiuni: pe cea care contine cursorul si pe cea care urmeaza.
Execute Executa comenzi Maple V.
Selection Executa toate grupurile de executie selectate.
Worksheet Executa toate comenzile din zona de lucru activa.
Remove Output Elimina afisarea rezultatelor.
From Selection Elimina afisarea rezultatelor pentru comenzile selectate.
From Worksheet Elimina afisarea rezultatelor pentru toate comenzile din zona de lucru activa.

VIEW Acest meniu contine comenzi care controleaza modul de afisare a documentelor si a barelor de meniuri.

Tool Bar Controleaza afisarea barei de meniu care contine principalele unelte.
Context Bar Controleza afisarea barei de meniu care contine unelte pentru modul text.
Status Line Controleza afisarea liniei de sub fereastra de lucru.

Zoom Factor Controleaza dimensiunile de afisare a continutului zonei de lucru active.
Bookmarks Se utilizeaza pentru saltul rapid al cursorului la un reper din interiorul documentului.
Edit Bookmark Adauga, modifica sau sterge un reper.
Show Invisible Characters Determina aparitia caracterelor care nu se vad la imprimare.
Show Section Ranges Afiseaza liniile ce delimiteaza sectiunile.
Show Region Ranges Afiseaza liniile ce delimiteaza grupurile de executie.
Expand All Selections Determina "deschiderea" tuturor sectiunilor din zona de lucru activa, prin afisarea continutului.
Collapse All Selections Determina "inchiderea" tuturor sectiunilor din zona de lucru activa.

INSERT Acest meniu contine comenzi pentru inserarea de texte sau expresii in documentul activ.

Text Input Insereaza obiect de tip text.
Maple Input Insereaza obiect de tip linie de comanda Maple.
Execution Group Insereaza un grup de executie inaintea sau dupa grupul de executie curent.
Paragraph Insereaza un nou paragraf inaintea sau dupa paragraful curent.
Section Insereaza o sectiune dupa sectiunea curenta.
Subsection Insereaza o subsectiune dupa paragraful curent.
Math Input Insereaza un obiect Malpe incepand cu poazitia curenta a cursorului sau inaintea unei zone selectate.
Hyperlink Insereaza o *ancora* dupa pozitia curenta a cursorului.

FORMAT Acest meniu contine comenzi pentru formatarea textului.

Styles... Creeaza sau modifica stilul unui obiect din zona de lucru.
Italic Determina scrierea cu caractere inclinate a textului selectat.
Bold Determina scrierea cu caractere ingrosate a textului selectat.
Underline Determina sublinierea textului selectat.
Paragraph... Controleaza spatierea intre linii, alinierea si aranjarea in pagina a paragrafelor.
Character... Selecteaza tipul, marimea, culoarea sau alte atribute ale caracaterelor.
Indent Transforma zona selectata intr-o subsectiune, prin indentare.
Outdent Are efect invers optiunii de mai sus.
Convert Converteste textul selectat intr-o *ancora*, o expresie sau un obiect Maple.

OPTIONS Acest meniu contine optiuni pentru modul in care vor fi executate comenzile Maple.

Replace Output Inlocuieste rezultatele existente cu cele recalculate.
Insert Mode Isereaza automat un nou grup de executie imediat dupa executarea grupului anterior.
Output Display Determina modul de afisare.
Assumed Variables Maple permite atribuirea de proprietati necunoscutelor. Acest submeniu controleaza modul in care Maple poate reaminti utilizatorului faptul ca variabilele au anumite proprietati.
No Annotation In acest caz Maple nu reaminteste in nici un fel de proprietatile variabilelor.
Trailing Tildes Maple alatura un caracter tilda (˜) numelui variabilelor care au proprietati.
Phrase Maple afiseaza un mesaj in care reaminteste de proprietatile variabilei.
Plot Display Controleaza modul in care Maple V realizeaza reprezentarile grafice.
Inline Realizeaza reprezentarea grafica in zona de lucru. Aceasta optiune poate fi selectata si prin atribuirea valorii ***inline*** variabilei ***plotdevice***
Window Realizeaza reprezentarea grafica intr-o fereastra separata. Aceasta optiune poate fi selectata si prin atribuirea valorii ***window*** variabilei ***plotdevice***

WINDOW Acest meniu contine comenzi referitoare la ferestrele deschise in sesiunea Maple curenta.

Cascade Determina afisarea in cascada a ferestrelor.
Tile Determina afisarea simultana a tuturor ferestrelor.
Horizontal Aranjeaza orizontal toate ferestrele.
Vertical Aranjeaza vertical toate ferestrele.
Arrange Icons Aranjeaza iconitele ferestrelor minimizate.
Close All Inchide toate ferestele.
Close All Help Inchide toate ferestrele Help.

HELP Acest meniu contine comenzi de acces la manualul de utilizare.

Contents Afiseaza cuprinsul paginii de help si permite parcurgerea sa.
Topic Search... Cauta informatii referitoare la un subiect.
Full Text Search... Cauta o secventa specificata de text.
History... Determina intoarcerea la nivelul anterior de cautare.

Save to Database... Salveaza zona de lucru curenta in baza de date a paginii ***help***.
Remove Topic... Sterge din baza de date neprotejata a paginii ***help*** datele referitoare la un anumit subiect.
Using Help Furnizeaza explicatii despre modul cum poate fi folosita pagina ***help***.
Balloon Help Activeaza afisarea ***help***-ului de tip balon.
About Maple V... Afiseaza informatii privitoare la versiunea utilizata a programului Maple V.

Bara de instrumente

In partea de sus a ecranului Maple V sub bara de meniu, se afla o *bara de instrumente* alcatuita din butoane cu urmatoarele functii:

- crearea unui nou document;
- deschiderea unui document deja existent;
- salvarea unui document;
- imprimarea documentului;
- taierea sau copierea unei zone de document si pastrarea acesteia intr-o zona de memorie ***(clipboard)***, special afectata unor astfel de operatii;
- inserarea in document a continutului zonei de memorie ***(clipboard)***;
- neexecutarea ultimei comenzi de stergere;
- trecerea la modul de scriere Maple;
- trecerea la modul text;
- introducerea unei noi zone de comanda dupa cursor;
- indentare si deindentare;
- oprirea efectuarii unei operatii de calcul in timpul desfasurarii acesteia;
- setarea dimensiunilor de afisare la 100%, 150% sau 200%;
- afisarea caracterelor care nu se vad la imprimare;
- redimensionarea ferestrei active pentru unplerea optima a zonei de lucru;
- alegerea stilului de paragraf;
- selectarea caracterelor folosite pentru scriere si a dimensiunii acestuia;
- formatarea textului: ingrosare, scriere inclinata, subliniere, aliniere la stanga sau la dreapta, centrare.

Folosirea acestor butoane in locul optiunilor din submeniuri usureaza mult exploatarea mediului integrat Maple V, permitand utilizatorului sa lucreze mult mai repede.

Bara de context

Aceasta bara contine in mod normal butoanele:

- text;
- instructiuni Maple V.

In functie de obiectul selectat (expresii, text, grafic sau animatie) bara de context isi schimba continutul.

Sub zona de lucru se afla o bara de stare, care contine informatii referitoare la timpul CPU si disponibilul de memorie.

1.3 Exercitii propuse

1. Calculati valorile si reprezentati grafic cateva functii elementare (sin, cos, exp, log etc) si integralele acestora;

2. Editati si imprimati un scurt raport referitor la puterea si energia disipate de o rezistenta $R = 10\,\Omega$ parcursa de curentul $\mathrm{i}(t) = I\,e^{(-\frac{t}{\tau})}\sin(\omega\,t)$, in care $I = 2\,mA$, $\tau = 10\,ms$, $f = 50\,Hz$;

3. Editati un scurt document cu zone multiple care sa aiba ancore (de exemplu, despre Maple V);

4. Generati graficul functiei: $\sin(x) + \cos(x)$;

5. Sa se calculeze integrala nedefinita: $\int x\cos(x)^2\,dx$;

6. Sa se afiseze rezultatul anterior sub forma cea mai simpla;

7. Sa se calculeze integrala definita: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)^2\,dx$;

8. Sa se calculeze integrala $\int x\cos(x-a)^2\,dx$, iar rezultatul sa se reprezinte tridimensional intre limitele: $x = -\frac{\pi}{2}..\frac{\pi}{2}$, $a = 0..1$;

9. Realizati o animatie a rezultatului anterior intre limitele specificate.

2 Expresii matematice

In acest capitol se prezinta notiunile de baza, care permit utilizatorului rezolvarea problemelor matematice simple. Se au in vedere operatiile numerice (cu numere intregi, rationale, irationale, reale sau complexe) si functiile elementare sau speciale. Se arata cum manipularile simbolice simple pot permite definirea de noi functii, de catre utilizator.

In continuare sunt prezentate si alte tipuri de obiecte Maple V, cum sunt: secvente, liste, multimi, matrice sau tablouri precum si operatiile care pot fi efectuate cu acestea. In ultimul paragraf al capitolului sunt prezentate principalele comenzi prin care o expresie simbolica poate fi adusa la forma dorita de utilizator si anume prin simplificare, factorizare, dezvoltare, conversie, normalizare, combinare, mapare sau extragerea unor parti din expresii.

Cele mai simple operatii in Maple V sunt cele numerice. Maple V poate lucra ca un calculator de buzunar conventional cu numere intregi si reale. Introducerea operatiei se face utilizand sintaxa obisnuita. Terminatorul ***;*** indica sfarsitul fiecarei operatii:

```
> 5+1;
```

$$6$$

```
> 2+9/2;
```

$$\frac{13}{2}$$

```
> 5*(2+1/4)/(2/7-3/5);
```

$$\frac{-1575}{44}$$

```
> 3.543654/2;
```

$$1.771827000$$

Sa consideram urmatorul caz:

```
> 2+9/2;
```

$$\frac{13}{2}$$

De notat ca Maple V realizeaza calcule exacte cu numere rationale. Rezultatul operatiei *2+9/2* este *13/2* si nu *6.5*. Pentru Maple V, numarul rational *13/2* si aproximatia in virgula mobila *6.5* sunt obiecte diferite. Aceasta reprezentare exacta a numerelor permite programului Maple V sa pastreze mult mai multe informatii despre originea si structura acestora. Originea si structura unui numar ca: 1.047197551sunt mult mai putin clare decat in cazul unui numar exact cum ar fi: $\frac{\pi}{3}$.

Cand avem de a face cu expresii mai complexe, avantajul este si mai mare. Maple V poate lucra nu numai cu numere intregi, rationale sau reale dar si cu expresii. De asemenea, se pot manipula vectori, matrice, polinoame si multe alte constructii matematice.

2.1 Operatii numerice

Maple V poate lucra cu numere intregi, rationale, irationale, constante reale semnificative, aproximari in virgula mobila si numere complexe, punand la dispozitia utilizatorului un set de comenzi care permit efectuarea oricaror operatii aritmetice.

Exemplul 2.1 - Calcule cu numere intregi

```
> 3+4;
```

$$7$$

Maple V poate lucra cu numere intregi de dimensiune arbitrara. Practic limita numerelor intregi este de aproximativ 500000 de cifre depinzand in principal de viteza si resursele calculatorului. De exemplu, factorialul numarului 90 este:

```
> 90!;
```

148571596448176149730952273362082573788556996128468876694221686370\
0498539309406587654599213137088405964561723446997811200000000000000\
000000000

```
> length(");
```

$$139$$

Acest raspuns indica numarul de cifre ale exemplului anterior. Caracterul <”> indica rezultatul instructiunii anterioare. Pentru apelarea penultimului sau antepenultimului rezultat se folosesc <””> si, respectiv, <”””>.

Maple V are multe comenzi pentru lucrul cu numere intregi, dintre care cele mai importante sunt prezentate in Tabelul 2.1.

Tabelul 2.1 Comenzi pentru lucrul cu numere intregi

abs valoarea absoluta a unei expresii
factorial factorialul unui numar intreg
igcd cel mai mare divizor comun
ifactor factorizari intregi
isprime test de numar prim
iquo catul unei impartiri cu intregi
irem restul unei impartiri cu intregi

iroot radacini ale intregilor
isqrt radacina patrata a intregilor
max, ***min*** maximul si minimul unui set de numere
mod modulo (restul impartirii)

Urmatoarele exemple demonstreaza factorizarea, calculul celui mai mare divizor comun pentru doua numere intregi, calculul catului si restului precum si testele de numar prim.

```
> ifactor(1250);
```

$$(2)(5)^4$$

```
> igcd(216,48);
```

$$24$$

```
> iquo(29,4);
```

$$7$$

```
> isprime(12345678910987654321);
```

$$true$$

Exemplul 2.2 - Calcule exacte cu numere neintregi

O proprietate importanta a programului Maple V este de a calcula exact expresii aritmetice rationale, fara a trebui sa le reduca la aproximari in virgula mobila (numere reale).

```
> 1/5+1/7;
```

$$\frac{12}{35}$$

Maple V poate calcula estimarea unui numar real sau a unei expresii, daca acest lucru este cerut cu comanda ***evalf***. Maple V poate furniza estimari foarte precise ale expresiilor exacte deoarece poate lucra cu numere reale care sa aiba dupa virgula mii de cifre.

```
> Pi;
```

$$\pi$$

```
> evalf(",35);
```

$$3.1415926535897932384626433832795029$$

Este importanta distinctia pe care Maple V o face intre reprezentarile exacte si in virgula mobila ale valorilor. Iata un exemplu de numar rational:

```
> 2/7;
```

$$\frac{2}{7}$$

Aproximarea zecimala in virgula mobila ("flotanta") este:

```
> evalf(",35);
```

$$.28571428571428571428571428571428571$$

Prezenta unui numar zecimal intr-o expresie va avea ca efect furnizarea unui rezultat sub forma aproximata.

```
> 5/2*7;
```

$$\frac{35}{2}$$

```
> 2.5*7;
```

$$17.5$$

Astfel, se vor utiliza numere zecimale numai atunci cand este acceptabil lucrul cu valori aproximative. Maple V permite manipularea expresiilor exacte prin utilizarea reprezentarii simbolice. Iata cum este reprezentata radacina patrata a unui numar in Maple V:

```
> sqrt(3);
```

$$\sqrt{3}$$

In Maple V, constantele matematice transcendente, cum ar fi: numarul π sau numarul **e**, sunt cunoscute si tratate ca niste cantitati exacte:

```
> tan(Pi);
```

$$0$$

```
> exp(1);
```

$$e$$

```
> evalf(",10);
```

$$2.718281828$$

```
> ln(exp(5));
```

$$5$$

Maple V face diferenta intre literele mari si literele mici, de exemplu: **Pi** si **pi** nu sunt echivalente.

Exemplul 2.3 - Aproximari in virgula mobila

Desi Maple V lucreaza mai usor cu valori exacte, poate intoarce si aproximari in virgula mobila in lungime de pana la 500000 de cifre oricand este cerut acest lucru, depinzand doar de resursele calculatorului.

Daca scadem doua numere in virgula mobila aproape egale, eroarea relativa a diferentei poate fi foarte mare. De exemplu, putem avea nevoie sa folosim numere cu aproximativ 40 de zecimale pentru a obtine un rezultat cu o precizie de 20 de zecimale.

Daca in expresie se introduce un numar cu virgula, expresia evaluata va fi si ea cu virgula.

```
> 1/2+1/3+1/2.5;
```

$$1.233333333$$

```
> sin(55.1);
```

$$-.9925515721$$

In timp ce al doilea argument al funcetiei ***evalf*** controleaza numarul de cifre de dupa virgula ale unei anumite operatii, modificarea variabilei ***Digits*** fixeaza numarul de cifre de dupa virgula pentru o intreaga secventa de calcul:

```
> Digits:=15;
```

$$Digits := 15$$

```
> sin(55.1);
```

$$-.992551572073139$$

Exemplul 2.4 - Calcule cu numere complexe sau in alte baze

Maple V poate lucra cu numere complexe. **I** este simbolul definit de Maple V pentru radacina patrata din **-1**:

```
> sqrt(-1);
```

$$I$$

```
> (3*I+7)+(10-8*I);
```

$$17 - 5\,I$$

```
> z:=(12+5*I)/(2-I);
```

$$z := \frac{19}{5} + \frac{22}{5}\,I$$

Partea reala, imaginara, modulul si argumentul unui numar complex se calculeaza folosind functiile: ***Re***, ***Im***, ***abs*** si respectiv ***argument***:

```
> Re(z);
```

$$\frac{19}{5}$$

```
> Im(z);
```

$$\frac{22}{5}$$

```
> abs(z);
```

$$\frac{13}{5}\sqrt{5}$$

```
> argument(z);
```

$$\arctan(\frac{22}{19})$$

Conjugatul unui numar complex se calculeaza cu comanda ***conjugate***:

```
> conjugate(z);
```

$$\frac{19}{5} - \frac{22}{5}\,I$$

Se poate lucra si in alte baze si sisteme de numeratie:

```
> convert(16536,binary);
```

$$100000010011000$$

```
> convert(24567,hex);
```

$$\mathit{5FF7}$$

```
> convert(123,base,3);
```

$$[0, 2, 1, 1, 1]$$

Sunt disponibile si operatii cu clase de resturi "**modulo**":

```
> 29 mod 5;
```

$$4$$

care poate fi reprezentata simetric:

```
> mods(29,5);
```

$$-1$$

sau pozitiv:

```
> modp(29,5);
```

$$4$$

Exemplul 2.5 - Functii matematice

Maple V reuneste un set amplu de functii elementare sau speciale, dintre care cele mai importante sunt prezentate in Tabelul 2.2.

Tabelul 2.2 Functii matematice recunoscute de Maple V

sin, ***cos***, ***tan***, ***cot***, ***sec***, ***csc*** functii trigonometrice
sinh, ***cosh***, ***tanh***, ***coth***, ***sech***, ***csch*** functii hiperbolice
arcsin, ***arccos***, ***arctan***, ***arccot*** functii trigonometrice inverse
arcsec, ***arccsc***
arcsinh, ***arccosh***, ***arctanh***, ***arccoth*** functii hiperbolice inverse
arcsech, ***arccsch***
exp functia exponentiala
ln functia logaritm natural
log[10] functia logaritm in baza 10
sqrt functia radacina patrata
round rotunjire la cel mai apropiat intreg
trunc trunchiere la partea intreaga
frac partea fractionara
BesselI, ***BesselJ***, ***BesselK***, ***BesselY*** functii Bessel
binomial functia binomiala
erf, ***erfc*** functiile eroare si eroare complementara
Heaviside functia treapta Heaviside
Dirac functia delta Dirac
MeigerG functia G a lui Meijer
Zeta functia Zeta a lui Riemann
LegendreKc, ***LegendreEc***, ***LegendrePic*** integralele eliptice Legendre
LegendreKc1, ***LegendreEc1***, ***LegendrePic1***
hypergeom functia hipergeometrica

```
> sin(Pi/6);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> ln(2.7182829);
```

$$1.00000039419781$$

Cand Maple V nu gaseste o forma mai simpla, lasa expresia in forma in care se gaseste fara a o converti la o forma inexacta. De exemplu:

```
> ln(Pi);
```

$$\ln(\pi)$$

2.2 Calcule simbolice de baza

Maple V poate lucra cu variabile independente si cu expresii care le contin. In scrierea expresiilor simbolice sunt adoptate conventiile matematice standard: operatori algebrici: plus +, minus -, inmultit *, impartit /, ridicare la putere ^ si mai multe nivele de paranteze ( ) imbricate.

Exemplul 2.6 - Manipulari simbolice simple

```
> (2+5*x)^2;
```

$$(2+5\,x)^2$$

```
> (1+2*x)+(2-x);
```

$$3+x$$

Maple V are sute de comenzi pentru lucrul cu expresii simbolice, dintre care cele mai importante sunt:
Dezvoltarea:

```
> expand((2-x)^4);
```

$$16-32\,x+24\,x^2-8\,x^3+x^4$$

Factorizarea:

```
> factor(");
```

$$(x-2)^4$$

Derivarea:

```
> Diff(arctan(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan(x)$$

Evaluarea:

```
> value(");
```

$$\frac{1}{1+x^2}$$

Sume si serii:

```
> Sum(n^3,n);
```

$$\sum_{n} n^3$$

```
> value(");
```

$$\frac{1}{4}\,n^4 - \frac{1}{2}\,n^3 + \frac{1}{4}\,n^2$$

Trebuie remarcat ca operatiile specifice analizei matematice, cum sunt derivarea, integrarea si limitele au fiecare cate doua forme: forma inerta ***Diff***, ***Int***, ***Limit*** si forma neinerta ***diff***, ***int***, ***limit***. In cazul folosirii formei inerte este generata expresia corespunzatoare (in format matematic) fara a fi evaluata, pe cand prin folosirea formei neinerte are loc si evaluarea expresiei, ca in exemplul:

```
> expr:=sin(x);
```

$$expr := \sin(x)$$

```
> Int(expr,x);Diff(expr,x);
```

$$\int \sin(x)\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(x)$$

```
> value("");value("");
```

$$-\cos(x)$$

$$\cos(x)$$

```
> int(expr,x);diff(expr,x);
```

$$-\cos(x)$$

$$\cos(x)$$

Pentru a evalua o forma inerta se foloseste comanda ***value***.

2.3 Atribuirea de nume expresiilor. Functii definite de utilizator

Maple V permite atribuirea de nume obiectelor pentru ca acestea sa poata fi apelate ori de cate ori este nevoie. Este posibila atribuirea de nume oricarei expresii Maple V folosind simbolul "*:=*".

Exemplul 2.7 - Atribuiri si functii utilizator

```
> variabila := x;
```

$$variabila := x$$

```
> produs := x*y;
```

$$produs := x\,y$$

Se pot atribui nume chiar si ecuatiilor:

```
> ecuatie := x=y+2;
```

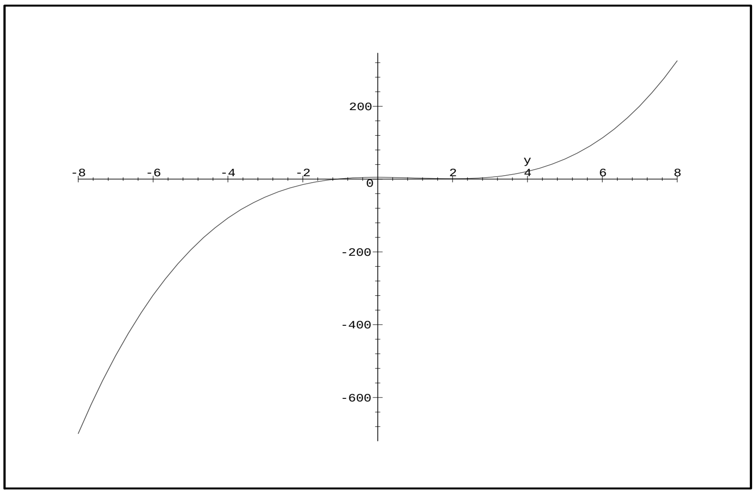
$$ecuatie := x = y + 2$$

Numele variabilelor si expresiilor Maple V pot contine orice caractere alfanumerice si caracterul "_" dar nu pot incepe cu caractere numerice. Cu ajutorul simbolului sageata (->) se pot defini *functii utilizator*. Functia astfel definita se poate reprezenta grafic folosind comanda ***plot***.

```
> f:=x -> x^3-3*x^2+5;
```

$$f := x \to x^3 - 3\,x^2 + 5$$

```
> plot(f(y),y=-8...8);
```



De notat ca nu toate numele sunt disponibile pentru variabile, Maple V avand cateva nume predefinite si deci rezervate. Daca se incearca atribuirea unui nume care este predefinit sau rezervat, Maple V semnaleaza faptul ca numele ales este protejat. De exemplu:

```
> Pi:=3.14;
```

```
Error, attempting to assign to 'Pi' which is protected
```

2.4 Alte tipuri de baza ale obiectelor structurate

In acest paragraf vor fi prezentate tipurile de baza ale obiectelor Maple V structurate cum ar fi: secvente, liste, multimi, matrici si tablouri. Sunt concepte foarte simple dar esentiale in intelegerea acestui manual.

Exemplul 2.8 - Secvente

Secventa este structura de baza in Maple V si reprezinta un grup ordonat de expresii Maple V separate prin virgule.

```
> 0,2,4,6,8;
```

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$

Secventele pastreaza ordinea si eventual, repetitia elementelor pe care le contin. Secventele sunt adesea folosite pentru a construi obiecte mai sofisticate prin operatii cum ar fi *concatenarea*. Operatorul de concatenare este ".".

```
> a.b.c;
```

$$abc$$

Atunci cand *concatenarea* este aplicata unei secvente, aceasta are efect asupra fiecarui element.

```
> S:=0,2,4,6,8;
```

$$S := 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$$

```
> x.S;
```

$$x0,\ x2,\ x4,\ x6,\ x8$$

Exemplul 2.9 - Liste si operatii cu liste

O lista poate fi creata prin scrierea intre paranteze drepte a unei secvente de obiecte Maple V:

```
> lista:=[1,2,3,4];
```

$$lista := [1,\ 2,\ 3,\ 4]$$

Maple V pastreaza ordinea si repetitia elementelor din lista. De aceea, listele: [a,b,c], [b,c,a] si [a,b,b,c,a] sunt diferite. Faptul ca ordinea este pastrata permite extragerea unui anumit element din lista.

```
> litere:=[a,b,c,d];
```

$$litere := [a, b, c, d]$$

```
> litere[3];
```

$$c$$

Comanda ***nops*** indica numarul de elemente ale unei liste.

```
> nops(litere);
```

$$4$$

O lista poate fi convertita in secventa cu ajutorul comenzii ***op***.

```
> op(litere);
```

$$a, b, c, d$$

In fond, daca elementele unei liste sunt constante sau variabile numerice, intreaga lista este un vector cu ***nops***( ) elemente.

Exemplul 2.10 - Multimi si operatii cu multimi

O multime (sau un set) se construieste prin scrierea intre acolade a unor obiecte Maple V separate prin virgula.

```
> multime:={2,-1,3,-4,5};
```

$$multime := \{-1, 2, 3, -4, 5\}$$

O multime este, de fapt, o secventa incadrata de acolade in care nu se pastreaza ordinea si repetitia elementelor. De aceea, urmatoarele trei multimi sunt identice.

```
>{a,b,c},{a,c,b},{a,b,b,a,c,a,c};
```

$$\{b, a, c\}, \{b, a, c\}, \{b, a, c\}$$

Amintindu-ne de faptul ca numerele intregi sunt diferite, ca obiecte Maple V, de aproximarile lor in virgula mobila, urmatoarea multime va avea cinci elemente si nu trei:

```
>{0,1,1.0,2.0,2};
```

$$\{0, 1, 2, 2.0, 1.0\}$$

In schimb,

```
>{0,1,1,2,2};
```

$$\{0, 1, 2\}$$

are trei elemente.

Maple V poate executa multe operatii asupra multimilor. Dintre acestea, operatiile de baza intersectia si reuniunea sunt realizate cu ajutorul operatorilor ***intersect*** si ***union***.

```
>{a,b,c} union {x,y,z};
```

$$\{x, y, a, c, b, z\}$$

```
>{0,4,9,a,c,f} intersect {0,12,z,f};
```

$$\{0, f\}$$

Ca si in cazul listelor, comanda ***nops*** indica numarul de elemente.

```
> nops(");
```

$$2$$

Ca si in cazul listelor, multimile pot fi convertite in secvente cu comanda:

```
> op({1,2,3,4,5,6,7});
```

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

O comanda utila si foarte des folosita in cazul multimilor este comanda ***map***. Aceasta permite aplicarea unei functii tuturor elementelor unei structuri.

```
> numere:={0,Pi/3,Pi/4,Pi/6};
```

$$numere := \{0, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi\}$$

```
> map(cos,numere);
```

$$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$$

Exemplul 2.11 - Operatii cu multimi si liste

Comanda ***member*** valideaza apartenenta unui element la o multime sau la o lista.

```
> lista:=[Daniel, Ioan];
```

$$lista := [Daniel, Ioan]$$

```
> member(Ioan,lista);
```

$$true$$

```
> multime:={90,21,34,56};
```

$$multime := \{21, 34, 56, 90\}$$

```
> member(20,multime);
```

$$false$$

In Maple V pot fi definite multimi si liste vide:

```
> multime_vida:={};
```

$$multime\_vida := \{\}$$

```
> lista_vida:=[];
```

$$lista\_vida := []$$

Diferenta multimilor se realizeaza cu ajutorul operatorului ***minus***.

```
> multime:={1,2,3,4,5};
```

$$multime := \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

```
> multime_noua:=multime minus {2,5};
```

$$multime\_noua := \{1, 3, 4\}$$

Exemplul 2.12 - Matrice si operatii cu matrice

Matricea este o extensie a conceptului de lista. Fiecare element are asociat un multiindice, alcatuit din numere intregi nu neaparat pozitive, in secventa.

Sa definim o matrice de (3 x 3) elemente:

```
> matrice:=array(1..3,1..3);
```

$$matrice := \mathrm{array}(1..3, 1..3, [])$$

```
> matrice[1,1]:=1; matrice[1,2]:=2; matrice[1,3]:=3;
```

$$matrice_{1,1} := 1$$

$$matrice_{1,2} := 2$$

$$matrice_{1,3} := 3$$

Vom continua introducerea elementelor matricei. Prin terminarea fiecarei comenzi cu caracterul <:> se suprima afisarea efectului acesteia.

```
> matrice[2,1]:=4: matrice[2,2]:=5: matrice[2,3]:=6:
> matrice[3,1]:=7: matrice[3,2]:=8: matrice[3,3]:=9:
> print(matrice);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

O alta modalitate de definire a matricei este urmatoarea:

```
> matrice:=array(1..3,1..3,[[1,1,1],[2,2,2],[3, 3,3]]);
```

$$matrice := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Matricele nu sunt limitate la doua dimensiuni, insa cele de ordin mai mare sunt dificil de afisat.

```
> matrice1:=array(1..2,1..2,1..2,[[[11,10],[17, 14]],[[12,19],[22,15]]]);
```

$$\begin{array}{l} \mathit{matrice1} := \mathrm{array}(1..2,\ 1..2,\ 1..2,\ [\\ \quad (1,\ 1,\ 1) = 11 \\ \quad (1,\ 1,\ 2) = 10 \\ \quad (1,\ 2,\ 1) = 17 \\ \quad (1,\ 2,\ 2) = 14 \\ \quad (2,\ 1,\ 1) = 12 \\ \quad (2,\ 1,\ 2) = 19 \\ \quad (2,\ 2,\ 1) = 22 \\ \quad (2,\ 2,\ 2) = 15 \\ \quad]) \end{array}$$

Pentru inlocuirea unui element sau a unei variabile intr-o structura respectiv, o expresie se poate folosi comanda ***subs***.

```
> expresie:=x^3+21*x;
```

$$expresie := x^3 + 21\,x$$

```
> subs({x=y^3+143},expresie);
```

$$(y^3 + 143)^3 + 21\,y^3 + 3003$$

```
> subs({2=0},matrice);
```

$$matrice$$

```
> subs({2=0},evalm(matrice));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Comanda ***evalm*** realizeaza evaluarea matricei la nivelul fiecarui element si are ca rezultat afisarea elementelor acesteia ca si cand ar fi fost folosita comanda ***print***.

```
> evalm(matrice);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> A:=array(1..2,1..2,[[1,1],[2,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=array(1..2,1..2,[[0,10],[14,-5]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> C:=10;
```

$$C := 10$$

```
> evalm(C*A+B);
```

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 34 & 15 \end{bmatrix}$$

Exemplul 2.13 - Tablouri

Tabloul este o extensie a conceptului de matrice. Diferenta intre o matrice si un tablou este ca tabloul poate avea ca indici si altceva decat numere intregi.

```
> numere:=table([unu=one,doi=two,trei=three]);
```

$$numere := \mathrm{table}([\; trei = three,\; doi = two,\; unu = one \;])$$

```
> numere[trei];
```

$$three$$

```
> cub:=table([latura=[10,mm],masa=[9,kg]]);
```

$$cub := \mathrm{table}([\; latura = [10,\, mm],\; masa = [9,\, kg] \;])$$

```
> cub[masa];
```

$$[9,\, kg]$$

2.5 Manipularea expresiilor

In continuare, vor fi prezentate comenzi cu ajutorul carora expresiile, sau rezultate ale unor comenzi aplicate expresiilor, pot fi puse sub forma dorita.

Exemplul 2.14 - Comanda de simplificare (*simplify*)

Prin intermediul comenzii ***simplify*** se pot aplica reguli de simplificare asupra unei expresii. Maple V cunoaste reguli de simplificare pentru o mare varietate de expresii incluzand functii trigonometrice, radicali, functii logaritmice, functii exponentiale, functii putere si functii speciale.

```
> expr:=sin(x)^2 + (1+cos(2*x))/2 - 1;
```

$$expr := \sin(x)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\,x)$$

```
> simplify(expr);
```

$$0$$

Daca se doreste un anumit tip de simplificare trebuie specificat tipul dorit.

```
> simplify(sin(x)^2+exp(5*x)+cos(x)^2);
```

$$1 + e^{(5\,x)}$$

```
> simplify(sin(x)^2+exp(5*x)+cos(x)^2,'trig');
```

$$1 + e^{(5\,x)}$$

```
> simplify(sin(x)^2+exp(5*x)+cos(x)^2,'exp');
```

$$\sin(x)^2 + e^{(5\,x)} + \cos(x)^2$$

Utilizatorul poate aplica propriile reguli de simplificare.

```
> siderel:={sin(x)^2+cos(x)^2=1};
```

$$siderel := \{\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1\}$$

```
> expresie:=sin(x)^3-sin(x)*cos(x)^2+3*cos(x)^3 ;
```

$$expresie := \sin(x)^3 - \sin(x)\cos(x)^2 + 3\cos(x)^3$$

```
> simplify(expresie,siderel);
```

$$2\sin(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2 + 3\cos(x) - \sin(x)$$

Exemplul 2.15 - Comanda de factorizare (*factor*)

Efectul comenzii ***factor*** este de factorizare a expresiilor polinomiale asupra carora este aplicata.

```
> polinom:=x^5-x^4-7*x^3+x^2+6*x;
```

$$polinom := x^5 - x^4 - 7\,x^3 + x^2 + 6\,x$$

```
> factor(polinom);
```

$$x\,(x-1)\,(x-3)\,(x+2)\,(x+1)$$

```
> raport:=(x^3-y^3)/(x^4-y^4);
```

$$raport := \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$$

In acest caz, atat numaratorul cat si numitorul contin factorul comun (x-y). Prin factorizare se va realiza si simplificarea.

```
> factor(raport);
```

$$\frac{x^2 + x\,y + y^2}{(y+x)\,(x^2+y^2)}$$

Exemplul 2.16 - Comanda de dezvoltare (*expand*)

In esenta, camanda ***expand*** este opusa comenzii ***factor*** avand ca efect dezvoltarea expresiei careia se aplica.

```
> expand((x+1)*(x+2));
```

$$x^2 + 3\,x + 2$$

```
> expand(sin(x+y));
```

$$\sin(y)\cos(x) + \cos(y)\sin(x)$$

```
> expand(exp(a+ln(b)));
```

$$e^a\,b$$

Daca in comanda ***expand*** se dau mai multe argumente, dezvoltarea primului argument se va face fara a dezvolta subexpresiile specificate.

```
> expand((x+1)*(y+z),x+1);
```

$$(x+1)\,y + (x+1)\,z$$

```
> expand((x+1)*(y+1)*(z+1)*(a+b),(x+1),(y+1));
```

$$(x+1)\,(y+1)\,z\,a + (x+1)\,(y+1)\,z\,b + (x+1)\,(y+1)\,a + (x+1)\,(y+1)\,b$$

Exemplul 2.17 - Comanda de conversie (*convert*)

Comanda ***convert*** realizeaza conversia expresiei catre o forma diferita, prin specificarea unei optiuni, cele mai des utilizate optiuni de conversie sunt prezentate in Tabelul 2.3.

```
> convert(cos(x),exp);
```

$$\frac{1}{2}\,e^{(I\,x)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{(I\,x)}}$$

```
> convert(1/2*exp(x)+1/2*exp(-x),trig);
```

$$\cosh(x)$$

Tabelul 2.3 Cele mai utilizate optiuni de conversie

polynom conversie serie - polinom
exp, ***expln***, ***expsincos*** conversie trigonometrica - exponentiala
parfrac conversie expresie rationala - forma fractinara partiala
rational conversie numar in virgula mobila - forma rationala
radians, ***degrees*** conversie grade - radiani
set, ***list***, ***listlist*** conversie intre structuri de date

```
> A:=array(1..2,1..2,[[w,x],[y,z]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

```
> convert(A,'listlist');
```

$$[[w,\, x],\, [y,\, z]]$$

```
> convert(A,'set');
```

$$\{x,\, y,\, w,\, z\}$$

```
> convert(",'list');
```

$$[x,\, y,\, w,\, z]$$

Exemplul 2.18 - Comanda de simplificare (*normal*)

Comanda ***normal*** transforma expresiile rationale intr-o forma normala factorizata, cu numaratorul si numitorul polinoame cu coeficienti intregi prime intre ele.

```
> expresie:=(x^3-y^3)/(x-y)^3;
```

$$expresie := \frac{x^3 - y^3}{(x-y)^3}$$

```
> normal(expresie);
```

$$\frac{x^2 + x\,y + y^2}{(x-y)^2}$$

```
> normal(expresie,'expanded');
```

$$\frac{x^2 + x\,y + y^2}{x^2 - 2\,x\,y + y^2}$$

Optiunea *expanded* determina programul Maple V sa dezvolte polinoamele de la numarator si numitor.

Exemplul 2.19 - Comanda de combinare (*combine*)

Comanda ***combine*** strange termenii din sume, produse si expresii cu puteri intr-un singur temen. In anumite cazuri aceste transformari sunt opuse transformarilor facute de comanda ***expand***.

```
> combine(exp(x)*exp(2*y),exp);
```

$$e^{(x+2\,y)}$$

```
> combine((x^r)^3,power);
```

$$x^{(3\,r)}$$

```
> expresie:=(2*x+5)^(1/3)*(y+2)^(5/3);
```

$$expresie := (2\,x+5)^{1/3}\,(y+2)^{5/3}$$

```
> combine(expresie);
```

$$(y+2)\,(2\,x\,y^2+8\,x\,y+8\,x+5\,y^2+20\,y+20)^{1/3}$$

Exemplul 2.20 - Comanda de distribuire a operatiilor (*map*)

Comanda ***map*** aplica o operatie fiecarui element al unei structuri de date sau expresii. Este foarte utila in lucrul cu liste, multimi si matrice.

```
> map(f,[1,2,3]);
```

$$[\mathrm{f}(1),\,\mathrm{f}(2),\,\mathrm{f}(3)]$$

```
> lista:=[0,Pi/2,Pi];
```

$$lista := [0,\,\frac{1}{2}\,\pi,\,\pi]$$

```
> map(cos,lista);
```

$$[1,\,0,\,-1]$$

In comanda ***map*** putem avea mai multi parametri. Maple V ii transmite automat expresiei initiale.

```
> map(f,[1,2,3],a,b);
```

$$[\mathrm{f}(1,\,a,\,b),\,\mathrm{f}(2,\,a,\,b),\,\mathrm{f}(3,\,a,\,b)]$$

Exemplu de derivare a elementelor unei liste cu ajutorul comenzii ***map***:

```
> lista:=[tan(x),x^3,x*exp(x)];
```

$$lista := [\tan(x),\,x^3,\,x\,e^x]$$

```
> map(Diff,lista,x);
```

$$[\frac{\partial}{\partial x}\tan(x),\,\frac{\partial}{\partial x}x^3,\,\frac{\partial}{\partial x}x\,e^x]$$

```
> map(value,");
```

$$[1+\tan(x)^2,\,3\,x^2,\,e^x+x\,e^x]$$

Cu ajutorul comenzii ***map*** se pot construi operatii care sa fie aplicate asupra elementelor unei liste.

```
> map(x->x^4-x^3,[-3,-2,-1,0,1,2,3]);
```

$$[108, 24, 2, 0, 0, 8, 54]$$

Exemplul 2.21 - Dificultati in manipularea expresiilor

Cum poate fi inlocuit un produs de doua necunoscute?

```
> expresie:=(x*y)^3*z^2;
```

$$expresie := x^3\, y^3\, z^2$$

```
> subs(x*z=2,expresie);
```

$$x^3\, y^3\, z^2$$

In acest caz comanda ***subs*** nu a reusit inlocuirea, de aceea vom utiliza comanda ***simplify*** pentru a obtine raspunsul corect.

```
> simplify(expresie,{x*z=2});
```

$$4\, y^3\, x$$

De ce rezultatul comenzii simplify nu are intotdeauna cea mai simpla forma?

```
> expresie:=cos(x)*(sec(x)-cos(x));
```

$$expresie := \cos(x)\,(\sec(x) - \cos(x))$$

```
> simplify(expresie);
```

$$1 - \cos(x)^2$$

Specificand formula de simplificare obtinem:

```
> simplify(",{1-cos(x)^2=sin(x)^2});
```

$$\sin(x)^2$$

Problema simplificarii este pe cat de importanta pe atat de complicata, deoarece conceptul formei celei mai simple poate avea semnificatii diferite de la caz la caz.

Cum se poate da factor comun?

Maple V distribuie automat factorul unui produs deoarece o suma este considerata mai simpla, ca forma, decat un produs, lucru care, in general, este adevarat.

```
> y^10-y;
```

$$y^{10} - y$$

```
> factor(y^10-y);
```

$$y\,(y-1)\,(y^2+y+1)\,(y^6+y^3+1)$$

Daca introducem:

```
> 5*(a+b);
```

$$5\,a+5\,b$$

se observa ca Maple V distribuie automat constanta in interiorul expresiei. Pentru a putea trata aceasta problema putem incerca o substitutie:

```
> expresie:=5*(a+b);
```

$$expresie := 5\,a+5\,b$$

```
> subs(5=cinci,expresie);
```

$$a\,cinci+b\,cinci$$

```
> factor(");
```

$$cinci\,(a+b)$$

Exemplul 2.22 - Utilizarea bibliotecilor de comenzi

Cand se lanseaza in executie programul Maple V, este incarcat un set de comenzi numit *kernel* (nucleul, partea cea mai importanta). *Nucleul* contine comenzile ce stabilesc un minim contact intre utilizator si Maple V. Este practic un interpretor care "traduce" interactiv comenzile introduse de utilizator in instructiuni de cod pe care procesorul calculatorului le poate "intelege". *Nucleul* contine comenzi pentru calcule cu numere intregi si rationale si calcule simple cu polinoame.

Restul comenzilor care intregesc "cunostintele" matematice ale programului se afla in biblioteca acestuia (*Maple library*). Biblioteca programului Maple V este impartita in:

- biblioteca de comenzi principale (*main* library),
- biblioteca de comenzi diverse (*miscellaneous* library),
- pachetele de comenzi (*packages*).

Biblioteca de comenzi principale (*main* library) contine comenzile care sunt utilizate cel mai frecvent (altele decat cele din setul *kernel*). O comanda din aceasta biblioteca este incarcata automat, in momentul in care utilizatorul o apeleaza in zona activa de lucru.

Biblioteca de comenzi diverse (*miscellaneous* library) contine comenzile matematice mai putin folosite. Aceste comenzi trebuie incarcate in mod explicit prin folosirea comenzii ***readlib***(*com*), unde *com* este numele comenzii care se doreste a fi incarcata din biblioteca.

Restul comenzilor Maple V se afla in pachetele de comenzi. Fiecare din aceste pachete contine cate un grup de comenzi specializat pe un anumit tip de operatii (tabelul 2.4). In continuare sunt prezentate trei moduri in care poate fi incarcata o comanda dintr-un pachet de comenzi:

1. Prin folosirea numelui pachetului si al comenzii respective:

$$pachet[com](argument).$$

De exemplu:

```
>  plots[animate](8*sin(x+t)^2,x=-Pi..Pi,t=-5..5 );
```

In acest caz, ***plots*** este pachetul de comenzi pentru reprezentari grafice, ***animate*** este comanda, iar (8****sin***(...),...) este *argumentul.* Dupa cum se poate observa comanda ***sin***(..) nu a necesitat o incarcare prealalbila utilizarii, fiind o comanda principala.

2. Prin incarcarea tuturor comenzilor din pachetul ce contine comanda dorita:

$$\boldsymbol{with}(pachet).$$

De exemplu:

```
>  with(geometry):
```

In acest moment toate comenzile pachetului ***plots*** sunt incarcate si oricare dintre ele poate fi folosita prin simpla apelare: *com*(*argument*).

```
>  point(A,0,0),point(B,1,1),point(C,1,0):
>  triangle(T,[A,B,C]);
```

$$T$$

3. Prin incarcarea comenzii dorite din pachetul ce o contine:

$$\boldsymbol{with}(pachet, com).$$

De exemplu:

```
>  with(student,Product);
```

$$[Product]$$

```
>  Product(x^2,x=1..10);
```

$$\prod_{x=1}^{10} x^2$$

2.6 Pachetele Maple V

Tabelul 2.4

combinat functii combinatorii, comenzi pentru calcule de permutari si combinari de liste si zecimale
combstruct comenzi pentru generarea si numararea structurilor combinatorii
DEtools comenzi pentru manipularea si reprezentarea sistemelor de ecuatii diferentiale
difforms comenzi pentru lucrul cu forme diferentiale, probleme de geometrie diferentiala
Domains comenzi pentru crearea de domenii de calcul, calcule cu polinoame, matrice, campuri finite, inele de polinoame, inele de matrice
finance comenzi pentru matematica financiara
GF comenzi pentru lucrul cu campuri Galois
GaussInt comenzi pentru lucrul cu numere complexe (de forma: $a + bI$, cu a si b intregi), gasirea celui mai mare divizor comun, factorizare si teste de numar prim
genfunc comenzi pentru generarea rationala a functiilor
geometry comenzi pentru definirea si manipularea de puncte, linii, triunghiuri, cercuri in spatiul Euclidian bidimensional
grobner comenzi pentru calcule de aducere la forma de baza Grobner
group comenzi pentru lucrul cu grupuri de permutari si grupuri finite
inttrans comenzi pentru lucrul cu transformari integrale si inversele lor
liesymm comenzi pentru caracterizarea simetriilor (Lie) in sistemele de ecuatii cu derivate partiale
linalg comenzi pentru operatii in algebra lineara, cu matrice si vectori
logic comenzi pentru constructia si lucrul cu expresii si functii de tip Boolean
LREtools comenzi pentru manipularea, reprezentarea grafica si rezolvarea ecuatiilor lineare recurente
networks comenzi pentru constructia, desenarea si analiza retelelor combinatorii, manipularea grafurilor orientate
numapprox comenzi pentru calculul aproximarilor polinomiale ale functiilor pe intervale date
numtheory comenzi pentru teoria clasica a numerelor, convergente de siruri numerice
orthopoly comenzi pentru generarea de polinoame ortogonale
padic comenzi pentru calculul aproximarilor ***p**-adice*
plots comenzi pentru diferite tipuri de reprezentari grafice speciale
plottools comenzi pentru generarea si manipularea obiectelor grafice

powseries comenzi pentru crearea si manipularea seriilor de puteri
process comenzi care permit scrierea sub UNIX de programe Maple *multi-proces*
simplex comenzi pentru optimizare lineara prin folosirea algoritmului *simplex*
stats comenzi pentru manipularea datelor statistice, calcule de medie, erori, coeficeinti de corelare, variatii
student comenzi pentru invatarea pas cu pas a analizei matematice, integrare prin parti, regula lui Simpson, gasirea punctelor de extrem pentru o functie
sumtools comenzi pentru calculul sumelor definite si nedefinite (algoritmul lui Gosper si algoritmul lui Zeilberger)
tensor comenzi pentru operatii cu tensori si aplicatiile lor in *Toria relativitatii*
totorder comenzi pentru teste de ordine intre elementele unor multimi ordonate

2.7 Exercitii propuse

1. Cate numere sunt cuprinse intre 1999 si 2100?
2. Calculati numarul π cu 10 cifre semnificative;
3. Calculati partea imaginara a numarului $\frac{2+I}{5-I}$;
4. Exprimati in grade arcul al carui sinus este $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
5. Definiti si reprezentati grafic functia $\mathrm{f}(x) = 20\,x^3 - 3$;
6. Considerati doi vectori bidimensionali, calculati suma lor, produsul lor scalar si cel vectorial si produsul lor cu un scalar. Exemplu numeric: $a = [1,\ 2,\ 7]$, $b = [2,\ 0,\ -3]$.
7. Considerati doua multimi, calculati reuniunea, intersectia si diferenta lor. Exemplu: $A = \{a,\ b,\ a\}$, $B = \{c,\ b,\ d\}$;
8. Evaluati expresia $A\,b + c$, unde A este o matrice de dimensiune $2{\times}2$, iar b si c sunt vectori bidimensionali. Particularizati pentru o aplicatie numerica.
9. Simplificati expresia rationala: $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$;
10. Calculati $\sin(x)^2$, $\cos(x)^2$, $\sin(2\,x)$, $\cos(2\,x)$.
11. Determinati cate cifre are numarul 12! si realizati decompunerea lui in factori primi;
12. Evaluati e^3 cu 20 de zecimale;
13. Scrieti in cod binar numarul 123456789;
14. Sa se dezvolte polinomul: $(x+y)^{10}$;
15. Sa se descompuna in factori: $a^3 + a^2\,b - a\,b^2 - b^3$;
16. Sa se deduca formula termenului general pentru $\sum_{k=1}^{n} k^5$;
17. Sa se dezvolte in serie Taylor functia: $\sin(x) + \cos(x)$;
18. Sa se reprezinte grafic functia: $\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

19. Definiti o matrice de [3x3] elemente si determinati suma tuturor elementelor;

20. Definiti o multime de numere reale si folosind comanda ***map*** afisati valorile functiei de la ex. 8 pentru toate elementele multimii;

21. Simplificati expresia: $\sin(x)^2 + \frac{1+\cos(2\,x)}{2} - 2$;

22. Sa se factorizeze polinomul: $(a^2\,b^2 + 1)^2 - (a^2 - b^2)^2$;

23. Sa se scrie functia: $\sin(5\,x) + \cos(3\,x)$ sub forma exponentiala;

24. Sa se simplifice fractiile:

a) $\frac{a\,(x^2-1)-x\,(a^2-1)}{a\,(x-1)^2-x\,(a-1)^2}$,

b) $\frac{x^3\,y^3-x^5\,y^3}{x^3\,y^3\,(1-x\,y)^2-x^3\,y^3\,(x-y)^2}$.

3 Rezolvarea ecuatiilor

Principalul obiectiv al acestui capitol este prezentarea modului in care Maple V pemite rezolvarea ecuatiilor si a sistemelor de ecuatii. Pentru inceput este prezentat cazul ecuatiilor si sistemelor algebrice liniare si neliniare, care admit solutie compacta ("analitica"). Rezolvarea numerica a ecuatiilor si sistemelor transcedente face obiectul celui de al doilea paragraf. Manipularea polinoamelor si determinarea radacinilor acestora face obiectul unui paragraf special. In continuare sunt prezentate cateva operatii specifice analizei matematice, cum sunt determinarea limitelor de functii, dezvoltarea in serie, derivarea si integrarea functiilor, operatii esentiale pentru ecuatiile diferentiale, a caror rezolvare este prezentata in paragraful urmator. Ultima parte a capitolului este rezervata prezentarii a doua pachete de comenzi: ***student*** si ***linalg*** ce permit aprofundarea cunostintelor capatate in rezolvarea ecuatiilor.

3.1 Comanda de rezolvare a ecuatiilor (*solve*)

Exemplul 3.1 - Rezolvarea ecuatiilor algebrice

Se considera cazul general al ecuatiei algebrice de gradul doi. Cele doua solutii posibile ale acestei ecuatii sunt obtinute folosind comanda ***solve.***

```
> solve({a*x^2+b*x+c=0},{x});
```

$$\{x = \frac{1}{2}\,\frac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{a}\},\ \{x = \frac{1}{2}\,\frac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{a}\}$$

In mod similar se procedeaza si in cazul ecuatiilor de grad superior:

```
> solve({3*x^3+45*x},{x});
```

$$\{x = 0\},\ \{x = I\,\sqrt{15}\},\ \{x = -I\,\sqrt{15}\}$$

Exemplul 3.2 - Rezolvarea unui sistem de ecuatii

Comanda ***solve*** poate fi utilizata si la rezolvarea sistemelor de ecuatii liniare de orice dimensiune.

```
> solve({2*x+3*y=0,4*y+3*x=7},{x,y});
```

$$\{y = -14,\ x = 21\}$$

Atribuim urmatorului sistem de ecuatii neliniare numele *ecuatii*.

```
> ecuatii:={2*x+5*y=3,x+2/y=1};
```

$$ecuatii := \{2\,x + 5\,y = 3,\ x + \frac{2}{y} = 1\}$$

Constatam ca el are doua solutii:

```
> solutie:=solve(ecuatii,{x,y});
```

$$solutie := \{x = \frac{7}{2},\ y = \frac{-4}{5}\},\ \{y = 1,\ x = -1\}$$

,

care pot fi extrase prin:

```
> solutie[1];
```

$$\{x = \frac{7}{2},\ y = \frac{-4}{5}\}$$

```
> solutie[2];
```

$$\{y = 1,\ x = -1\}$$

O alta metoda de a specifica solutia cautata este de a folosi in comanda ***solve*** conditii de tip inegalitate.

```
> solve({x+y=2,2*x+4*y=2,x>=3,y<0},{x,y});
```

$$\{y = -1,\ x = 3\}$$

Sa consideram acum un sistem liniar cu cinci ecuatii:

```
> ec1:=x+2*y+2*z+3*t+4*u=0;
```

$$ec1 := x + 2\,y + 2\,z + 3\,t + 4\,u = 0$$

```
> ec2:=x+2*y-3*z+4*t+5*u=10;
```

$$ec2 := x + 2\,y - 3\,z + 4\,t + 5\,u = 10$$

```
> ec3:=2*x+3*y+4*z-5*t+6*u=20;
```

$$ec3 := 2\,x + 3\,y + 4\,z - 5\,t + 6\,u = 20$$

```
> ec4:=3*x-4*y+5*z+6*t-7*u=30;
```

$$ec4 := 3\,x - 4\,y + 5\,z + 6\,t - 7\,u = 30$$

```
> ec5:=4*x+5*y+6*z-7*t+8*u=40;
```

$$ec5 := 4\,x + 5\,y + 6\,z - 7\,t + 8\,u = 40$$

Solutia sistemului alcatuita din cele cinci variabile considerate necunoscute se obtine cu comanda:

```
> s1:=solve({ec1,ec2,ec3,ec4,ec5},{x,y,z,t,u });
```

$$s1 := \{t = \frac{-270}{167},\ u = \frac{140}{167},\ y = \frac{-650}{167},\ z = \frac{-360}{167},\ x = \frac{2270}{167}\}$$

Sistemul se poate rezolva in functie de un numar mai redus de necunoscute.

```
> s2:=solve({ec1,ec2,ec3},{x,y,z});
```

$$s2 := \{y = -11\,t - 2\,u - 20,\ x = \frac{93}{5}\,t - \frac{2}{5}\,u + 44,\ z = \frac{1}{5}\,t + \frac{1}{5}\,u - 2\}$$

Solutiile parametrizate astfel obtinute pot fi evaluate prin particularizarea parametrilor.

```
> subs({u=1,t=1},s2);
```

$$\{y = -33,\ x = \frac{311}{5},\ z = \frac{-8}{5}\}$$

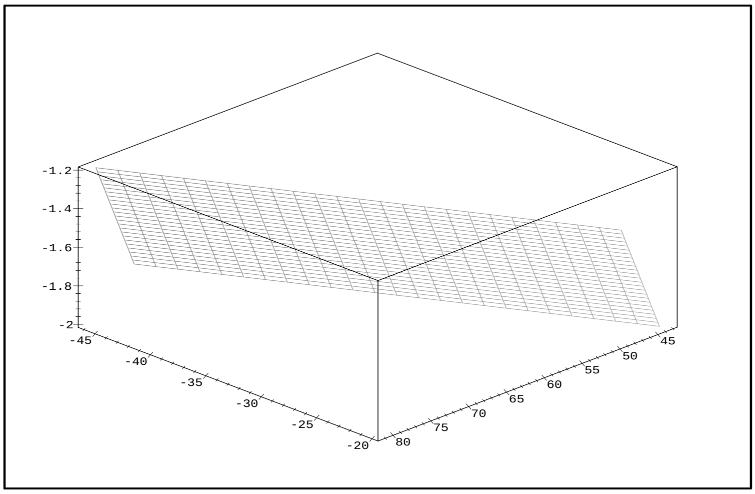
Ordinea in care sunt returnate solutiile este aleatoare. Pentru aranjarea lor intr-o ordine dorita se foloseste comanda:

```
> subs(s2,[x,y,z]);
```

$$[\frac{93}{5}\,t - \frac{2}{5}\,u + 44,\ -11\,t - 2\,u - 20,\ \frac{1}{5}\,t + \frac{1}{5}\,u - 2]$$

Aceasta facilitate este utila cand se doreste vizualizarea solutiei.

```
> with(plots):
> plot3d(",u=0..2,t=0..2,axes=BOXED);
```



Cu ajutorul comenzii ***subs*** se poate selecta rapid expresia unei variabile solutie.

```
> subs(s2,x);
```

$$\frac{93}{5}\,t - \frac{2}{5}\,u + 44$$

Acesta este o expresie a lui x si nu o functie, dupa cum rezulta din comanda:

```
> x(0,1);
```

$$x(1, 1)$$

Cu ajutorul comenzii ***unapply*** o expresie se trasforma in functie. Pentru aceasta este necesar sa se specifice variabilele independente:

```
> f:=unapply(x+y^3+2,x,y);
```

$$f := (x, y) \rightarrow x + y^3 + 2$$

```
> f(a,b);
```

$$a + b^3 + 2$$

Pentru a trasforma expresia lui x intr-o functie de u si t trebuie intai obtinuta expresia lui x:

```
> subs(s2,x);
```

$$\frac{93}{5}\,t - \frac{2}{5}\,u + 44$$

Apoi se foloseste ***unapply*** pentru a transforma aceasta expresie intr-o functie de u si de t:

```
> x:=unapply(",u,t);
```

$$x := (u, t) \rightarrow \frac{93}{5}\,t - \frac{2}{5}\,u + 44$$

```
> x(1,1);
```

$$\frac{311}{5}$$

```
> subs(s2,y);
```

$$-11\,t - 2\,u - 20$$

```
> y:=unapply(",u,t);
```

$$y := (u, t) \rightarrow -11\,t - 2\,u - 20$$

```
> y(1,1);
```

$$-33$$

```
> subs(s2,z);
```

$$\frac{1}{5}\,t + \frac{1}{5}\,u - 2$$

```
> z:=unapply(",u,t);
```

$$z := (u,\, t) \rightarrow \frac{1}{5}\, t + \frac{1}{5}\, u - 2$$

```
> z(1,1);
```

$$\frac{-8}{5}$$

Exemplul 3.3 - Utilizarea comenzii *assign*

Comanda ***assign*** aloca valori variabilelor. In loc sa se defineasca x, y si z ca functii, acestea se pot defini ca simple expresii.

In cazul sistemului nostru cu cinci ecuatii, alocarea se poate face cu comanda:

```
> assign(s2);
> x,y,z;
```

$$\frac{93}{5}\, t - \frac{2}{5}\, u + 44,\ -11\, t - 2\, u - 20,\ \frac{1}{5}\, t + \frac{1}{5}\, u - 2$$

Ea se foloseste atunci cand expresiile nu se pot transforma in functii, acestea putand fi definite.

```
> s3:=dsolve({diff(g(r),r)=2*r+2,g(0)=0},{g( r)});
```

$$s3 := \mathrm{g}(r) = r^2 + 2\, r$$

```
> assign(s3);
> g(r);
```

$$r^2 + 2\, r$$

In ciuda aparentelor *g(r)* este doar expresia $r^2 + 2\,r$ si nu o functie. Daca se apeleaza g utilizand un alt argument decat r, rezultatul este nedeterminat.

```
> g(1);
```

$$\mathrm{g}(1)$$

Acest lucru are loc deoarece functia ***assign*** atribuie o expresie lui *g(r)*:

```
> g(r):=r^2+2*r;
```

$$\mathrm{g}(r) := r^2 + 2\, r$$

iar acesta expresie poate fi apelata numai pentru r.

Folosind urmatoarea constructie g devine functie iar variabila sa independenta r are un nume formal, putand fi ulterior evaluata si pentru variabile cu alt nume, ca de exemplu *g(y)*, *g(z)* sau *g(1)*.

```
> g:=r->r^2+2*r;
```

$$g := r \to r^2 + 2\,r$$

In anumite situatii Maple V intoarce solutiile in termenii functiei *RootOf*.

```
> solve({p^5-3*p+1=0},{p});
```

$$\{p = \mathrm{RootOf}(\_Z^5 - 3\,\_Z + 1)\}$$

RootOf (*expr*) este un loc de stocare pentru toate radacinile polinomului *expr*. Acest concept poate fi folositor daca se lucreaza in algebra din alt spatiu decat cel complex. Pentru a explicita radacinile complexe se foloseste comanda ***allvalues***.

```
> allvalues(");
```

$$\{p = -1.388791984\},\ \{p = -.08029510012 - 1.328355110\,I\},$$
$$\{p = -.08029510012 + 1.328355110\,I\},\ \{p = .3347341419\},\ \{p = 1.214648043\}$$

$$\{x = -1.423605849\},\ \{x = -.2467292569 - 1.320816347\,I\},$$
$$\{x = -.2467292569 + 1.320816347\,I\},\ \{x = .9585321812 - .4984277790\,I\},$$
$$\{x = .9585321812 + .4984277790\,I\}$$

3.2 Rezolvarea numerica

Exemplul 3.4 - Utilizarea comenzii *fsolve*

Comanda ***fsolve*** este echivalentul numeric al comenzii ***solve***. Ea cauta solutiile reale aproximative pentru ecuatiile obisnuite, dar aplicata la ecuatiile polinomiale gaseste toate radacinile reale ale polinomului.

```
> pol:=t^4-6*t^3-2*t^2+8*t+5;
```

$$pol := t^4 - 6\,t^3 - 2\,t^2 + 8\,t + 5$$

```
> fsolve({pol},{t});
```

$$\{t = 1.384192081\},\ \{t = 6.090583885\}$$

Utilizand parametrul *maxsols* se poate gasi numai un anumit numar de radacini ale unui polinom:

```
> fsolve({pol},{t},maxsols=1);
```

$$\{t = 1.384192081\}$$

Folosind optiunea *complex* se obtin si radacinile complexe.

```
> fsolve({pol},{t},complex);
```

$$\{t = -.7373879828 - .2221281706\, I\},\ \{t = -.7373879828 + .2221281706\, I\},$$
$$\{t = 1.384192081\},\ \{t = 6.090583885\}$$

Se poate specifica si intervalul de valori in care sa fie cuprinsa radacina ecuatiei.

```
> fsolve({cos(x)=0},{x},Pi..2*Pi);
```

$$\{x = 4.712388980\}$$

In unele cazuri, ***fsolve*** poate sa nu gaseasca o radacina chiar daca aceasta exista. Pentru a mari acuratetea gasirii solutilor se recomanda marirea numarului de cifre.

```
> Digits:=20;
```

$$Digits := 20$$

```
> fsolve({cos(t)=0},{t},Pi..2*Pi);
```

$$\{t = 4.7123889803846898577\}$$

Solve nu poate rezolva orice problema. Abordarea programului Maple V este algoritmica, si nu are abilitatea sa foloseasca "trucuri" care se folosesc uneori in rezolvarea problemelor. Matematic polinoamele de gradul al cincilea sau mai mari nu au o solutie generala, cu toate acestea Maple V incearca rezolvarea lor.

Rezolvarea ecuatiilor trigonometrice poate fi de asemenea dificila.

```
> solve({sin(t)},{t});
```

$$\{t = 0\}$$

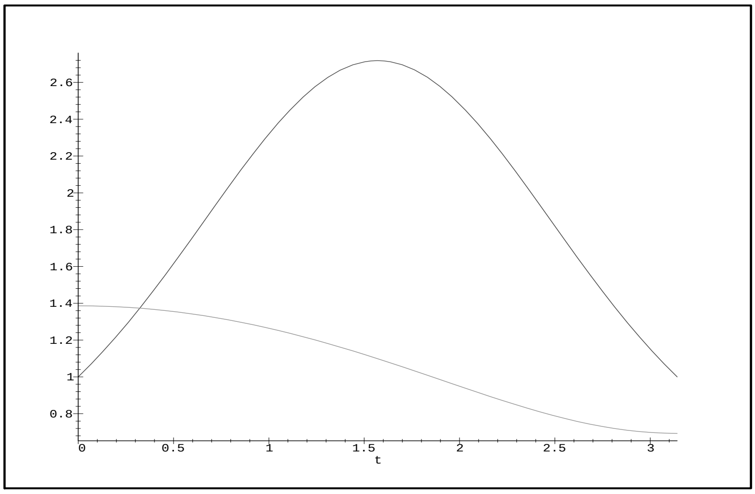
Maple V returneaza numai o solutie dintr-o infinitate a lor, dar cu ajutorul comenzii ***fsolve*** se poate specifica intervalul de cautare a solutiei. Astfel se poate obtine un control mai mare asupra solutiilor.

```
> fsolve({sin(t)},{t},3..4);
```

$$\{t = 3.1415926535897932385\}$$

Daca Maple V nu poate gasi o solutie, atunci nu returneaza nimic. Aceasta nu inseamna ca nu exista o solutie. In urmatorul exemplu, exista cel putin o solutie, dar Maple V nu poate sa o gaseasca.

```
> solve({exp(sin(t))=ln(1+cos(t))},{t});
> plot({exp(sin(t)),ln(3+cos(t))},t=0..Pi);
```



Aceste tipuri de probleme sunt comune in toate sistemele simbolice de rezolvare, si reflecta limitarile naturale ale abordarii algoritmice in rezolvarea ecuatiilor.

Cand se foloseste comanda ***solve*** este recomandat sa se verifice rezultatele. Urmatorul exemplu scoate in evidenta o neintelegere care poate apare in utilizarea programului Maple V fara indepartarea singularitatilor.

```
> expr:=(x+1)^2/(x^2-1);
```

$$expr := \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$$

```
> soln:=solve({expr=0},{x});
```

$$soln := \{x = -1\}$$

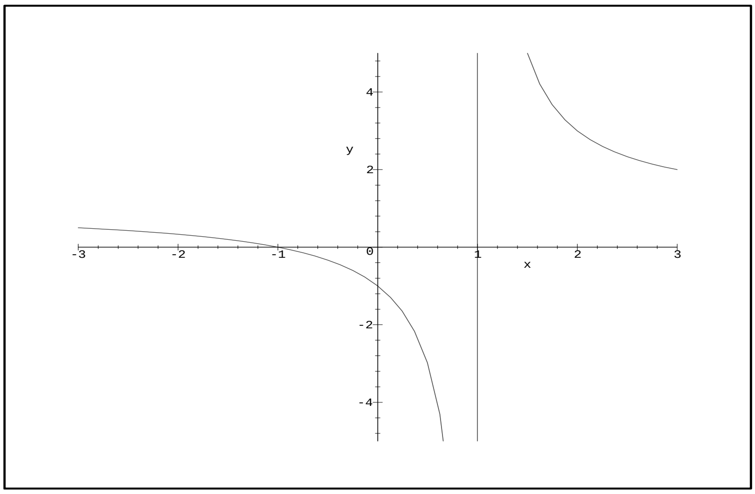
```
> subs(soln,expr);

Error, division by zero

> Limit(expr,x=-1);
```

$$\lim_{x \to (-1)} \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$$

```
> value(");
```

$$0$$

```
> plot(expr,x=-3..3,y=-5..5);
```



3.3 Polinoame

Exemplul 3.5 - Operatii cu polinoame

Un polinom in Maple V este o expresie de tip suma care contine variabile ridicate la diferite puteri. Fiecare termen din polinom contine un produs de variabile. Coeficientii monoamelor pot fi numere reale, numere rationale sau numere complexe.

```
> x^2+1;
```

$$x^2 + 1$$

```
> x+y+z;
```

$$x + y + z$$

```
> 2/3*x^3-sqrt(5)*x-5/6;
```

$$\frac{2}{3}\,x^3 - \sqrt{5}\,x - \frac{5}{6}$$

```
> (2-3*I)*x+a*x^4+7;
```

$$(2 - 3\,I)\,x + a\,x^4 + 7$$

Comenzile folosite in manipularea polinoamelor sunt prezentate in Tabelul 3.1.

Comanda ***sort*** aranjeaza polinomul cu termenii in ordine descrescatoare a gradelor.

```
> sort_poly:=x-x^3+x^5+2+x^8;
```

$$sort\_poly := x - x^3 + x^5 + 2 + x^8$$

```
> sort(sort_poly);
```

$$x^8 + x^5 - x^3 + x + 2$$

```
> sort_poly;
```

$$x^8 + x^5 - x^3 + x + 2$$

Maple V sorteaza polinomul dupa gradul total al necunoscutelor

```
> pol:=y^2+x^3*y^4+x^5;
```

$$pol := y^2 + x^3 y^4 + x^5$$

```
> sort(pol,[x,y]);
```

$$x^3 y^4 + x^5 + y^2$$

si in ordine alfabetica.

```
> sort(pol,[x,y],'plex');
```

$$x^5 + x^3 y^4 + y^2$$

Comanda ***collect*** permite gruparea termenilor ce contin acelasi grad al unei variabile.

```
> pol:=x*y+z*x*y+y*x^2-z*y*x^2+x+z*x;
```

$$pol := x\,y + z\,x\,y + y\,x^2 - z\,y\,x^2 + x + z\,x$$

```
> collect(pol,x);
```

$$(y - z\,y)\,x^2 + (y + z\,y + 1 + z)\,x$$

Cu ajutorul comenzilor ***rem*** si ***quo*** se poate afla restul si catul impartirii unui polinom la alt polinom.

```
> r:=rem(x^2+3*x+2,x^2+5*x+1,x);
```

$$r := 1 - 2\,x$$

```
> c:=quo(x^2+3*x+2,x^2+5*x+1,x);
```

$$c := 1$$

```
> collect((x^2+5*x+1)*q+r,x);
```

$$x^2 + 3\,x + 2$$

Cu ajtorul comezii ***divide*** se poate afla daca un polinom este divizibil cu alt polinom.

```
> divide(x^4-y^4,x-y);
```

$$true$$

```
> rem(x^4-y^4,x-y,x);
```

$$0$$

Comanda ***coeff*** permite extragerea coeficientului unui termen iar ***degree*** stabileste gradul polinomului.

```
> pol:=3*z^3-2*z^2+2*z-3*z+1;
```

$$pol := 3\,z^3 - 2\,z^2 - z + 1$$

```
> coeff(pol,z^2);
```

$$-2$$

```
> degree(pol);
```

$$3$$

Tabelul 3.1 - Comenzi folositoare in operatiile cu polinoame

sort sorteaza termenii polinomului
collect gruparea termenilor dupa o variabila
rem restul impartirii a doua polinoame
quo catul impartirii a doua polinoame
divide testeaza divizibilitatea polinoamelor
roots radacinile unui polinom
gcd cel mai mare divizor comun
lcm cel mai mic multiplu comun
coeff extrage coeficientii termenilor unui polinom
lcoeff extrage coeficientul termenului de grad cel mai mare
tcoeff extrage termenul liber din polinom
coeffs extrage coeficintii tuturor termenilor din polinom
degree gradul unui polinom
ldegree gradul cel mai mic al termenilor unui polinom

```
> coeffs(pol);
```

$$1,\ -1,\ 3,\ -2$$

Comenzile ***factor*** si ***expand*** factorizeaza si respectiv dezvolta un polinom.

```
> pol1:=(x^3-y^3+6*x^2*y+3*x*y^2)^3+(y^3-x^3+6* y^2*x+3*y*x^2)^3;
```

$$pol1 := (x^3 - y^3 + 6\,y\,x^2 + 3\,y^2\,x)^3 + (y^3 - x^3 + 6\,y^2\,x + 3\,y\,x^2)^3$$

```
> factor(pol1);
```

$$27\,x\,y\,(y + x)\,(x^2 + x\,y + y^2)^3$$

```
> pol2:=(2*x+1);
```

$$pol2 := 2\,x + 1$$

```
> pol3:=expand(pol2^8);
```

$$pol3 := 256\,x^8 + 1024\,x^7 + 1792\,x^6 + 1792\,x^5 + 1120\,x^4 + 448\,x^3 + 112\,x^2 + 16\,x + 1$$

```
> factor(pol3);
```

$$(2\,x + 1)^8$$

```
> solve({pol3=0},{x});
```

$$\{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\},\ \{x = \frac{-1}{2}\}$$

3.4 Operatii de analiza matematica

In multe ecuatii si siteme de ecuatii, cum sunt cele diferentiale, apar operatii specifice analizei matematice. Maple V detine un set de comenzi specifice acestor operatii.

Exemplul 3.6 - Limita unei functii

Pentru calculul limitei unei functii se foloseste comanda ***Limit***:

```
> f:=x->(x^4-2*x^3+1)/(x^7+3*x^4-7*x^2+x+2);
```

$$f := x \to \frac{x^4 - 2\,x^3 + 1}{x^7 + 3\,x^4 - 7\,x^2 + x + 2}$$

```
> Limit(f(x),x=1);
```

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2\,x^3 + 1}{x^7 + 3\,x^4 - 7\,x^2 + x + 2}$$

```
> value(");
```

$$\frac{-1}{3}$$

Se pot calcula si limitele la stanga sau la dreapta.

```
> Limit(tan(x),x=Pi/2,right);
```

$$\lim_{x \to (1/2\,\pi)+} \tan(x)$$

```
> value(");
```

$$-\infty$$

Exemplul 3.7 - Dezvoltarea in serie Taylor

Cu ajutorul comenzii ***series*** se determina seria Taylor a unei functii.

```
> f:=x->cos(4*x)*sin(x);
```

$$f := x \to \cos(4\,x)\sin(x)$$

```
> fs1:=series(f(x),x=0);
```

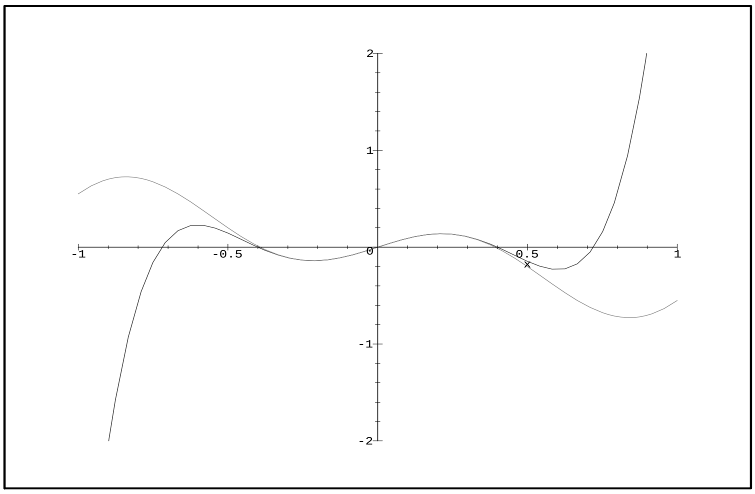
$$fs1 := x - \frac{49}{6}\,x^3 + \frac{1441}{120}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

Maple V reda si ordinul erorilor de trunchiere si utilizand comanda ***convert*** seria poate fi transformata prin trunchiere intr-un polinom obisnuit:

```
> p:=convert(fs1,polynom);
```

$$p := x - \frac{49}{6}\,x^3 + \frac{1441}{120}\,x^5$$

```
> plot({f(x),p},x=-1..1,-2..2);
```



Cu cat ordinul de trunchiere este mai mare cu atat aproximarea este mai buna.

```
> Order:=10;
```

$$Order := 10$$

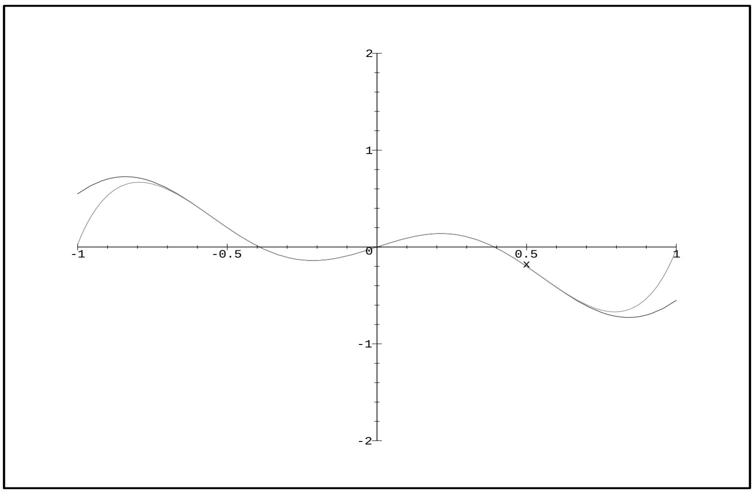
```
> fs1:=series(f(x),x=0);
```

$$fs1 := x - \frac{49}{6}\,x^3 + \frac{1441}{120}\,x^5 - \frac{37969}{5040}\,x^7 + \frac{138103}{51840}\,x^9 + \mathrm{O}(x^{10})$$

```
> p:=convert(fs1,polynom);
```

$$p := x - \frac{49}{6}\,x^3 + \frac{1441}{120}\,x^5 - \frac{37969}{5040}\,x^7 + \frac{138103}{51840}\,x^9$$

```
> plot({f(x),p},x=-1..1,-2..2);
```



Exemplul 3.8 - Derivarea si integrarea functiilor

Pentru calculul derivatelor si integralelor se utilizeaza comenzile ***Diff*** si respectiv ***Int*** ca in exemplele:

```
> f:=x->cos(a*x)+b*x^2;
```

$$f := x \to \cos(a\,x) + b\,x^2$$

```
> Diff(f(x),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(\cos(a\,x) + b\,x^2)$$

```
> df:=value(");
```

$$df := -\sin(a\,x)\,a + 2\,b\,x$$

```
> Int(df,x);
```

$$\int -\sin(a\,x)\,a + 2\,b\,x\,dx$$

```
> value(");
```

$$\cos(a\,x) + b\,x^2$$

```
> Int(df,x=1..2);
```

$$\int_1^2 -\sin(a\,x)\,a + 2\,b\,x\,dx$$

```
> value(");
```

$$2\cos(a)^2 - 1 + 3\,b - \cos(a)$$

Atunci cand nu se stie daca variabila este reala sau complexa pot apare probleme.

```
> g:=t->exp(a*t)*ln(t);
```

$$g := t \to e^{(a\,t)}\ln(t)$$

```
> Int(g(t),t=0..infinity);
```

$$\int_0^\infty e^{(a\,t)}\ln(t)\,dt$$

```
> value(");

Definite integration: Can't determine if the integral is convergent.
Need to know the sign of --\TEXTsymbol{>} -a
Will now try indefinite integration and then take limits.
```

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{(a\,t)}\ln(t)}{a} + \frac{\mathrm{Ei}(1,\,-a\,t)}{a} + \frac{\gamma + \ln(-a)}{a}$$

Daca se cunoaste natura parametrului a aceasta informatie se introduce prin comanda ***assume***:

```
> assume(a>0);
> ans:=Int(g(t),t=0..infinity);
```

$$ans := \int_0^\infty e^{(a\tilde{}\,t)}\ln(t)\,dt$$

```
> value(");
```

$$\infty$$

Caracterul *tilda* (˜) idica o anumita proprietate pentru parametrul a. Pentu a putea obtine raspunsul *ans* pentru cazul in care a nu are proprietatea conferita de tilda, se face substituirea lui a˜ cu a:

```
> ans:=subs(a='a',ans);
```

$$ans := \int_0^\infty e^{(a\,t)} \ln(t)\, dt$$

Daca se va folosi varibila a intr-un alt exemplu, Maple V va considera ca a este a˜. Pentru a se evita acest lucru se va utiliza atribuirea:

```
> a:='a';
```

$$a := a$$

3.5 Ecuatii diferentiale

Exemplul 3.9 - Rezolvarea unei ecuatii diferentiale ordinare

Fie ecuatia diferentiala:

```
> ecdif1:={diff(y(t),t,t)+3*diff(y(t),t)+2*y(t )=0};
```

$$ecdif1 := \{(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{y}(t)) + 3\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)) + 2\,\mathrm{y}(t) = 0\}$$

cu conditiile initiale:

```
> ic:={y(0)=0,D(y)(0)=1};
```

$$ic := \{\mathrm{D}(y)(0) = 1,\ \mathrm{y}(0) = 0\}$$

Pentru rezolvarea ecuatiei diferentiale se foloseste comanda ***dsolve***:

```
> soln:=dsolve(ecdif1 union ic,{y(t)});
```

$$soln := \mathrm{y}(t) = \frac{-e^{(-2\,t)}\,e^t + 1}{e^t}$$

Pentru verificarea solutiei obtinute se folosesc comenzile:

```
> y:=unapply(subs(soln,y(t)),t);
```

$$y := t \to \frac{-e^{(-2\,t)}\,e^t + 1}{e^t}$$

```
> ecdif1;
```

$$\{0 = 0\}$$

```
> ic;
```

$$\{1 = 1,\ 0 = 0\}$$

```
> y:='y';
```

$$y := y$$

Exemplul 3.10 - Rezolvarea sistemelor de ecuatii diferentiale

Fie sistemul de doua ecuatii diferentiale.

```
> sist:={diff(y(x),x,x)=z(x),diff(z(x),x,x)=y( x)};
```

$$sist := \{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x) = \mathrm{z}(x),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{z}(x) = \mathrm{y}(x)\}$$

Solutia sa se obtine cu comanda:

```
> soln:=dsolve(sist,{z(x),y(x)});
```

$$soln := \{\mathrm{z}(x) = -\frac{1}{2}\,\_C1\cos(x) + \frac{1}{4}\,\_C1\,e^x + \frac{1}{4}\,\_C1\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,\_C2\sin(x) + \frac{1}{4}\,\_C2\,e^x - \frac{1}{4}\,\_C2\,e^{(-x)} + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^{(-x)} + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^x + \frac{1}{2}\,\_C3\cos(x) + \frac{1}{4}\,\_C4\,e^x + \frac{1}{2}\,\_C4\sin(x) - \frac{1}{4}\,\_C4\,e^{(-x)}, \mathrm{y}(x) = \frac{1}{4}\,\_C1\,e^{(-x)} + \frac{1}{4}\,\_C1\,e^x + \frac{1}{2}\,\_C1\cos(x) + \frac{1}{4}\,\_C2\,e^x + \frac{1}{2}\,\_C2\sin(x) - \frac{1}{4}\,\_C2\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,\_C3\cos(x) + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^x + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,\_C4\sin(x) + \frac{1}{4}\,\_C4\,e^x - \frac{1}{4}\,\_C4\,e^{(-x)}\}$$

```
> y:=unapply(subs(soln,y(x)),x);
```

$$y := x \to \frac{1}{4}\,\_C1\,e^{(-x)} + \frac{1}{4}\,\_C1\,e^x + \frac{1}{2}\,\_C1\cos(x) + \frac{1}{4}\,\_C2\,e^x + \frac{1}{2}\,\_C2\sin(x) - \frac{1}{4}\,\_C2\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,\_C3\cos(x) + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^x + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^{(-x)} - \frac{1}{2}\,\_C4\sin(x) + \frac{1}{4}\,\_C4\,e^x - \frac{1}{4}\,\_C4\,e^{(-x)}$$

```
> y(1);
```

$$\frac{1}{4}\,\_C1\,e^{(-1)} + \frac{1}{4}\,\_C1\,e + \frac{1}{2}\,\_C1\cos(1) + \frac{1}{4}\,\_C2\,e + \frac{1}{2}\,\_C2\sin(1) - \frac{1}{4}\,\_C2\,e^{(-1)} - \frac{1}{2}\,\_C3\cos(1) + \frac{1}{4}\,\_C3\,e + \frac{1}{4}\,\_C3\,e^{(-1)} - \frac{1}{2}\,\_C4\sin(1) + \frac{1}{4}\,\_C4\,e - \frac{1}{4}\,\_C4\,e^{(-1)}$$

```
> y:='y';
```

$$y := y$$

Exemplul 3.11 - Utilizarea pachetului *student*

Pachetul *student* al sistemului Maple V contine un set de 35 comenzi care ajuta la invatarea pas cu pas a analizei matematice.

```
> with(student);
```

[*D*, *Diff*, *Doubleint*, *Int*, *Limit*, *Lineint*, *Product*, *Sum*, *Tripleint*, *changevar*, *combine*, *completesquare*, *distance*, *equate*, *extrema*, *integrand*, *intercept*, *intparts*, *isolate*, *leftbox*, *leftsum*, *makeproc*, *maximize*, *middlebox*, *middlesum*, *midpoint*, *minimize*, *powsubs*, *rightbox*, *rightsum*, *showtangent*, *simpson*, *slope*, *trapezoid*, *value*]

```
> distance ([1,1],[3,4]);
```

$$\sqrt{13}$$

Tangenta la graficul unei functii.

```
> f:=x->-5/6*x^2+3*x;
```

$$f := x \to -\frac{5}{6}\,x^2 + 3\,x$$

```
> (f(x+h)-f(x))/h;
```

$$\frac{-\frac{5}{6}\,(x+h)^2 + 3\,h + \frac{5}{6}\,x^2}{h}$$

```
> Limit(",h=0);
```

$$\lim_{h \to 0} \frac{-\frac{5}{6}\,(x+h)^2 + 3\,h + \frac{5}{6}\,x^2}{h}$$

```
> value(");
```

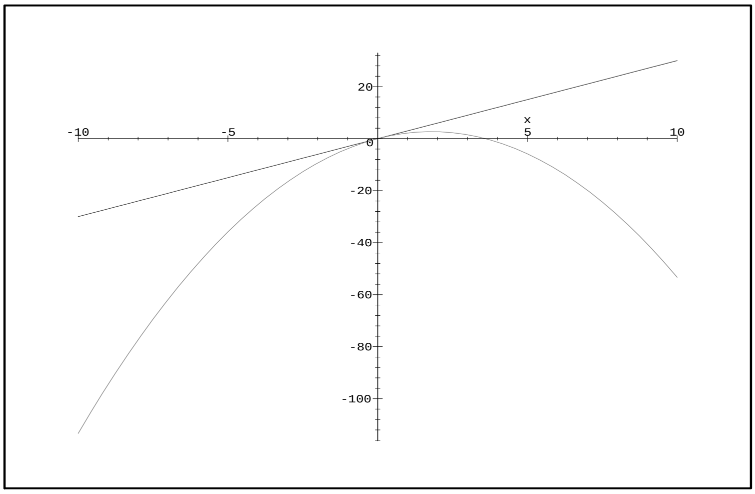
$$-\frac{5}{3}\,x + 3$$

```
> subs(x=0,");
```

$$3$$

Pentru a vedea daca este adevarat se traseaza graficul functiei si tangenta la $x = 0$.

```
> showtangent(f(x),x=0);
```



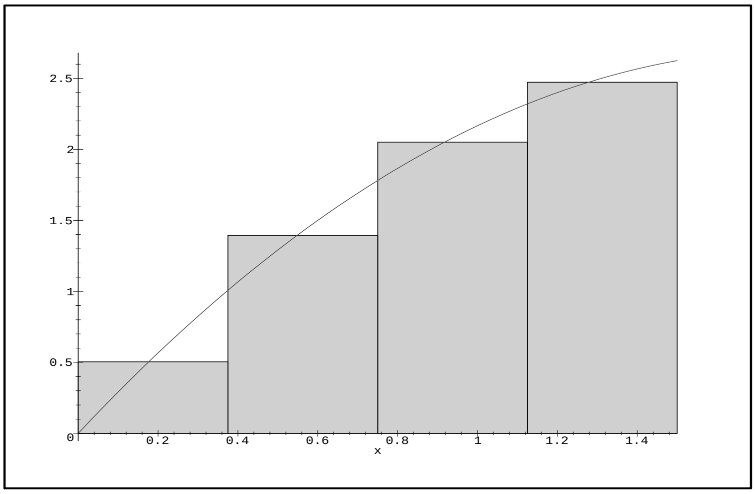
Punctul de intersectie al curbei cu axa x.

```
> intercept(y=f(x),y=0);
```

$$\{x = 0,\ y = 0\},\ \{y = 0,\ x = \frac{18}{5}\}$$

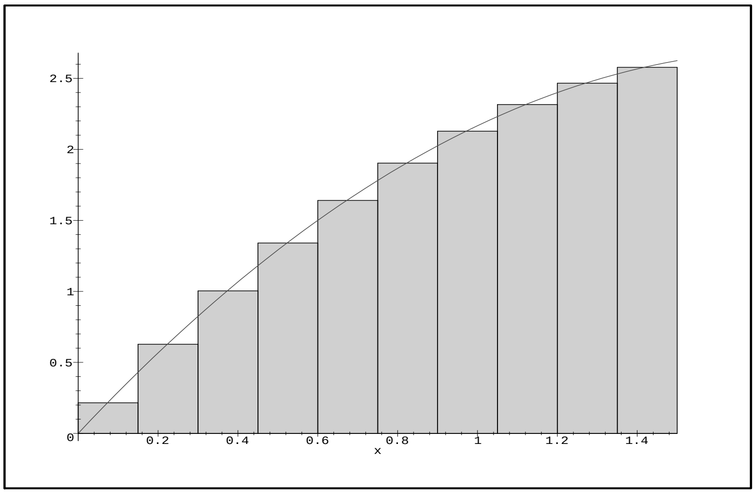
Aflarea ariei suprafetei de sub curba dintre doua puncte.

```
> middlebox(f(x),x=0..3/2);
```



Pentru o aproximare mai buna se mareste numarul de dreptunghiuri.

```
> middlebox(f(x),x=0..3/2,10);
```




```
> middlesum(f(x),x=0..3/2,10);
```

$$\frac{3}{20}\left(\sum_{i=0}^{9}\left(-\frac{5}{6}\left(\frac{3}{20}\,i+\frac{3}{40}\right)^2+\frac{9}{20}\,i+\frac{9}{40}\right)\right)$$

```
> value(");
```

$$\frac{3123}{1280}$$

Pentru a se afla rezultatul real se folosesc n dreptunghiuri.

```
> middlesum(f(x),x=0..3/2,n);
```

$$\frac{3}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{15}{8}\,\frac{(i+\frac{1}{2})^2}{n^2}+\frac{9}{2}\,\frac{i+\frac{1}{2}}{n}\right)}{n}$$

```
> Limit(",n=infinity);
```

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\,\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{15}{8}\,\frac{(i+\frac{1}{2})^2}{n^2}+\frac{9}{2}\,\frac{i+\frac{1}{2}}{n}\right)}{n}$$

```
> value(");
```

$$\frac{39}{16}$$

3.6 Pachetul de algebra liniara

Exemplul 3.12 - Utilizarea pachetului *linalg*

```
> with(linalg);
```

```
Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace
```

[*BlockDiagonal*, *GramSchmidt*, *JordanBlock*, *LUdecomp*, *QRdecomp*, *Wronskian*, *addcol*, *addrow*, *adj*, *adjoint*, *angle*, *augment*, *backsub*, *band*, *basis*, *bezout*, *blockmatrix*, *charmat*, *charpoly*, *cholesky*, *col*, *coldim*, *colspace*, *colspan*, *companion*, *concat*, *cond*, *copyinto*, *crossprod*, *curl*, *definite*, *delcols*, *delrows*, *det*, *diag*, *diverge*, *dotprod*, *eigenvals*, *eigenvalues*, *eigenvectors*, *eigenvects*, *entermatrix*, *equal*, *exponential*, *extend*, *ffgausselim*, *fibonacci*, *forwardsub*, *frobenius*, *gausselim*, *gaussjord*, *geneqns*, *genmatrix*, *grad*, *hadamard*, *hermite*, *hessian*, *hilbert*, *htranspose*, *ihermite*, *indexfunc*, *innerprod*, *intbasis*, *inverse*, *ismith*, *issimilar*, *iszero*, *jacobian*, *jordan*, *kernel*, *laplacian*, *leastsqrs*, *linsolve*, *matadd*, *matrix*, *minor*, *minpoly*, *mulcol*, *mulrow*, *multiply*, *norm*, *normalize*, *nullspace*, *orthog*, *permanent*, *pivot*, *potential*, *randmatrix*, *randvector*, *rank*, *ratform*, *row*, *rowdim*, *rowspace*, *rowspan*, *rref*, *scalarmul*, *singularvals*, *smith*, *stack*, *submatrix*, *subvector*, *sumbasis*, *swapcol*, *swaprow*, *sylvester*, *toeplitz*, *trace*, *transpose*, *vandermonde*, *vecpotent*, *vectdim*, *vector*, *wronskian*]

Determinarea bazei spatiului vectorial determinat de vectorii [0,0,0,1],[0,0,1,1] si [0,1,1,1] si exprimarea vectorului [0,1,3,4] tinand cont de baza.

```
> v1:=vector([0,0,0,1]):
> v2:=vector([0,0,1,1]):
> v3:=vector([0,1,1,1]):
> sp_vect:=stack(v1,v2,v3);
```

$$sp\_vect := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pentru ca vectorii sa fie liniar independenti trebuie ca $c1v1 + c2v2 + \ldots + cnvn = 0$ sa implice $c1 = c2 = \ldots = cn = 0$.

```
> linsolve(transpose(sp_vect),[0,0,0,0]);
```

$$[0, 0, 0]$$

Comanda ***rowspace*** genereaza o baza pentru spatiul vectorial asupra caruia se aplica.

```
> b:=rowspace(sp_vect);
```

$$b := \{[0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0]\}$$

```
> b1:=b[1];b2:=b[2];b3:=b[3];
```

$$b1 := [0, 1, 0, 0]$$

$$b2 := [0, 0, 1, 0]$$

$$b3 := [0, 0, 0, 1]$$

```
> baza:=stack(b1,b2,b3);
```

$$baza := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(transpose(baza),[0,1,3,4]);
```

$$[1, 3, 4]$$

Pentru mai multe informatii asupra acestui pachet puternic de comenzi se recomanda utilizarea sistemului de asistenta *help linalg*.

3.7 Exercitii propuse

1. Sa se rezolve ecuatia de gradul al doilea: $x^2 - 36\,x + 33 = 0$;

2. Sa se rezolve sistemul de ecuatii: $a\,x^2 - b^2\,y + b^5 = 0$, $b\,x^2 - a^2\,y + a^5 = 0$, in x si y;

3. Sa se rezolve urmatorul sistem de ecuatii: $6\,x + 3\,y = 2$, $5\,x + 2\,y + 10\,z = 10$, $10\,x + 12\,z = 6$, sa se reprezinte grafic functia de variabile y,z si sa se calculeze numeric solutia lui x pentru y=2 si z=14;

4. Sa se determine f(x) astfel incat: $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{f}(x) = 8\,x^3 + 6\,x + 3$;

5. Sa se gaseasca radacinile reale ale polinomului: $5\,x^6 + 12\,x^4 - 23\,x^2 + 6$;

6. Sa se gaseasca radacinile complexe ale polinomului: $2\,x^3 + 3\,x^2 - 13\,x + 6$;

7. Sa se aproximeze pe cale grafica solutia ecuatiei: $e^{(2\,x)} = \ln(1 - \sin(x))$;

8. Sa se calculeze limitele:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)^3}{x\sin(2\,x)}$,

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{(2\,x)})}$;

9. Sa se afle catul si restul impartirii: $\frac{a^8+a^4+1}{a^2-a+1}$;

10. Sa se calculeze limita functiei $\mathrm{f}(x) = \frac{\tan(x)-\arctan(x)}{x^2}$ in $x = 0$;

11. Sa se dezvolte in serie Taylor functia $\mathrm{f}(x) = \sin(4\,x)\sin(x^2)$. Sa se converteasca rezultatul obtinut in polinom si sa se reprezinte grafic polinomul obtinut pentru x apartinand intervalului $[-10, 10]$;

12. Sa se calculeze $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{f}(x)$ si $\int \mathrm{f}(x)\,dx$ unde $\mathrm{f}(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$, iar rezultatul sa fie pus sub forma cea mai simpla;

13. Calculati: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\,x)}{\sin(x)^4+3}\,dx$;

14. Sa se rezolve ecuatia: $4\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x}(t))+2\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t))+\mathrm{x}(t) = 0$, stiind ca $\mathrm{x}(0) = 0$ si $(\frac{\partial}{\partial t}\,x)(0) = 1$. Sa se verifice solutia gasita;

15. Sa se rezolve sistemul de ecuatii diferentiale: $\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{f}(x) = x\,\mathrm{g}(x),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{g}(x) = x^2\,\mathrm{f}(x)\}$;

16. Sa se traseze graficul functiei $\mathrm{f}(x) = x\,(1-x)$ si tangenta la grafic in $x = 2$;

17. Fie $\mathrm{f}(x) = -x^3 + 15\,x^2 - 30\,x + 3$. Sa se calculeze aria suprafetei de sub graficul lui $\mathrm{f}(x)$ pe intervalul $[-3.10]$;

18. Sa se determine o baza a spatiului vectorial generat de vectorii [1,0,1,1], [0,1,0,1], [1,0,0,0]. Sa se exprime vectorul [4,5,2,7] in aceasta baza.

19. Rezolvati ecuatia $x^3+a\,x+b = 0$. Particularizati pentru diferiti parametri a si b;

20. Rezolvati sistemul de ecuatii $A\,x = b$ cu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ si $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$;

21. Rezolvati ecuatia $e^x = x + 1$;

22. Rezolvati ecuatia diferentiala $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = a\,y+b$ cu conditia initiala $\mathrm{y}(0) = 1$ pentru diferite valori ale lui a si b. Reprezentati grafic solutia.

23. Rezolvati sistemul de ecuatii diferentiale

$\frac{\partial}{\partial x}\,y_1(x) = a_{11}\,y_1(x) + a_{12}\,y_2(x) + b_1$

$\frac{\partial}{\partial x}\,y_2(x) = a_{21}\,y_1(x) + a_{22}\,y_2(x) + b_2$

cu conditiile initiale $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$ pentru diferite valori ale coeficientilor. Comentati rezultatele.

4 Reprezentari grafice

De cele mai multe ori cel mai simplu mod de a intelege un obiect matematic este de a-l reprezenta grafic. Maple V poate trasa mai multe feluri de grafice: in doua dimensiuni, trei dimensiuni sau animate, ale unor functii reprezentate prin formule implicite, explicite sau parametrice.

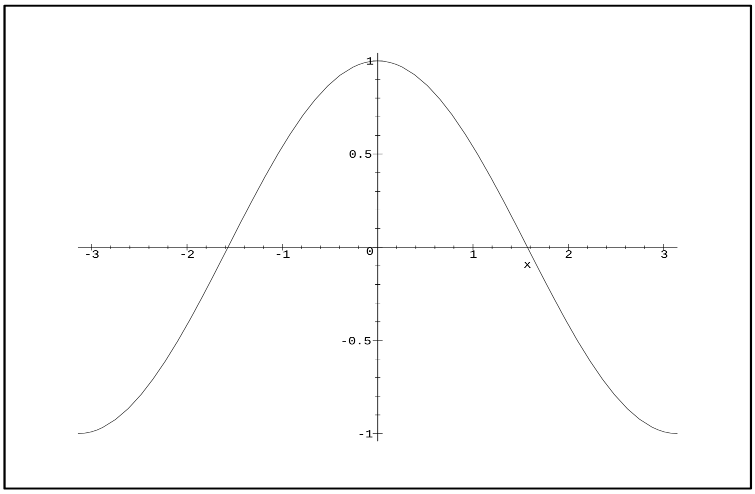
Maple V ofera un bogat pachet de optiuni care permit reprezentari grafice in scari logaritmice sau in coordonate polare, cilindrice sau sferice si reprezentarea functiilor complexe sau a campurilor vectoriale.

4.1 Grafice in doua dimensiuni

Exemplul 4.1 - Utilizarea comenzii *plot*

Daca functia este data printr-o expresie explicita atunci pentru reprezentarea sa grafica sunt necesare formula acesteia si domeniul de variatie pentru variabila independenta.

```
> plot(cos(x),x=-Pi..Pi);
```



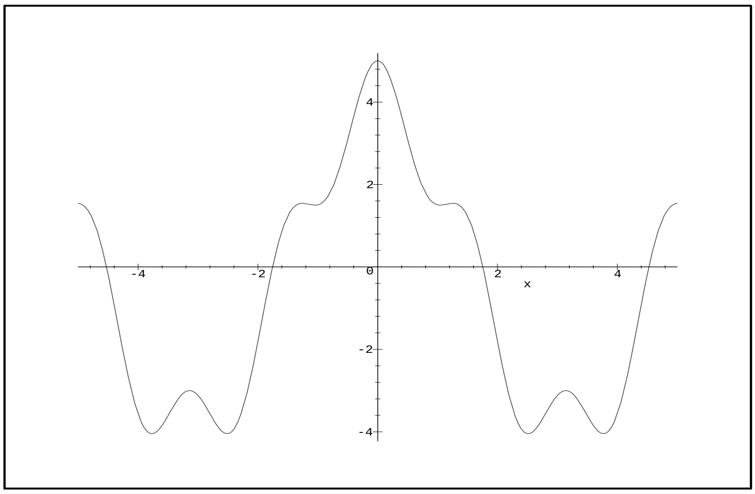
Daca se selecteaza cu mouse-ul orice punct din fereastra unde este afisat graficul Maple V va intoarce coordonatele punctului selectat.

Se pot trasa si graficele functiilor definite de utilizator:

```
> f:=x->4*cos(x)+cos(4*x);
```

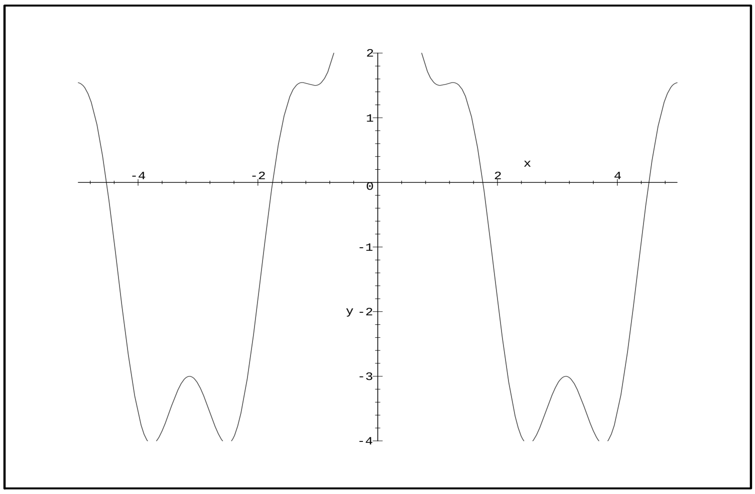
$$f := x \to 4\cos(x) + \cos(4\,x)$$

```
> plot(f(x),x=-5..5);
```



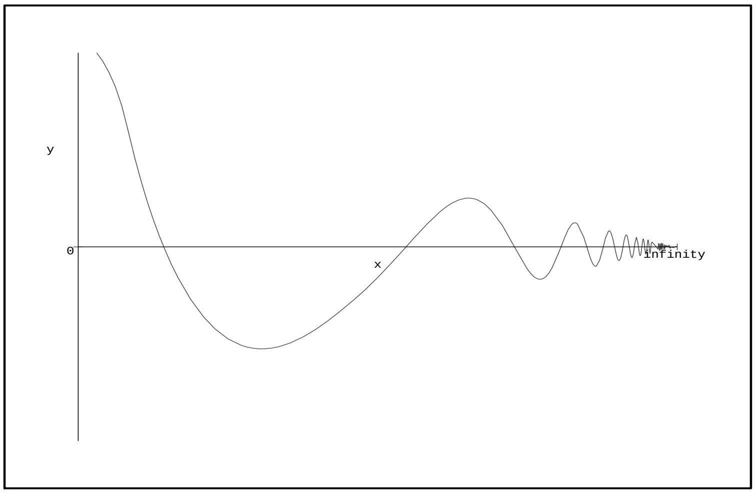
Este posibil sa se impuna un interval de variatie atat pentru variabila independenta cat si pentru variabila dependenta.

```
> plot(f(x),x=-5..5,y=-4..2);
```



Maple V permite si reprezentarea domeniilor infinite:

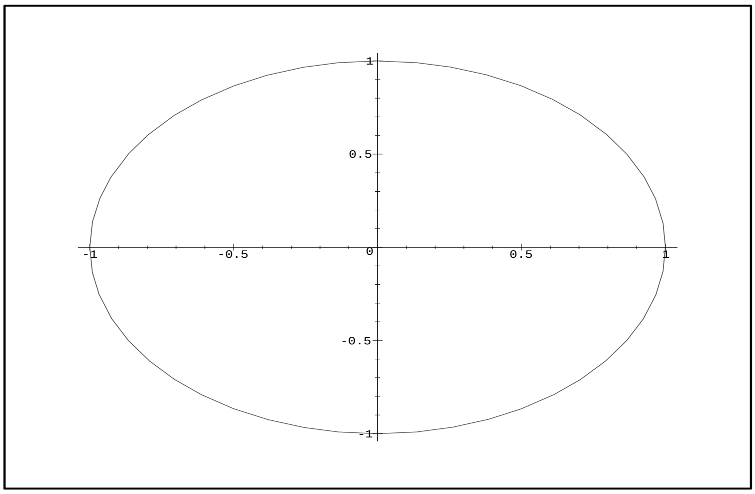
```
> plot(cos(x)/(x^1/10),x=0.5..infinity,y=-10..1 0);
```



Graficele in planul ($\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$) pot fi trasate folosind reprezentarea parametrica a variabilelor $\boldsymbol{x}$ si $\boldsymbol{y}$.

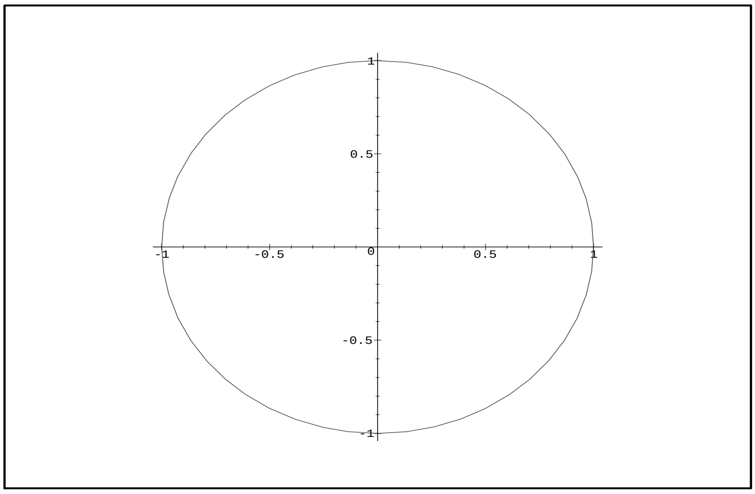
Un cerc se poate trasa astfel:

```
>  plot([sin(t),cos(t),t=-Pi..Pi]);
```



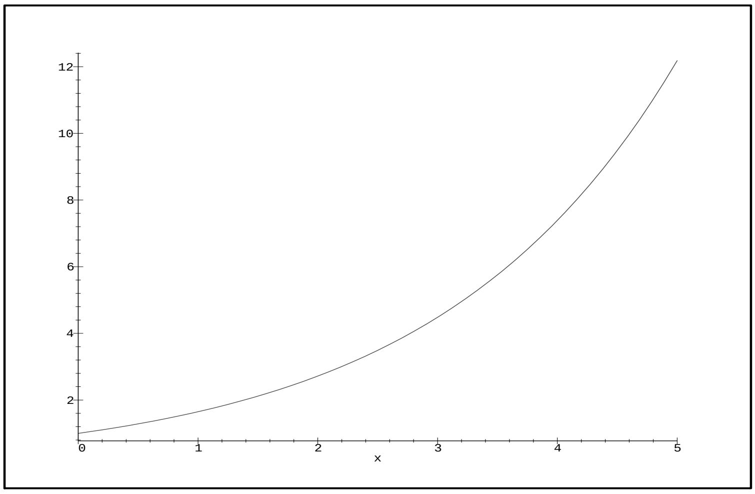
Initial graficul poate arata ca o elipsa pentru ca Maple V are ca optiune implicita scalarea graficului astfel incat sa se potriveasca cu fereastra in care acesta este afisat. Pentru a elemina acest neajuns se pot folosi meniurile sau optiunea ***scaling*** a comenzii ***plot***:

```
>  plot([sin(t),cos(t),t=-Pi..Pi],scaling=constr ained);
```

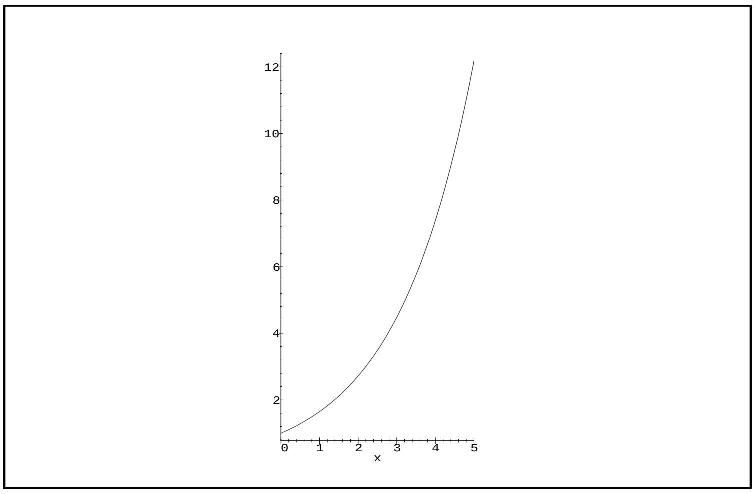


Optiunea ***scaling*** este foarte importanta pentru cazul functiilor date explicit care au valorile pe o axa mult mai mari decat cele de pe cealata axa:

```
> plot(exp(x/2),x=0..5);
```




```
> plot(exp(x/2),x=0..5,scaling=constrained);
```



Exemplul 4.2 - Grafice in coordonate polare

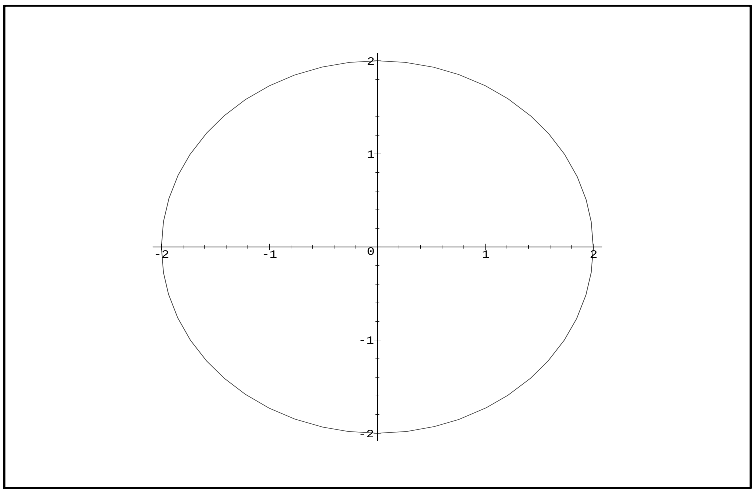
Alaturi de coordonatele carteziene folosite in exemplele de mai sus se pot folosi si alte tipuri de coordonate. In plan se mai pot folosi coordonatele polare. Pentru aceasta se foloseste comanda ***polarplot*** care este apelabila numai dupa ce a fost incarcat pachetul ***plots***, cu comanda:

```
> with(plots);
```

[*animate*, *animate3d*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, *conformal*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *cylinderplot*, *densityplot*, *display*, *display3d*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *odeplot*, *pareto*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedraplot*, *replot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *sphereplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

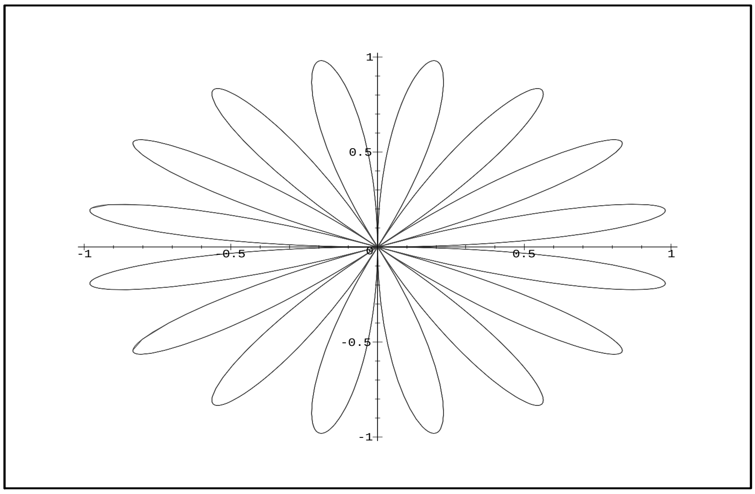
Folosind coordonatele polare, un cerc de raza 2 cu centrul in origine se traseaza astfel:

```
> polarplot(2,t=-Pi..Pi,scaling=constrained);
```



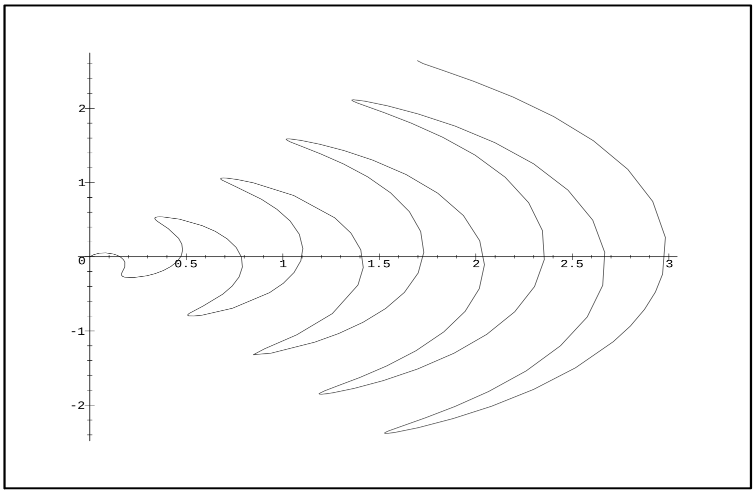
Reprezentarea grafica in coordonate polare a functiei $r = \sin(8\,t)$ arata astfel:

```
> polarplot(sin(8*t),t=-2*Pi..2*Pi);
```



Ecuatiile $f = \frac{t}{2}$ si $g = \cos(5\,t)$ definesc, in coordonate polare, urmatorul grafic:

```
> polarplot([t/2,cos(5*t),t=0..2*Pi]);
```



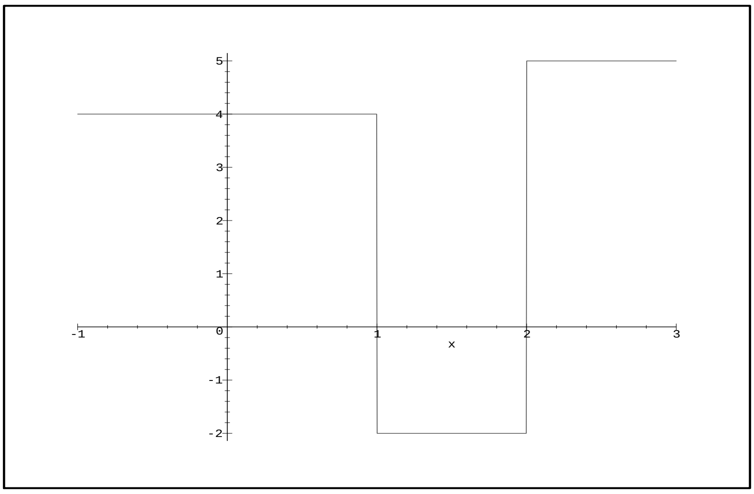
Exemplul 4.3 - Reprezentarea grafica a functiilor cu discontinuitati

Functiile cu discontinuitati necesita o atentie speciala atunci cand se doreste reprezentarea lor grafica, ca in cazul functiei definita pe intervale:

```
> f:=x->piecewise(x<1,4,x<2,-2,5);
```

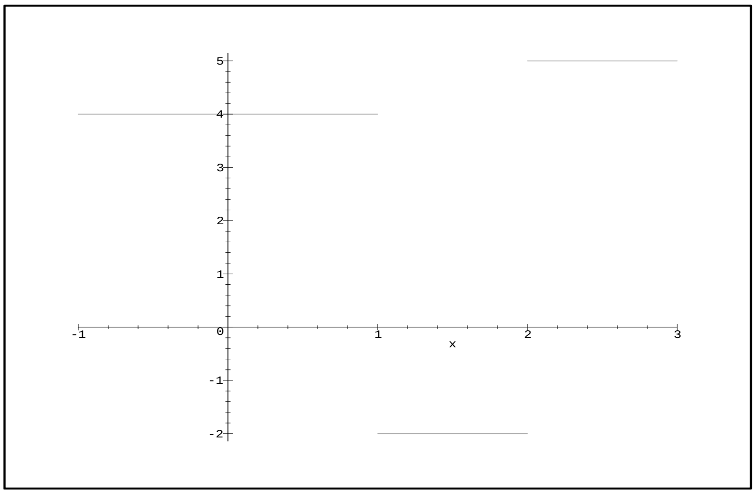
$$f := x \to \mathrm{piecewise}(x < 1,\, 4,\, x < 2,\, -2,\, 5)$$

```
> plot(f(x),x=-1..3);
```



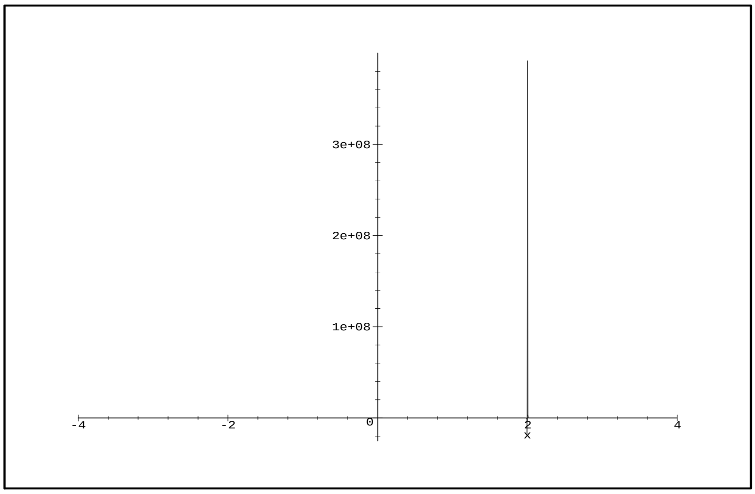
Maple V va trasa linii aproximativ verticale in dreptul discontinuitatilor. Optiunea ***discont=true*** determina programul sa afiseze corect discontinuitatile:

```
> plot(f(x),x=-1..3,discont=true);
```

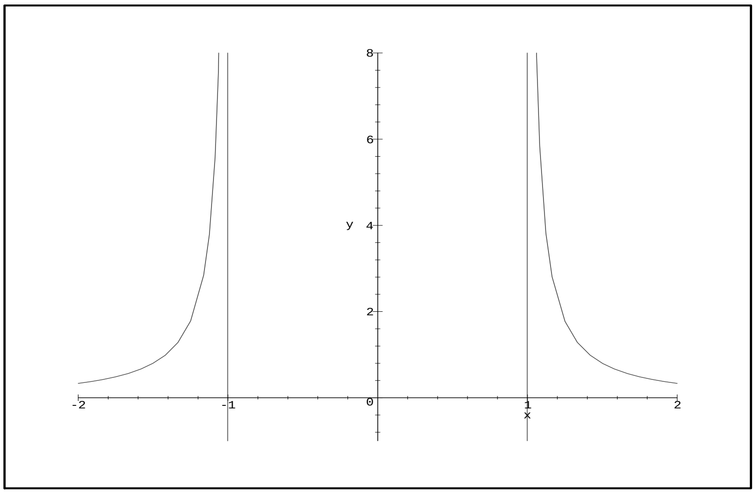


Functiile cu discontinuitati infinite se pot afisa corect prin restrangerea intervalului pe axa Oy:

```
> plot(1/(x-2)^3,x=-4..4);
```

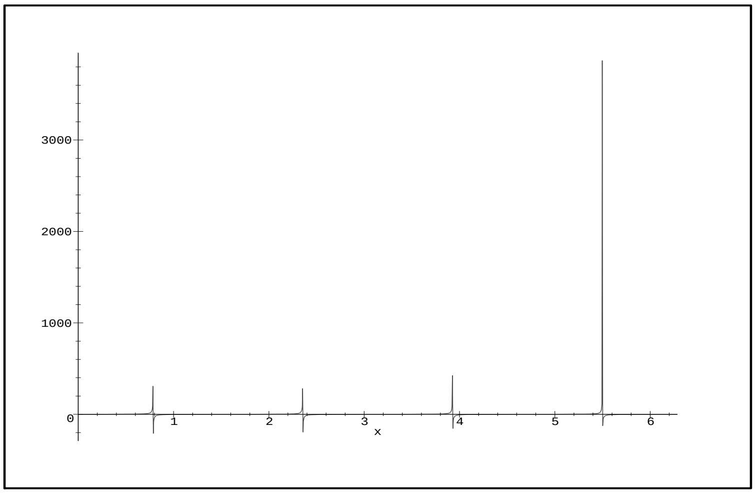



```
> plot(1/(x^2-1),x=-2..2,y=-1..8);
```

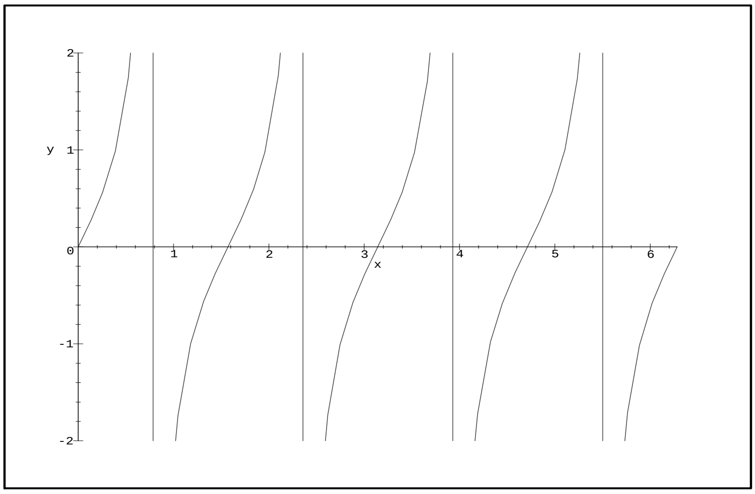


Daca discontinuitatea are limite la stanga si la dreapta diferite este necesar sa se foloseasca si optiunea ***discont***:

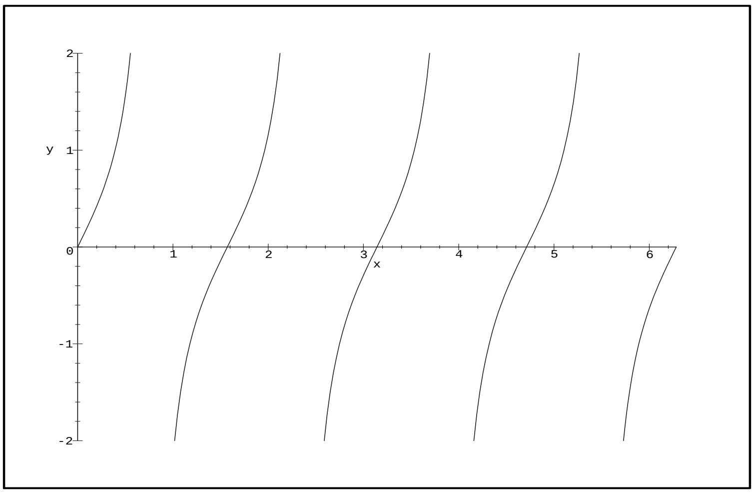
```
>   plot(tan(2*x),x=-0..2*Pi);
```




```
>   plot(tan(2*x),x=-0..2*Pi,y=-2..2);
```

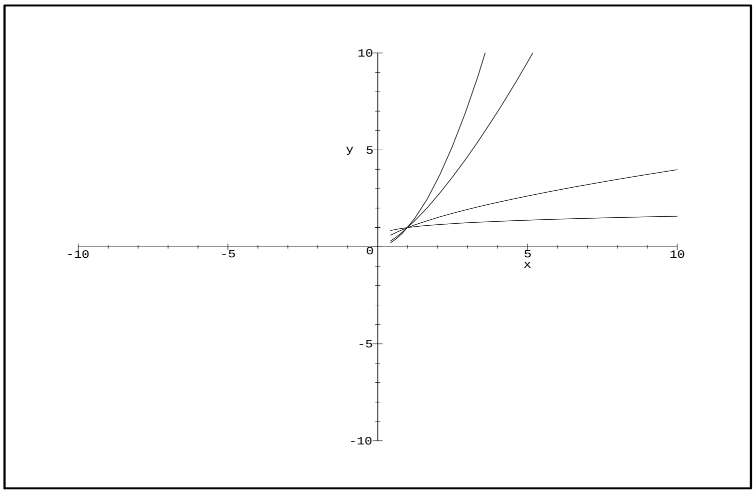


> plot(tan(2*x),x=0..2*Pi,y=-2..2,discont=true, color=blue);

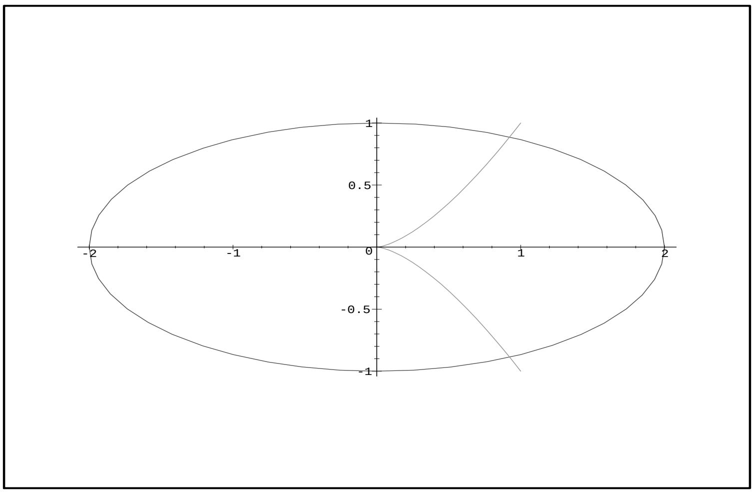


Pentru a trasa mai multe functii pe acelasi grafic acestea se includ intr-o lista de functii:

> plot([x^(1/5),x^(3/5),x^(7/5),x^(9/5)],x=-10. .10,y=-10..10,color=blue);




```
> plot([[2*cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],[t^2,t^3,t= -1..1]],scaling=constrained);
```

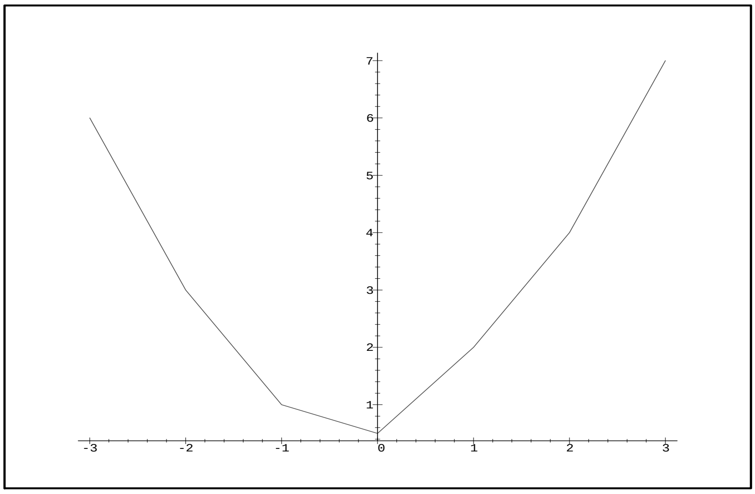


Functiile date tabelar se pot afisa folosind o lista de liste de forma:
[[x1,y1],[x2,y2],[x3,y3],...,[xn,yn]].
Daca acesta lista este lunga este preferabil sa i se atribuie un nume.

```
> lista:=[[-3,6],[-2,3],[-1,1],[0,0.5],[1,2],[2 ,4],[3,7]];
```

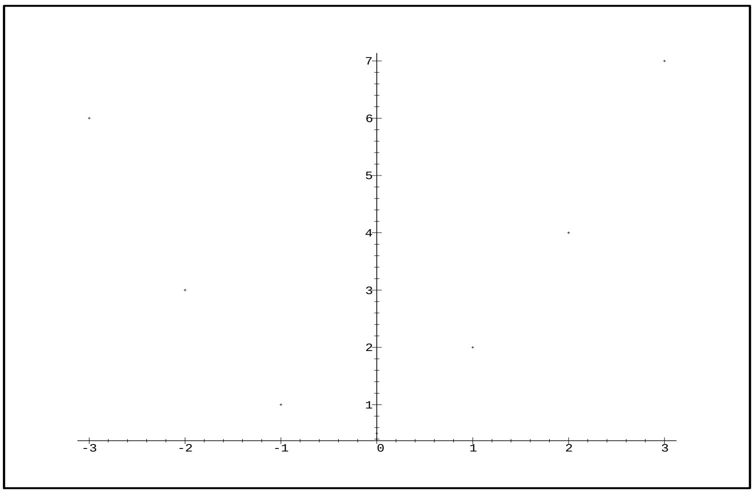
$$lista := [[-3, 6], [-2, 3], [-1, 1], [0, .5], [1, 2], [2, 4], [3, 7]]$$

```
> plot(lista);
```



Optiunea implicita de afisare este unirea punctelor trasate cu segmente de dreapta. Daca se foloseste optiunea ***style=point*** atunci aceste segmente nu vor fi trasate.

```
>  plot(lista,style=point);
```



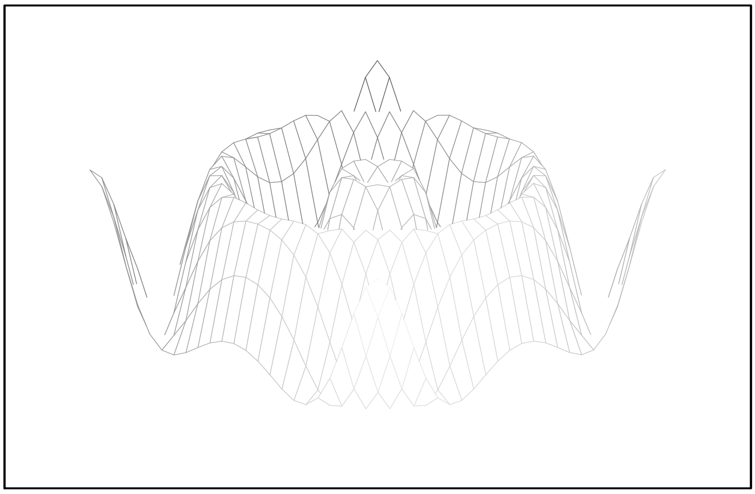
Trasarea oricarui grafic se reduce de fapt la trasarea unor segmente de dreapta. Algoritmul de trasare al acestora este adaptiv dar uneori pentru functii cu variatii foarte mari pe un interval foarte mic rezultatul poate fi nesatisfacator. Acest neajuns poate fi corectat folosind optiunea *numpoints=numar*, pentru specificarea numarului de puncte.

4.2 Grafice tridimensionale

Exemplul 4.4 - Reprezentarea grafica a functiilor de doua variabile (*plot3d*)

Cu comanda ***plot3d*** se pot trasa grafice in trei dimensiuni ale unor functii cu doua variabile. Ea are o sintaxa echivalenta cu ***plot***, cu deosebirea ca exista doua variabile independente pentru functiile definite explicit.

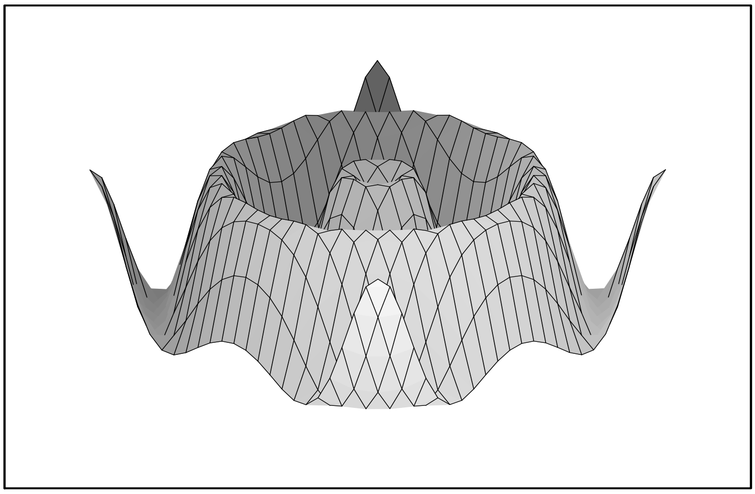
```
>  plot3d(sin(sqrt(x*x+y*y)),x=-10..10,y=-10..10 );
```



Cu ajutorul mouse-lui se poate roti graficul "tragand" de chenarul de pe marginea desenului.

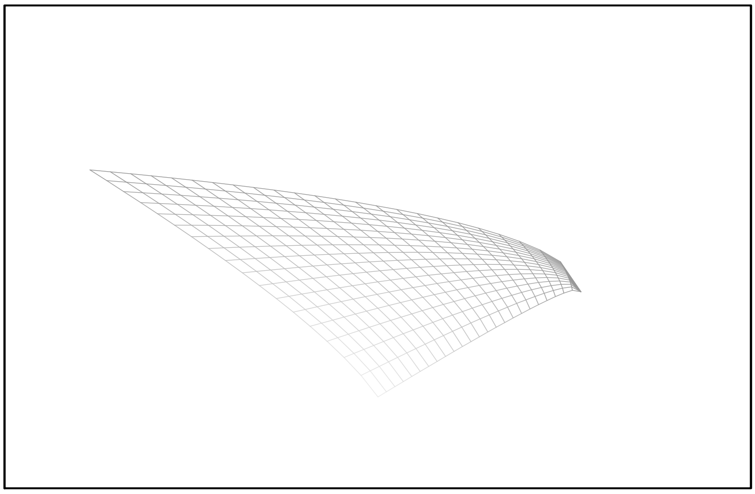
Si comanda ***plot3d*** admite parametri optionali. De exmplu cu ***style=patch*** in locul retelei opace implicite se pot hasura depresiunile din retea.

```
>  plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2)),x=-10..10,y=-10..10 ,style=patch);
```



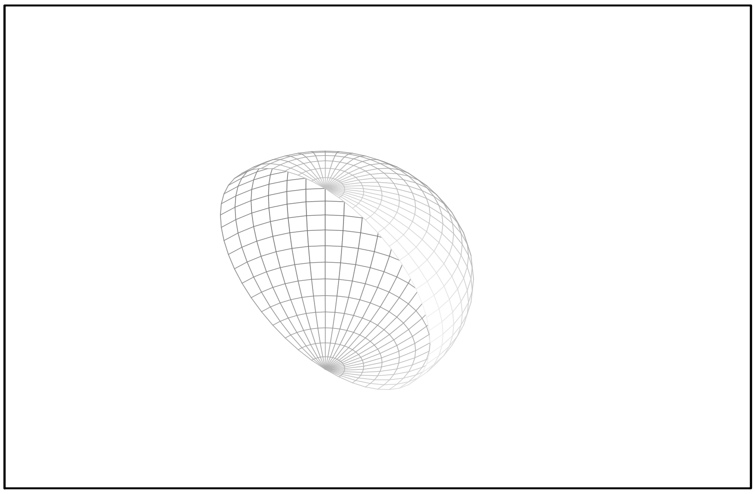
In plus, intervalul de variatie al celei de a doua variabile poate depinde de prima variabila.

```
> plot3d(sqrt(5*x-10*y),x=0..9,y=-x..x);
```

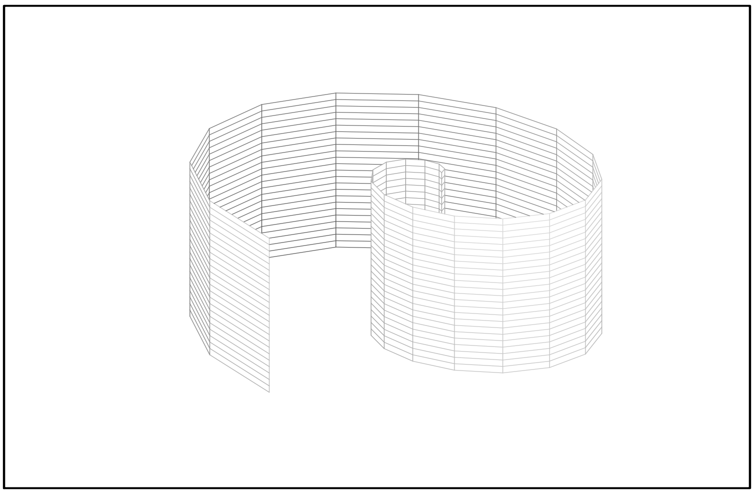


Pentru a reprezenta suprafetele distribuite parametric in coordonate cateziene, sferice si cilindrice, se folosesc comenzile ***plot3d***, ***sphereplot*** si respectiv ***cylinderplot***.

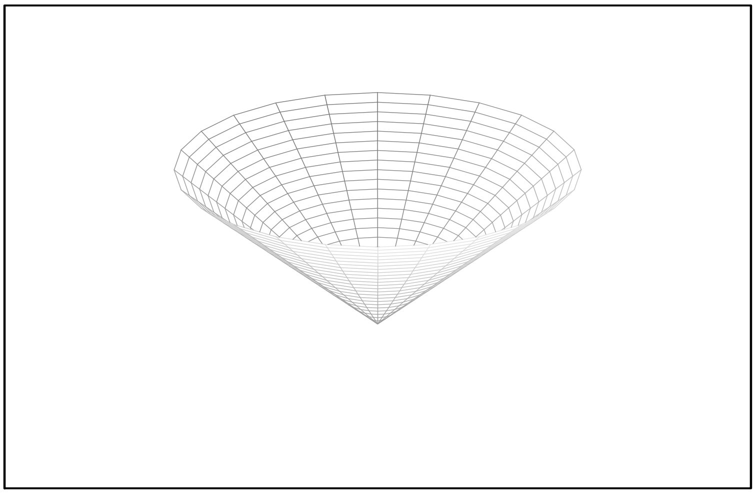
```
> sphereplot(2,theta=Pi/2..3*Pi/2,phi=0..Pi,sca ling=constrained);
```



```
> cylinderplot(-2*theta,theta=0..3*Pi,z=-2..3);
```



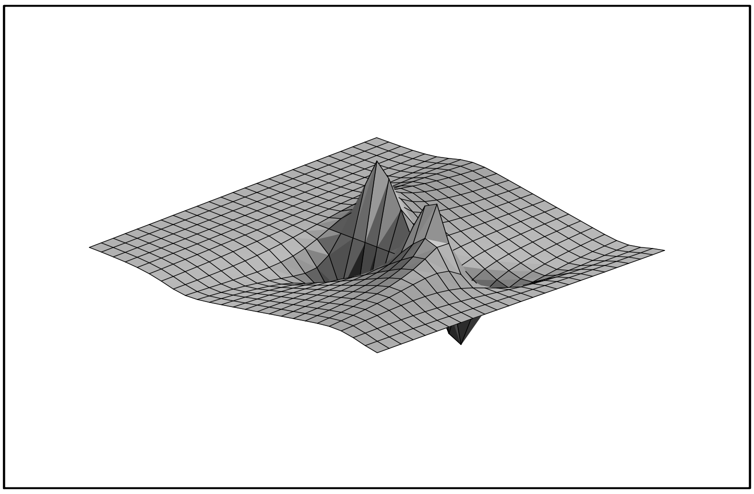
```
> cylinderplot(z,theta=0..2*Pi,z=0..5);
```



Daca graficele nu au o calitate satisfacatoare se poate modifica numarul de puncte cu optiunea ***grid***=[m,n].

Pentru obtinerea unor grafice ilustrative sunt prevazute doua moduri de colorare a suprafetei primul cu ajutorul uneia sau mai multor surse de lumina colorate diferit si al doilea in care fiecare punct este colorat in functie de pozitia sa. Aceste moduri se pot selecta cu ajutorul optiunilor ***shading*** si ***lightmodel***.

```
>  plot3d((x*y)/(x^2+y^8),x=-7..7,y=-3..2,style= patch,
shading=zhue,lightmodel=light3);
```



4.3 Animatii si grafice speciale

Exemplul 4.5 - Realizarea animatiilor

Animatiile sunt moduri sugestive de reprezentare a anumitor comportari ale graficelor, fata de un anumit parametru. Acestea pot fi obtinute cu ajutorul comenzilor ***animate*** si ***animate3d*** din pachetul ***plots***. Cele doua comenzi au sintaxe similare cu ***plot*** respectiv cu ***plot3d***, dar in ambele cazuri graficul mai depinde de inca un parametru.

```
> animate(sin(x*t),x=-10..10,t=1..2,color=red);
```

Pentru a vizualiza animatia se selecteaza fereastra cu ajutorul mouse-ului si apoi se alege optiunea PLAY din meniul ANIMATION sau se apasa butonul PLAY din bara de instrumente.

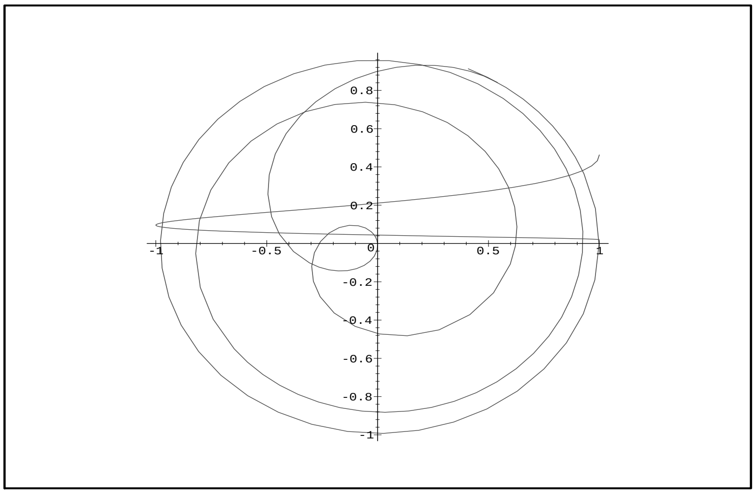
Se poate seta numarul de secvente si numarul de puncte in care se calculeaza garficul, cu optiunile ***frames***=numar si ***numpoints***=numar. Optiunea ***coords*** indica sistemul de coordonate ce va fi utilizat (***coords***=***polar***).

Pentru o intelegere mai buna a semnificatiilor graficelor, acestea pot fi adnotate. Optiunea ***title***='text' afiseaza un titlu al graficului. Fontul si stilul titlului pot fi selectate cu ajutorul optiunii ***titlefont***=[numefont]. Numele axelor este setat cu optiunea ***labels***=['nume axa Ox','nume axa Oy'] iar tipul axelor cu optiunea ***axes***=tip_axa.

Exemplul 4.6 - Grafice compuse

Graficele compuse se afiseaza stocand fiecare grafic individual sub un nume si afisandu-l ulterior cu ajutorul comenzii ***display***.

```
> plot1:=plot([cos(2*t),exp(t)/50,t=0..Pi]):
> plot2:=polarplot([cos(t),exp(t),t=0..Pi]):
> display([plot1,plot2],scaling=constrained);
```



Se pot afisa simultan grafice statice cu animatii sau animatii cu animatii. In ultimul caz este necesar ca acestea sa aiba acelasi numar de secvente.

```
> c:=cylinderplot(theta/5,theta=Pi..2*Pi,y=-2..  2):
```

```
> d:=animate3d([cos(t)*sin(f),sin(t)*sin(f)-u,2*cos(f)],
t=0..2*Pi,f=0..Pi,u=-2..2):
```

```
> display([c,d],scaling=constrained);
```

Exemplul 4.7 - Adnotarea graficelor

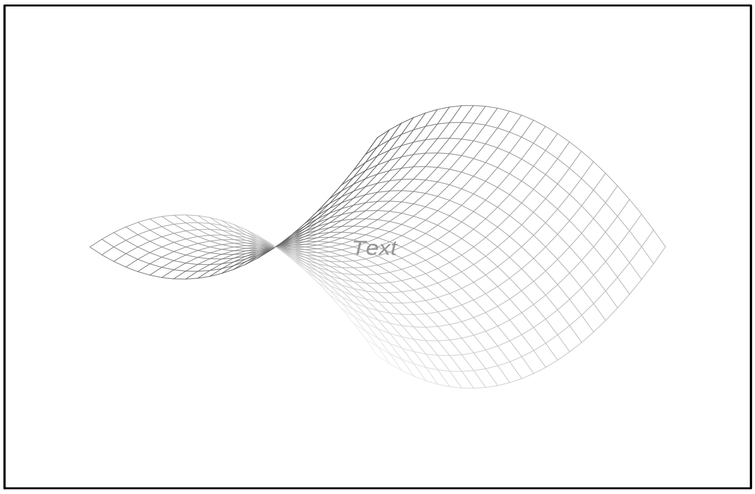
Plasarea textului in grafice se poate face prin definirea coordonatelor si continutul textului cu comenzile ***textplot*** si ***textplot3d***, urmate de afisarea textului impreuna cu graficul cu ajutorul comenzii ***display***.

Comenzilor de text li se poate specifica tipul, marimea si culoarea cu optiunile ***font*** si ***color***.

```
> e:=plot3d(x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1):
```

```
> f:=textplot3d([0,0,0,'Text'],font=[HELVETICA, OBLIQUE,22],color=GREEN):
```

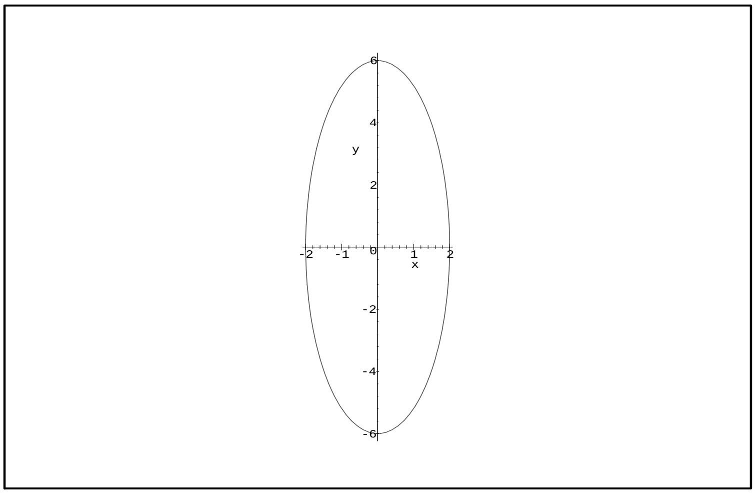
```
> display([e,f]);
```



Exemplul 4.8 - Reprezentari grafice speciale

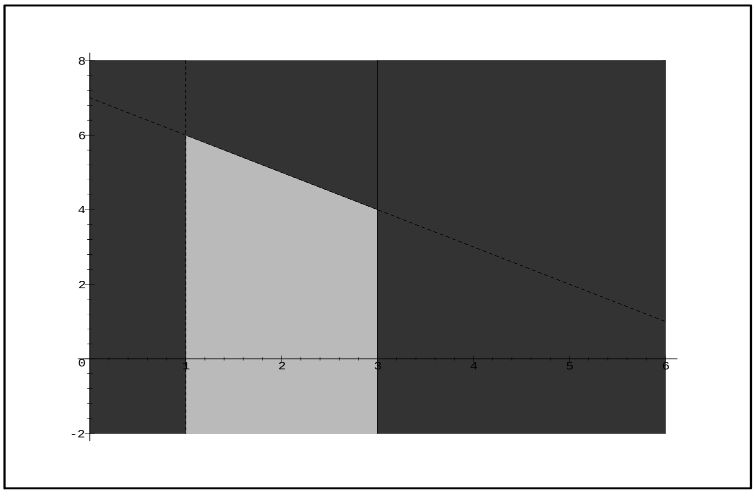
Maple V permite si afisarea unor grafice speciale. De exemplu, in cazul functiilor definite implicit se foloseste comanda ***implicitplot***:

```
>   implicitplot(x^2/4+y^2/36=1,x=-2..2,y=-6..6,s caling=constrained);
```



Regiunile care satisfac un sistem de inecuatii se pot reprezenta grafic folosind comanda ***inequal***:

```
>   inequal({x+y<7,1<x,x<=3},x=0..6,y=-2..8);
```



Grafice cu scari logaritmice pot fi trasate utilizand comenzile:

logpplot - axa verticala logaritmica.

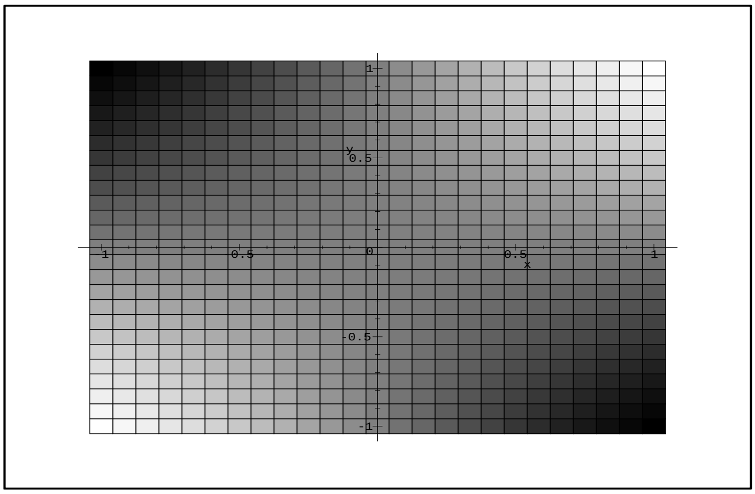
semilogplot - axa orizontala logaritmica.

loglogplot - ambele axe logaritmice.

Parametrii acestor comenzi sunt identici cu cei ai comenzii ***plot***.

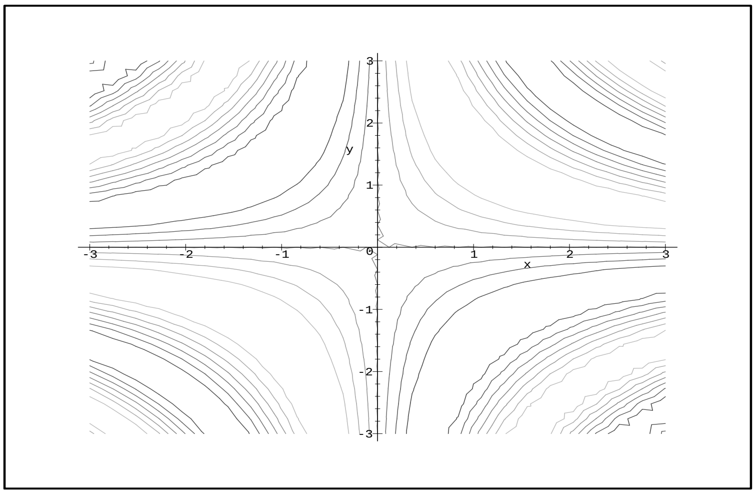
Graficele functiilor de doua variabile se pot reprezenta cu comanda ***densityplot***, astfel incat zonele hasurate mai luminos sa indice valori mai mari ale functiei.

```
> densityplot(sin(x*y),x=-1..1,y=-1..1);
```



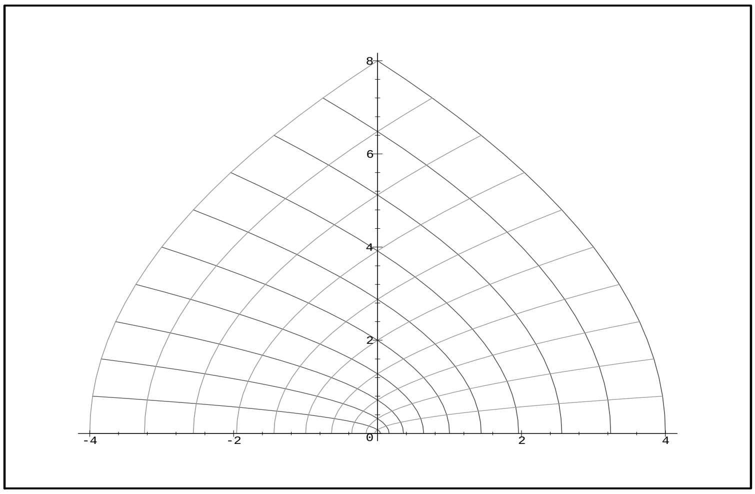
Graficele care reprezinta o functie de doua variabile prin intermediul unor curbe topografice de nivel se realizeaza cu comanda ***contourplot***:

```
>  contourplot(sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3);
```



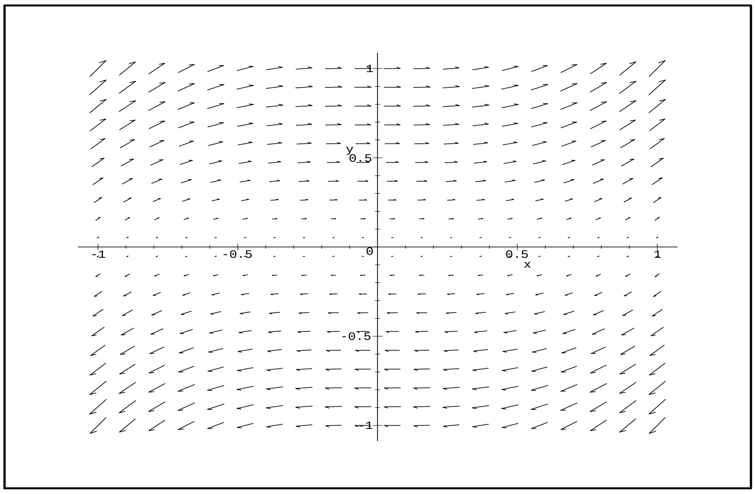
Functiile complexe se pot reprezenta prin intermediul transformarii conforme generate folosind comanda ***conformal***:

```
>  conformal(z^2,z=0..2+2*I);
```



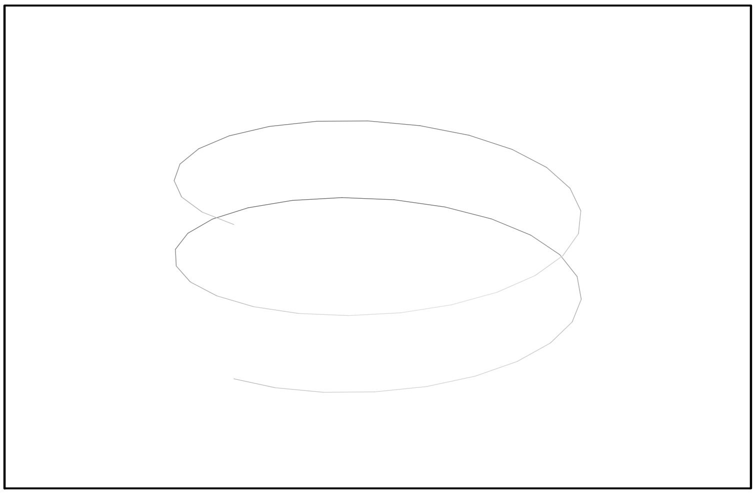
Campurile vectoriale bidimensionale se reprezinta grafic cu comanda ***field-plot***:

```
>  fieldplot([y*cos(y),x*sin(x*y)],x=-1..1,y=-1.  .1);
```



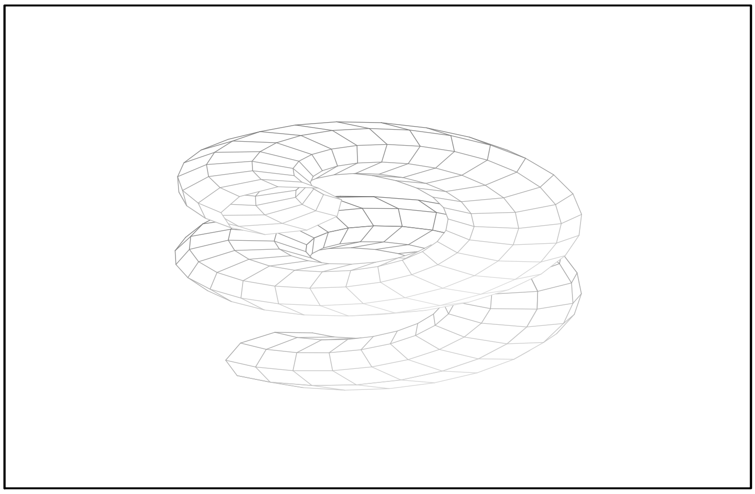
Curbele in spatiu se reprezinta grafic cu comanda ***spacecurve***:

```
>  spacecurve([2*cos(t),sin(t),3*t],t=0..4*Pi);
```



Tuburile generate pornind de la curbe spatiale se reprezinta grafic cu comanda ***tubeplot***:

```
>  tubeplot([cos(t),sin(t),t],t=0..4*Pi,radius=0 .5);
```



Pachetul ***plottools*** contine functii care definesc diferite *obiecte geometrice* ca sfere, conuri, toruri, poliedre, linii poligonale, arce de cerc, elipse sau hiperbole, curbe generale si instructiuni care permit modificarea, mutarea sau rotatia acestora.

4.4 Exercitii propuse

1. Sa se reprezinte grafic functiile: a) $\mathrm{f}(x) = \frac{\sin(x)+7\,x}{\mathrm{sh}(x)^2}$, b) $\mathrm{f}(x,\, y) = \sin(\frac{x}{y}) + 7\,\mathrm{th}(x-y) + \sin(x)^2\cos(x)^2$, c) $\mathrm{f}(x) = x\sin(\frac{1}{x})$;

2. Sa se reprezinte grafic functia: $\mathrm{f}(t) = \sin(8\,t)\cos(t)$;

3. Sa se genereze graficul definit de ecuatiile: $f = 2^t$ si $g = \sin(8\,t)\cos(t)$;

4. Sa se reprezinte grafic:

$$f(x) = \begin{matrix} \{x,\, x < 2 \\ \{3,\, x < 4 \\ \{2,\, 4 \leq x, \end{matrix}$$

folosind si optiunea ***discont=true***;

5. Sa se reprezinte grafic $\mathrm{f}(x) = \tan(20\,x)$, pentru x = 0..2 π si y = -5..5.

6. Sa se reprezinte pe acelasi grafic functiile: e^x, $\ln(x^2)$, $x^3 + x^2$;

7. Sa se reprezinte grafic o functie data tabelar care sa aproximeze in 8 puncte functia $\sin(x)$ pe intervalul [0..2 π];

8. Sa se reprezinte grafic, tridimensional, functia: $\mathrm{f}(x,\, y) = \frac{x+y}{x^4+x^2\,y^2+y^4}$, in domeniul: x∈[-3,3] si y∈[-5,5];

9. Sa se deseneze printr-o reprezentare in coordonate sferice o calota sferica a carei frontiera sa se afle in plan orizontal;

10. Sa se reprezinte in coordonate cilindrice functia: $z^3 - z^2 - z + 1$ pentru $\theta = \{0..\frac{7\pi}{4}\}$ si $z = \{0..10\}$.

11. Sa se realizeze o animatie bidimensionala pentru functia f$(x,\ y) = \sin(x\,y)+\cos(x\,y)$ intre limitele $x = \{-5..5\}$, $y = \{-3..3\}$;

12. Sa se realizeze translatia unei sfere de raza 2 de-a lungul axei Ox pentru x∈[-5,5];

13. Sa se reprezinte grafic solutia sistemului de inecuatii: $\{\ 2\,x^2 - y < 1,\ 0 \leq y,\ y \leq 10\}$ pentru y∈[-3,11] si x∈[-5,10].

5 Manipulari simbolice

Maple V este inzestrat cu o serie de comenzi pentru a optimiza manipularea matematica si structurala a expresiilor. Scopul lor este de a oferi utilizatorului libertatea deplina in prelucrarea simbolica a expresiilor matematice. Doua aspecte sunt esentiale in aceasta manipulare: simplificarea si evaluarea expresiilor.

Primul paragraf este dedicat prezentarii mai pe larg a notiunilor de baza introduse in capitolul 2 si dedicate manipularii expresiilor simbolice. Al doilea paragraf este dedicat felului in care Maple V foloseste presupunerile asupra proprietatilor variabilelor specificate de utilizator. In continuare este abordata problema manipularii expresiilor simbolic structurate (liste, matrice, multimi, etc.). La sfarsitul capitolului se prezinta regulile folosite de Maple V in evaluare si felul in care aplicarea acestora poate fi controlata.

5.1 Manipulare algebrica

Rezolvarea manuala a problemelor de algebra si analiza matematica presupune de obicei parcurgerea unor pasi algebrici. Acesti pasi pot fi efectuati folosind Maple V:

```
> ec:=2*x+1=3;
```

$$ec := 2\,x + 1 = 3$$

```
> ec-(1=1);
```

$$2\,x = 2$$

```
> "/2;
```

$$x = 1$$

Rezolvarea unor probleme mai complicate necesita transformari mai sofisticate ale expresiilor matematice.

Exemplul 5.1 - Expandarea expresiilor (*expand*)

Comanda ***expand*** "desface parantezele", respectiv transforma produsul de polinoame in sume:

```
> pol:=(2*x+1)*(x+3);
```

$$pol := (2\,x + 1)\,(x + 3)$$

```
> expand(pol);
```

$$2\,x^2 + 7\,x + 3$$

Comanda se poate folosi si pentru expresii rationale.

```
> expand((x^2+1)*(y^3+4*y+3)/z/(y^2+1));
```

$$\frac{x^2\,y^3}{z\,(y^2+1)}+4\,\frac{x^2\,y}{z\,(y^2+1)}+3\,\frac{x^2}{z\,(y^2+1)}+\frac{y^3}{z\,(y^2+1)}+4\,\frac{y}{z\,(y^2+1)}+\frac{3}{z\,(y^2+1)}$$

Comanda ***expand*** desface in termeni si alte expresii matematice:

```
> expand(cos(2*x));
```

$$2\cos(x)^2-1$$

```
> ln( abs(x^3)/(3+abs(x)) );
```

$$\ln(\frac{|x|^3}{3+|x|})$$

```
> expand(");
```

$$3\ln(|x|)-\ln(3+|x|)$$

Subexpresiile care nu se doresc a fi desfacute se dau ca argument al comenzii ***expand***:

```
> expand((2*x+3)*(y^2+z));
```

$$2\,x\,y^2+2\,x\,z+3\,y^2+3\,z$$

```
> expand((2*x+3)*(y^2+z),2*x+3);
```

$$(2\,x+3)\,y^2+(2\,x+3)\,z$$

Se pot desface expresii intr-un anumit domeniu.

```
> pol:=(2*x+1)^2*(x-1);
```

$$pol:=(2\,x+1)^2\,(x-1)$$

```
> expand(pol);
```

$$4\,x^3-3\,x-1$$

```
> " mod 3;
```

$$x^3+2$$

Cu acelasi efect se poate folosi si constructia sintactica:

```
> expand(pol) mod 3;
```

$$x^3+2$$

Exemplul 5.2 - Gruparea coeficientilor de acelasi ordin (*collect*)

O expresie de forma $a\,x^3 - b\,c\,x^2 + a\,x - c\,x^3 + a\,x^2 + b\,x$ poate fi mai simplu citita, daca termenii sunt grupati dupa ordin. Aceasta grupare se face folosind comanda ***collect***:

```
> collect (a*x^3-b*c*x^2+a*x-c*x^3+a*x^2+b*x, x);
```

$$(-c+a)\,x^3 + (a-b\,c)\,x^2 + (b+a)\,x$$

Cel de-al doilea argument al comenzii ***collect*** specifica variabila dupa care trebuie grupata expresia.

```
> pol:=2*x^3+3*x*y-5*y+y^3*x^2;
```

$$pol := 2\,x^3 + 3\,x\,y - 5\,y + y^3\,x^2$$

```
> collect(pol,y);
```

$$y^3\,x^2 + (3\,x-5)\,y + 2\,x^3$$

```
> collect(pol,x);
```

$$2\,x^3 + 3\,x\,y - 5\,y + y^3\,x^2$$

Gruparea se poate face si dupa functii neevaluate:

```
> expr:=sin(x)^2*cos(x)+x*sin(x)+y^2*sin(x);
```

$$expr := \sin(x)^2\cos(x) + x\sin(x) + y^2\sin(x)$$

```
> collect(expr,sin(x));
```

$$\sin(x)^2\cos(x) + (x+y^2)\sin(x)$$

```
> expr_dif:=diff(f(x),x,x)*cos(x)-diff(f(x),x)* cos(f(x^2))
+cos(x)*diff(f(x),x)+cos(2*x)*diff(f(x),x,x);
```

$$expr\_dif := (\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{f}(x))\cos(x) - (\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{f}(x))\cos(\mathrm{f}(x^2)) + \cos(x)\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{f}(x)) + \cos(2\,x)\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{f}(x))$$

```
> collect(expr_dif,diff);
```

$$(-\cos(\mathrm{f}(x^2)) + \cos(x))\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{f}(x)) + (\cos(x) + \cos(2\,x))\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{f}(x))$$

```
> expr:=x*y^2*z+3*x*z+x*y;
```

$$expr := x\,y^2\,z + 3\,x\,z + x\,y$$

In acest caz nu se poate scoate factor comun produsul xy decat fortat.

```
> collect(expr, x*y);

Error, (in collect) cannot collect, x*y
```

Pentru aceasta se face o substitutie inainte de grupare:

```
> subs(x=x_y/y,expr);
```

$$x\_y\, y\, z + 3\, \frac{x\_y\, z}{y} + x\_y$$

```
> collect(", x_y);
```

$$(y\, z + 3\, \frac{z}{y} + 1)\, x\_y$$

```
> subs(x_y=x*y,");
```

$$(y\, z + 3\, \frac{z}{y} + 1)\, x\, y$$

Daca se doreste gruparea in acelasi timp a mai multor variabile sunt disponibile doua optiuni: forma recursiva si cea distributiva. *Forma recursiva* face gruparea dupa prima variabila, apoi dupa a doua etc.

```
> pol:=x^2*y+x*y*z+x^2*z-4*x^2*y+x+z*x;
```

$$pol := -3\, x^2\, y + z\, x\, y + x^2\, z + x + x\, z$$

```
> collect(pol,[x,z]);
```

$$(z - 3\, y)\, x^2 + ((1 + y)\, z + 1)\, x$$

Forma distributiva grupeaza coeficientii dupa toate variabilele in acelasi timp.

```
> collect(pol,[x,z],distributed);
```

$$x + x^2\, z + (1 + y)\, x\, z - 3\, x^2\, y$$

Exemplul 5.3 - Factorizarea (*factor*)

Pentru a scrie un polinom ca un produs de polinoame ireductibile se foloseste comanda ***factor***.

```
> factor(x^2-4);
```

$$(x - 2)\, (x + 2)$$

```
> factor(x^4-y^4);
```

$$(x - y)\, (x + y)\, (x^2 + y^2)$$

Se pot desface in factori inclusiv functiile rationale:

```
> (x^12-y^12)/(x^6-y^6);
```

$$\frac{x^{12} - y^{12}}{x^6 - y^6}$$

```
> factor(");
```

$$(x^2 + y^2)(x^4 - x^2 y^2 + y^4)$$

```
> (x^12-y^12)/(x^5-y^5);
```

$$\frac{x^{12} - y^{12}}{x^5 - y^5}$$

```
> factor(");
```

$$\frac{(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + x\,y + y^2)(y^2 - x\,y + x^2)(x^4 - x^2 y^2 + y^4)}{x^4 + y\,x^3 + x^2 y^2 + y^3 x + y^4}$$

Cand comanda ***factor*** are ca parametru un polinom cu coeficienti reali, factorizarea se va face in polinoame care au toti coeficientii reali de acelasi tip:

```
> pol:=x^3-x^2-x+2;
```

$$pol := x^3 - x^2 - x + 2$$

```
> expand(sqrt(2)*pol);
```

$$\sqrt{2}\,x^3 - \sqrt{2}\,x^2 - \sqrt{2}\,x + 2\sqrt{2}$$

```
> factor(");
```

$$\sqrt{2}\,(x^3 - x^2 - x + 2)$$

Se poate face si factorizarea explicita cu un factor de tip specificat ca al doilea argument.

```
> pol:=x^4-3*x^2+2;
```

$$pol := x^4 - 3\,x^2 + 2$$

```
> factor(pol);
```

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 - 2)$$

```
> factor(pol,sqrt(2));
```

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + 1)(x - 1)$$

```
> factor(x^4-6,{sqrt(2),sqrt(3)});
```

$$(x^2 - \sqrt{2}\sqrt{3})(x^2 + \sqrt{2}\sqrt{3})$$

Al doilea argument poate fi specificat folosind optiunea ***RootOf***, care extrage radacinile unui polinom.

```
> factor(pol, RootOf(x^2-2));
```

$$(x - \mathrm{RootOf}(\_Z^2 - 2))(x + \mathrm{RootOf}(\_Z^2 - 2))(x + 1)(x - 1)$$

Pentru factorizarea in domenii speciale se foloseste comanda ***Factor*** in expresii de genul:

```
> Factor(4*x^2+5*x+1)mod 7;
```

$$4\,(x+2)\,(x+1)$$

```
> Factor(x^3-1)mod 5;
```

$$(x^2+x+1)\,(x+4)$$

```
> Factor(x^3-1,RootOf(x^2-x+1))mod 5;
```

$$(x+\mathrm{RootOf}(\_Z^2+4\,\_Z+1))\,(x+4\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2+4\,\_Z+1)+1)\,(x+4)$$

Exemplul 5.4 - Ratioalizarea expresiilor (*rationalize*)

Expresiile rationale sunt considerate in general mai "frumoase" daca nu contin puteri fractionare la numitor. Comanda ***rationalize*** elimina aceste puteri de la numitor prin multiplicarea cu un factor potrivit.

```
> 1/(3+root[2](2));
```

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}}$$

```
> rationalize(");
```

$$\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\sqrt{2}$$

```
> (2*x^2+3)/(3*x+x^(2/3));
```

$$\frac{2\,x^2+3}{3\,x+x^{2/3}}$$

```
> rationalize(");
```

$$\frac{(2\,x^2+3)\,(9\,x^2-3\,x^{5/3}+x^{4/3})}{27\,x^3+x^2}$$

Exemplul 5.5 - Combinarea termenilor (*combine*)

Comanda ***combine*** aplica un numar de transformari pentru expresiile matematice, in vederea transformarii lor intr-o forma mai "simpla".

```
> combine(1-2*sin(x)^2);
```

$$\cos(2\,x)$$

> combine(8*sin(x)*cos(x));

$$4\sin(2\,x)$$

> combine(exp(2*sin(x)^2)*exp(2*cos(x)^2));

$$e^2$$

> combine((x^a)^2);

$$x^{(2\,a)}$$

Pentru a vizualiza felul in care comanda ***combine*** actioneaza se va utiliza instructiunea ***infolevel***:

> infolevel[combine]:=1;

$$\mathit{infolevel}_{\mathit{combine}} := 1$$

> expr:=Int(x,x)+Int(2*x^3,x);

$$\mathit{expr} := \int x\,dx + \int 2\,x^3\,dx$$

> combine(expr);

```
combine:   combining with respect to   combine/Int
combine:   combining with respect to   combine/linear
combine:   combining with respect to   combine/int
combine:   combining with respect to   combine/linear
combine:   combining with respect to   combine/range
combine:   combining with respect to   combine/Int
combine:   combining with respect to   combine/linear
combine:   combining with respect to   combine/range
combine:   combining with respect to   combine/int
combine:   combining with respect to   combine/linear
combine:   combining with respect to   combine/range
combine:   combining with respect to   combine/Int
combine:   combining with respect to   combine/linear
combine:   combining with respect to   combine/range
combine:   combining with respect to   combine/range
combine:   combining with respect to   combine/cmbplus
combine:   combining with respect to   combine/cmbplus
combine:   combining with respect to   combine/cmbplus
```

$$\int x + 2\,x^3\,dx$$

Exemplul 5.6 - Aducerea la numitor comun (*normal*)

Daca o expresie contine fractii, este mai util uneori ca aceasta sa fie scrisa sub forma unei singure fractii. Comanda ***normal*** executa aceasta operatie de aducere la un numitor comun.

```
> normal(x+1/x/y);
```

$$\frac{x^2\,y+1}{x\,y}$$

```
> expr:=x^2/(x-1)+1/x^2+1/(1-x);
```

$$expr := \frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x}$$

```
> normal(expr);
```

$$\frac{x^3+x^2+1}{x^2}$$

```
> expr:=(x^4-y^4)/(x+y)^3;
```

$$expr := \frac{x^4-y^4}{(x+y)^3}$$

```
> normal(expr);
```

$$\frac{x^3-x^2\,y+y^2\,x-y^3}{(x+y)^2}$$

Comanda ***normal*** foloseste numitorul in forma data.

```
> expr:=(1/x^2-1/x^3)/(x^2+5);
```

$$expr := \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{x^2+5}$$

```
> normal(expr);
```

$$\frac{x-1}{x^3\,(x^2+5)}$$

Daca se doreste scrierea numitorului in forma extinsa, se foloseste al doilea argument - ***expanded***.

```
> normal(expr,expanded);
```

$$\frac{x-1}{x^5+5\,x^3}$$

Comanda ***normal*** se comporta recursiv pentru functii, liste si alte obiecte structurate:

```
> normal([expr,exp(x+1/x^4)]);
```

$$[\frac{x-1}{x^3\,(x^2+5)},\ e^{(\frac{x^5+1}{x^4})}]$$

```
> expr:=sin((x*(x^2-1)+x)/(x+3))^2+cos((x^3)/(x +3))^2;
```

$$expr := \sin(\frac{x\,(x^2-1)+x}{x+3})^2+\cos(\frac{x^3}{x+3})^2$$

```
> normal(expr);
```

$$\sin(\frac{x^3}{x+3})^2+\cos(\frac{x^3}{x+3})^2$$

Din ultimul exemplu se observa ca aceasta comanda nu simplifica expresiile matematice. Pentru aceasta se utilizeaza comanda ***combine***. Deoarece comanda ***normal*** desface numaratorul rezultatului ea nu este de ajutor atunci cand numaratorul este factorizabil.

```
> expr:=(x^8-256)/(x-2);
```

$$expr := \frac{x^8-256}{x-2}$$

```
> normal(expr);
```

$$x^7+2\,x^6+4\,x^5+8\,x^4+16\,x^3+32\,x^2+64\,x+128$$

Pentru a simplifica expresia cu (x-1), se foloseste comanda ***factor***:

```
> factor(expr);
```

$$(x+2)\,(x^2+4)\,(x^4+16)$$

Exemplul 5.7 - Simplificarea expresiilor (*simplify*)

Dupa efectuarea calculelor in Maple V rezultatul poate avea o forma complicata. Comanda ***simplify*** aplica o serie de transformari care urmaresc sa gaseasca forme cat mai simple pentru expresiile date.

```
> expr:=27^(1/3)+2;
```

$$expr := 27^{1/3}+2$$

```
> simplify(expr);
```

$$5$$

```
> expr:=cos(x)^4+sin(x)^4+2*sin(x)^2*cos(x)^2;
```

$$expr := \cos(x)^4 + \sin(x)^4 + 2\sin(x)^2\cos(x)^2$$

```
> simplify(expr,'trig');
```

$$1$$

Sunt utilizate regulile de simplificare cunoscute pentru expresiile trigonometrice, logaritmice, exponentiale, ridicari la putere si altele.

Daca se specifica o regula de simplificare aparte, ca argument al comenzii ***simplify***, atunci este aplicata doar aceasta regula de simplificare.

```
> expr:=ln(5*x^2)-sin(x)^2-cos(x)^2;
```

$$expr := \ln(5\,x^2) - \sin(x)^2 - \cos(x)^2$$

```
> simplify(expr,trig);
```

$$\ln(5\,x^2) - 1$$

```
> simplify(expr,ln);
```

$$\ln(5) + \ln(x^2) - \sin(x)^2 - \cos(x)^2$$

```
> simplify(expr);
```

$$\ln(5) + \ln(x^2) - 1$$

Programul Maple V poate sa nu efectueze anumite simplificari aparent evidente, datorita faptului ca variabilele sunt considerate implicit ca apartinand unui domeniu general (complex).

```
> expr:=sqrt((x/y)^2);
```

$$expr := \sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$$

```
> simplify(expr);
```

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$$

Optiunea ***assume***=<*propietate*> spune comenzii ***simplify*** ca toate variabilele au acea propietate.

```
> simplify(expr, assume=real);
```

$$\frac{\mathrm{signum}(x)\,x\,\mathrm{signum}(y)}{y}$$

```
> simplify(expr, assume=positive);
```

$$\frac{x}{y}$$

O expresie se poate simplifia cu ajutorul unor reguli de transformare impuse de utilizator.

```
> expr:=x*y^2*z+x*y*z+x*z+y*z*x^2;
```

$$expr := x\,y^2\,z + x\,y\,z + x\,z + y\,z\,x^2$$

```
> simplify(expr,{x*z=2});
```

$$2\,y^2 + 2\,y + 2 + 2\,y\,x$$

Se pot da una sau mai multe relatii pentru o lista de varibile:

```
> expr:=x^4-y^4;
```

$$expr := x^4 - y^4$$

```
> inlocuire:=x^2+y^2=10;
```

$$inlocuire := x^2 + y^2 = 10$$

```
> simplify(expr,{inlocuire},[y,x]);
```

$$20\,x^2 - 100$$

In primul caz, Maple V face substitutia $x^2 = 10 - y^2$, apoi incearca sa faca substitutia pentru y^2; in al doilea caz face substitutia $y^2 = -x^2 + 10$ si incearca substitutia pentru x^2, dar negasind acesti termeni, se opreste.

Exemplul 5.8 - Sortarea expresiilor algebrice (*sort*)

Maple V scrie termenii unui polinom in ordinea in care acestia au fost introdusi. Pentru a sorta polinomul dupa grad se foloseste comanda ***sort***.

```
> pol:=2-3*x^3+5*x^2-x-x^4;
```

$$pol := 2 - 3\,x^3 + 5\,x^2 - x - x^4$$

```
> sort(");
```

$$-x^4 - 3\,x^3 + 5\,x^2 - x + 2$$

Dupa folosirea comenzii ***sort***, polinomul ramane in noua sa forma.

```
> pol;
```

$$-x^4 - 3\,x^3 + 5\,x^2 - x + 2$$

Un polinom se poate sorta dupa grad sau in ordine alfabetica. In general polinomul este sortat dupa grad, dar daca doi termeni au acelasi grad, ei sunt sortati in ordine alfabetica.

```
> sort(a^3+x^3+3*x^2+z^5+y^2+z^4,[a,x,y,z]);
```

$$z^5 + z^4 + a^3 + x^3 + 3\,x^2 + y^2$$

Ordinea variabilelor intr-o lista specificata ca al doilea argument determina ordinea de sortare.

```
> sort(x^5*y^2+y^3*x^3,[x,y]);
```

$$x^5\,y^2 + x^3\,y^3$$

```
> sort(x^5*y^2+y^3*x^3,[y,x]);
```

$$y^2\,x^5 + y^3\,x^3$$

Datele de intrare se pot sorta si in ordine alfabetica folosind optiunea ***plex*** a comenzii ***sort***.

```
> sort(a+3*x^2+x^3+w^5+b*c+y^2+z^4,[a,b,c,w,x,y ,z],plex);
```

$$a + b\,c + w^5 + x^3 + 3\,x^2 + y^2 + z^4$$

De asemenea, comanda ***sort*** poate sorta si liste.

Exemplul 5.9 - Conversia intre forme echivalente (*convert*)

Expresiile matematice pot fi scrise in mai multe forme echivalente folosind comanda ***convert***. De exemplu, $\cos(x)$ se poate exprima folosind functii exponentiale.

```
> convert(cos(x), exp);
```

$$\frac{1}{2}\,e^{(I\,x)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{(I\,x)}}$$

```
> convert(1+tan(x)^2, sincos);
```

$$1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2}$$

```
> convert(arctan(x), ln);
```

$$\frac{1}{2}\,I\,(\ln(1 - I\,x) - \ln(1 + I\,x))$$

```
> convert(binomial(m,n),factorial);
```

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Argumentul ***parfrac*** al comenzii determina dezvoltarea in fractii simple:

```
> convert((x^3+1)/(x^5-x^2),parfrac,x);
```

$$-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

Aceasta comanda se poate folosi pentru a converti un numar real intr-o fractie:

```
> convert(.4354708846,rational);
```

$$\frac{31910}{73277}$$

Conversiile nu sunt intotdeauna inversabile:

```
> convert(sin(x), exp);
```

$$-\frac{1}{2}\,I\,(e^{(I\,x)}-\frac{1}{e^{(I\,x)}})$$

```
> convert(",trig);
```

$$-\frac{1}{2}\,I\,(\cos(x)+I\sin(x)-\frac{1}{\cos(x)+I\sin(x)})$$

Comanda ***simplify*** arata ca aceasta este expresia lui $\sin(x)$.

```
> simplify(");
```

$$\sin(x)$$

5.2 Presupuneri asupra proprietatilor

Exista situatii in care Maple V nu prelucreaza anumite expresii deoarece acestea contin un parametru de natura nedeterminata. In acest caz, poate fi facuta o presupunere asupra naturii parametrului respectiv.

Exemplul 5.10 - Utilizarea comenzii *assume*

Se considera expresia:

```
> sqrt(x^2);
```

$$\sqrt{x^2}$$

MapleV nu poate simplifica aceasta expresie, intrucat presupune ca a puate lua valori atat pozitive cat si negative. Daca presupunem ca a ia numai valori pozitive, acest lucru se specifica folosind comanda ***assume***:

```
> assume(x>0);
> sqrt(x^2);
```

$$x\tilde{}$$

Tilda (˜) de langa variabila indica faptul ca s-a facut o presupunere asupra acestei variabile. O noua presupunere o inlocueste pe cea veche.

```
> assume(x<0);
> sqrt(x^2);
```

$$-x^{\sim}$$

Cu ajutorul comenzii ***about*** se obtin informatii despre presupunerile facute asupra unei necunoscute.

```
> about(x);
```

```
Originally x, renamed x\symbol{126}:
  is assumed to be: RealRange(-infinity,Open(0))
```

Pentru a face presupuneri suplimentare se foloseste comanda ***additionally***.

```
> assume(k,negative);
> additionally(k>=-1);
> about(k);
```

```
Originally k, renamed k\symbol{126}:
  is assumed to be: RealRange(-1,Open(0))
```

Multe functii Maple folosesc presupuneri facute asupra variabilelor. De exemplu, comanda ***frac*** care returneaza partea fractionala dintr-un numar.

```
> frac(a);
```

$$\mathrm{frac}(a^{\sim})$$

```
> assume(a,integer);
> frac(a);
```

$$0$$

Limitele urmatoare depind de parametrul a.

```
> limit(a*x, x=-infinity);
```

$$-\mathrm{signum}(a^{\sim})\,\infty$$

```
> assume(a<0);
> limit(a*x, x=-infinity);
```

$$\infty$$

Pentru a vizualiza felul in care actioneaza o comanda se foloseste instructiunea ***infolevel***:

```
> infolevel[int]:=3;
```

$$infolevel_{int} := 3$$

```
> int(exp(1+c*x)/c,x=0..infinity);
```

```
int/cook/nogo1:   Given Integral    Int(exp(c*x),x = 0 .. infinity)
Fits into this pattern:
Int(exp(-Ucplex*x\symbol{94}S1-U2*x\symbol{94}S2)*x\symbol{94}N*ln(B*x
\symbol{94}DL)\symbol{94}M*cos(C1*x\symbol{94}R)/((A0+A1*x\symbol{94}D
)\symbol{94}P),x = t1 .. t2)
int/indef:   first-stage indefinite integration
int/indef:   first-stage indefinite integration
int/indef2:   second-stage indefinite integration
int/indef2:   applying derivative-divides
```

$$\lim_{x\tilde{} \to \infty} \frac{e^{(1+c\,x\tilde{})}}{c^2} - \frac{e}{c^2}$$

```
> assume(a>0);
```

```
> int(exp(a*x),x=0..infinity);
```

```
int/cook/nogo1:   Given Integral    Int(exp(x),x = 0 .. infinity)
Fits into this pattern:
Int(exp(-Ucplex*x\symbol{94}S1-U2*x\symbol{94}S2)*x\symbol{94}N*ln(B*x
\symbol{94}DL)\symbol{94}M*cos(C1*x\symbol{94}R)/((A0+A1*x\symbol{94}D
)\symbol{94}P),x = t1 .. t2)
int/cook/IIntd1:   --\TEXTsymbol{>} U must be \TEXTsymbol{<}= 0 for
converging integral
--\TEXTsymbol{>} will use limit to find if integral is +infinity
--\TEXTsymbol{>} or - infinity or undefined
```

$$\infty$$

Pentru valori complexe ale lui x, $\ln(e^x)$ este diferit de x.

```
> ln(exp(9*Pi*I));
```

$$I\,\pi$$

De aceea, Maple V nu simplifica expresia $ln(exp(...))$ decat daca x este presupus real.

```
> ln(exp(x));
```

$$x\tilde{}$$

```
> assume(x,real);
> ln(exp(x));
```

$$x\tilde{}$$

Pentru a testa proprietatile variabilelor se poate folosi comanda ***is***.

```
> is(a>0);
```

$$true$$

```
> is (x,complex);
```

$$true$$

```
> is(x,real);
```

$$true$$

Maple pastreaza inca presupunerea ca variabila k este negativa:

```
> ec:=xi^2=k;
```

$$ec := \xi^2 = k\tilde{}$$

```
> solve(ec,{xi});
```

$$\{\xi = I\sqrt{-k\tilde{}}\}, \{\xi = -I\sqrt{-k\tilde{}}\}$$

Pentru a elimina presupunerile care s-au facut pentru o variabila se foloseste atribuirea: *nume_varibila='nume_variabila'*.

```
> ec;
```

$$\xi^2 = k\tilde{}$$

```
> ec:=subs(k='k', ec);
```

$$ec := \xi^2 = k$$

```
> k:='k';
```

$$k := k$$

5.3 Manipulari structurale

Manipularile structurate se refera la selectarea si modificarea unui obiect structurat sau folosirea cunostintelor de structura sau de reprezentare interna a unei expresii. Se au in vedere expresiile care opereaza cu liste sau multimi.

```
> lista:={D,E,A,X,C,H};
```

$$lista := \{D, X, C, A, H, E\}$$

```
> lista[3];
```

$$C$$

Exemplul 5.11 - Maparea functiilor pe o lista sau o multime (*map*)

Daca se doresteca o functie sau o comanda sa fie aplicata fiecarui element in parte si nu unui obiect in ansamblu, atunci se foloseste comanda ***map***.

```
> f([y,z,t]);
```

$$\mathrm{f}([y,\, z,\, t])$$

```
> map(f,[x,y,z]);
```

$$[\mathrm{f}(x),\, \mathrm{f}(y),\, \mathrm{f}(z)]$$

```
> map(expand,{(x^2+3)*(y+1),x^3*(x+4)});
```

$$\{x^4 + 4\,x^3,\, x^2\,y + x^2 + 3\,y + 3\}$$

```
> map(x->2*x,[a,b,c]);
```

$$[2\,a,\, 2\,b,\, 2\,c]$$

Daca se dau comenzii mai mult de doua argumentele, argumentele suplimentare sunt preluate de functie ca variabile independente.

```
> map(f,[x,y],a,b);
```

$$[\mathrm{f}(x,\, a,\, b),\, \mathrm{f}(y,\, a,\, b)]$$

```
> map(diff,[(3*x^2+1)*(x+2),ln(2*x)],x);
```

$$[6\,x\,(x+2) + 3\,x^2 + 1,\, \frac{1}{x}]$$

Comanda ***map2*** este asemanatoare cu ***map***. In timp ce comanda ***map*** considera fiecare element al listei sau multimii ca prima variabla a functiei, comanda ***map2*** considera fiecare element drept al doilea argument.

```
> map2(f,a,[x,y],b,c);
```

$$[\mathrm{f}(a,\, x,\, b,\, c),\, \mathrm{f}(a,\, y,\, b,\, c)]$$

Se poate folosi comanda ***map2*** pentru a obtine derivatele partiale ale unei expresii.

```
> map2(diff,(y^z)/x*z,[x,y,z]);
```

$$[-\frac{y^z\,z}{x^2},\, \frac{y^z\,z^2}{y\,x},\, \frac{y^z\ln(y)\,z}{x} + \frac{y^z}{x}]$$

Comanda ***map2*** se poate folosi alaturi de ***map***, cand se aplica unor subelemente.

```
> map2(map,{[a,b],[c,d],[e,f]},x,y,z);
```

$$\{[\mathrm{a}(x,\, y,\, z),\, \mathrm{b}(x,\, y,\, z)],\, [\mathrm{c}(x,\, y,\, z),\, \mathrm{d}(x,\, y,\, z)],\, [\mathrm{e}(x,\, y,\, z),\, \mathrm{f}(x,\, y,\, z)]\}$$

Cand se doreste generarea unor secvente se poate utiliza comanda ***seq***.

```
> seq(f(i), i={x,y,z});
```

$$\mathrm{f}(x),\, \mathrm{f}(y),\, \mathrm{f}(z)$$

De exemplu, triunghiul lui Pascal se genereaza astfel:

```
> tr:=[seq(i,i=0..5)];
```

$$tr := [0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5]$$

```
> [seq([seq(binomial(n,m),m=tr)],n=tr)];
```

$$[[1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0],\, [1,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0],\, [1,\, 2,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0],\, [1,\, 3,\, 3,\, 1,\, 0,\, 0],\, [1,\, 4,\, 6,\, 4,\, 1,\, 0],\, [1,\, 5,\, 10,\, 10,\, 5,\, 1]]$$

```
> map(print,");
```

$$[1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0]$$

$$[1,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0]$$

$$[1,\, 2,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0]$$

$$[1,\, 3,\, 3,\, 1,\, 0,\, 0]$$

$$[1,\, 4,\, 6,\, 4,\, 1,\, 0]$$

$$[1,\, 5,\, 10,\, 10,\, 5,\, 1]$$

$$[]$$

Comenzile ***add*** si ***mul*** functioneaza ca si ***seq***, doar ca ele genereaza sume si produse in loc de secvente.

```
> add(i^2,i=[3,z,tan(x),-2]);
```

$$13 + z^2 + \tan(x)^2$$

Exemplul 5.12 - Selectarea elementelor din liste si multimi (*select*)

Se pot selecta anumite elemente din liste sau multimi, folosind o functie cu valori booleene.

```
> cond:=x->is(x>=1);
```

$$cond := x \to \text{is}(1 \leq x)$$

Pentru a alege elementele dintr-o lista sau multime se foloseste comanda ***select***.

```
> lista:=[3,2,Pi/3,-2,0];
```

$$lista := [3,\ 2,\ \frac{1}{3}\,\pi,\ -2,\ 0]$$

```
> select(cond,lista);
```

$$[3,\ 2,\ \frac{1}{3}\,\pi]$$

Similar, ***remove*** elimina elemente ce satisfac o anumita conditie.

```
> remove(cond,lista);
```

$$[-2,\ 0]$$

Pentru a determina tipul unei expresii se foloseste comanda ***type***.

```
> type(sqrt(2),numeric);
```

$$false$$

```
> type(1,numeric);
```

$$true$$

```
> type(simplify(sin(x)^2+cos(x)^2),numeric);
```

$$true$$

Comanda ***select*** poate fi combinata cu ***type***, folosind al treilea argument pentru specificarea tipului selectat:

```
> select(type,lista,numeric);
```

$$[3,\ 2,\ -2,\ 0]$$

Exemplul 5.13 - Combinarea a doua liste (*zip*)

Cateodata se doreste combinarea a doua liste intr-un anumit mod.

```
> X:=[seq(ithprime(i),i=1..6)];
```

$$X := [2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13]$$

```
> Y:=[seq(binomial(5,i),i=1..6)];
```

$$Y := [5, 10, 10, 5, 1, 0]$$

Pentru a trasa un grafic $X{=}f(Y)$, este necesar sa construim o noua lista din cele doua, astfel: [[*x1*,*y1*], [*x2*,*y2*],...].

```
> pair:=(x,y)->[x,y];
```

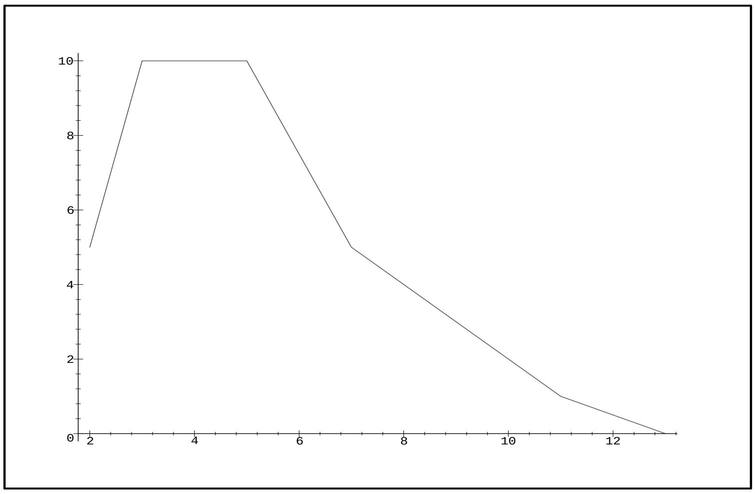
$$pair := (x, y) \to [x, y]$$

Comanda ***zip*** poate combina cele doua liste folosind functia astfel definita.

```
> P:=zip(pair,X,Y);
```

$$P := [[2, 5], [3, 10], [5, 10], [7, 5], [11, 1], [13, 0]]$$

```
> plot(P);
```



Daca cele doua liste au lungime diferita, comanda ***zip*** intoarce o lista de lungimea listei mai scurte.

```
> zip((x,y)->x.y,[a,b],[1,2,3]);
```

$$[a1, b2]$$

Comenzii ***zip*** i se poate specifica si cel de-al patrulea argument. Atunci comanda intoarce o lista de lungimea celei mai lungi liste, completand valorile care lipsesc cu cel de-al patrulea element.

```
> zip((x,y)->x.y,[a,b],[1,2,3],c);
```

$$[a1, b2, c3]$$

```
> zip(igcd,[765,745,658],[35,96,453,327,758],6! );
```

$$[5, 1, 1, 3, 2]$$

Exemplul 5.14 - Sortarea listelor (*sort*)

O lista este o structura de date in care se pastreaza o ordine a elementelor. Elementele din lista sunt aranjate exact in aceeasi ordine in care au fost introduse. Comanda ***sort*** sorteaza liste in ordine crescatoare sau alfabetica:

```
> sort([0,2,1,5,0,7,1,3]);
```

$$[0, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 7]$$

```
> sort([Maple,este,un,program,performant]);
```

$$[Maple, este, performant, program, un]$$

Daca se combina intr-o lista cifre si caractere, sau alte expresii, comanda ***sort*** foloseste codurile lor.

```
> sort([a,10,x,10*z]);
```

$$[10, x, a, 10\,z]$$

```
> sort([-8,36,sin(36)]);
```

$$[-8, 36, \sin(36)]$$

Se va lua in considerare ca in Maple V π este un simbol si nu un numar.

```
> sort([5.8,Pi,7/3]);
```

$$[\pi, 5.8, \frac{7}{3}]$$

Folosirea unei functii booleene ca al doilea argument permite aranjarea unei liste in ordine descrescatoare.

```
> sort([3.21,2,1/4]);
```

$$[\frac{1}{4}, 2, 3.21]$$

Comanda ***is*** compara constante precum π si $sin(3)$ ca simple numere.

```
> f_bool:=(x,y)->is(x<y);
```

$$f\_bool := (x, y) \to \mathrm{is}(x < y)$$

```
> sort([3.4,Pi,2/3,sin(3)],f_bool);
```

$$[\sin(3), \frac{2}{3}, \pi, 3.4]$$

Se pot sorta siruri si dupa lungime:

```
> lungime:=(x,y)-> evalb(length(x)<length(y));
```

$$lungime := (x, y) \to \mathrm{evalb}(\mathrm{length}(x) < \mathrm{length}(y))$$

```
> sort([Maple,este,un,program,performant],lungi me);
```

$$[un,\ este,\ Maple,\ program,\ performant]$$

Maple V nu are o nici o comanda pentru sortarea listelor formate din siruri combinate cu numere. Pentru a face acest lucru se procedeaza in felul urmator:

```
> lista:=[1,d,4,5,7,f,u,o,6];
```

$$lista := [1,\ d,\ 4,\ 5,\ 7,\ f,\ u,\ o,\ 6]$$

Se construiesc doua liste: una continand numere si cealalta caractere.

```
> lista1:=select(type,lista,string);
```

$$lista1 := [d,\ f,\ u,\ o]$$

```
> lista2:=select(type,lista,numeric);
```

$$lista2 := [1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 6]$$

Apoi se sorteaza cele doua liste independent.

```
> lista1:=sort(lista1);
```

$$lista1 := [d,\ f,\ o,\ u]$$

```
> lista2:=sort(lista2);
```

$$lista2 := [1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$$

In final, se combina cele doua liste.

```
> lista:=[op(lista1),op(lista2)];
```

$$lista := [d,\ f,\ o,\ u,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7]$$

Comanda ***sort*** poate sorta inclusiv expresii algebrice.

Exemplul 5.15 - Partile unei expresii (*rhs*, *lhs*, *numer*, *denom*, *op*, *nops*, *select*, *remove*)

Pentru a lucra in detaliu cu o expresie, trebuie selectata intai fiecare parte a ei. Exista trei cazuri simple: ecuatii, domenii si fractii. Comenzile ***lhs*** si ***rhs*** selecteaza partea din stanga, respectiv cea din dreapta a semnului egal al unei ecuatii.

```
> ec:=x^2+y^2=r^2;
```

$$ec := x^2 + y^2 = r^2$$

```
> lhs(ec);
```

$$x^2 + y^2$$

```
> rhs(ec);
```

$$r^2$$

Aceste comenzi se pot folosi si in cazul domeniilor (intervalelor), pentru selectarea limitelor:

```
> lhs(0..infinity);
```

$$0$$

```
> rhs(2..infinity);
```

$$\infty$$

```
> ec:=z=0..4;
```

$$ec := z = 0..4$$

```
> lhs(ec);
```

$$z$$

```
> rhs(ec);
```

$$0..4$$

```
> lhs(rhs(ec));
```

$$0$$

```
> rhs(rhs(ec));
```

$$4$$

Comenzile ***numer*** si ***denom*** extrag numaratorul si respectiv numitorul unei fractii:

```
> numer(5/x);
```

$$5$$

```
> denom(5/x);
```

$$x$$

```
> f:=(1+sin(x)-1/x)/(y^3+cos(x));
```

$$f := \frac{1 + \sin(x) - \dfrac{1}{x}}{y^3 + \cos(x)}$$

```
> numer(f);
```

$$x+\sin(x)\,x-1$$

```
> denom(f);
```

$$x\,(y^3+\cos(x))$$

Se considera expresia:

```
> expr:=2+2*sin(x)*cos(x)^2;
```

$$expr := 2+2\sin(x)\cos(x)^2$$

Comanda ***whattype*** indentifica expresia ca suma.

```
> whattype(expr);
```

$$+$$

Pentru a lista termenii unei sume sau operantii dintr-o expresie, se foloseste comanda ***op***.

```
> op(expr);
```

$$2,\ 2\sin(x)\cos(x)^2$$

Pentru a numara acesti termeni se foloseste ***nops***.

```
> nops(expr);
```

$$2$$

Deoarece ***op(expr)*** este o secventa, se poate extrage orice termen:

```
> t2:=op(expr)[2];
```

$$t2 := 2\sin(x)\cos(x)^2$$

Acest termen este un produs de trei factori:

```
> whattype(t2);
```

$$*$$

```
> nops(t2);
```

$$3$$

```
> op(t2);
```

$$2,\ \sin(x),\ \cos(x)^2$$

Acesti factori pot fi analizati in mod similar:

```
> f2:=op(t3)[2];
```

$$f2 := \cos(x)^2$$

```
> whattype(f2);
```

$$\hat{}$$

```
> op(f2);
```

$$\cos(x),\ 2$$

```
> op1:=op(f2)[1];
```

$$op1 := f2_1$$

```
> whattype(op1);
```

$$function$$

```
> op(op1);
```

$$x$$

```
> whattype(op(op1));
```

$$string$$

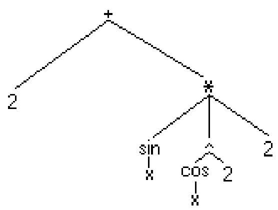
```
> nops(op(op1));
```

$$1$$

```
> op(op(op1));
```

$$1$$

Arborele pentru ***expr*** arata astfel:



Peste elementele dintr-o lista sau o multime precum si peste operanzii unei expresii se poate mapa o functie:

```
> map(f,x^y);
```

$$f(x)^{f(y)}$$

Pentru manipularea termenilor unei expresii se pot aplica si comenzile ***select*** si ***remove***, care selecteaza sau elimina operanzii doriti.

```
> cond:=x->evalb(is(x>2)=true);
```

$$cond := x \to \mathrm{evalb}(\mathrm{is}(2 < x) = true)$$

```
> remove(cond,1-3*cos(x)-exp(2));
```

$$1 - 3\cos(x) - e^2$$

Comanda ***has*** determina daca o expresie contine anumite subexpresii.

```
> has(alpha*exp(cos(y^x)), y^x);
```

$$true$$

Solutiile ecuatiilor de mai jos contin ***RootOf***.

```
> sol:={solve({x^2*y^2=2*y,x^2-y^2=x},{x,y})};
```

$$sol := \{ \{y = \frac{1}{2}\,\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)^4 - \frac{1}{2}\,\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)^3,\ x = \mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)\}, \{y = 0,\ x = 0\},\ \{y = 0,\ x = 1\}\}$$

Pentru a extrage solutiile, se foloseste comanda ***select*** cu optiunea ***has***.

```
> select(has,sol,RootOf);
```

$$\{\{y = \frac{1}{2}\,\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)^4 - \frac{1}{2}\,\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)^3,\ x = \mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)\}\}$$

```
> type(1+2*a,`+`);
```

$$true$$

Comanda ***select*** foloseste al treilea argument pentru tip.

```
> expr:=((1+2*a)*b^2*(sin(a+b)));
```

$$expr := (1 + 2\,a)\,b^2 \sin(a + b)$$

```
> select(type,expr,`+`);
```

$$1 + 2\,a$$

Comanda ***hastype*** determina daca o expresie contine o subexpresie de anumit tip.

```
> hastype(sin(2+exp(Pi)),`+`);
```

$$true$$

```
> select(hastype,expr,`+`);
```

$$(1 + 2\,a)\sin(a + b)$$

Daca ne intereseaza o subexpresie de-un anumit fel, se foloseste comanda ***indets***.

```
> indets(expr,`+`);
```

$$\{a + b,\ 1 + 2\,a\}$$

```
> indets(sol,RootOf);
```

$$\{\mathrm{RootOf}(\_Z^6 - 4 - \_Z^5)\}$$

Nu toate subexpresiile au un tip explicit definit, dar se poate folosi structura:

```
> type(diff(y(x),x),specfunc(anything,diff));
```

$$true$$

Astfel se pot gasi toate derivatele dintr-o ecuatie diferentiala.

```
> DE:=expand(diff(cos(y(t)+t)*sin(t*z(t)),t))+d iff(x(t),t);
```

$$\begin{aligned}DE := &-\sin(t\,\mathrm{z}(t))\sin(\mathrm{y}(t))\cos(t)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)) - \sin(t\,\mathrm{z}(t))\sin(\mathrm{y}(t))\cos(t)\\ &- \sin(t\,\mathrm{z}(t))\cos(\mathrm{y}(t))\sin(t)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)) - \sin(t\,\mathrm{z}(t))\cos(\mathrm{y}(t))\sin(t)\\ &+ \cos(t\,\mathrm{z}(t))\cos(\mathrm{y}(t))\cos(t)\,\mathrm{z}(t) + \cos(t\,\mathrm{z}(t))\cos(\mathrm{y}(t))\cos(t)\,t\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t))\\ &- \cos(t\,\mathrm{z}(t))\sin(\mathrm{y}(t))\sin(t)\,\mathrm{z}(t) - \cos(t\,\mathrm{z}(t))\sin(\mathrm{y}(t))\sin(t)\,t\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t)) + (\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t))\end{aligned}$$

```
> indets(DE,specfunc(anything,diff));
```

$$\{\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t),\ \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t),\ \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)\}$$

Urmatorii operanzi din DE contin derivate.

```
> select(hastype,DE,specfunc(anything,diff));
```

$$\begin{aligned}&-\sin(t\,\mathrm{z}(t))\sin(\mathrm{y}(t))\cos(t)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)) - \sin(t\,\mathrm{z}(t))\cos(\mathrm{y}(t))\sin(t)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t))\\ &+ \cos(t\,\mathrm{z}(t))\cos(\mathrm{y}(t))\cos(t)\,t\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t)) - \cos(t\,\mathrm{z}(t))\sin(\mathrm{y}(t))\sin(t)\,t\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t)) + (\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t))\end{aligned}$$

```
> select(type,DE,specfunc(anything,diff));
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t)$$

Exemplul 5.16 - Substitutia expresiilor (*subs*)

De multe ori se doreste inlocuirea unei variabile cu o valoare.

```
> y:=ln(sin(x*exp(cos(x))));
```

$$y := \ln(\sin(x\,e^{\cos(x)}))$$

```
> yprime:=diff(y,x);
```

$$yprime := \frac{\cos(x\, e^{\cos(x)})\,(e^{\cos(x)} - x\sin(x)\, e^{\cos(x)})}{\sin(x\, e^{\cos(x)})}$$

Se va folosi comanda ***subs*** pentru a se da o valoare lui x in ***yprime***:

```
> subs(x=2,yprime);
```

$$\frac{\cos(2\, e^{\cos(2)})\,(e^{\cos(2)} - 2\sin(2)\, e^{\cos(2)})}{\sin(2\, e^{\cos(2)})}$$

```
> evalf(");
```

$$-.1388047428$$

Comanda ***subs*** nu face substitutii matematice ci doar formale, deci cu ajutorul ei se poate substitui orice subexpresie cu alta.

```
> subs(cos(x)=3,yprime);
```

$$\frac{\cos(x\, e^3)\,(e^3 - x\sin(x)\, e^3)}{\sin(x\, e^3)}$$

```
> expr:=a*b*c*a^b;
```

$$expr := a\, b\, c\, a^b$$

```
> subs(a*b=3,expr);
```

$$a\, b\, c\, a^b$$

Expresia este un produs de patru termeni:

```
> op(expr);
```

$$a,\ b,\ c,\ a^b$$

Dar produsul *a*b* nu este un termen al expresiei, deci acesta este motivul pentru care aparent substitutia nu a avut succes. Pentru a realiza substitutia dorita se poate substitui doar una din variabile cu expresia dorita:

```
> subs(a=3/b,expr);
```

$$3\, c\, (\frac{3}{b})^b$$

Sau se simplifica expresia folosind o conditie:

```
> simplify(expr,{a*b=3});
```

$$3\, c\, a^b$$

Intr-o expresie se pot face mai multe substituiri simultan.

```
> expr:=z*sin(x^2)+w;
```

$$expr := z\sin(x^2) + w$$

```
> subs(x=sqrt(z),w=Pi,expr);
```

$$z\sin(z) + \pi$$

Comanda ***subs*** realizeaza inlocuirile succesiv, in secventa, de la stanga la dreapta.

```
> subs(z=x,x=sqrt(z),expr);
```

$$\sqrt{z}\sin(z) + w$$

Daca se specifica o multime de substitutii, atunci acestea se fac simultan si nu succesiv.

```
> subs({z=x,x=sqrt(z)},expr);
```

$$x\sin(z) + w$$

```
> subs({x=sqrt(Pi),z=2},expr);
```

$$2\sin(\pi) + w$$

In general trebuie explicitat rezultatul unei substitutii.

```
> eval(");
```

$$w$$

Pentru a specifica un anumit operand dintr-o expresie se foloseste comanda ***subsop***.

```
> expr:=5^x;
```

$$expr := 5^x$$

```
> op(expr);
```

$$5,\ x$$

```
> subsop(1=t,expr);
```

$$t^x$$

Intr-o functie operandul zero este numele functiei:

```
> ep:=cos(x);
```

$$ep := \cos(x)$$

```
> subsop(0=sin,ep);
```

$$\sin(x)$$

Exemplul 5.17 - Conversia tipului unei expresii (*convert*)

Se presupune ca tipul unei expresii trebuie schimbat. Consideram seria Taylor a functiei *sinus*:

```
> f:=sin(x);
```

$$f := \sin(x)$$

```
> t:=taylor(f,x=0);
```

$$t := x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

Ea este convertita prin trunchiere intr-un polinom.

```
> p:=convert(t,polynom);
```

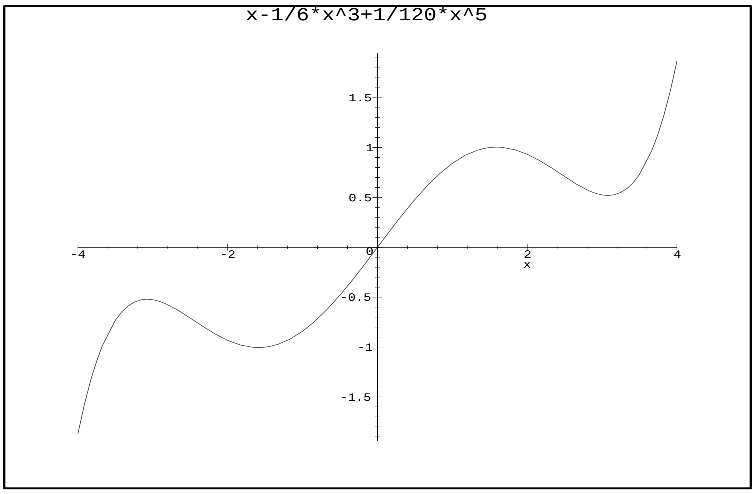
$$p := x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5$$

Urmatoarea conversie reprezinta polinomul ca un text ce poate fi utilizat de exemplu ca titlul graficului:

```
> p_txt:=convert(p,string);
```

$$p\_txt := x - 1/6 * x\hat{}3 + 1/120 * x\hat{}5$$

```
> plot(p, x=-4..4,title=p_txt);
```

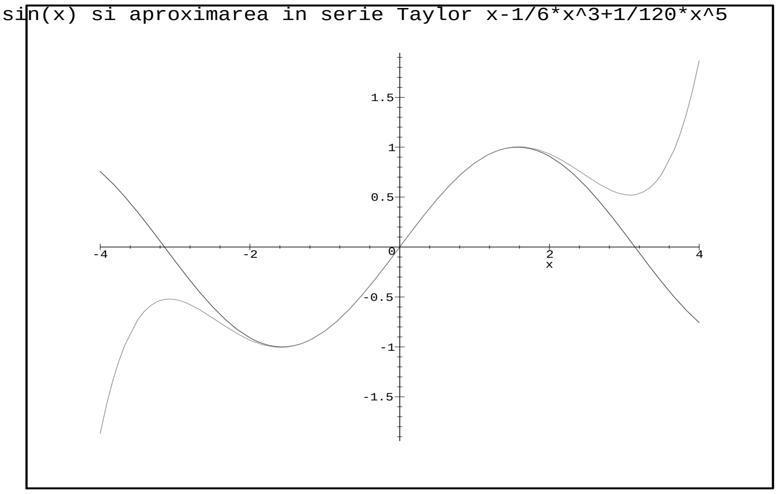


Comanda ***cat*** concateneaza toate argumentele sale pentru a creea un nou sir de caractere.

```
> ttl:=cat(convert(f,string),` si aproximarea in serie Taylor `,p_txt);
```

ttl := *sin*(*x*) *si aproximarea in serie Taylor* $x - 1/6 * x\hat{}3 + 1/120 * x\hat{}5$

```
> plot([f,p],x=-4..4,title=ttl);
```



O lista se poate converti intr-o multime sau invers.

```
> L:={1,2,5,2,1};
```

$$L := \{1, 2, 5\}$$

```
> S:=convert(L,set);
```

$$S := \{1, 2, 5\}$$

```
> convert(S,list);
```

$$[1, 2, 5]$$

Comanda ***convert*** poate prelucra multe alte structuri matematice.

5.4 Reguli de evaluare

Exemplul 5.18 - Nivele de evaluare

Cand se foloseste un nume sau un simbol, Maple V verifica daca acesta are atribuita o valoare. De cate ori va intalni numele respectiv, Maple V il va inlocui cu valoarea atribuita. Daca valorii la randul ei ii este atribuita o alta valoare, Maple V va mai face inca o inlocuire.

```
> a:=b;
```

$$a := b$$

```
> b:=c;
```

$$b := c$$

```
> c:=d;
```

$$c := d$$

```
> d:=3;
```

$$d := 3$$

```
> a;
```

$$3$$

Se observa ca Maple V relizeaza evaluarea completa de la ultimul nivel catre primul. Cu ajutorul comenzii ***eval*** se poate controla nivelul de evaluare al unei expresii. Daca apelam ***eval*** cu un singur argument, evalarea va fi totala.

```
> eval(a);
```

$$3$$

Daca folosim si un al doilea argument in comanda ***eval***, acesta va arata pana la ce nivel sa fie facuta evaluarea primului argument.

```
> eval(a,1);
```

$$b$$

```
> eval(a,2);
```

$$c$$

```
> eval(b,3);
```

$$3$$

Exemplul 5.19 - Evaluarea ultimului nume si a primului nivel

Exceptiile de la regula evaluarii totale sunt obiectele structurate: tablouri, matrici si proceduri.

```
> a:=b;
```

$$a := c$$

```
> b:=c;
```

$$b := c$$

```
> c:=array([[1,2],[3,4]]);
```

$$c := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> a;
```

$$c$$

Se observa ca Maple V face evaluarea completa pana la nivelul ultimului nume. Inlocuire cu valoarea ultimului nume nu se mai face deoare structurile de date pot avea dimensiuni mari si afisarea lor de fiecare data poate deveni incomoda. Daca se doreste totusi evaluarea completa, se poate apela comanda ***eval***.

```
> eval(a);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> dif:=proc(a,b) a-b; end;
```

$$dif := \mathbf{proc}(a,\, b)\, a - b\, \mathbf{end}$$

```
> dif;
```

$$dif$$

```
> eval(dif);
```

$$\mathbf{proc}(a,\, b)\, a - b\, \mathbf{end}$$

Acest mod de evaluare asupra variabilelor locale se aplica la primul nivel. Rezultatul evaluarii unei astfel de variabile este valoarea de la nivelul imediat urmator.

```
> procedura:=proc()
> local a,b,c;
> a:=b;
> b:=c;
> c:=4;
> a;
> end:
> procedura();
```

$$b$$

Exemplul 5.20 - Reguli speciale de evaluare (*assigned*, *evaln*, *seq*)

Aceste comenzi isi evalueaza argumentele pana cand acestora le sunt atribuite tot nume.

```
> x:=y;
```

$$x := y$$

```
> y:=z;
```

$$y := z$$

```
> evaln(x);
```

$$x$$

Comanda ***assigned*** verifica daca unui nume ii este atribuita o valoare.

```
> assigned(x);
```

$$true$$

Comanda ***seq*** este o comanda care creaza secvente de expresii fara a-si evalua parametrii. Astfel, chiar daca unei varibile ii este atribuita o valoare fixa, **seq** o poate folosi ca varibila contor.

```
> k:=12;
```

$$k := 12$$

```
> seq(k^2+k,k=1..3);
```

$$2,\ 6,\ 12$$

```
> k;
```

$$12$$

Comanda ***sum***, insa, nu are un astfel de efect. De exemplu:

```
> sum(k^2,k=1..3);
```

```
Error, (in sum) summation variable previously assigned,
 second argument evaluates to, 12 = 1 .. 3
```

Exemplul 5.21 - Itarzierea evaluarii (caracterul ')

Maple V permite folosirea caracterului ' pentru a intarzia evaluarea unui nivel. Faptul ca un nume este incadrat de aceste caractere indica programului Maple V ca evaluarea numelui nu trebuie facuta la acea apelare.

```
> k:=2;
```

$$k := 2$$

```
> k;
```

$$2$$

```
> 'k';
```

$$k$$

In acest mod putem rezolva problema aparuta in cazul comenzii ***sum*** de mai sus.

```
> sum('k^2','k'=1..3);
```

$$14$$

```
> k;
```

$$2$$

Evaluarea completa a unei expresii incadrade de **'** elimina un nivel de incadrare.

```
> a:=2;
```

$$a := 2$$

```
> ''a'+5';
```

$$'a' + 5$$

```
> ";
```

$$a + 5$$

```
> ";
```

$$7$$

Incadrarea unei expresii intre caractere **'** intarzie evaluarea dar nu poate preveni simplificarile care sunt facute inmod automat.

```
> '2-2';
```

$$0$$

```
> 'x+2*y+z-2*y+3*z';
```

$$x + 4\,z$$

Stergerea efectului unei atribuiri catre un nume se poate astfel:

```
> a:=10;
```

$$a := 10$$

```
> a;
```

$$10$$

```
> a:='a';
```

$$a := a$$

```
> a;
```

$$a$$

In general pentru a sterge efectul unei atribuiri se foloseste comanda ***evaln***.

```
> k:=3;
```

$$k := 3$$

```
> a[k]:=14;
```

$$a_3 := 14$$

De notat ca *a[k]* este vazut ca *a[k]* si nu ca *a[3]*.

```
> 'a[k]';
```

$$a_k$$

```
> evaln(a[k]);
```

$$a_3$$

```
> a[k]:=evaln(a[k]);
```

$$a_3 := a_3$$

```
> a[k];
```

$$a_3$$

Folosirea variabilelor incadrate de ***' ca argumente de functii***

In anumite cazuri este foarte util sa putem da nume rezultatelor obtinute. Trebuie verificat, insa, ca numele sa nu aiba o valoare deja atribuita.

```
> divide(a^2-b^2,a-b,'c');
```

$$true$$

```
> c;
```

$$a + 2$$

```
> c:=2;
```

$$c := 2$$

```
> divide(a^2-4,a-2,c);
```

```
Error, wrong number (or type) of parameters in function divide
```

Comenzile ***rem***, ***quo***, ***irem*** si ***iqou*** au un comportament asemanator.

Exemplul 5.22 - Concatenarea numelor

Operatorul de concatenare este caracterul "**.**". In interiorul numelui format prin concatenare, acest operator determina evaluarea a ceea ce se afla la dreapta sa, fara a evalua ceea ce se afla la stanga.

```
> a.b;
```

$$ab$$

```
> a:=x;
```

$$a := x$$

```
> b:=2;
```

$$b := 2$$

```
> a.b;
```

$$a2$$

```
> c:=3;
```

$$c := 3$$

```
> a.b.c;
```

$$a23$$

Programul Maple V nu evalueaza o concatenare.

```
> a:=x;
```

$$a := x$$

```
> b:=y+1;
```

$$b := y + 1$$

```
> nume:=a.b;
```

$$nume := a.(y + 1)$$

```
> y:=3;
```

$$y := 3$$

```
> nume;
```

$$a4$$

Se pot utiliza nume formate prin concatenare si carora apoi sa le fie atribuite valori.

```
> k:=1;
```

$$k := 1$$

```
> x.k:=0;
```

$$x1 := 0$$

```
> sum('a.i'*x^i,i=0..8);
```

$$a0 + a1\,x + a2\,x^2 + a3\,x^3 + a4\,x^4 + a5\,x^5 + a6\,x^6 + a7\,x^7 + a8\,x^8$$

Daca eliminam **'** , Maple V va evalua $a.i$ cu ai.

```
> sum(a.i*x^i,i=0..8);
```

$$ai + ai\,x + ai\,x^2 + ai\,x^3 + ai\,x^4 + ai\,x^5 + ai\,x^6 + ai\,x^7 + ai\,x^8$$

5.5 Exercitii propuse

1. Sa se rezolve ecuatia: $3\,x + 7 = 13$;

2. Sa se dezvolte polinoamele: a) $(x + a)(x + 2\,a)(x + 3\,a)(x + 4\,a)$;

b) $(a + b - c)(-a + b + c)(a - b + c)$;

3. Sa se grupeze in forma recursiva si apoi distributiva dupa oricare doua variabile, expresiile:

a) $b\,c\,x + a\,c\,y + a\,b\,z - x\,y\,z$;,

b) $a\,b\,c - a\,y\,z - b\,z\,x - c\,x\,y$;

4. Sa se factorizeze expresiile: a) $\frac{(x^3-y^3)\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)\,(x^3+y^3)}$,

b) $\frac{a-b}{a+a\,b} + \frac{b-c}{1+b\,c} + \frac{c-a}{1+c\,a}$;

5. Sa se factorizeze polinomul $x^4 - 9$, folosind optiunea ***RootOf***;

6. Sa se rationalizeze expresiile: a) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

b) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

7. Sa se calculeze: $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c}$;

8. Sa se simplifice expresia: $\frac{1+\cos(2\,x)}{2} + \frac{\sin(2\,x)\sin(x)}{2\cos(x)}$;

9. Sa se simplifice expresia: $a^4\,b^3\,c^2\,d + a\,b^4\,c^3\,d^2 + a^2\,b\,c^4\,d^3 + a^3\,b^2\,c\,d^4$, tinand cont ca $a\,b\,c\,d = 3$;

10. Sa se calculeze $x^4 - y^4 + x^2 - y^2 - x + y$, stiind ca $x - y = 3$;

11. Sa se calculeze valorile functiei $\sin(x)^3 + \cos(x)^4 + 5\sin(x)\cos(x)$ pe multimea: $\{0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\,\pi}{4},\ \frac{3\,\pi}{2}\}$, folosind o singura linie de comanda;

12. Din lista valorilor functiei de mai sus sa se selecteze cu ajutorul comenzii ***select*** elementele pozitive.;

13. Sa se genereze doua liste de cate 7 elemente, sa se combine aceste liste si sa se reprezinte grafic lista de perechi obtinuta;

14. Se da lista: $[a, c, 23, 45, dc, 6, 4, 2, t]$. Sa se sorteze aceasta lista astfel incat sa se obtina: $[a, c, dc, t, 2, 4, 6, 23, 45]$.

15. Sa se traseze graficul X=f(Y), unde:

X := [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23],

Y := [8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1, 0];

16. Sa se determine maximul reuniunii multimilor:

list1 = [1, 67, 15, 24, 5, 7, −34, 24, 6, 42, 6, 1, 4, 5],

list2 = [1, 0, 43, 17, 52, 7, −87, 45, 35, 42, 6, 78, 2, 6, 12, 4, 45];

17. Sa se demonstreze egalitatile:

a) $\frac{a^2}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)\,(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)\,(c-b)} = 1;$

b) $\frac{2\,(tg^2)(\frac{a}{2})+1+(tg^4)(\frac{a}{2})}{[1+(tg^2)(\frac{a}{2})]^2} = 1.$

18. Simplificati expresia: $expr := \ln(e^{\cos(x)})$.

19. Rezolvati ecuatia: $m\,x^2 + 2\,(m-1)\,x + m - 1 = 0$ in care m este un parametru real.

6 Exemple de utilizare pentru rezolvarea problemelor matematice

Maple V poate asista utilizatorul in prezentarea si rezolvarea diferitelor probleme de matematica. Prima parte a acestui capitol descrie si analizeaza concepte elementare de analiza matematica (folosind comenzile pachetului ***student***) cum sunt derivata si integrala. A doua parte a capitolului trateaza rezolvarea ecuatiilor diferentiale ordinare iar a treia parte se refera la ecuatii cu derivate partiale.

6.1 Calcule introductorii

Acest paragraf contine exemple referitoare la rezolvarea unor probleme simple de analiza, cum sunt derivata si integrala unei functii, dezvoltarea in serie Taylor si calculul unor derivate partiale.

Exemplul 6.1 - Derivata unei functii

Aceasta sectiune ilustreaza semnificatia grafica a derivatei si modul in care se pot gasi punctele de inflexiune ale unei functii.

Ne propunem sa determinam derivata functiei $f : x \text{ -> } e^{\sin(x)}$ evaluata in punctul $x0 = 1$.

```
> f:=x->exp(sin(x));
```

$$f := x \to e^{\sin(x)}$$

```
> x0:=1;
```

$$x0 := 1$$

Fie $p0$ si $p1$ doua puncte pe graficul functiei f.

```
> p0:=[x0,f(x0)];
```

$$p0 := [1,\, e^{\sin(1)}]$$

```
> p1:=[x0+h,f(x0+h)];
```

$$p1 := [1+h,\, e^{\sin(1+h)}]$$

Panta secantei ce trece prin punctele $p0$ si $p1$ se poate gasi cu comanda ***slope*** continuta in pachetul ***student***.

```
> with(student):
> m:=slope(p0,p1);
```

$$m := -\frac{e^{\sin(1)} - e^{\sin(1+h)}}{h}$$

Daca $h = 1$, panta este:

```
> subs(h=1,m);
```

$$-e^{\sin(1)} + e^{\sin(2)}$$

Comanda ***evalf*** ne da o aproximare in virgula mobila a pantei.

```
> evalf(");
```

$$.162800903$$

Cand h tinde catre *0*:

```
> h_values:=[seq(1/i^2,i=1..20)];
```

$$h\_values := \left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \frac{1}{81}, \frac{1}{100}, \frac{1}{121}, \frac{1}{144}, \frac{1}{169}, \frac{1}{196}, \frac{1}{225}, \frac{1}{256}, \frac{1}{289}, \frac{1}{324}, \frac{1}{361}, \frac{1}{400}\right]$$

panta ia urmatoarele valori:

```
> seq(evalf(m),h=h_values);
```

.162800903, 1.053234750, 1.17430578, 1.21091762, 1.22680697, 1.23515485, 1.2400915, 1.2432565, 1.2454086, 1.2469391, 1.2480669, 1.2489216, 1.2495855, 1.2501111, 1.2505343, 1.2508805, 1.2511671, 1.2514069, 1.2516098, 1.2517828

Secanta are urmatoarea ecuatie:

```
> y-p0[2]=m*(x-p0[1]);
```

$$y - e^{\sin(1)} = -\frac{\left(e^{\sin(1)} - e^{\sin(1+h)}\right)(x-1)}{h}$$

Comanda ***isolate*** extrage variabila independenta y.

```
> isolate(",y);
```

$$y = -\frac{\left(e^{\sin(1)} - e^{\sin(1+h)}\right)(x-1)}{h} + e^{\sin(1)}$$

```
> secant:=unapply(rhs("),x);
```

$$secant := x \to -\frac{\left(e^{\sin(1)} - e^{\sin(1+h)}\right)(x-1)}{h} + e^{\sin(1)}$$

Acum pot fi desenate functia si secanta pe acelasi grafic pentru diferite valori ale lui h.

```
> S:=seq(plot([f(x),secant(x)], x=0..4,
> view=[0..4, 0..4],
> title=convert(evalf(m),string) ),
> h=h_values):
```

Comanda ***display*** poate afisa desenele in secvente asemanatoare unei animatii.

```
> with(plots):
> display(S,insequence=true,view=[0..4, 0..4]);
```

La limita cind h tinde la *0* panta devine:

```
> Limit(m,h=0);
```

$$\lim_{h \to 0} -\frac{e^{\sin(1)} - e^{\sin(1+h)}}{h}$$

Valoarea limitei este :

```
> value(");
```

$$e^{\sin(1)} \cos(1)$$

Raspunsul este chiar valoarea derivatei functiei *f*. Pentru a vedea acesta se deriveaza functia *f*.

```
> diff(f(x),x);
```

$$\cos(x)\, e^{\sin(x)}$$

Se defineste functia *f1* ca fiind prima derivata a functiei *f*.

```
> f1:=unapply(",x);
```

$$f1 := x \to \cos(x)\, e^{\sin(x)}$$

Se poate vedea ca *f1(x0)* are valoarea limitei calculata anterior.

```
> f1(x0);
```

$$e^{\sin(1)} \cos(1)$$

Derivata a doua are expresia:

```
> diff(f(x),x,x);
```

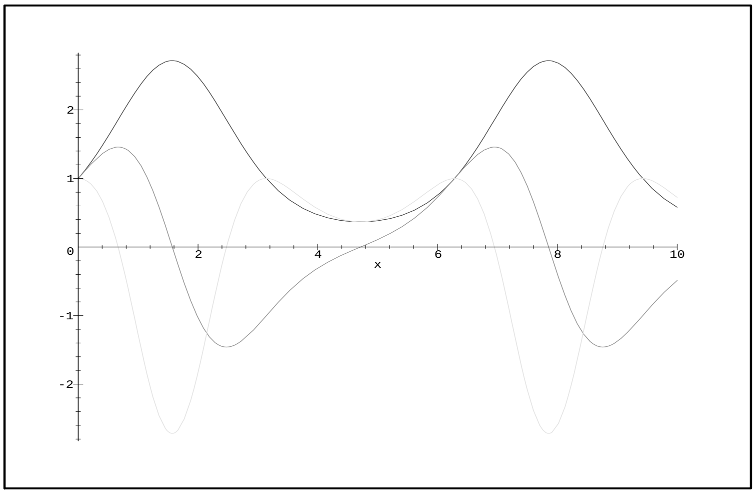
$$-\sin(x)\, e^{\sin(x)} + \cos(x)^2\, e^{\sin(x)}$$

Se defineste functia *f2* ca fiind derivata a doua a functiei *f*.

```
> f2:=unapply(",x);
```

$$f2 := x \to -\sin(x)\, e^{\sin(x)} + \cos(x)^2\, e^{\sin(x)}$$

```
> plot([f(x),f1(x),f2(x)],x=0..10);
```



Graficul lui *f* are un punct de inflexiune acolo unde derivata a doua isi schimba semnul.

```
> sol:={solve(f2(x)=0,x)};
```

$$sol := \left\{ -\arctan\left(2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}} \right) + \pi,\ \arctan(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5},\ -\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}),\ \arctan\left(2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}} \right),\right.$$
$$\left. \arctan(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5},\ \frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}) \right\}$$

Doua dintre aceste solutii sunt complexe.

```
> evalf(sol);
```

$$\{-1.570796327 - 1.061275062\,I,\ -1.570796327 + 1.061275062\,I,\ .6662394325,$$
$$2.475353222\}$$

In acest exemplu ne intereseaza numai solutiile reale. Se poate folosi comanda ***select*** pentru selectarea numerelor reale din multimea de solutii.

```
> infl:=select(type,sol,realcons);
```

$$\mathit{infl} := \left\{-\arctan\left(2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}\right)+\pi,\ \arctan\left(2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}\right)\right\}$$

```
> evalf(infl);
```

$$\{.6662394325,\ 2.475353222\}$$

Se poate vedea din grafic ca *f2* isi modifica semnul la aceste valori.
Setul de puncte de inflexiune are coordonatele:

```
>{seq([x,f(x)],x=infl)};
```

$$\left\{\left[-\arctan\left(2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}\right)+\pi,\ e^{\left(2\,\frac{1/2\,\sqrt{5}-1/2}{\sqrt{-2+2\,\sqrt{5}}\,\sqrt{1+4\,\frac{(1/2\,\sqrt{5}-1/2)^2}{-2+2\,\sqrt{5}}}}\right)}\right],\right.$$
$$\left.\left[\arctan\left(2\,\frac{\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}\right),\ e^{\left(2\,\frac{1/2\,\sqrt{5}-1/2}{\sqrt{-2+2\,\sqrt{5}}\,\sqrt{1+4\,\frac{(1/2\,\sqrt{5}-1/2)^2}{-2+2\,\sqrt{5}}}}\right)}\right]\right\}$$

```
> evalf(");
```

$$\{[2.475353222,\ 1.855276958],\ [.6662394325,\ 1.855276958]\}$$

Exemplul 6.2 - Seria Taylor a unei functii

In acest exercitiu se va studia eroarea aproximarii Taylor a functiei *f(x)* in jurul punctului a.

```
> restart;
```

Expresia seriei Taylor a unei functii poate fi obtinuta cu comanda ***taylor***.

```
> taylor(f(x),x=a);
```

$$\mathrm{f}(a)+\mathrm{D}(f)(a)\,(x-a)+\frac{1}{2}\,(D^{(2)})(f)(a)\,(x-a)^2+\frac{1}{6}\,(D^{(3)})(f)(a)\,(x-a)^3+\frac{1}{24}\,(D^{(4)})(f)(a)$$
$$(x-a)^4+\frac{1}{120}\,(D^{(5)})(f)(a)\,(x-a)^5+\mathrm{O}((x-a)^6)$$

Aceasta expresie poate fi folosita pentru a aproxima o functie in jurul unui punct, de exemplu $x = a$.

```
> f:=x->exp(sin(x));
```

$$f := x \to e^{\sin(x)}$$

```
> a:=Pi;
```

$$a := \pi$$

```
> taylor(f(x),x=a);
```

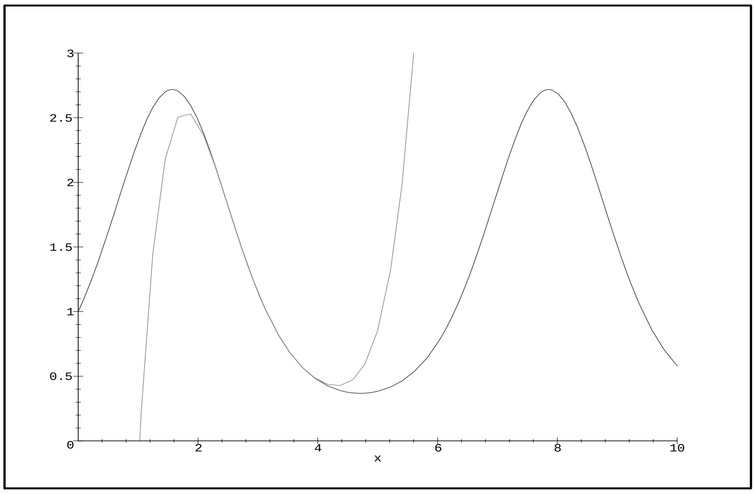
$$1 - (x - \pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - \frac{1}{8}(x - \pi)^4 + \frac{1}{15}(x - \pi)^5 + \mathrm{O}((x - \pi)^6)$$

Pentru a trasa grafic aproximarea Taylor aceasta trebuie transformata dintr-o serie intr-un polinom.

```
> poly:=convert(",polynom);
```

$$poly := 1 - x + \pi + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 - \frac{1}{8}(x - \pi)^4 + \frac{1}{15}(x - \pi)^5$$

```
> plot([f(x),poly],x=0..10,view=[0..10, 0..3]);
```



A 6-a derivata a functiei f are expresia:

```
> diff(f(x),x$6);
```

$$-\sin(x)\, e^{\sin(x)} + 16\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^2\, e^{\sin(x)} + 75\sin(x)\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 20\cos(x)^4\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^3\, e^{\sin(x)} + 45\sin(x)^2\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)\cos(x)^4\, e^{\sin(x)} + \cos(x)^6\, e^{\sin(x)}$$

Se defineste functia *f6* ca fiind aceasta derivata.

```
> f6:=unapply(",x);
```

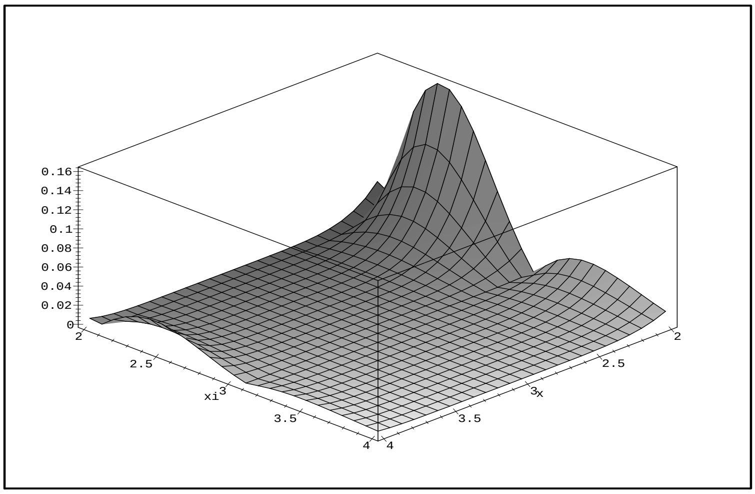
$$f6 := x \to -\sin(x)\, e^{\sin(x)} + 16\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^2\, e^{\sin(x)} + 75\sin(x)\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 20\cos(x)^4\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^3\, e^{\sin(x)} + 45\sin(x)^2\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)\cos(x)^4\, e^{\sin(x)} + \cos(x)^6\, e^{\sin(x)}$$

Eroarea aproximarii prin seria Taylor trunchiata la sase termeni este:

```
> err:=1/6!  * f6(xi) * (x-a)^6;
```

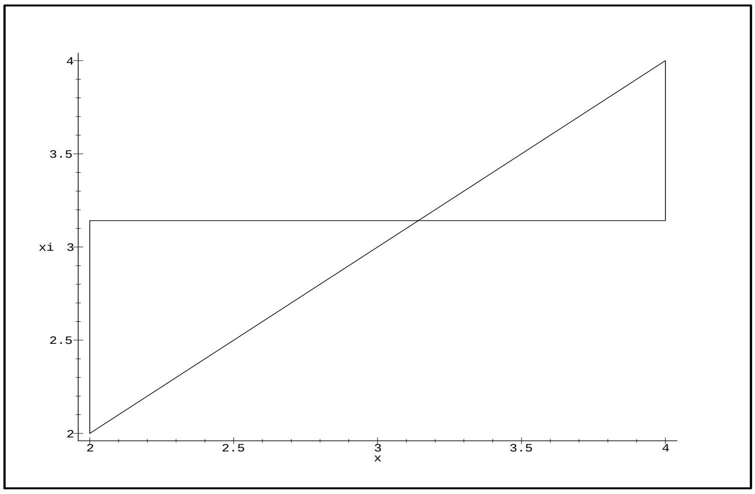
$$err := \frac{1}{720}(-\sin(\xi)\, e^{\sin(\xi)} + 16\cos(\xi)^2\, e^{\sin(\xi)} - 15\sin(\xi)^2\, e^{\sin(\xi)} + 75\sin(\xi)\cos(\xi)^2\, e^{\sin(\xi)} - 20\cos(\xi)^4\, e^{\sin(\xi)} - 15\sin(\xi)^3\, e^{\sin(\xi)} + 45\sin(\xi)^2\cos(\xi)^2\, e^{\sin(\xi)} - 15\sin(\xi)\cos(\xi)^4\, e^{\sin(\xi)} + \cos(\xi)^6\, e^{\sin(\xi)})(x-\pi)^6$$

```
> plot3d(abs(err),x=2..4,xi=2..4,
> style=patch,axes=boxed);
```



Pentru a evalua eroarea se va efectua o analiza a variatiei *err* pentru x cuprins intre 2 si 4 si x cuprins intre a si x.

```
> with(plots):with(plottools):
> display (curve([[2,2],[2,a],[4,a],[4,4],[2,2]]),
> labels=[x,xi]);
```



Graficul reprezinta cele doua regiuni triunghiulare care satisfac cele doua conditii ce definesc domeniul de analiza a erorii.

Derivatele partiale ale *err* ajuta la gasirea extremelor lui *err* in interiorul celor doua regiuni.

Cele doua derivate partiale pentru *err* sunt:

```
> err_x:=diff(err, x);
```

$$err\_x := \frac{1}{120}(-\sin(\xi)\,e^{\sin(\xi)} + 16\cos(\xi)^2\,e^{\sin(\xi)} - 15\sin(\xi)^2\,e^{\sin(\xi)} + 75\sin(\xi)\cos(\xi)^2\,e^{\sin(\xi)} - 20\cos(\xi)^4\,e^{\sin(\xi)} - 15\sin(\xi)^3\,e^{\sin(\xi)} + 45\sin(\xi)^2\cos(\xi)^2\,e^{\sin(\xi)} - 15\sin(\xi)\cos(\xi)^4\,e^{\sin(\xi)} + \cos(\xi)^6\,e^{\sin(\xi)})(x-\pi)^5$$

```
> err_xi:=diff(err, xi);
```

$$err\_xi := \frac{1}{720}(-\cos(\xi)\,e^{\sin(\xi)} - 63\sin(\xi)\cos(\xi)\,e^{\sin(\xi)} + 91\cos(\xi)^3\,e^{\sin(\xi)} - 210\sin(\xi)^2\cos(\xi)\,e^{\sin(\xi)} + 245\sin(\xi)\cos(\xi)^3\,e^{\sin(\xi)} - 35\cos(\xi)^5\,e^{\sin(\xi)} - 105\sin(\xi)^3\cos(\xi)\,e^{\sin(\xi)} + 105\sin(\xi)^2\cos(\xi)^3\,e^{\sin(\xi)} - 21\sin(\xi)\cos(\xi)^5\,e^{\sin(\xi)} + \cos(\xi)^7\,e^{\sin(\xi)})(x-\pi)^6$$

Cele doua derivate se anuleaza in punctele critice:

```
> sol:=solve( {err_x=0, err_xi=0}, {x, xi} );
```

$$sol := \{\xi = \xi,\ x = \pi\}$$

Se constata ca eroarea este nula in punctele critice gasite.

```
> subs(sol, err);
```

$$0$$

Este necesara colectarea valorilor critice intr-o multime:

```
> critical:={"};
```

$$critical := \{0\}$$

Derivata partiala *err_xi* este nula intr-un punct critic la ambele margini $x = 2$ *si* $x = 4$.

```
> sol:={solve( err_xi=0, xi ) };
```

$$sol := \{\frac{1}{2}\pi, \arctan(\mathrm{RootOf}(-56 - 161\,\_Z + 129\,\_Z^2 + 308\,\_Z^3 + 137\,\_Z^4 + 21\,\_Z^5 + \_Z^6),$$
$$\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \mathrm{RootOf}(-56 - 161\,\_Z + 129\,\_Z^2 + 308\,\_Z^3 + 137\,\_Z^4 + 21\,\_Z^5 + \_Z^6)^2 - 1))$$
$$\}$$

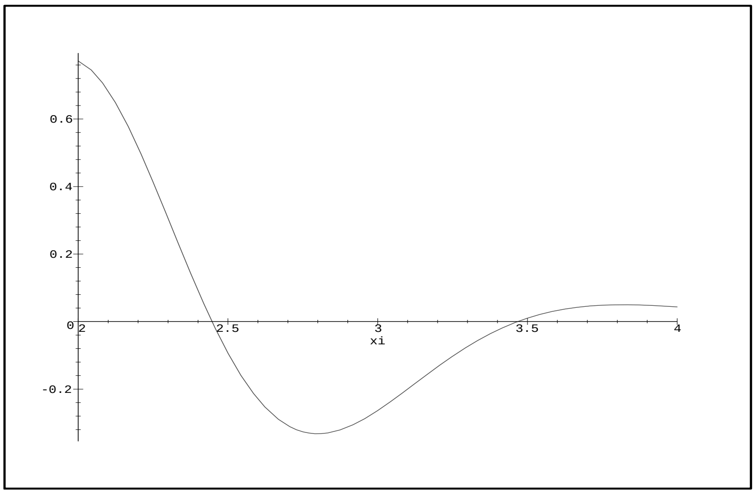
Ne intereseaza doar solutiile reale.

```
> select( type, sol, realcons );
```

$$\{\frac{1}{2}\pi\}$$

Solutia va fi verificata prin trasarea graficului functiei.

```
> plot(subs(x=2, err_xi), xi=2..4);
```



Se pare ca exista 2 solutii pentru *err_xi=0* intre *2* si *4*, dar ***solve*** nu a gasit niciuna, *p/2* fiind mai mic decat *2*. In consecinta trebuie folosita o metoda numerica.

Daca *x=2x* solutia va fi cautata intre *2* si *a*.

```
> sol:=fsolve( subs(x=2, err_xi), xi, 2..a);
```

$$sol := 2.446729125$$

In acest punct eroarea este:

```
> subs( x=2, xi=sol, err);
```

$$\frac{1}{720}(-\sin(2.446729125)\,\%1 + 16\cos(2.446729125)^2\,\%1 - 15\sin(2.446729125)^2\,\%1$$
$$+ 75\sin(2.446729125)\cos(2.446729125)^2\,\%1 - 20\cos(2.446729125)^4\,\%1$$
$$- 15\sin(2.446729125)^3\,\%1 + 45\sin(2.446729125)^2\cos(2.446729125)^2\,\%1$$
$$- 15\sin(2.446729125)\cos(2.446729125)^4\,\%1 + \cos(2.446729125)^6\,\%1)(2-\pi)^6$$
$$\%1 := e^{\sin(2.446729125)}$$

```
> eval(");
```

$$.07333000221\,(2-\pi)^6$$

Aceasta valoare se adauga setului de valori critice.

```
> critical:=critical union {"};
```

$$critical := \{0,\ .07333000221\,(2-\pi)^6\}$$

Daca $x = 4x$ solutia se cauta intre *a* si *4*.

```
> sol:=fsolve( subs(x=4, err_xi), xi, a..4);
```

$$sol := 3.467295314$$

In acest punct eroarea este:

```
> subs( x=4, xi=sol, err);
```

$$\frac{1}{720}(-\sin(3.467295314)\,\%1 + 16\cos(3.467295314)^2\,\%1 - 15\sin(3.467295314)^2\,\%1$$
$$+ 75\sin(3.467295314)\cos(3.467295314)^2\,\%1 - 20\cos(3.467295314)^4\,\%1$$
$$- 15\sin(3.467295314)^3\,\%1 + 45\sin(3.467295314)^2\cos(3.467295314)^2\,\%1$$
$$- 15\sin(3.467295314)\cos(3.467295314)^4\,\%1 + \cos(3.467295314)^6\,\%1)(4-\pi)^6$$
$$\%1 := e^{\sin(3.467295314)}$$

```
> critical:=critical union {"};
```

$$critical := \{0,\ .07333000221\,(2-\pi)^6,\ -.01542298121\,(4-\pi)^6\}$$

Pentru $x = 6$ eroarea este:

```
> B:=subs(xi=a,err);
```

$$B := \frac{1}{720}(-\sin(\pi)\, e^{\sin(\pi)} + 16\cos(\pi)^2\, e^{\sin(\pi)} - 15\sin(\pi)^2\, e^{\sin(\pi)} + 75\sin(\pi)\cos(\pi)^2\, e^{\sin(\pi)}
- 20\cos(\pi)^4\, e^{\sin(\pi)} - 15\sin(\pi)^3\, e^{\sin(\pi)} + 45\sin(\pi)^2\cos(\pi)^2\, e^{\sin(\pi)}
- 15\sin(\pi)\cos(\pi)^4\, e^{\sin(\pi)} + \cos(\pi)^6\, e^{\sin(\pi)})(x-\pi)^6$$

Derivata $B1$ a lui B este 0 intr-un punct critic.

```
> B1:=diff(B,x);
```

$$B1 := -\frac{1}{40}(x-\pi)^5$$

```
> sol:={solve(B1=0,x)};
```

$$sol := \{\pi\}$$

In acest punct critic eroarea este:

```
> subs(x=sol[1],B);
```

$$0$$

```
> critical:=critical union {"};
```

Pentru $x = x$ eroarea este:

$$critical := \{0,\ .07333000221\,(2-\pi)^6,\ -.01542298121\,(4-\pi)^6\}$$

```
> B:=subs(xi=x,err);
```

Trebuie gasit punctul in care derivata se anuleaza.

$$B := \frac{1}{720}(-\sin(x)\, e^{\sin(x)} + 16\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^2\, e^{\sin(x)} + 75\sin(x)\cos(x)^2\, e^{\sin(x)}
- 20\cos(x)^4\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^3\, e^{\sin(x)} + 45\sin(x)^2\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)\cos(x)^4\, e^{\sin(x)}
+ \cos(x)^6\, e^{\sin(x)})(x-\pi)^6$$

```
> B1:=diff(B,x);
```

$$B1 := \frac{1}{720}(-\cos(x)\, e^{\sin(x)} - 63\sin(x)\cos(x)\, e^{\sin(x)} + 91\cos(x)^3\, e^{\sin(x)}
- 210\sin(x)^2\cos(x)\, e^{\sin(x)} + 245\sin(x)\cos(x)^3\, e^{\sin(x)} - 35\cos(x)^5\, e^{\sin(x)}
- 105\sin(x)^3\cos(x)\, e^{\sin(x)} + 105\sin(x)^2\cos(x)^3\, e^{\sin(x)} - 21\sin(x)\cos(x)^5\, e^{\sin(x)}
+ \cos(x)^7\, e^{\sin(x)})(x-\pi)^6 + \frac{1}{120}(-\sin(x)\, e^{\sin(x)} + 16\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^2\, e^{\sin(x)}
+ 75\sin(x)\cos(x)^2\, e^{\sin(x)} - 20\cos(x)^4\, e^{\sin(x)} - 15\sin(x)^3\, e^{\sin(x)} + 45\sin(x)^2\cos(x)^2\, e^{\sin(x)}$$

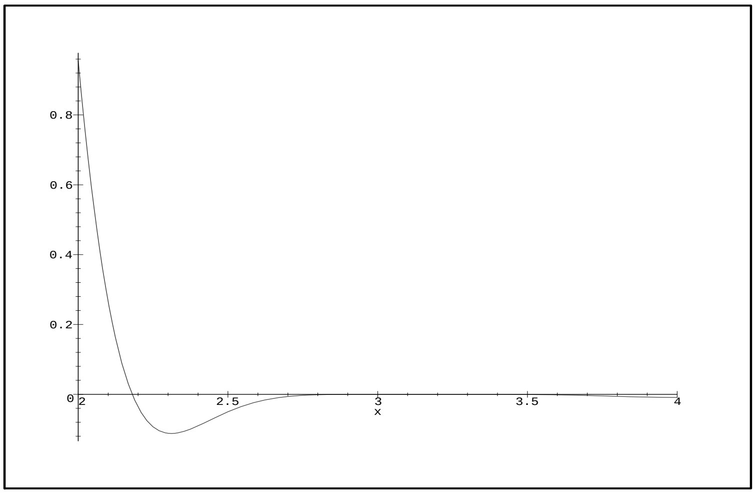
$-\,15\sin(x)\cos(x)^4\,e^{\sin(x)}+\cos(x)^6\,e^{\sin(x)})(x-\pi)^5$

```
> sol:={solve(B1=0,x)};
```

$$sol := \{\pi\}$$

Se verifica solutia prin efectuarea graficului:

```
> plot(B1,x=2..4);
```



Graficul functiei *B1* indica o solutie intre 2.1 si 2.3 dar ***solve*** nu o poate gasi, deci trebuie apelat din nou la o metoda numerica.

```
> fsolve(B1=0,x,2.1..2.3);
```

$$2.180293062$$

Solutia numerica gasita se adauga la setul de solutii simbolice.

```
> sol:=sol union {"};
```

$$sol := \{\pi,\ 2.180293062\}$$

m

Urmatorul set de valori este reprezentat de erorile extreme pentru $x = x$.

```
>{seq(B,x=sol)};
```

$$\{0,\ .04005698602\,(2.180293062-\pi)^6\}$$

```
> critical:=critical union ";
```

$critical :=$
$$\{0,\ .07333000221\,(2-\pi)^6,\ .04005698602\,(2.180293062-\pi)^6,\ -.01542298121\,(4-\pi)^6\}$$

Se completeaza din nou setul de valori critice.

```
> critical:=critical union {subs(xi=2,x=4,err),subs(xi=2,x=2,err),
subs(xi=4,x=2,err),subs(xi=4,x =4,err)};
```

$$critical := \{0, \frac{1}{720}(-\sin(4)\,e^{\sin(4)} + 16\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^2\,e^{\sin(4)} + 75\sin(4)\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 20\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^3\,e^{\sin(4)} + 45\sin(4)^2\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} + \cos(4)^6\,e^{\sin(4)})(4-\pi)^6,\ .07333000221\,(2-\pi)^6,$$
$$.04005698602\,(2.180293062-\pi)^6, \frac{1}{720}(-\sin(2)\,e^{\sin(2)} + 16\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^2\,e^{\sin(2)} + 75\sin(2)\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 20\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^3\,e^{\sin(2)} + 45\sin(2)^2\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} + \cos(2)^6\,e^{\sin(2)})(4-\pi)^6, \frac{1}{720}($$
$$-\sin(2)\,e^{\sin(2)} + 16\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^2\,e^{\sin(2)} + 75\sin(2)\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 20\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^3\,e^{\sin(2)} + 45\sin(2)^2\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} + \cos(2)^6\,e^{\sin(2)})(2-\pi)^6, \frac{1}{720}(-\sin(4)\,e^{\sin(4)} + 16\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^2\,e^{\sin(4)} + 75\sin(4)\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 20\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^3\,e^{\sin(4)} + 45\sin(4)^2\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} + \cos(4)^6\,e^{\sin(4)})(2-\pi)^6,\ -.01542298121\,(4-\pi)^6\}$$

In final trebuie gasita valoarea maxima absoluta a erorii corespunzator punctelor critice. Se foloseste in acest scop comanda ***abs***.

```
> map(abs,critical);
```

$$\{0,\ .07333000221\,(2-\pi)^6, -\frac{1}{720}(-\sin(2)\,e^{\sin(2)} + 16\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^2\,e^{\sin(2)} + 75\sin(2)\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 20\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^3\,e^{\sin(2)} + 45\sin(2)^2\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} + \cos(2)^6\,e^{\sin(2)})(4-\pi)^6, -\frac{1}{720}(-\sin(2)\,e^{\sin(2)} + 16\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^2\,e^{\sin(2)} + 75\sin(2)\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 20\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)^3\,e^{\sin(2)} + 45\sin(2)^2\cos(2)^2\,e^{\sin(2)} - 15\sin(2)\cos(2)^4\,e^{\sin(2)} + \cos(2)^6\,e^{\sin(2)})$$
$$(2-\pi)^6, -\frac{1}{720}(-\sin(4)\,e^{\sin(4)} + 16\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^2\,e^{\sin(4)} + 75\sin(4)\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 20\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^3\,e^{\sin(4)} + 45\sin(4)^2\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} + \cos(4)^6\,e^{\sin(4)})(2-\pi)^6,\ .01542298121\,(4-\pi)^6,$$
$$.04005698602\,(2.180293062-\pi)^6, -\frac{1}{720}(-\sin(4)\,e^{\sin(4)} + 16\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^2\,e^{\sin(4)} + 75\sin(4)\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 20\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)^3\,e^{\sin(4)} + 45\sin(4)^2\cos(4)^2\,e^{\sin(4)} - 15\sin(4)\cos(4)^4\,e^{\sin(4)} + \cos(4)^6\,e^{\sin(4)})(4-\pi)^6\}$$

Apoi se gaseste elementul maxim. Comanda ***max*** cere o secventa de numere, deci se va folosi comanda ***op*** pentru a transforma setul de valori intr-o secventa de numere.

```
> max_error := max(op("));
```

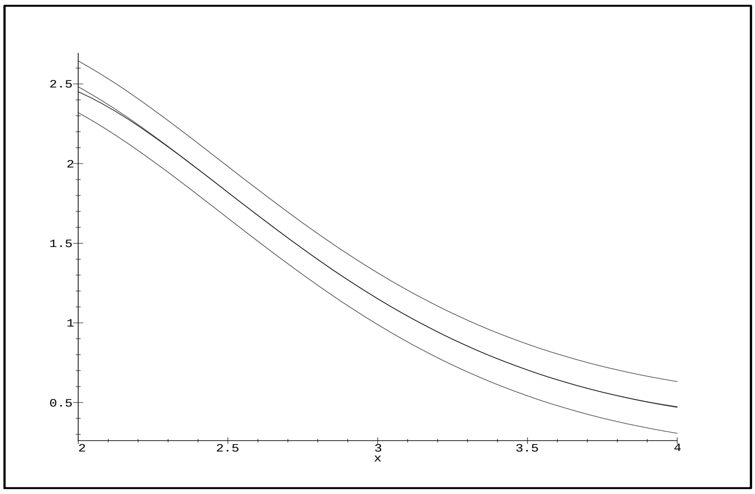
$$max\_error := .07333000221\,(2-\pi)^6$$

```
> evalf(max_error);
```

$$.1623112756$$

Se poate trasa graficul functiei *f*, al aproximatiei Taylor si o pereche de curbe ce indica banda de eroare.

```
> plot([f(x),poly,f(x)+max_error,f(x)-max_error ],
> x=2..4,
> color=[red,blue,brown,brown]);
```



Desenul arata ca eroarea reala se afla intre marginile estimate.

Exemplul 6.3 - Evaluarea unei integrale definite

Integrala unei functii reprezinta aria suprafetei cuprinsa intre axa x si graficul functiei. Definitia Riemann a integralei se bazeaza pe aproximarea acestei suprafete cu o multime de dreptunghiuri.

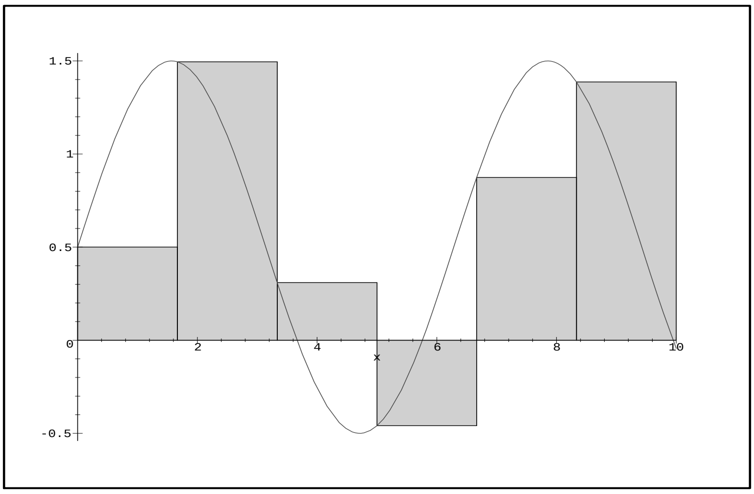
```
> f :=x-> 1/2 + sin(x);
```

$$f := x \to \frac{1}{2} + \sin(x)$$

Utilizand comanda ***leftbox*** din pachetul ***student*** se va desena graficul functiei f si sase dreptunghiuri care aproximeaza suprafata corespunzatoare integralei. Inaltimea fiecarui dreptunghi are valoarea lui f evaluata in coltul din stanga dreptunghiului.

```
> with(student):
```

```
> leftbox(f(x),x=0..10,6);
```



Comanda ***leftsum*** calculeaza aria totala a dreptunghiurilor.

```
> leftsum(f(x),x=0..10,6);
```

$$\frac{5}{3}\left(\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{1}{2}+\sin\left(\frac{5}{3}\,i\right)\right)\right)$$

```
> evalf(");
```

$$6.845601766$$

Aproximarea integralei este cu atat mai buna cu cat se folosesc mai multe dreptunghiuri.

```
> boxes:=[seq(i^2,i=3..14)];
```

$$boxes := [9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196]$$

Pentru fiecare numar din lista de mai sus se calculeaza valoarea cu ***leftsum***.

```
> seq(evalf(leftsum(f(x),x=0..10,n)),n=boxes);
```

6.948089404, 6.948819106, 6.923289160, 6.902789476, 6.888196449, 6.877830055, 6.870316621, 6.864739770, 6.860504862, 6.857222009, 6.854630207, 6.852550663

```
> S:=seq(leftbox(f(x),x=0..10,n,
> title=convert(evalf(leftsum(f(x),x=0..10,n)),
> string)),n=boxes):
> with(plots):
> display(S,insequence=true);
```

Pe masura ce numarul dreptunghiurilor devine din ce in ce mai mare suma ariilor lor se apropie de valoarea integralei iar la limita se obtine integrala definita.

```
> Int(f(x),x=0..10);
```

$$\int_0^{10} \frac{1}{2} + \sin(x)\, dx$$

Valoarea integralei este:

```
> value(");
```

$$6 - \cos(10)$$

```
> evalf(");
```

$$6.839071529$$

Integrala nedefinita a lui f este:

```
> Int(f(x),x);
```

$$\int \frac{1}{2} + \sin(x)\, dx$$

```
> value(");
```

$$\frac{1}{2}\, x - \cos(x)$$

Se defineste functia F ca fiind primitiva lui *f*.

```
> F:=unapply(",x);
```

$$F := x \to \frac{1}{2}\, x - \cos(x)$$

Se alege constanta de integrare astfel incat *F(0)=0*.

```
> F(x)-F(0);
```

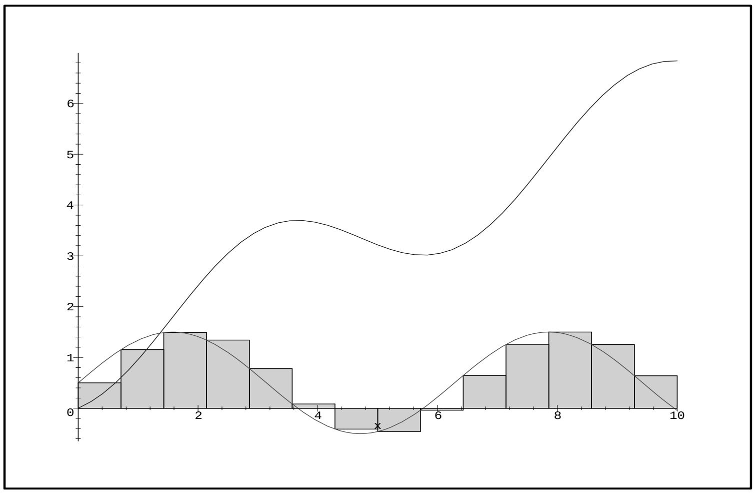
$$\frac{1}{2}\, x - \cos(x) + 1$$

```
> F:=unapply(",x);
```

$$F := x \to \frac{1}{2}\,x - \cos(x) + 1$$

Daca se traseaza graficul lui F alaturi de graficul realizat cu ***leftbox*** se observa ca F creste mai repede atunci cand dreptunghiul corespondent este mai mare.

```
> display([plot(F(x),x=0..10,color=blue),
> leftbox(f(x),x=0..10,14)]);
```



Exemplul 6.4 - Derivate partiale mixte

Acest exemplu descrie folosirea operatorului de derivare partiala ***D*** si contine un exemplu de functie ale carei derivate partiale mixte nu sunt egale.

Se considera urmatoarea functie:

```
> f:=(x,y)->x * y * (x^2-y^2)/(x^2+y^2);
```

$$f := (x,\, y) \to \frac{x\,y\,(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Functia nu este definita in *(0, 0)*.

```
> f(0,0);
```

```
Error, (in f) division by zero
```

In coordonate polare *(x, y) = (* r*cosq,* r*sintq)* functia are expresia:

```
> f(r*cos(theta),r*sin(theta));
```

$$\frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\left(r^2\cos(\theta)^2-r^2\sin(\theta)^2\right)}{r^2\cos(\theta)^2+r^2\sin(\theta)^2}$$

Cand r tinde la *0* se constata ca si valoarea functiei tinde la *0*.

```
> Limit(",r=0);
```

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\left(r^2\cos(\theta)^2-r^2\sin(\theta)^2\right)}{r^2\cos(\theta)^2+r^2\sin(\theta)^2}$$

$$0$$

```
> value(");
```

$$0$$

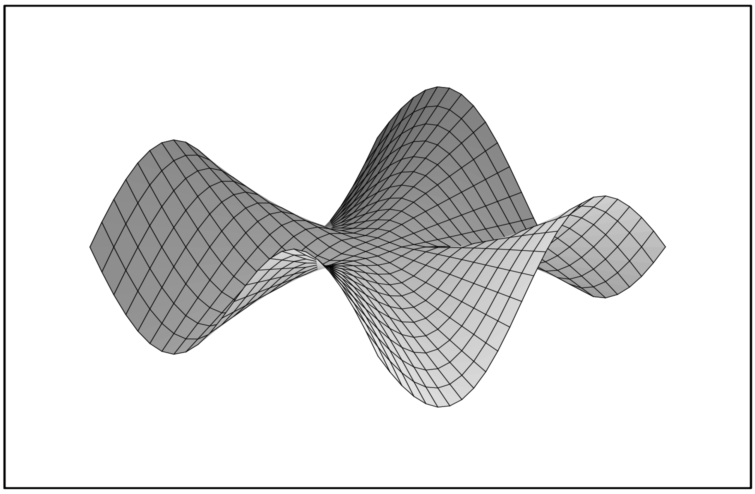
Din acest motiv vom extinde f prin continuitate considerand ca *f(0, 0) = 0*.

```
> f(0,0):=0;
```

$$\mathrm{f}(0,\,0) := 0$$

Graficul functiei f se obtine folosind comanda ***plot3d***.

```
> plot3d(f,-3..3,-3..3,style=patch);
```



```
> fx:=D[1](f);
```

$$fx := (x,\,y) \to \frac{y\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + 2\,\frac{x^2\,y}{x^2+y^2} - 2\,\frac{x^2\,y\,(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Din nou expresia nu este definita in origine.

```
> fx(0,0);
```

```
Error, (in fx) division by zero
```

In consecinta se va folosi definitia derivatei.

```
> fx(0,0):=limit((f(h,0)-f(0,0))/h,h=0);
```

$$\mathrm{fx}(0,\,0) := 0$$

In coordonate polare *(x, y) = (* r*cosq*, r*sintq)* expresia derivatei *fx* este:

```
> fx(r*cos(theta),r*sin(theta));
```

$$\frac{r\sin(\theta)\,(r^2\cos(\theta)^2 - r^2\sin(\theta)^2)}{r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2} + 2\,\frac{r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)}{r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2}$$
$$-\,2\,\frac{r^3\cos(\theta)^2\sin(\theta)\,(r^2\cos(\theta)^2 - r^2\sin(\theta)^2)}{(r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2)^2}$$

```
> combine(");
```

$$\frac{3}{4}\,r\sin(3\,\theta) - \frac{1}{4}\,r\sin(5\,\theta)$$

Cand distanta r de la *(x,y)* la *(0,0)* tinde catre *0* atunci si diferenta |*fx(x,y)*-*fx(0,0)*| tinde catre *0*.

```
> Limit(abs( " -fx(0,0)),r=0);
```

$$\lim_{r\to 0}\left|\frac{3}{4}\,r\sin(3\,\theta) - \frac{1}{4}\,r\sin(5\,\theta)\right|$$

```
> value(");
```

$$0$$

Deci *fx* este continua in *(0, 0)*.
Se procedeaza analog si in cazul celei de-a doua variabile.

```
> fy:=D[2](f);
```

$$fy := (x,\,y) \to \frac{x\,(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 2\,\frac{x\,y^2}{x^2 + y^2} - 2\,\frac{x\,y^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

```
> fy(0,0):=limit((f(0,k)-f(0,0))/k,k=0);
```

$$\mathrm{fy}(0,\,0) := 0$$

Derivata a doua mixta a functiei f este:

```
> fxy:=D[1,2](f);
```

$$fxy := (x, y) \to \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 2\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2\,\frac{x^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - 2\,\frac{y^2}{x^2 + y^2} - 2\,\frac{y^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 8\,\frac{x^2\,y^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

Formula nu este valabila pentru *(0, 0)*.

```
> fxy(0,0);
```

```
Error, (in fxy) division by zero
```

Folosind definitia derivatei se obtine:

```
> Limit((fx(0,k)-fx(0,0))/k,k=0);
```

$$\lim_{k \to 0} -1$$

```
> fxy(0,0):=value(");
```

$$\mathrm{fxy}(0,\,0) := -1$$

Cealalta derivata de ordinul 2 mixta este:

```
> fyx:=D[2,1](f);
```

$$fyx := (x, y) \to \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 2\,\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 2\,\frac{x^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - 2\,\frac{y^2}{x^2 + y^2} - 2\,\frac{y^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 8\,\frac{x^2\,y^2\,(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

In *(0, 0)* derivata definita ca limita este:

```
> Limit((fy(h,0)-fy(0,0))/h, h=0);
```

$$\lim_{h \to 0} 1$$

```
> fyx(0,0):=value(");
```

$$\mathrm{fyx}(0,\,0) := 1$$

Se observa ca cele doua deriavate mixte fxy si fyx sunt diferite in punctul *(0, 0)*.

```
> fxy(0,0)<>fyx(0,0);
```

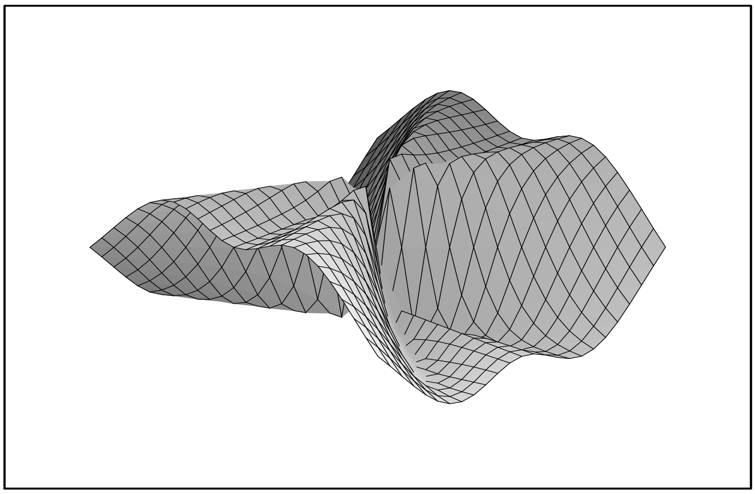
$$-1 \neq 1$$

```
> evalb(");
```

$$true$$

Derivatele partiale mixte sunt egale doar daca sunt continue. Din graficul functiei *fxy* se observa ca aceasta nu este continua in *(0, 0).*

```
> plot3d(fxy,-3..3,-3..3,style=patch);
```



6.2 Ecuatii diferentiale ordinare

Exemplul 6.5 - Rezolvarea ecuatiilor diferentiale ordinare

Maple V ofera un un set variat de metode pentru manipularea, rezolvarea si reprezentarea solutiilor ecuatiilor diferentiale ordinare si sistemelor de ecuatii diferentiale.

Cea mai folosita comanda pentru aflarea solutiilor ecuatiilor diferentiale ordinare cu Maple V este ***dsolve***. Sintaxa de baza a comenzii ***dsolve*** este:

dsolve(eqns, vars),

unde *eqns* reprezinta multimea de ecuatii diferentiale reunita cu cea a conditiilor initiale iar *vars* este multimea de variabile dependente (functii solutie) fata de care se rezolva ecuatiile.

```
> eq:=diff(v(t),t)+2*t=0;
```

$$eq := (\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{v}(t)) + 2\,t = 0$$

```
> ini:=v(1)=5;
```

$$ini := \mathrm{v}(1) = 5$$

```
> dsolve({eq,ini},{v(t)});
```
$$v(t) = -t^2 + 6$$

Daca se omit unele dintre conditiile initiale sau toate, ***dsolve*** va returna o solutia continand constante arbitrare de integrare *_C1, _C2, ...*

```
> eq:=diff(y(x),x$2)-y(x)=1;
```
$$eq := (\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y(x)) - y(x) = 1$$

```
> dsolve({eq},{y(x)});
```
$$y(x) = -1 + \_C1\, e^x + \_C2\, e^{(-x)}$$

Pentru specificarea conditiilor initiale se va folosi costructia: *D(fcn)(var_value) = value* sau *(D@@n)(fcn)(var_value) = value*, in care *fcn* este numele functiei, *n* este ordinul derivatei, *var_value* este valoarea variabilei independente iar *value* este valoarea conditiei.

```
> de1:= diff(y(t),t$2)+5*diff(y(t),t)+6*y(t)=0;
```
$$de1 := (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t)) + 5\,(\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)) + 6\,y(t) = 0$$

```
> ini:=y(0)=0,D(y)(0)=1;
```
$$ini := y(0) = 0,\ D(y)(0) = 1$$

```
> dsolve({de1,ini},{y(t)});
```
$$y(t) = e^{(-2\,t)} - e^{(-3\,t)}$$

Maple V returneaza uneori solutia ecuatiei diferentiale in forma implicita.

```
> de2:=t*diff(y(t),t)=y(t)*ln(t*y(t))-y(t);
```
$$de2 := t\,(\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)) = y(t)\ln(t\,y(t)) - y(t)$$

```
> dsolve({de2},{y(t)});
```
$$t = \_C1\,\ln(t) + \_C1\,\ln(y(t))$$

Folosirea optiunii ***explicit = true*** indica programului sa caute o solutie explicita.

```
> dsolve({de2},{y(t)},explicit = true);
```
$$y(t) = e^{(\frac{t - \_C1\,\ln(t)}{\_C1})}$$

Exemplul 6.6 - Rezolvarea ecuatiilor diferentiale ordinare cu ajutorul transformatei Laplace

Aplicarea transformatei Laplace reduce de cele mai multe ori complexitatea problemei. Astfel ecuatiile diferentiale sunt transformate in ecuatii algebrice care sunt mult mai usor de rezolvat. Dificultatea apare la transformarea ecuatiei in domeniul variabilei Laplace si la transformarea inversa a solutiei.

Se considera urmatoarea problema din dinamica clasica: doua corpuri de mase m si αm sunt in repaus pe o sina fara frecare si sunt legate cu un arc avand constanta de elasticitate k. Care sunt traiectoriile celor doua corpuri, daca primul este supus unei forte unitare *u(t)* la momentul *t=1*?

Mai intai se scrie sistemul de ecuatii care guverneaza sistemul de corpuri. Conform legii a doua a lui Newton produsul dintre masa m si acceleratie trebuie sa fie egal cu suma fortelor aplicate fiecarui corp.

```
> eqn1:=alpha*m*diff(x[1](t),t$2)=
> k*(x[2](t)-x[1](t))+u(t);
```

$$eqn1 := \alpha\, m\, (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, x_1(t)) = k\,(x_2(t) - x_1(t)) + \mathrm{u}(t)$$

```
> eqn2:=m*diff(x[2](t),t$2)=k*(x[1](t)-x[2](t)) ;
```

$$eqn2 := m\, (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, x_2(t)) = k\,(x_1(t) - x_2(t))$$

La *t=1* se aplica o forta unitara.

```
> u:=t->Heaviside(t-1);
```

$$u := t \to \mathrm{Heaviside}(t-1)$$

La $t = 0$ ambele corpuri sunt in repaus.

```
> ini:=x[1](0)=2, D(x[1])(0)=0,
> x[2](0)=0, D(x[2])(0)=0;
```

$$ini := x_1(0) = 2,\ \mathrm{D}(x_1)(0) = 0,\ x_2(0) = 0,\ \mathrm{D}(x_2)(0) = 0$$

Se rezolva problema folosind transformata Laplace prin specificarea optiunii ***method=laplace.***

```
> dsolve( {eqn1, eqn2, ini}, {x[1](t), x[2](t)}, method=laplace);
```

$$\Big\{x_1(t) = \frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)}{k\,(\alpha+1)} - \frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\, m}}\,(t-1))}{k\,(\alpha+1)} + k\,\Big($$

$$-\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\alpha\, m}{k^2\,(\alpha+1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t^2}{k\,(\alpha+1)} - \frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t}{k\,(\alpha+1)} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)}{k\,(\alpha+1)}$$

$$+\frac{\text{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,(t-1))}{k^2\,(\alpha+1)^2}\Bigg)\Big/m+2\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,t)$$

$$+2\,\alpha\,k\left(\frac{1}{k\,(\alpha+1)}-\frac{\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,t)}{k\,(\alpha+1)}\right),\,x_2(t)=k\left(-\frac{\text{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m}{k^2\,(\alpha+1)^2}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Heaviside}(t-1)\,t^2}{k\,(\alpha+1)}-\frac{\text{Heaviside}(t-1)\,t}{k\,(\alpha+1)}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{Heaviside}(t-1)}{k\,(\alpha+1)}$$

$$\left.+\frac{\text{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,(t-1))}{k^2\,(\alpha+1)^2}\right)\Big/m$$

$$\left.+2\,\alpha\,k\left(\frac{1}{k\,(\alpha+1)}-\frac{\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,t)}{k\,(\alpha+1)}\right)\right\}$$

Precizand valori numerice constantelor se obtine solutia:

```
> ans:=subs( alpha=1/10, m=1, k=1, " );
```

$$ans:=\{x_1(t)=\frac{155}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)-\frac{100}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1))$$
$$+\frac{5}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t^2-\frac{10}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t+\frac{20}{11}\cos(\sqrt{11}\,t)+\frac{2}{11},\,x_2(t)=$$
$$\frac{45}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)+\frac{5}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t^2-\frac{10}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t$$
$$+\frac{10}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1))+\frac{2}{11}-\frac{2}{11}\cos(\sqrt{11}\,t)\}$$

Solutiile se transforma in doua functii, *y1(t)* si *y2(t)* dupa cum urmeaza:

```
> subs( ans, x[1](t) );
```

$$\frac{155}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)-\frac{100}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1))+\frac{5}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t^2$$
$$-\frac{10}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t+\frac{20}{11}\cos(\sqrt{11}\,t)+\frac{2}{11}$$

```
> y[1]:=unapply( " , t);
```

$$y_1:=t\rightarrow\frac{155}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)-\frac{100}{121}\,\text{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1))$$
$$+\frac{5}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t^2-\frac{10}{11}\,\text{Heaviside}(t-1)\,t+\frac{20}{11}\cos(\sqrt{11}\,t)+\frac{2}{11}$$

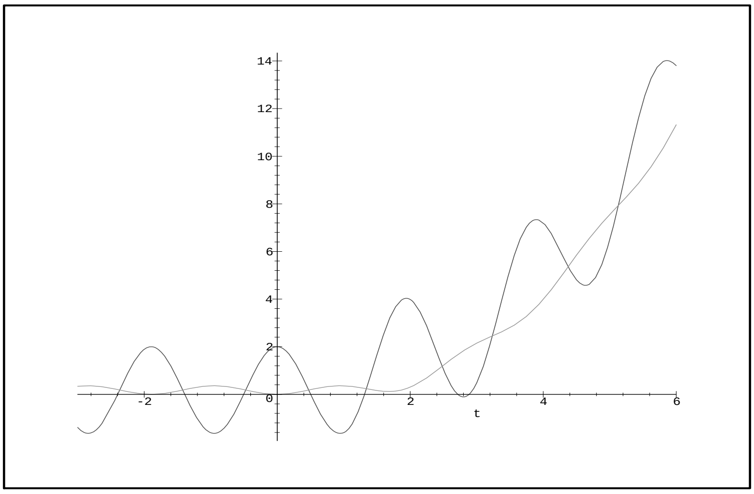
Cei doi pasi se pot restringe intr-unul singur.

```
> y[2]:=unapply(subs( ans, x[2](t) ), t);
```

$$y_2 := t \to \frac{45}{121}\,\mathrm{Heaviside}(t-1) + \frac{5}{11}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t^2 - \frac{10}{11}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t + \frac{10}{121}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1)) + \frac{2}{11} - \frac{2}{11}\cos(\sqrt{11}\,t)$$

Cele doua solutii pot fi acum reprezentate grafic.

```
> plot( [y[1](t), y[2](t) ], t=-3..6);
```



In locul comenzii ***dsolve(... , method=laplace)*** se poate folosi transformata Laplace definita in pachetul ***inttrans***.

```
> with(inttrans);
```

$[addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, laplace, mellin]$

Transformata Laplace a doua ecuatii diferentiale *eqn1*, *eqn2* este:

```
> laplace(eqn1,t,s);
```

$$\alpha\, m\,(s\,(s\,\mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s) - x_1(0)) - \mathrm{D}(x_1)(0)) = k\,(\mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s) - \mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s)) + \frac{e^{(-s)}}{s}$$

```
> laplace(eqn2,t,s);
```

$$m\,(s\,(s\,\mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s) - x_2(0)) - \mathrm{D}(x_2)(0)) = k\,(\mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s) - \mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s))$$

```
> subs(ini,{",""});
```

$$\{m\,s^2\,\mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s)=k\,(\mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s)-\mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s)),$$
$$\alpha\,m\,s\,(s\,\mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s)-2)=k\,(\mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s)-\mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s))+\frac{e^{(-s)}}{s}\}$$

Se rezolva setul de ecuatii algebrice obtinute prin aplicarea transformatei Laplace.

```
> sol:= solve(",{laplace(x[1](t),t,s),
> laplace(x[2](t),t,s)});
```

$$sol:=\{\mathrm{laplace}(x_1(t),\,t,\,s)=\frac{(1+2\,\alpha\,m\,s^2\,e^s)\,(m\,s^2+k)}{e^s\,m\,s^3\,(\alpha\,m\,s^2+\alpha\,k+k)},$$
$$\mathrm{laplace}(x_2(t),\,t,\,s)=\frac{k\,(1+2\,\alpha\,m\,s^2\,e^s)}{e^s\,m\,s^3\,(\alpha\,m\,s^2+\alpha\,k+k)}\}$$

Este necesara efectuarea transformatei Laplace inverse pentru a obtine functiile *x1(t), x2(t)*.

```
> invlaplace(",s,t);
```

$$\Bigg\{x_2(t)=k\Bigg(-\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m}{k^2\,(\alpha+1)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t^2}{k\,(\alpha+1)}-\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t}{k\,(\alpha+1)}$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)}{k\,(\alpha+1)}+\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,(t-1))}{k^2\,(\alpha+1)^2}+2\,\frac{\alpha\,m}{k\,(\alpha+1)}$$
$$-2\,\frac{\alpha\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,t)}{k\,(\alpha+1)}\Bigg)\Big/m,\;x_1(t)=\Bigg(\frac{m\,\mathrm{Heaviside}(t-1)}{k\,(\alpha+1)}$$
$$-\frac{m\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,(t-1))}{k\,(\alpha+1)}-\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m}{k\,(\alpha+1)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t^2}{\alpha+1}-\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)}{\alpha+1}$$
$$+\frac{\mathrm{Heaviside}(t-1)\,\alpha\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,(t-1))}{k\,(\alpha+1)^2}+2\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,t)+2\,\frac{\alpha\,m}{\alpha+1}$$
$$-2\,\frac{\alpha\,m\cos(\sqrt{\frac{k\,(\alpha+1)}{\alpha\,m}}\,t)}{\alpha+1}\Bigg)\Big/m\Bigg\}$$

Precizand valori numerice constantelor se obtine:

```
> subs(alpha=1/10,m=1,k=1,");
```

$$\{x_1(t) = \frac{155}{121}\,\mathrm{Heaviside}(t-1) - \frac{100}{121}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1))$$
$$+\frac{5}{11}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t^2 - \frac{10}{11}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t + \frac{20}{11}\cos(\sqrt{11}\,t) + \frac{2}{11},\ x_2(t) =$$
$$\frac{45}{121}\,\mathrm{Heaviside}(t-1) + \frac{5}{11}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t^2 - \frac{10}{11}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,t$$
$$+\frac{10}{121}\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\cos(\sqrt{11}\,(t-1)) + \frac{2}{11} - \frac{2}{11}\cos(\sqrt{11}\,t)\}$$

Dupa cum era de astepta solutia este identica cu cea anterioara.

Exemplul 6.7 - Rezolvarea ecuatiilor diferentiale prin metoda seriilor

Metoda seriilor pentru rezolvarea ecuatiilor diferentiale foloseste o aproximare, prin serii de puteri, a solutiilor ecuatiilor. Aceasta tehnica este folositoare atunci cand algoritmii de baza ai mediului Maple nu functioneaza, iar utilizatorul este interesat intr-o solutie simbolica, chiar si aproximativa. Metoda seriilor poate ajuta adesea la rezolvarea ecuatiilor diferentiale de ordin superior sau neliniare.

Cand se foloseste metoda seriilor, Maple presupune ca exista o solutie a ecuatiei diferentiale de forma $x^c\,(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\,x^i)$, unde c este un numar rational.

Consideram urmatoarea ecuatie diferentiala:

```
> eq:=2*x*diff(y(x),x,x)+diff(y(x),x)+y(x)=0;
```

$$eq := 2\,x\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)) + (\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)) + \mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve( {eq}, {y(x)}, type=series );
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{30}\,x^2 - \frac{1}{630}\,x^3 + \frac{1}{22680}\,x^4 - \frac{1}{1247400}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6))$$
$$+\ \_C2\,(1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6))$$

Folosim in continuare comanda ***subs*** pentru a determina solutia, apoi o convertim intr-un polinom.

```
> subs(",y(x));
```

$$\_C1\,\sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{30}\,x^2 - \frac{1}{630}\,x^3 + \frac{1}{22680}\,x^4 - \frac{1}{1247400}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6))$$
$$+\ \_C2\,(1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5 + \mathrm{O}(x^6))$$

```
> poly := convert(",polynom);
```

$$poly := \_C1\,\sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{30}\,x^2 - \frac{1}{630}\,x^3 + \frac{1}{22680}\,x^4 - \frac{1}{1247400}\,x^5)$$
$$+ \_C2\,(1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5)$$

Acum putem reprezenta grafic solutia pentru diferite valori ale constantelor de integrare *C1* si *C2*.

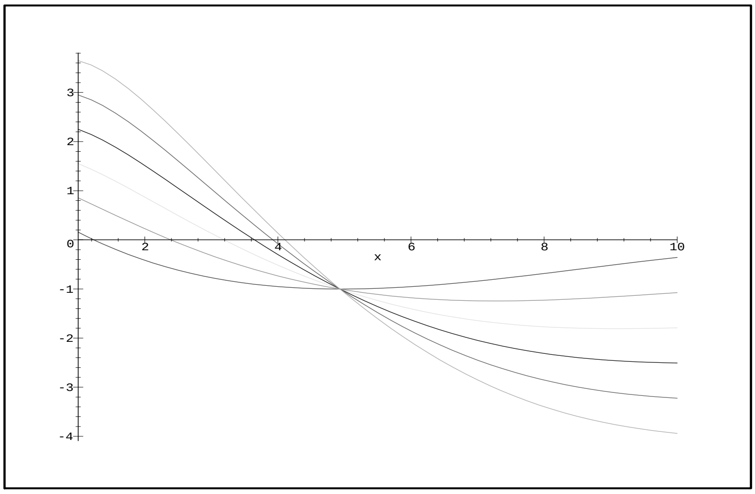
```
> [ seq( _C1=i, i=0..5)];
```

$$[\_C1 = 0,\ \_C1 = 1,\ \_C1 = 2,\ \_C1 = 3,\ \_C1 = 4,\ \_C1 = 5]$$

```
> map(subs,",_C2=1, poly );
```

$$[1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5,$$
$$\%1 + 1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5,$$
$$2\,\%1 + 1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5,$$
$$3\,\%1 + 1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5,$$
$$4\,\%1 + 1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5,$$
$$5\,\%1 + 1 - x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{90}\,x^3 + \frac{1}{2520}\,x^4 - \frac{1}{113400}\,x^5]$$
$$\%1 := \sqrt{x}\,(1 - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{30}\,x^2 - \frac{1}{630}\,x^3 + \frac{1}{22680}\,x^4 - \frac{1}{1247400}\,x^5)$$

```
> plot(",x=1..10);
```



Exemplul 6.8 - Rezolvarea numerica a ecuatiilor diferentiale

Desi metoda seriilor pentru rezolvarea ecuatiilor diferentiale de ordin superior este adecvata pentru gasirea unor aproximatii ale solutiilor, ea manifesta unele limitari. Pentru a obtine un rezultat corect, seriile trebuie sa fie convergente. In plus, in procesul de aflare a solutiei, Maple trebuie sa calculeeze multe derivate ceea ce poate dura destul de mult. De aceea s-au dezvoltat metode alternative, de rezolvare numerica.

Pentru exemplificare se considera urmatoarea ecuatie diferentiala si conditia sa initiala:

```
> eq:=x(t)*diff(x(t),t)=t^2;
```

$$eq := \mathrm{x}(t)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t)) = t^2$$

```
> ini:=x(1)=2;
```

$$ini := \mathrm{x}(1) = 2$$

Rezultatul comenzii ***dsolve*** cu optiunea ***type=numeric*** este o procedura care, atunci cand este apelata, returneaza valoarea numerica a solutiei.

```
> sol:=dsolve({eq,ini},{x(t)},type=numeric) ;
```

$$sol := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

Solutia satisface conditia initiala:

```
> sol(1);
```

$$[t = 1,\, \mathrm{x}(t) = 2.]$$

> sol(0);

$$[t=0,\ \mathrm{x}(t)=1.825741875912851]$$

Folosim comanda ***subs*** pentru a selecta o valoare particulara din lista de ecuatii:

> subs(sol(1),x(t));

$$2.$$

Putem deasemenea creea o pereche ordonata:

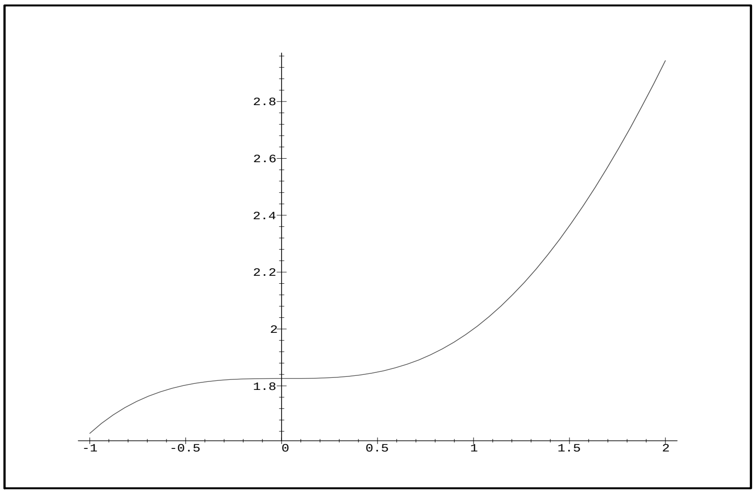
> subs(sol(0),[t,x(t)]);

$$[0,\ 1.825741875912851]$$

Pachetul ***plots*** contine o comanda ***odeplot*** pentru desenarea prin puncte a rezultatului comenzii ***dsolve(...,type=numeric)***.

> with(plots):

> odeplot(sol,[t,x(t)],-1..2);



In continuare vom considera un sistem de doua ecuatii dferentiale:

> eq1:=diff(x(t),t)=y(t);

$$eq1 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t)=\mathrm{y}(t)$$

> eq2:=diff(y(t),t)=x(t)+y(t);

$$eq2 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)=\mathrm{x}(t)+\mathrm{y}(t)$$

```
> ini:=x(0)=2,y(0)=1;
```

$$ini := \mathrm{x}(0) = 2,\ \mathrm{y}(0) = 1$$

```
> sol1:=dsolve({eq1,eq2,ini},{x(t),y(t)},ty pe=numeric);
```

$$sol1 := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

```
> sol1(0);
```

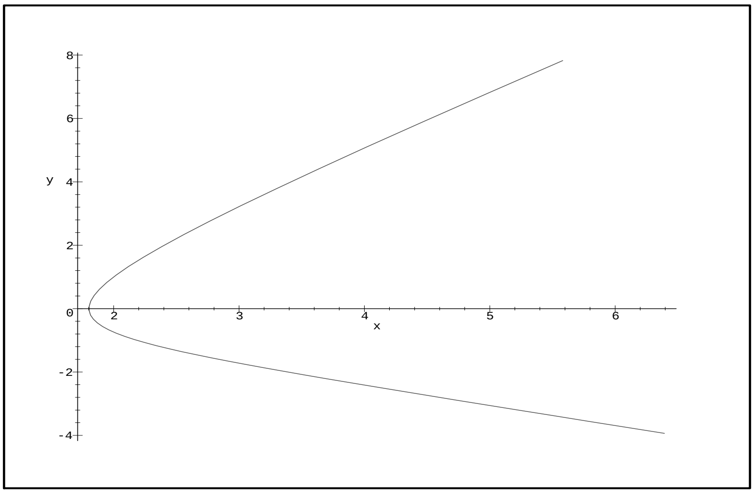
$$[t = 0,\ \mathrm{x}(t) = 2.,\ \mathrm{y}(t) = 1.]$$

```
> sol1(1);
```

$$[t = 1,\ \mathrm{x}(t) = 5.582168689244844,\ \mathrm{y}(t) = 7.826891137110794]$$

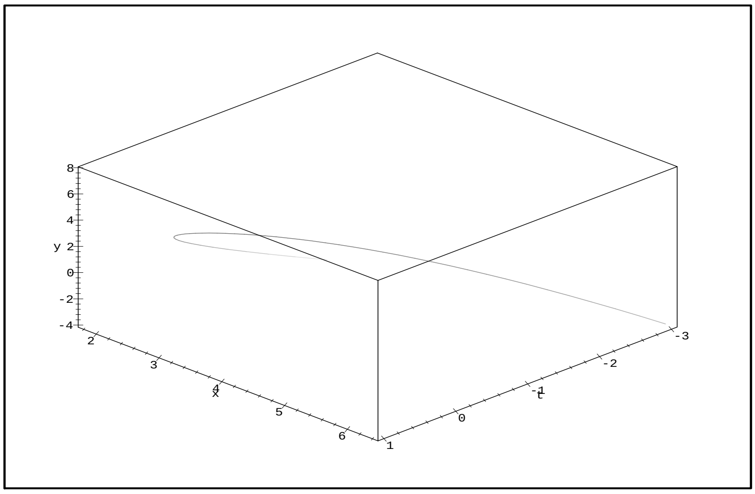
Comanda ***odeplot*** poate acum sa deseneze prin puncte *y(t)* functie de *x(t)*:

```
> odeplot(sol1,[x(t),y(t)],-3..1,labels=[x,y]);
```



sau *x(t)* functie de *y(t)*:

```
> odeplot(sol1,[t,x(t),y(t)],-3..1,labels=[t,x, y],axes=boxed);
```



sau orice alta combinatie.

Intodeauna cand folositi metode numerice trebuie sa fiti precauti. Fie una din ecuatii:

```
> eq:=diff(y(x),x)=1-2*x*y(x);
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x) = 1 - 2\,x\,\mathrm{y}(x)$$

```
> ini:=y(0)=0;
```

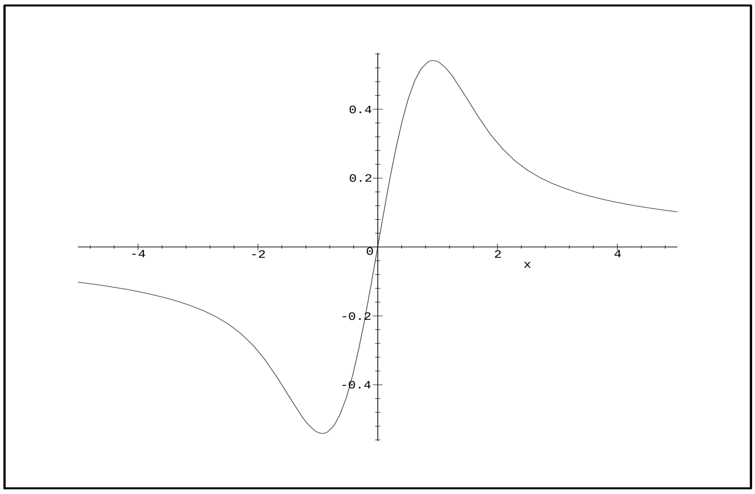
$$ini := \mathrm{y}(0) = 0$$

Aceasta ecuatie diferentiala are o solutie exacta:

```
> exact:=dsolve({eq,ini},{y(x)});
```

$$exact := \mathrm{y}(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{I\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(I\,x)}{e^{(x^2)}}$$

```
> plot(rhs(exact),x=-5..5);
```

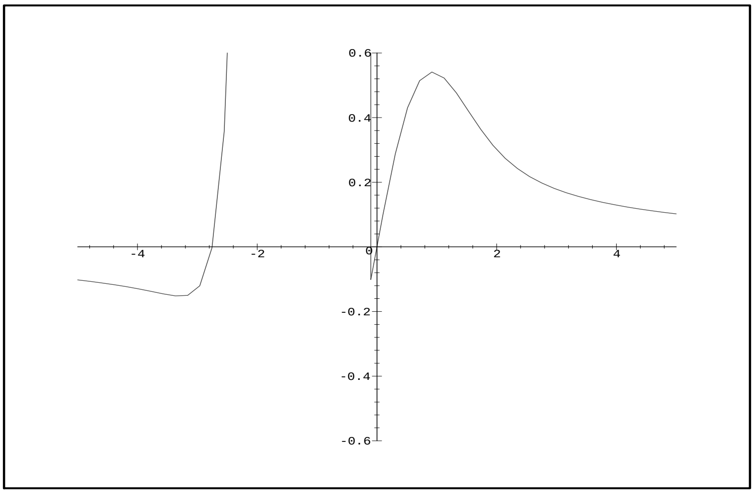


In acest caz, daca folositi optiunea ***type=numeric***, graficul solutiei este foarte diferit.

```
> approx:=dsolve({eq,ini},{y(x)}, type=numeric);
```

$$approx := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

```
> with(plots):
> odeplot(approx,[x,y(x)],-5..5,view=[-5..5,-0.  6..0.6]);
```

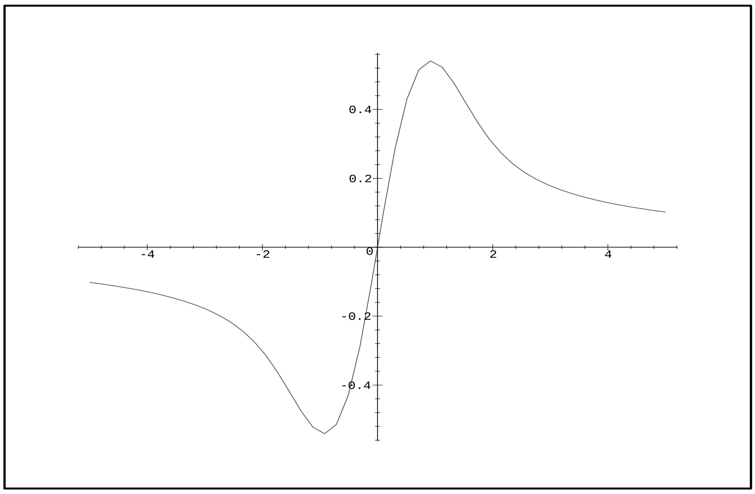


Diferentele apar deoarece calculele in virgula mobila acumuleaza erori. Nu exista reguli general-valabile pentru prevenirea acestor efecte si deci nici un program nu poate anticipa toate situatiile. In ultimul caz dificultatea poate fi eliminata prin folosirea optiunii ***startinit=true*** pentru ca, procedura pe care ***dsolve*** o returneaza sa inceapa calculele de la valoarea initiala de fiecare data cand este evaluat un punct *(x,y(x))*.

```
> approx2:=dsolve({eq,ini},{y(x)},type=nume ric,startinit=true);
```

$$approx2 := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

```
> odeplot(approx2,[x,y(x)],-5..5);
```



Dezavantajul este ca in acest caz calculele dureaza mai mult. Puteti specifica algoritmul folosit comanda ***dsolve(...,type=numeric)*** pentru rezolvarea ecuatiei diferentiale.

In unele imprejurari, nu puteti exprima solutia unei ecuatii diferentiale de ordin superior in forma analitica. In aceste cazuri, ***dsolve*** poate returna solutii ce contin structura de date ***DESol***.Aceasta reprezinta solutia unei ecuatii diferentiale fara a o calcula in mod explicit. Astfel ***DESol*** este un concept similar structurii ***ROOTof***, care reprezinta radacinile unei expresii. Aceasta va permite sa manipulati expresia rezultata in mod simbolic.

Se considera ecuatia:

```
> de:=diff(y(x),x$3)+(2*x+2)*diff(y(x),x$2)+(4*x+4-1/x)*
diff(y(x),x)+2*y(x);
```

$$de := (\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,\mathrm{y}(x)) + (2\,x+2)\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{y}(x)) + (4\,x+4-\frac{1}{x})\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{y}(x)) + 2\,\mathrm{y}(x)$$

Solutia oferita de ***dsolve*** este:

```
> dsolve({de},{y(x)});
```

$$y(x) = \_C1\, e^{(-x^2)} + e^{(-x^2)} \int \mathrm{DESol}(\{x\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\_Y(x)) + (-4\,x^2+2\,x)\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\_Y(x)) + (-4\,x^2 - 2\,x - 1 + 4\,x^3)\,\_Y(x)\},\ \{\_Y(x)\})\,dx$$

Acum puteti incerca o alta metoda de aflare a expresiei ***DESol***. Pentru inceput, va fi extrasa expresia ***DESol***.

```
> select(has,rhs("),DESol);
```

$$e^{(-x^2)} \int \mathrm{DESol}(\{x\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\_Y(x)) + (-4\,x^2+2\,x)\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\_Y(x)) + (-4\,x^2 - 2\,x - 1 + 4\,x^3)\,\_Y(x)\},\ \{\_Y(x)\})\,dx$$

Apoi se cauta o aproximare sub forma de serie trunchiata a acestei expresii:

```
> series(",x);
```

$$\_C2\,x + (\frac{1}{2}\,\_C1 + \frac{1}{2}\,\_C2\ln(x) - \frac{5}{4}\,\_C2)\,x^2 + (-\frac{1}{6}\,\_C1 - \frac{1}{6}\,\_C2\ln(x) - \frac{13}{36}\,\_C2)\,x^3 + (\frac{109}{192}\,\_C2 - \frac{3}{16}\,\_C2\ln(x) - \frac{3}{16}\,\_C1)\,x^4 + (\frac{11}{240}\,\_C1 + \frac{11}{240}\,\_C2\ln(x) + \frac{2503}{14400}\,\_C2)\,x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

Operatorii ***diff*** si ***int*** pot deasemenea opera asupra expresiei ***DESol***.
Multe ecuatii diferentiale nu pot fi rezolvate in mod analitic. In aceste cazuri, este utila reprezentarea grafica a solutiei ecuatiei diferentiale.

```
> ode1:=diff(y(t),t$2)+sin(t)^2*diff(y(t),t)+y( t)=cos(t)^2;
```

$$ode1 := (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,y(t)) + \sin(t)^2\,(\frac{\partial}{\partial t}\,y(t)) + y(t) = \cos(t)^2$$

```
> ic1:=y(0)=1,D(y)(0)=0;
```

$$ic1 := y(0) = 1,\ D(y)(0) = 0$$

Pentru inceput, incecati sa rezolvati aceasta ecuatie anlitic, folosind ***dsolve***:

```
> dsolve({ode1,ic1},{y(t)});
```

Comanda ***dsolve*** nu a returnat nimic, ceea ce indica faptul ca nu a putut gasi nici o solutie. Incercarea de a rezolva ecuatia cu metoda Laplace este din nou fara succes:

```
> dsolve({ode1,ic1},{y(t)},method=laplace);
```

Se va incerca comanda ***DEplot*** din pachetul ***DEtools***.

```
> with(DEtools);
```

[*DEnormal*, *DEplot*, *DEplot3d*, *Dchangevar*, *PDEchangecoords*, *PDEplot*, *autonomous*, *convertAlg*, *convertsys*, *dfieldplot*, *indicialeq*, *phaseportrait*, *reduceOrder*, *regularsp*, *translate*, *untranslate*, *varparam*]

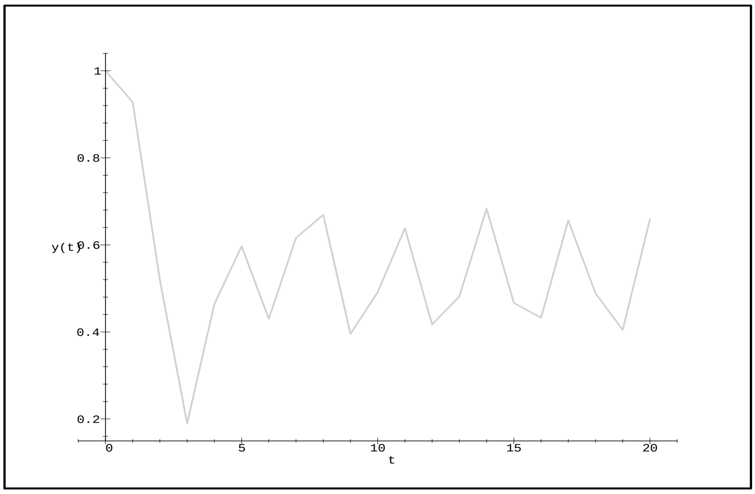
DEplot este o comanda de baza in "rezolvarea grafica" a ecuatiilor diferentiale ordinare si ea are sintaxa:

DEplot (ode, dep-var, range, [ini-conds])

unde: - ***ode*** este ecuatia diferentiala ordinara;

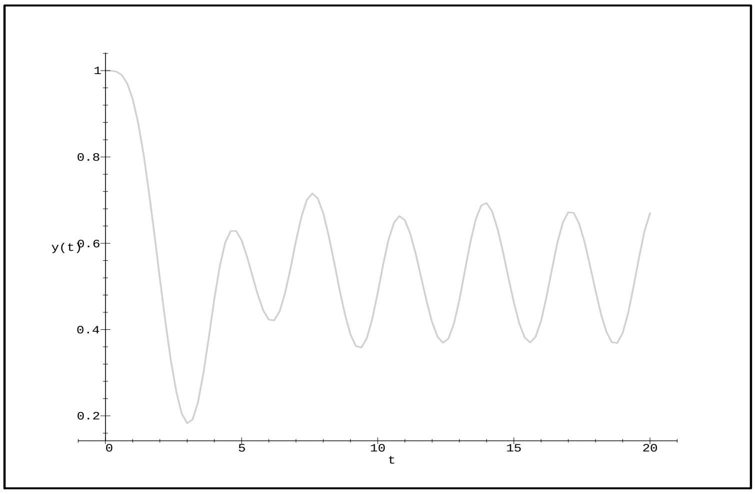
- ***dep-var*** este o variabila dependenta;
- ***range*** este domeniul variabilei independente;
- ***ini-conds*** este o lista de conditii initiale.

```
> DEplot(ode1,y(t),0..20,[[ic1]]);
```



Puteti acum mari precizia solutiei aproximative, specificand un pas de integrare mai mic.

```
> DEplot(ode1,y(t),0..20, [[ic1]],stepsize=0.2);
```

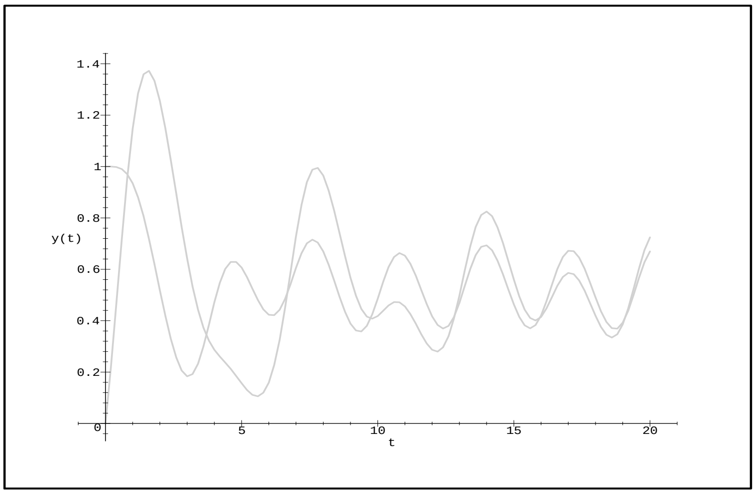


Daca specificati mai multe conditii initiale, ***DEplot*** deseneaza cate o solutie pentru fiecare conditie :

```
> ic2:=y(0)=0,D(y)(0)=1;
```

$$ic2 := \mathrm{y}(0) = 0,\ \mathrm{D}(y)(0) = 1$$

```
> DEplot(ode1,y(t),0..20,[[ic1],[ic2]],stepsize =0.2);
```



DEplot poate deasemenea sa deseneze solutiile unui sistem de ecuatii diferentiale:

```
> eq1:=diff(y(t),t)+y(t)+x(t)=0;
```

$$eq1 := (\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t)) + \mathrm{y}(t) + \mathrm{x}(t) = 0$$

```
> eq2:=y(t)=diff(x(t),t);
```

$$eq2 := \mathrm{y}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t)$$

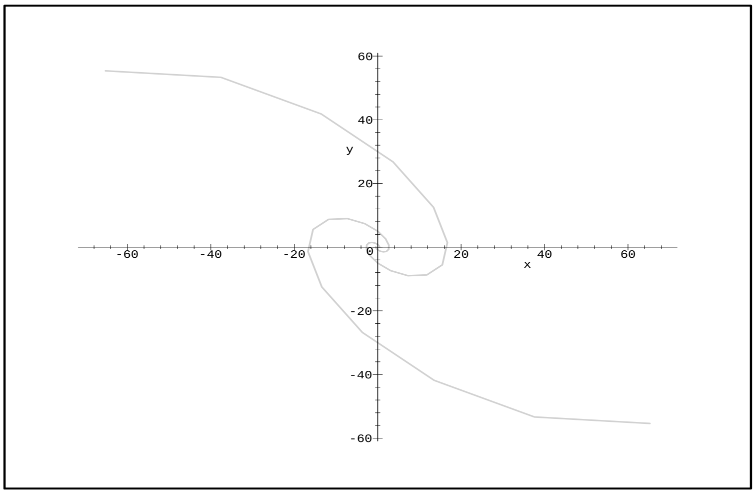
```
> ini1:=x(0)=0,y(0)=5;
```

$$ini1 := \mathrm{x}(0) = 0,\ \mathrm{y}(0) = 5$$

```
> ini2:=x(0)=0,y(0)=-5;
```

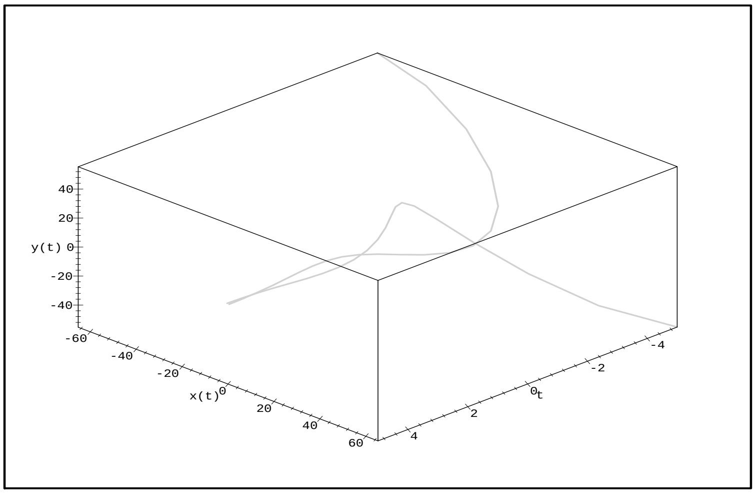
$$ini2 := \mathrm{x}(0) = 0,\ \mathrm{y}(0) = -5$$

```
> DEplot({eq1,eq2},[x(t),y(t)],-5..5,[[ini1], [ini2]]);
```



DEplot3d este varianta tridimensionala a lui ***DEplot***.

```
> DEplot3d({eq1,eq2},[x(t),y(t)],-5..5,[[ini1 ],[ini2]]);
```



Acesta este un exemplu de sistem de trei ecuatii diferentiale:

```
> eq1:=diff(x(t),t)=y(t)+z(t);
```

$$eq1 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x}(t) = \mathrm{y}(t) + \mathrm{z}(t)$$

```
> eq2:=diff(y(t),t)=-x(t)-y(t);
```

$$eq2 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = -\mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t)$$

```
> eq3:=diff(z(t),t)=x(t)+y(t)-z(t);
```

$$eq3 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{z}(t) = \mathrm{x}(t) + \mathrm{y}(t) - \mathrm{z}(t)$$

Exista doua liste de conditii initiale:

```
> ini1:=[x(0)=1,y(0)=0,z(0)=2];
```

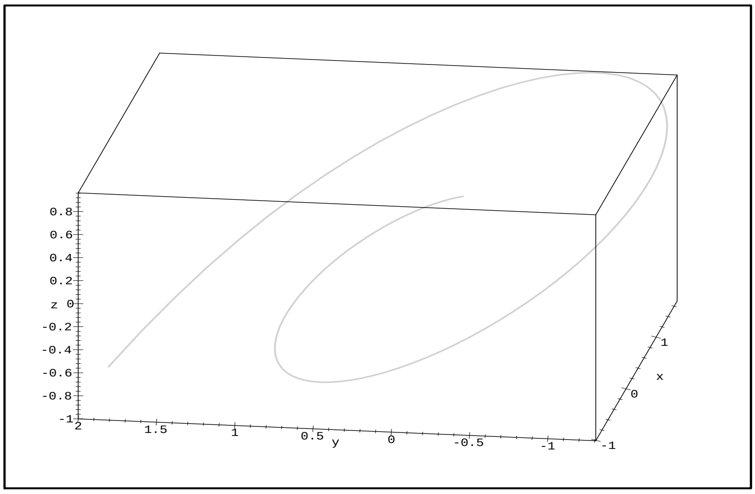
$$ini1 := [\mathrm{x}(0) = 1,\, \mathrm{y}(0) = 0,\, \mathrm{z}(0) = 2]$$

```
> ini2:=[x(0)=0,y(0)=2,z(0)=-1];
```

$$ini2 := [\mathrm{x}(0) = 0,\, \mathrm{y}(0) = 2,\, \mathrm{z}(0) = -1]$$

Comanda ***DEplot3d*** deseneaza doua solutii ale sistemului diferential de ecuatii $\{eq1, eq2, eq3\}$, cite o solutie pentru fiecare conditie initiala din lista.

```
> DEplot3d ({eq1,eq2,eq3},[x(t),y(t),z(t)],t=0..10,[ini1],[ini2],
stepsize=0.1,o rientation=[-171,58]);
```



Exemplul 6.9 - Utilizarea functiilor Heaviside, Dirac si a celor definite pe subintervale in rezolvarea ecuatiilor diferentiale

Functia treapta-unitate Heaviside este extrem de utila in modelarea sistemelor fizice prin ecuatii diferentiale.

Fie ecuatia:

```
> eq:=diff(y(t),t)=-y(t)*Heaviside(t-1);
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = -\mathrm{y}(t)\,\mathrm{Heaviside}(t-1)$$

```
> ini:=y(0)=3;
```

$$ini := \mathrm{y}(0) = 3$$

```
> dsolve({eq,ini},{y(t)});
```

$$\mathrm{y}(t) = 3 - 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1) + 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-t+1)}$$

Se va aduce solutia intr-o forma ce poate fi reprezentata grafic.

```
> subs(",y(t));
```

$$3 - 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1) + 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-t+1)}$$

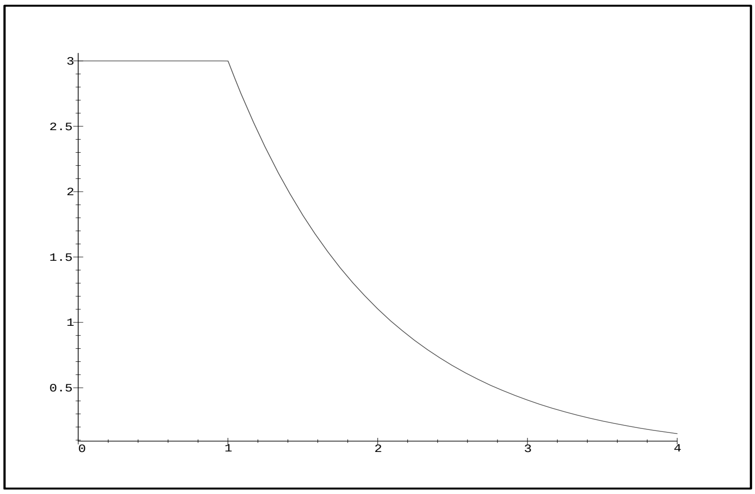
```
> unapply(",t);
```

$$t \to 3 - 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1) + 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-t+1)}$$

```
> f:=";
```

$$f := t \to 3 - 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1) + 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-t+1)}$$

```
> plot(f,0..4);
```

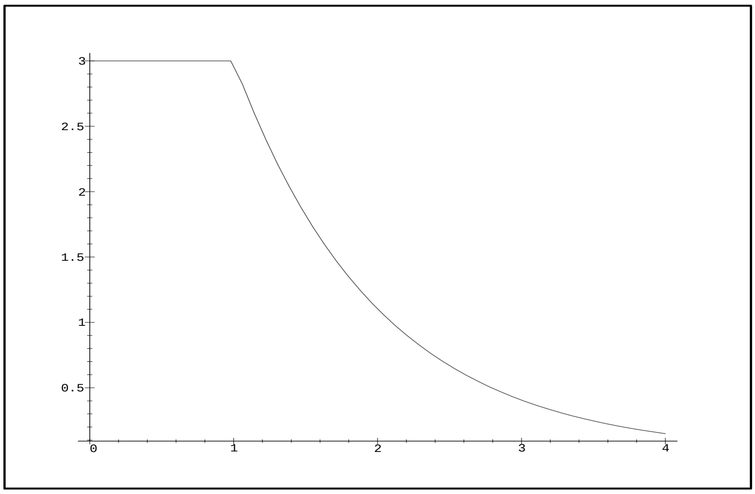


Folosind comanda ***odeplot*** se poate reprezenta solutia numerica a acestei ecuatii:

```
> sol1:=dsolve({eq,ini},{y(t)},type=numeric );
```

$$sol1 := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

```
> with(plots):
> odeplot(sol1,[t,y(t)],0..4);
```




```
> eq:=diff(y(t),t)=-y(t)*Dirac(t-1);
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = -\mathrm{y}(t)\,\mathrm{Dirac}(t-1)$$

```
> ini:=y(0)=3;
```

$$ini := \mathrm{y}(0) = 3$$

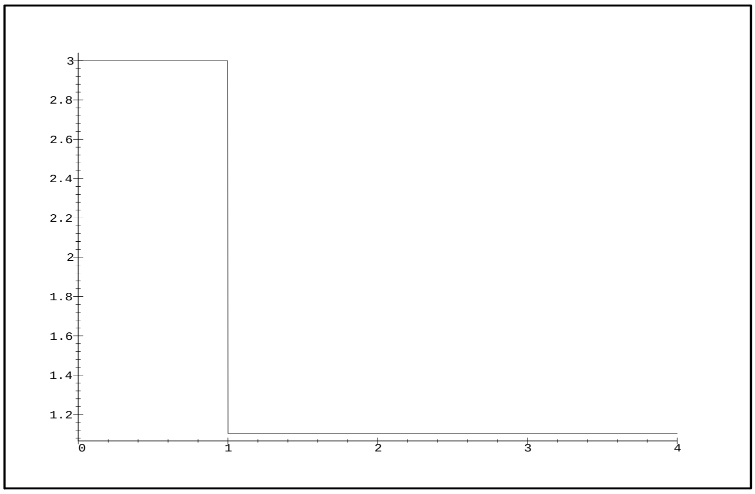
```
> dsolve({eq,ini},{y(t)});
```

$$\mathrm{y}(t) = 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-1)} + 3 - 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)$$

```
> f:=unapply(subs(",y(t)),t);
```

$$f := t \to 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)\,e^{(-1)} + 3 - 3\,\mathrm{Heaviside}(t-1)$$

```
> plot(f,0..4);
```



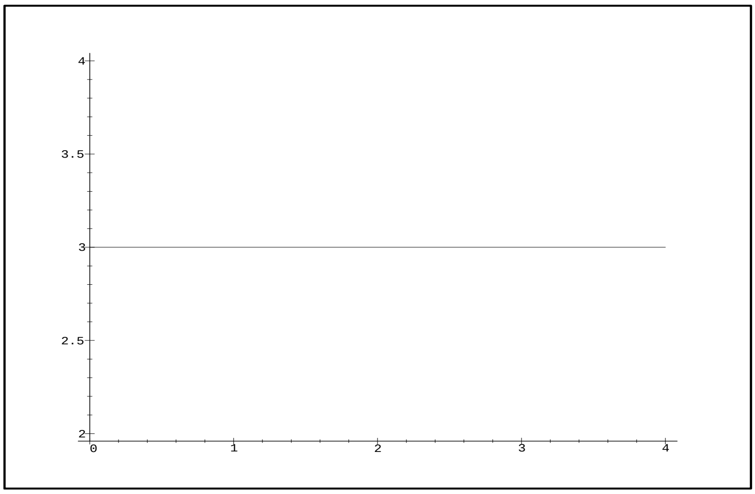

```
> sol2:=dsolve({eq, ini}, {y(t)},type=numeric);
```

$$sol2 := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

```
> with(plots, odeplot);
```

$$[odeplot]$$

> odeplot(sol2,[t,y(t)],0..4);



Se constata ca in acest caz rezolvarea sistemului nu genereaza o solutie acceptabila.

O alta clasa utila de functii sunt functiile "cu acolada" (***piecewise***), care au expresii diferite pe subintervalele ce alcatuiesc domeniul lor de definitie.

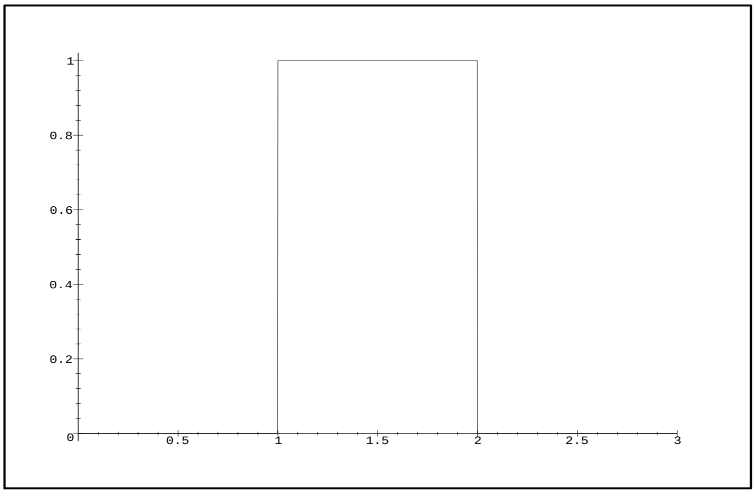
```
> f:= x->piecewise(1<=x and x<2, 1, 0);
```

$$f := x \to \text{piecewise}(1 \leq x \textbf{ and } x < 2, 1, 0)$$

```
> f(x);
```

$$\begin{cases} 1 & 1 - x \leq 0 \textbf{ and } x - 2 < 0 \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$$

```
> plot(f,0..3);
```



Aceasta functie "impuls dreptunghiular" poate fi folosita in descrierea unei ecuatii diferentiale.

```
> eq:=diff(y(t),t)=1-y(t)*f(t);
```

$$eq := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = 1 - \mathrm{y}(t)\,(\begin{cases} 1 & -t+1 \leq 0 \text{ and } t-2<0 \\ 0 & otherwise \end{cases})$$

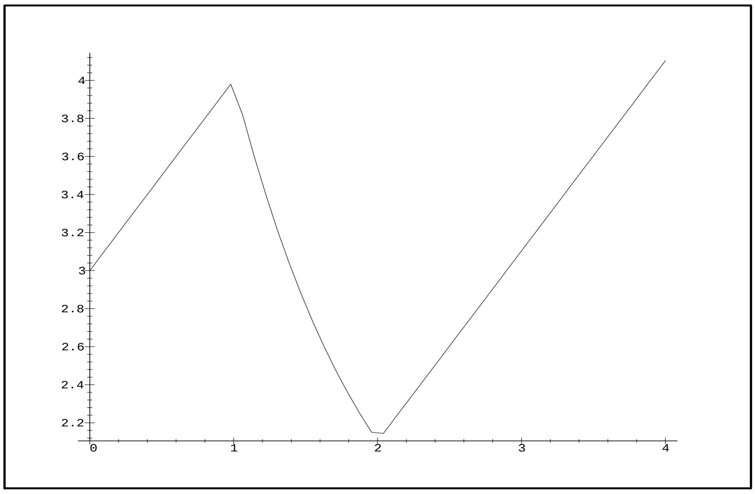
```
> ini :=y(0)=3;
```

$$ini := \mathrm{y}(0) = 3$$

```
> sol3:=dsolve({eq,ini},{y(t)},type=numeric );
```

$$sol3 := \mathbf{proc}(rkf45\_x)\ \ldots\ \mathbf{end}$$

```
> with(plots,odeplot):
> odeplot(sol3,[t,y(t)],0..4);
```



6.3 Ecuatii cu derivate partiale

Ecuatiile cu derivate partiale (PDE) sunt in general mai greu de rezolvat decat cele ordinare. Maple detine comenzi pentru rezolvarea, manipularea, precum si de reprezentarea grafica a solutiilor acestor ecuatii.

Comanda de baza pentru rezolvarea a numeroase PDE este ***pdesolve***, care are sintaxa:

pdesolve(pde,var)

in care *pde* este ecuatia cu derivate partiale iar *var* este variabila dependenta necunoscuta.

Fie ecuatia de tip hiperbolic a undelor:

```
> wave:=diff(u(x,t),t,t)-c^2*diff(u(x,t),x,x);
```

$$wave := (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{u}(x,\,t)) - c^2\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x,\,t))$$

```
> sol:=pdesolve(wave,u(x,t));
```

$$sol := \mathrm{u}(x,\,t) = \_\mathrm{F1}(t\,c + x) + \_\mathrm{F2}(t\,c - x)$$

Solutia va fi exprimata pentru conditiile initiale folosind functiile arbitrare _F1 si _F2. Pentru desenare este nevoie de date particulare.

```
> f1:=xi->exp(-xi^2);
```

$$f1 := \xi \to e^{(-\xi^2)}$$

```
> f2:=xi->piecewise(-1/2<xi and xi<1/2,1,0);
```

$$f2 := \xi \to \text{piecewise}(\frac{-1}{2} < \xi \textbf{ and } \xi < \frac{1}{2}, 1, 0)$$

Urmatoarele comenzi extrag solutia sub forma unei functii, si o reprezinta grafic.

```
> subs(_F1=f1,_F2=f2,c=1,sol);
```

$$\mathrm{u}(x, t) = \mathrm{f1}(t + x) + \mathrm{f2}(t - x)$$

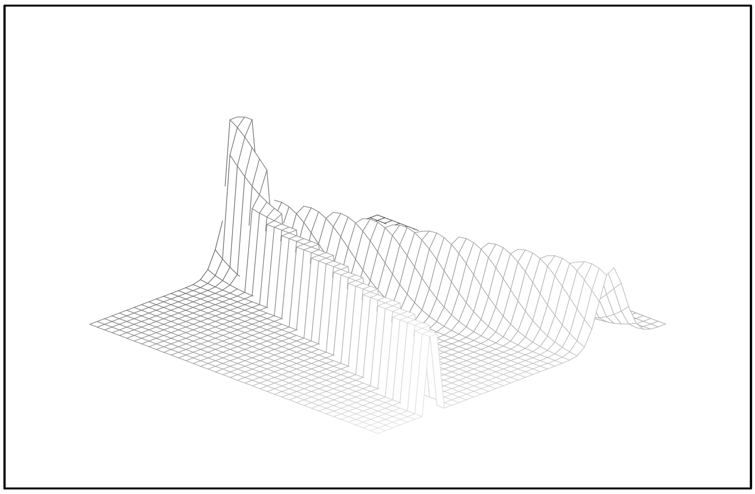
```
> subs(",u(x,t));
```

$$e^{(-(t+x)^2)} + \left(\begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} - t + x < 0 \textbf{ and } t - x - \frac{1}{2} < 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}\right)$$

```
> f:=unapply(",x,t);
```

$$f := (x, t) \to e^{(-(t+x)^2)} + \text{piecewise}(-\frac{1}{2} - t + x < 0 \textbf{ and } t - x - \frac{1}{2} < 0, 1, 0)$$

```
> plot3d(f,-8..8,0..5,grid=[40,40]);
```



Exemplul 6.10 - Metoda separarii variabilelor aplicata la ecuatii cu derivate partiale parabolice

Se considera ecuatia de tip parabolic a caldurii:

```
> heat:=diff(u(x,t),t)-k*diff(u(x,t),x,x)=0;
```

$$heat := (\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{u}(x, t)) - k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathrm{u}(x, t)) = 0$$

Comanda ***pdesolve*** nu poate rezolva aceasta ecuatie.

```
> pdesolve(heat,u(x,t));
```

$$\mathrm{pdesolve}((\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{u}(x,\,t)) - k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x,\,t)) = 0,\ \mathrm{u}(x,\,t))$$

Se incearca sa se gaseasca o solutie de forma *u(x,t)=X(x)*T(t)*.

```
> eq:=subs(u(x,t)=X(x)*T(t),heat);
```

$$eq := (\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)) - k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)) = 0$$

Se poate separa ecuatia trecand x intr-o parte si t in cealalta.

```
> eq/X(x)/T(t);
```

$$\frac{\mathrm{X}(x)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{T}(t)) - k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{X}(x))\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)} = 0$$

```
> expand(");
```

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{T}(t)} - \frac{k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{X}(x))}{\mathrm{X}(x)} = 0$$

Acum vom separa termeni de o parte si de alta.

```
> sep:=(")+(k*diff (X(x),x,x)/X(x)=k*diff(X(x),x,x)/X(x));
```

$$sep := \frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{T}(t)} = \frac{k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{X}(x))}{\mathrm{X}(x)}$$

Membrul stang depinde de t iar drept de x, deci amandoi sunt constanti:

```
> lhs(sep)=c;
```

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{T}(t)}{\mathrm{T}(t)} = c$$

Ecuatia diferentiala ordinara in variabila independenta t, astfel obtinuta are solutia.

```
> T_sol:=dsolve(",T(t));
```

$$T\_sol := \mathrm{T}(t) = e^{(t\,c)}\,\_C1$$

Membrul drept trebuie sa fie egal cu aceeasi constanta c:

```
> rhs(sep)=c;
```

$$\frac{k\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{X}(x))}{\mathrm{X}(x)} = c$$

Se rezolva ecuatia diferentiala ordinara in variabila independenta x:

```
> X_sol:=dsolve(",X(x),explicit=true);
```

$$X\_sol := \mathrm{X}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-\_C1\,k^2 + (e^{(\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})})^2}{e^{(\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})}\,\sqrt{k\,c}},\ \mathrm{X}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-\_C1\,k^2 + (e^{(-\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})})^2}{e^{(-\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})}\,\sqrt{k\,c}}$$

Multiplicand cele doua solutii in x si t se obtine:

```
> map(subs,{X_sol},T_sol,X(x)*T(t));
```

$$\left\{\frac{1}{2}\,\frac{(-\_C1\,k^2 + (e^{(\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})})^2)\,e^{(t\,c)}\,\_C1}{e^{(\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})}\,\sqrt{k\,c}},\ \frac{1}{2}\,\frac{(-\_C1\,k^2 + (e^{(-\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})})^2)\,e^{(t\,c)}\,\_C1}{e^{(-\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})}\,\sqrt{k\,c}}\right\}$$

Maple V poate simplifica putin solutia astfel obtinuta.

```
> sol:=simplify(");
```

$$sol := \left\{\frac{1}{2}\,\frac{(-\_C1\,k^2 + e^{(2\,\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})})\,\_C1\,e^{(-\frac{x\,\sqrt{k\,c}+\_C2\,\sqrt{k\,c}-t\,c\,k}{k})}}{\sqrt{k\,c}},\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\,\frac{(-\_C1\,k^2 + e^{(-2\,\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k})})\,\_C1\,e^{(\frac{x\,\sqrt{k\,c}+\_C2\,\sqrt{k\,c}+t\,c\,k}{k})}}{\sqrt{k\,c}}\right\}$$

Se substituie valorile numerice pentru constante si se scrie sub forma trigonometrica:

```
> subs(c=-k,k=1,_C1=1,_C2=1,sol);
```

$$\{-\frac{1}{2}\,I\,(-1 + e^{(2\,I\,(x+1))})\,e^{(-I\,x-I-t)},\ -\frac{1}{2}\,I\,(-1 + e^{(-2\,I\,(x+1))})\,e^{(I\,x+I-t)}\}$$

```
> convert(",trig);
```

$$\{-\frac{1}{2}\,I\,(-1 + \cos(2\,x+2) + I\sin(2\,x+2))\,(\cosh(t) - \sinh(t))\,(\cos(x+1) - I\sin(x+1)),$$
$$-\frac{1}{2}\,I\,(-1 + \cos(2\,x+2) - I\sin(2\,x+2))\,(\cosh(t) - \sinh(t))\,(\cos(x+1) + I\sin(x+1))\}$$

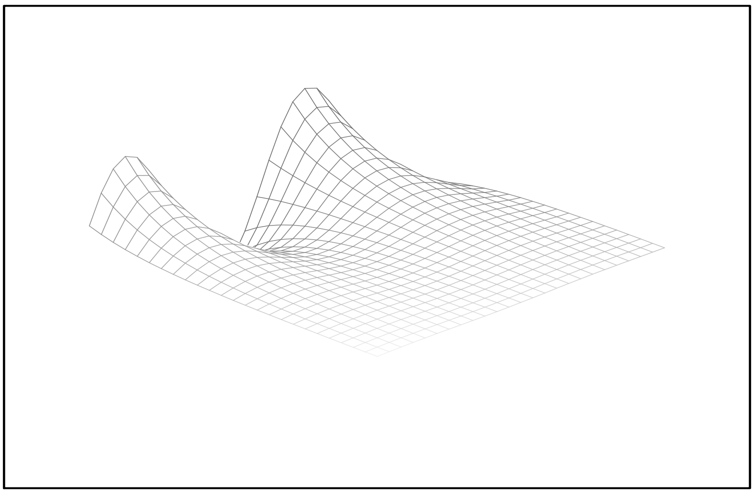
Solutia se poate scrie intr-o forma si mai compacta:

```
> S:=combine(");
```

$$S := \{\cosh(t)\sin(x+1) - \sinh(t)\sin(x+1),\ -\cosh(t)\sin(x+1) + \sinh(t)\sin(x+1)\}$$

Urmatoarea comanda reprezinta grafic una din cele doua solutii:

```
>  plot3d(S[2],x=-5..5,t=0..5);
```



Pentru a verifica solutiile obtinute, acestea se substituie in ecuatia originala.

```
>  subs(u(x,t)=sol[2],heat);
```

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\_C1\,k^2+e^{\left(-2\,\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k}\right)}\right)\_C1\,e^{\left(\frac{x\,\sqrt{k\,c}+\_C2\,\sqrt{k\,c}+t\,c\,k}{k}\right)}}{\sqrt{k\,c}}\right)\right)$$
$$-\,k\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\_C1\,k^2+e^{\left(-2\,\frac{\sqrt{k\,c}\,(x+\_C2)}{k}\right)}\right)\_C1\,e^{\left(\frac{x\,\sqrt{k\,c}+\_C2\,\sqrt{k\,c}+t\,c\,k}{k}\right)}}{\sqrt{k\,c}}\right)\right)=0$$

```
>  simplify(");
```

$$0=0$$

Exemplul 6.11 - Reprezentarea grafica a solutiilor ecuatiilor cu derivate partiale

Solutiile multor ecuatii cu derivate partiale pot fi reprezentate grafic cu comanda ***PDEplot*** din pachetul ***DEtools***. Sintaxa comenzii este:

PDEplot(pde,var,ini,s=range)

in care *pde* este ecuatia, *var* este variabila dependenta, iar *ini* si *s* sunt parametrii curbei 3D.

```
>  with(DEtools);
```

[*DEnormal*, *DEplot*, *DEplot3d*, *Dchangevar*, *PDEchangecoords*, *PDEplot*, *autonomous*, *convertAlg*, *convertsys*, *dfieldplot*, *indicialeq*, *phaseportrait*, *reduceOrder*, *regularsp*, *translate*, *untranslate*, *varparam*]

Vom considera ecuatia cu derivate partiale:

```
> pde:=diff(u(x,y),x)+cos(2*x)*diff(u(x,y),y)=- sin(y);
```

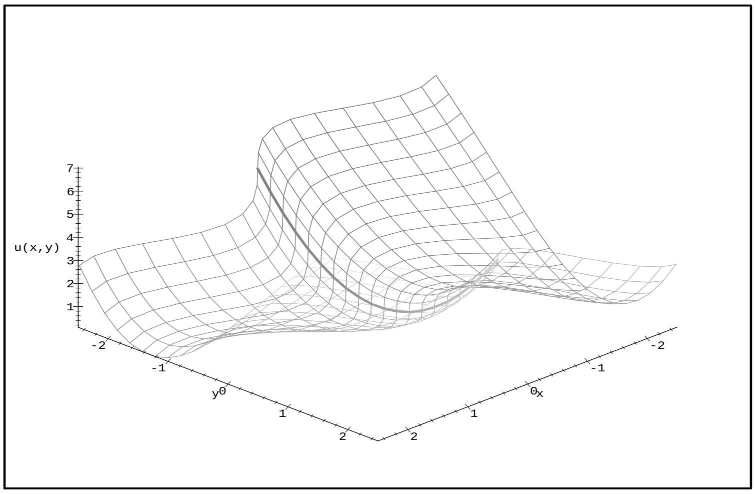
$$pde := (\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u}(x,\, y)) + \cos(2\,x)\,(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{u}(x,\, y)) = -\sin(y)$$

Folosim curba data de $z = 1 + y^2$ cu conditiile initiale, x=0, y=s si $z = 1 + s^2$.

```
> ini:=[0,s,1+s^2];
```

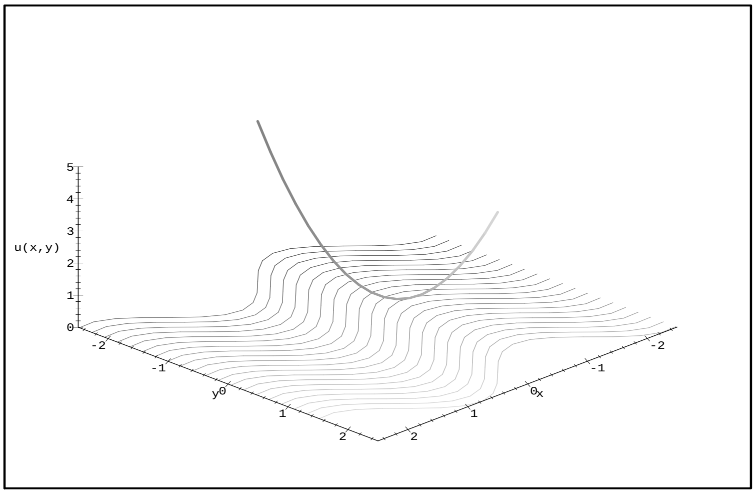
$$ini := [0,\, s,\, 1 + s^2]$$

```
> PDEplot (pde, u(x,y), ini, s=-2..2);
```



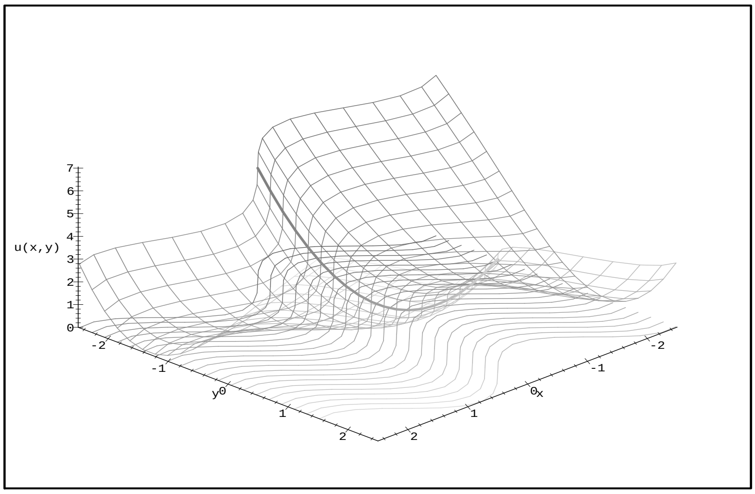
Pentru a desena suprafata, Maple V determina curbele caracteristice:

```
> PDEplot (pde, u(x,y), ini, s=-2..2,basechar=only);
```

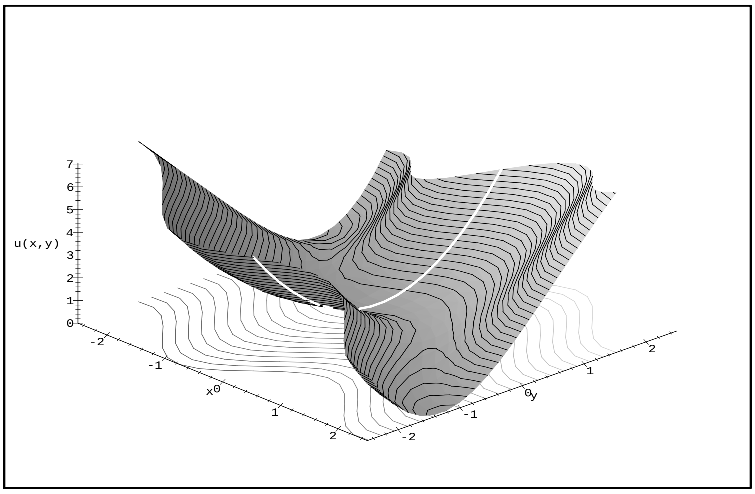


Cele doua reprezentari pot fi suprapuse folosind comanda:

```
>  PDEplot (pde, u(x,y), ini, s=-2..2,basechar=true);
```




```
>  PDEplot (pde,u(x,y),ini,s=-2..2,
>  basechar=true,initcolor=white,
>  style=patchcontour,contours=20,
>  orientation=[-43,45]);
```



6.4 Exercitii propuse

1. Sa se calculeze derivatele functiilor urmatoare:
a) $\mathrm{f}(x) = \frac{x+\sin(x)}{x-\cos(x)}$ in puctul $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
b) $\mathrm{g}(x) = 3^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}})$ in punctul $x_0 = 2$;
2. Sa se studieze eroarea aproximatiei Taylor pentru urmatoarele functii:
a) $\mathrm{f}(x) = \ln(1+x)$ in jurul punctului a=0;
b) $\mathrm{g}(x) = e^{\left(\frac{x+\sin(x)}{x-\cos(x)}\right)}$ in jurul punctului a= $\frac{\pi}{4}$;
3. Sa se calculeze urmatoarele integrale definite:
a) $\int_1^2 x\ln(x)\,dx$;
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos(x)+3}\,dx$;
4. Sa se determine derivatele partiale mixte pentru functiile:
a) $\mathrm{f}(x,\, y) = x^3\,y^2 + \frac{1}{x^3+y^3}$,
b) $\mathrm{g}(x,\, y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$;
5. Sa se rezolve urmatoarele ecuatii diferentiale:
a) $6\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{u}(t)) + 5\,\mathrm{u}(t) + 3\,t = 0$,
b) $50\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{u}(t)) + 7\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{u}(t)) + 2\,t = 0$, cu conditiile initiale u(0)=1 si $(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{u}(t))(0) = 1$;

6. Sa se rezolve urmatoarele ecuatii (se va converti solutia gasita intr-un polinom si se va reprezenta grafic acest polinom):
a) $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x)) - y\,(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{u}(x)) + x\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{u}(x)) + y\,(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{u}(x)) + \mathrm{u}(x) = 0$,
b) $(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x)) + 2\,(\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{u}(x)) - 3\,(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\mathrm{u}(x)) + 2\,(\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{u}(x)) + 6\,(\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{u}(x)) = 0$;
7. Sa se rezolve urmatoarele ecuatii si sa li se reprezinte grafic solutiile:
a) $\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = (\mathrm{y}(t)^2 - \mathrm{y}(t) + 1)\,\mathrm{Heaviside}(t-4)$, cu $y(0) = 3$,
b) $\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = \sqrt{\mathrm{y}(t)^2+1}\,\mathrm{Heaviside}(t)$, cu $y(0) = \frac{\pi}{4}$,

c) $\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = (\mathrm{y}(t)^2 - \mathrm{y}(t) + 1)\,\mathrm{Dirac}(t-4)$, cu $y(0) = 3$,

d) $\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y}(t) = \sqrt{\mathrm{y}(t)^2 + 1}\,\mathrm{Dirac}(t)$, cu $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

8. Sa se rezolve urmatoarea ecuatie a undelor si sa i se reprezinte grafic solutia:

$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{u}(x,\,t)) - 36\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x,\,t)) = 0$;

9. Sa se rezolve prin metoda separarii variabilelor urmatoare ecuatie si sa i se reprezinte grafic solutia:

$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{u}(x,\,t) = 4\,(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{u}(x,\,t))$.

7 Citirea si scrierea

Maple V poate fi utilizat pentru a modela diferite fenomene fizice folosind rezultate experimentale sau date numerice generate de alte programe. Pentru a realiza interfata cu alte programe datele trebuie convertite in formate Maple V sau exportate in formatul recunoscut de alte programe.

In acest capitol se prezinta facilitatile pe care Maple V le are de a exporta si importa date. Capitolul mai contine o prezentare a modului in care documentele pot fi salvate in formatul *LaTex*.

7.1 Citirea fisierelor

Exemplul 7.1 - Citirea datelor cu comanda *readdata*

Maple V poate citi din fisiere fie *date* fie *comenzi* salvate in format text.

Pentru citirea *datelor* se foloseste comanda ***readdata***, care are urmatoarea sintaxa:

readdata(‘*numele fisierului*‘,n);

unde n este numarul de coloane care se citesc din fisier.

Caracterul ‘ folosit pentru specificarea numelui fisierului este caracterul care pe tastaturile US apare in stanga tastei 1. Deoarece caracterul \ care poate apare in numele fisierului pentru a specifica o cale are rol de control, in locul lui se va scrie \\.

De exemplu, pentru citirea fisierului MapleV.txt, aflat pe discul d, cu continutul:

0 1 0 1 0.54 0.9 2 0.23 2.3 3 0.1 2.1 4 0.33 -3.45,

se utilizeaza comanda:

```
> L:=readdata(‘d:\\Maple_V.txt‘,3);
```

$$L := [[0, 1., 0], [1., .54, .9], [2., .23, 2.3], [3., .1, 2.1], [4., .33, -3.45]]$$

L este o lista si in consecinta se pot aplica in continuare asupra ei toate operatiile acceptabile pentru liste.

Maple V citeste implicit numere scrise in format cu virgula mobila. Folosind optiunea ***integer*** acestea pot fi citite ca intregi.

```
> L:=readdata(‘d:\\Maple_V.txt‘,integer,2);
```

$$L := [[0, 1], [1, 0], [2, 0], [3, 0], [4, 0]]$$

In functie de necesitati se poate citi si o combinatie de tipuri:

```
> L:=readdata(‘d:\\Maple$_$V.txt‘,[integer,floa t,integer]);
```

$$L := [[0, 1., 0], [1, .54, 0], [2, .23, 2], [3, .1, 2], [4, .33, -3]]$$

Exemplul 7.2 - Citirea comenzilor cu comanda *read*

Pentru *citirea* comenzilor se foloseste comanda ***read*** care are sintaxa:

read '*numele fisierului*';

In fisierul de intrare comenzile trebuie scrise in limbajul Maple V, asa cum ar fi introduse la consola.

Sa consideram de exemplu, fisierul comenzi.txt cu continutul:

```
s:=int(x^2*sin(x),x);
def:=subs(x=2,s)-subs(x=0,s);
evalf(def);
s1:=int(x^2*sin(x),x=0..2);
evalf(s1);
```

Efectul comenzii ***read*** este de a executa comenzile din fisier.

```
> read 'd:\\comenzi.txt';
```

$$s := -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

$$def := -2\cos(2) + 4\sin(2) - 2\cos(0)$$

$$2.469483380$$

$$s1 := -2\cos(2) + 4\sin(2) - 2$$

$$2.469483380$$

Daca se doreste vizualizarea comenzilor executate se seteaza variabila ***echo*** a interfetei la valoarea *2*, cu instructiunea:

```
> interface(echo=2);
> read 'd:\\comenzi.txt';
> s:=int(x^2*sin(x),x);
```

$$s := -x^2 \cos(x) + 2\cos(x) + 2\,x\sin(x)$$

```
> def:=subs(x=2,s)-subs(x=0,s);
```

$$def := -2\cos(2) + 4\sin(2) - 2\cos(0)$$

```
> evalf(def);
```

$$2.469483380$$

```
> s1:=int(x^2*sin(x),x=0..2);
```

$$s1 := -2\cos(2) + 4\sin(2) - 2$$

```
> evalf(s1);
```

$$2.469483380$$

7.2 Scrierea fisierelor

Exemplul 7.3 - Scrierea datelor cu comanda *writedata*

Pentru a scrie date intr-un fisier se foloseste comanda ***writedata***, care are sintaxa:

$$\boldsymbol{writedata}[\boldsymbol{APPEND}](\text{‘}numele\ fisierului\text{‘}, data);$$

unde: - [***APPEND***] este folosita optional daca se doreste adaugarea la un fisier deja scris;
- *data* este identificatorul datelor care trebuie salvate.
Daca numele fisierului este ***terminal*** atunci datale vor fi scrise pe ecran.

```
> L:=[2.434,343,3.34];
```

$$L := [2.434,\ 343,\ 3.34]$$

```
> writedata(‘terminal‘,L);

2.434
343
3.34

> writedata[APPEND](‘d:\\Maple_V.txt‘,L);

> L:=readdata(‘d:\\Maple_V.txt‘,3);
```

$$L := [[0,\ 1.,\ 0],\ [1.,\ .54,\ .9],\ [2.,\ .23,\ 2.3],\ [3.,\ .1,\ 2.1],\ [4.,\ .33,\ -3.45],\ [2.434],\ [343.],\ [3.34]]$$

Daca datele alcatuiesc o matrice sau o lista de numere, in fisierul de iesire coloanele sunt separate cu TAB iar liniile cu ENTER.

```
> A:=[[1,0,5],[4,1,2]];
```

$$A := [[1,\ 0,\ 5],\ [4,\ 1,\ 2]]$$

Daca nu este folosita optiunea [***APPEND***] datele continute de fisierul specificat sunt sterse, dupa care se scriu noile date.

```
> writedata(‘terminal‘,A);

1       0       5
4       1       2
```

```
> writedata(`d:\\Maple_V.txt`,A);
> L:=readdata(`d:\\Maple_V.txt`,3);
```

$$L := [[1., 0, 5.], [4., 1., 2.]]$$

Comanda ***writedata*** opereaza cu valori numerice si de aceea constantele trebuie evaluate inainte de a fi scrise.

```
> V:=[-Pi,log(2)];
```

$$V := [-\pi, \ln(2)]$$

```
> V1:=evalf(V);
```

$$V1 := [-3.141592654, .6931471806]$$

```
> writedata(`terminal`,V1);

-3.141592
.693147
```

Daca nu se face evaluarea constantelor, Maple V va afisa un mesaj de eroare.

```
> V2:=[Pi,-Pi];
```

$$V2 := [\pi, -\pi]$$

```
> writedata(`terminal`,V2);

Error, (in writedata) Bad data found, Pi
```

Numerele sunt considerate implicit in virgula mobila, dar pot fi scrise si numere intregi sau combinatii intregi si reale folosind optiunile ***integer*** si ***float***.

Daca este nevoie, comanda trunchiaza numarul real la unul intreg.

```
> L:=[2.3,1.8,-4.8,9];
```

$$L := [2.3, 1.8, -4.8, 9]$$

```
> writedata(`terminal`,L,integer);

2
1
-4
9

> writedata(`terminal`,map(trunc,L),integer);

2
1
-4
9
```

Cele doua comenzi ***writedata*** sunt identice. Daca se doreste trunchierea numerelor reale in alt fel se poate folosi functia de conversie real-intreg corespunzatoare:

```
> writedata('terminal',map(round,L),integer);
```

```
2
2
-5
9
```

In afara comenzilor de citire/scriere a datelor prezentate anterior, Maple V pune la dispozitia utilizatorului si comenzi de intrare/iesire a datelor, de nivel redus, asemanatoare functiilor corespunzatoare din limbajul C: ***fopen***, ***fclose***, ***fprintf***, ***fscanf***.

Exemplul 7.4 - Salvarea expresilor cu comanda *save*

Expresiile pot fi salvate in fisier in formatul intern Maple V. Acesta facilitate este utila daca se doreste salvarea unei structuri sau proceduri complicate. Pentru acesta se foloseste comanda ***save*** cu sintaxa:

save *nume_structura* '*nume_fisier.**m***';

Extensia ***.m*** indica faptul ca datele sunt salvate in fisierul de iesire in formatul intern Maple V.

```
> q:=a->int(x^a*sin(x),x);
```

$$q := a \to \int x^a \sin(x)\, dx$$

```
> expr:=q(3);
```

$$expr := -x^3 \cos(x) + 3\,x^2 \sin(x) - 6 \sin(x) + 6\,x \cos(x)$$

```
> save q,expr,'d:\\fis.m';
> restart;
```

Cu comanda ***restart*** s-au sters toate variabilele folosite anterior.

```
> expr;
```

$$expr$$

```
> read 'd:\\fis.m';
> q(3);
```

$$-x^3 \cos(x) + 3\,x^2 \sin(x) - 6 \sin(x) + 6\,x \cos(x)$$

```
> expr;
```

$$-x^3\cos(x)+3\,x^2\sin(x)-6\sin(x)+6\,x\cos(x)$$

7.3 Conversia la formatul LaTex

Comanda ***latex*** coverteste expresiile scrise in format Maple V in formatul LaTex.

```
> latex(a/b);
```

```
\{\TEXTsymbol{\}frac \{a\}\{b\}\}
```

Daca se doreste salvarea rezultatului intr-un fisier se foloseste forma:

latex(*expr*,‘*nume_fisier*‘);

Aceasta comanda se poate aplica la transformarea unei zone complete de lucru. Daca se doreste acest lucru zonea de lucru se poate exporta in format LaTex dupa cum se va vedea in continuare.

Exemplul 7.5 - Exportul unei zone de lucru in formate *text* si *LaTex*

Intr-o zona de lucru se deosebesc trei feluri de informatii: texte, instructiuni (comenzi) si rezultate. Atunci cand se exporta o zona de lucru in format Maple V (text) fiecare rand este precedat de un caracter de control.

Astfel un rand de text este precedat de carateru1 # o instructiune este precedata de caracterul > iar un rand de afisare a rezultatelor nu este precedat de nici un caracter de control.

Pentru a efectua operatia de export in formatul Maple V se selecteaza din meniul *FILE* optiunile *EXPORT AS* si *MAPLE TEXT*, apoi in ferestra dialog se introduce numele fisierului cu extensia ***.tex***.

Iata un exemplu de fisier salvat in acest format:

```
# Integrala nedefinita
# Se va calcula integrala:
> expr:=Int((x-a)^2*exp(x-a),x);
```

$$expr := \int (x-a)^2 exp(x-a)dx$$

```
# Valoarea sa este:
> raspuns:=value(expr);
```

$$raspuns := (x-a)^2 exp(x-a) - 2(x-a)exp(x-a) + 2exp(x-a)$$

```
# Se observa ca solutia depinde de parametrul a.
```

```
# Iata cum parametrul afecteaza valoarea integralei.
> plot3d(raspuns,x=0..2,a=0..1);
```

Pentru a incarca un astfel de fisier text transformandu-l in zona de lucru se selecteaza optiunea *OPEN* din meniul *FILE* si se alege din submeniu optiunea *Maple text.*

Pentru a exporta o zona de lucru in format LaTex se selecteaza din meniul *FILE* optiunea *EXPORT AS* urmata de *LaTex.*

Fisierul de iesire are acum continutul:

```
%% Created by Maple V Release 4 (IBM INTEL NT)
%% Source Worksheet:  exemplu.mws
%% Generated:  Tue Jul 06 02:58:14 1999
\documentclass{article}
\usepackage{maple2e}
\DefineParaStyle{Maple Output}
\DefineParaStyle{Maple Plot}
\DefineParaStyle{Title}
\DefineCharStyle{2D Math}
\DefineCharStyle{2D Output}
\begin{document}
\begin{maplegroup}
\begin{Title}
Integrala nedefinita
\end{Title}
Se va calcula integrala:
\begin{mapleinput}
\mapleinline{active}{1d}{expr:=Int(x^2*exp(x-a),x);}{% }
\end{mapleinput}
\mapleresult
\begin{maplelatex}
\[{\it expr} := {\displaystyle\int } x^{2}\,e^{(x-a)}\,dx\]
\end{maplelatex}
\end{maplegroup}
\begin{maplegroup}
Valoarea sa este:
\begin{mapleinput}
\mapleinline{active}{1d}{raspuns:=value(expr);}{% }
\end{mapleinput}
\mapleresult
\begin{maplelatex}
\[{\it raspuns} := (x - a)^{2}\,e^{(x - a)} - 2\,(x - a)\,e^{(x -
a )} + 2\,e^{(x - a)} + 2\,((x - a)\,e^{(x - a)} - e^{(x - a)})\,a +
e^{(x - a)}\,a^{2} \]
\end{maplelatex}
```

```
\end{maplegroup}
\begin{maplegroup}
Se observa ca solutia depinde de parametrul a.
Iata cum parametrul afecteaza valoarea integralei.
\begin{mapleinput}
\mapleinline{active}{1d}{plot3d(raspuns,x=0..2,a=0..  1);}{% }
\end{mapleinput}
\mapleresult
\begin{center}
\mapleplot{ex01.eps}
\end{center}
\end{maplegroup}
\begin{maplegroup}
\begin{mapleinput}
\end{mapleinput}
\end{maplegroup}
\end{document}
%% End of Maple V Output
```

Exemplul 7.6 - Exportul reprezentarilor grafice cu comanda *plotsetup*

Daca zona de lucru contine grafice, atunci sunt generate fisierele postscript corespunzatoare necesare LaTex-ului.

Maple V afiseaza implicit graficele direct in zona de lucru. Folosind instructiunea:

$$>\boldsymbol{plotsetup}(window),$$

graficul poate fi desenat intr-o fereastra separata.

Comanda ***plotsetup*** permite conversia formatului graficului si transferul acestuia. Ea are sintaxa:

$$>\boldsymbol{plotsetup}(tip,\ \boldsymbol{plotout}=`\boldsymbol{nume}`,\boldsymbol{plo\ \ toption}=`optiuni`);$$

in care *tip* este tipul perifericului unde se face transferul iar *nume* este numele fisierului.

De exemplu, urmatoarea comanda trimite graficele generate de urmatoarele comenzi ***plot*** intr-un fisier postscript cu numele *myplot.**ps***:

$$>\boldsymbol{plotsetup}(\boldsymbol{postcript},\ \boldsymbol{plotout}=`myplot.\boldsymbol{ps}`);$$

Comanda urmatoare converteste graficele cu formatul HPGL, compatibil cu imprimanta HP Laserjet si le transfera in fisiere *myplot.**hp***:

$$>\boldsymbol{plotsetup}(\boldsymbol{hpgl},\boldsymbol{plotout}=`myplot.\boldsymbol{hp}`,\boldsymbol{plo\ \ toptions}=`laserjet`);$$

Daca se doreste sa se genereze mai multe grafice este necesar sa se schimbe optiunea ***plotout*** inainte de fiecare afisare.

>***plotsetup***(***plotout***=‘m yplot2.***hp***‘);

>***display***(a);

Dupa ce s-a terminat exportul graficelor va trebui sa se treaca din nou in modul de afisare a graficelor in zona de lucru cu comanda:

>***plotsetup***(*inline*);

Detalii privind dispozitivele de afisare se pot obitine cu comanda ***?plot***,***device***.

7.4 Exercitii propuse

1. Sa se scrie intr-un fisier date de tip real continute intr-o matrice A de dimensiune 3×3 dupa care sa se citeasca aceste date sub forma rotunjita si trunchiata;

2. Sa se creeze un fisier care sa contina o secventa de instructiuni. Sa se vizualizeze executia acestor instructiuni.

3. Sa se salveze o expresie matematica intr-un fisier cu numele *expr.m*;

4. Sa se realizeze conversia unei secvente de instructiuni la format Maple text si format LaTex si sa se exporte in aceste formate.

5. Sa se realizeze exportul unei reprezentari grafice tridimensionale intr-un fisier postscript.

Anexa 1 - Structura Help-ului

A1.1 Mathematics

Algebra

Expression Manipulation

Basic Mathematics

exp the Exponential Function
initially known functions Initially-known mathematical functions
product definite and indefinite product
Product inert form of product
sqrt square root
sum definite and indefinite summation
Sum inert form of sum
Arithmetic Operations
Exponential, Trig, and Hyperbolic Functions
Logarithms

Calculus

Continuity Testing
Differential Calculus
Differential Equations
Differential Forms
Lie Symmetries **the Lie Symmetries package**
Integration
Integral Transforms
Limits
Power Series
Student Package **the student calculus package**

Discrete Mathematics

Combinatorics
Graph Theory **The networks package**

Evaluation

allvalues evaluate all possible values of expressions involving RootOfs
***assume* Assume facility**
cost operation evaluation count
eval explicit evaluation
Eval evaluate a polynomial
evala evaluate in an algebraic number (or function) field
evalb evaluate as a Boolean expression
***evalc* symbolic evaluator over the complex field**
evalf evaluate using floating-point arithmetic
evalgf evaluate in an algebraic extension of a finite field
***evalhf* evaluate an expression using hardware floating-point**
evalm evaluate a matrix expression
evaln evaluate to a name
evalpow general evaluator for power series expressions
evalr evaluate an expression using range arithmetic
value evaluate inert functions (formerly student[Eval])

Finding Roots, Factorization, and Solving Equations

Numerical Solutions
Optimization
Roots
Symbolic Solutions
invfunc Inverse Function Table
isolate isolate a subexpression to left side of an equation
leastsqrs least-squares solution of equations
linsolve solution of linear equations
***LREtools* Linear Recurrence Equation Tools package**
msolve solve equations in Z mod m
powsolve solve linear differential equations as power series
rsolve recurrence equation solver
singular find singularities of an expression
solve solve equations

General Information

arithmetic operators Arithmetic operators +, -, *, /, ^, **
constants Maple constants
inert index of functions
initially known functions Initially known mathematical functions
initially known names initially-known names
operators Operators

Geometry

spline compute a spline segment polynomial
distance compute the distance between points
intercept compute the points of intersection of two curves
midpoint compute the midpoint of a line segment
slope compute the slope of a line
2D Euclidean **the geometry package**

Inert Functions

AFactor inert absolute factorization
AFactors inert absolute factorization - list of factors
Content inert content function
Det inert determinant
Diff inert partial differentiation
DistDeg distinct degree factorization
Divide inert divide function
Eigenvals compute the eigenvalues/vectors of a numeric matrix
Eval Evaluate a polynomial
Expand inert expand function
Factor inert factor function
Factors inert factor function
Frobenius Frobenius form of a square matrix
Gausselim inert Gaussian elimination
Gaussjord inert Gauss Jordan elimination
Gcd inert gcd function
Gcdex inert gcdex function
Hermite compute the Hermite Normal Form of a matrix mod p
Indep inert independence checking
Int inert form of int (integration function)
Interp inert interp function
Inverse inert matrix inverse
Irreduc inert irreducibility function
Issimilar inert matrix similarity tester
Lcm inert least common multiple of polynomials
Limit inert form of limit
Linsolve inert matrix solve
Norm norm of an algebraic number (or function)
Normal inert normal function
Nullspace compute the nullspace of a matrix mod p
Power inert power function
Powmod inert power function with remainder

Prem inert pseudo-remainder function
Primfield' primitive element of an algebraic extension
Primitive test whether a polynomial is primitive mod p
Primpart inert primitive part function
ProbSplit probabilistic splitting of distinct degree factors
Product inert form of product
Quo inert quo function
Randpoly random polynomial over a finite field
Randprime random monic prime polynomial over a finite field
Rem inert rem function
Resultant inert resultant function
Roots roots of a polynomial mod n
Smith compute the Smith Normal Form of a matrix mod p
Sprem inert sparse pseudo-remainder function
Sqrfree inert square free factorization function
Sum inert form of sum
Sum (student package) inert form of sum
Svd compute the singular values/vectors of a numeric matrix
Trace trace of an algebraic number (or function)
Int inert form of int (integration function)
value evaluate inert functions (formerly student[Eval])

Packages

combinat the combinatorial functions package
combstruct the combinatorial structures package
DEtools Differential Equations Tools package
difforms the difforms package
finance the finance package
Gauss Gauss version 1.0
GaussInt the Gaussian integer package
genfunc the genfunc package
geometry the geometry package
GF Galois Field Package
grobner the grobner package
group the group package
liesymm the liesymm package
linalg the linalg package
logic the Boolean login package
LREtools the Linear Recurrence Relations Tools package
networks the Networks Package
numapprox the numapprox package
numtheory the number theory package

orthopoly the orthopoly package
padic the p-adic number package
plots the plots package
powseries the powseries package
simplex the simplex package
stats the stats Package
student the student package
sumtools the sumtools package
tensor the tensor package
totorder total orders on names package

Linear Algebra

***indexing functions* indexing functions (for tables and arrays)**
***linalg* the linalg package**
***Tensors* the tensor package**
matrices matrices
vectors vectors
convert/matrix convert an array or a list of lists to a matrix
evalm evaluate a matrix expression
matrixplot 3D plot with z values determined by a matrix
Det inert determinant
Eigenvals compute the eigenvalues/vectors of a numeric matrix
Hermite compute the Hermite Normal Form of a matrix mod p
lattice find a reduced basis of a lattice
Nullspace compute the nullspace of a matrix mod p
Smith compute the Smith Normal Form of a matrix mod p
Svd compute the singular values/vectors of a numeric matrix

Numbers

Complex Numbers
***Constants* Maple constants**
Integer Functions
Numerical Functions
***P-adic* the p-adic number package**
Prime
conversions
***type checking* type checking function**
bernoulli Bernoulli numbers and polynomials
bigomega number of prime divisors of n counted with multiplicity
ceil smallest integer greater than or equal to a number
euler Euler numbers and polynomials

factorEQ Integer factorization in Z(sqrt(d)) where Z(sqrt(d)) is a Euclidean ring
fermat nth Fermat number
floor greatest integer less than or equal to a number
fnormal floating-point normalization
frac fractional part of a number
gcd greatest common divisor
Gcd inert gcd function
lcm least common mulitple
Lcm inert least common multiple of polynomials
nthpow find largest nth power in a number
tau number of divisors
trunc truncate a number to the next nearest integer towards 0
rand random number generator
randomize reset random number generator
round round a number to the nearest integer
value evaluate inert functions

Numerical Computations

Approximations
Integer Functions
Interpolation and Curve Fitting
Intervals

Special Functions

Ai the Airy wave functions
AngerJ the Anger function
bernoulli Bernoulli numbers and polynomials
BesselI the Bessel functions of the first kind
BesselJ the Bessel functions of the first kind
BesselK the Bessel functions of the second kind
BesselY the Bessel functions of the second kind
Beta the Beta function
Bi the Airy wave functions
EllipticModulus the Modulus function k(q)
erf the Error Function
erfc the complementary Error function and its iterated integrals
euler Euler numbers and polynomials

GAMMA the Gamma and incomplete Gamma functions
GaussAGM Gauss' arithmetic geometry mean
harmonic the Harmonic function
hypergeom generalized hypergeometric function
JacobiSN Jacobi elliptic functions
JacobiTheta Jacobi Theta functions
JacobiZeta Jacobi Zeta function
Kelvin Kelvin functions ber, bei, ker, kei, her, and hei
LambertW the W (or omega) function
lnGAMMA the logarithm of the Gamma function
MeijerG special case of the general Meijer G function
pochhammer general pochhamer function
polylog general polylogarithm function
Psi the Digamma and Polygamma functions
Struve the Struve functions H and L
WeberE the Weber function
Weierstrass the Weierstrass functions P, Zeta, and Sigma
Zeta the Riemann and Hurwitz Zeta functions
Integrals

A1.2 Graphics

***addcoords* add a new coordinate system**

***coords* coordinate systems supported in Maple**

2D

plot create a 2D plot of functions
function acceptable plot functions
branches plot the branches of a multi-valued function
infinity infinity plots
multiple multiple plots
parametric parametric plots
animate create an animation of 2D plots of functions
conformal conformal plot of a complex function
densityplot 2D density plotting
display display a list of plot structures
fieldplot plot a 2D vector field
gradplot plot a 2D gradient vector field
implicitplot 2D implicit plotting
logplot create a 2D log-plot of functions
loglogplot create a 2D log-log plot of functions
odeplot 2D or 3D plot of output from dsolve(, numeric)

polar polar coordinate plots
polygonplot create a plot of one or more polygons
replot redo a plot
sparsematrixplot 2D plot of nonzero values of a matrix
textplot plot text strings
structure plot structure
geometry[draw] drawing geometric objects
Options options to the plot command

3D

plot3d 3D plotting of functions
addcoords add a new coordinate system
animate3d create an animation of 3D plots of functions
contourplot contour plotting
cylinderplot plot a 3D surface in cylindrical coordinates
densityplot 2D density plotting
display3d display a set of 3D plot structures
fieldplot3d plot a 3D vector field
gradplot3d plot a 3D gradient vector field
implicitplot3d 3D implicit plotting
matrixplot 3D plot with z values determined by a matrix
odeplot 2D or 3D plot of output from dsolve/numeric
pointplot create a 3D point plot
polygonplot3d create a plot of one or more polygons
polyhedraplot create a 3D point plot with polyhedra
spacecurve plotting of 3D space curves
sphereplot plot a 3D surface in spherical coordinates
surfdata create a 3D surface plot from data
textplot3d plot text strings
tubeplot 3D tube plotting
Options options to the plot3d command

Animation

animate create an animation of 2D plots of functions
animate3d create an animation of 3D plots of functions
display display a list of plot structures
display3d display a set of 3D plot structures

Approximations to Integrals

leftbox graph an approximation to an integral
middlebox graph an approximation to an integral
rightbox graph an approximation to an integral
showtangent plot a function and its tangent line

Differential Equations

DEplot plot the solution to system of DE's
DEplot3d plot the 3D solution to system of DE's
PDEplot plot the solution to a first-order quasi-linear PDE
dfieldplot plot the direction field of a one or two dimensional system of DE's
phaseportrait plot the phase portrait (integral curves) to a one or two dimensional system of DE's

Packages

DEtools **Differential Equations Toolspackage (DEtools)**
plots **the plots package**
Plot Tools **tools for creating and manipulating plots**
statplots **the statplots subpackage of the stats package**

A1.3 Programming

Data Types

definition definition of a type in Maple
algebraic the type algebraic
Boolean Boolean expressions
float floating-point numbers and the float function
fractions fractions, type rational, and type numeric
indexedfun for use with substitution into indexed functions
integers integers
mathematical dependence check for mathematical dependence
mathematical independence check for mathematical independence
protected check for a protected name
ranges expressions of type range
Arrays, Lists, Sets, and Tables

Conversion **convert an expression to a different form**
Strings
Type Checking

Notation

\# comments
backslash the continuation character
comments comments
separators statement separators

Debugging

assert assertion checking
debugger the Maple debugger
debugopts low level control of the debugging facilities
DEBUG breakpoint function
ERROR error return from a procedure
lasterror trap an error condition
maplemint the maplemint procedure checker
mint the mint syntax checker
printlevel printlevel (display of information; debugging procedures)
showstat print a procedure with line numbers
showstop display breakpoints and watchpoints
stopat set breakpoint
stoperror set breakpoint on errors
stopwhen set a watchpoint on a variable
trace trace procedures in order to debug them
tracelast show call stack as of last ERROR
traperror trap an error condition
untrace trace procedures in order to debug them

Evaluation

Digits number of digits carried in floats (default is 10).
Eval Evaluate a polynomial
eval explicit evaluation
evalapply user definable control over function application
evaln evaluate to a name

freeze replace an expression by a name
evalp the p-adic evaluation
precedence the order of precedence of programming-language operators
quotes quotes - ", ', and ‘
thaw replace a frozen variable by an expression
uneval Unevaluated expressions, ' expr'
value evaluate inert functions
verify procedure to verify certain Maple computations
“ Names and strings

Expressions

Punctuation
Sequences
Structure

Flow Control

break the break construct
empty statement the empty statement
ERROR error return from a procedure
if the selection (conditional) statement
quit the quit statement
RETURN explicit return from a procedure
Iteration or Looping

Domains

coding writing functions in Domains
domain domains (parameterized types)
example examples for the Domains package
evaldomains evaluate an expression in a Domains' domain

General Information

expressions index of descriptions for Maple expressions
expression sequences expression sequences
functions index of Maple functions
statements index of descriptions for Maple statements
procedure procedures

Input and Output

File Manipulation
iolib internal function used by Maple in support of the I/O
iostatus indicate status of all open files
Input
Output
Translation

Names and Strings

. the concatenation or dot operator .
alias define an abbreviation or denotation
anames sequence of assigned names
assign perform assignments
assigned check if a name is assigned
attributes set and query object attributes
dot the concatenation or dot operator .
environment variables environment variables
evaln evaluate to a name
freeze replace an expression by a name
initially known names initially known names
initially known functions initially known functions
keywords Maple's keywords (i.e., reserved words)
libname the pre-defined variable libname
macro define a macro - abbreviation
null string the null string
procname the name with which a procedure was invoked
protect protect a name from modification
statement index of descriptions for Maple statements
string names and strings
thaw replace a frozen variable by an expression

unames sequence of unassigned names
unassign unassign names
unprotect undo name protection

Low-level manipulation

addressof obtain the address which points to an expression
assemble assemble a sequence of addresses into an object
disassemble break an object into its component addresses
dismantle display a Maple data structure
pointto obtain the expression pointed to by an address

Resources

Management

Packages

with loading and defining packages
***priqueue* priority queue functions**
procbody create a "neutralized form" of a procedure
stack stack functions
totorder the totorder package

Process Control

block wait for I/O
exec start an external program - replacing Maple
fork start an external program
kill kill an external program
pipe open a UNIX-style pipe
popen start a command and open a pipe to/from it
wait wait for a forked process to terminate

Logic

Logic package **the logic package**
Boolean
Operations
Relations

Operations

Operators
Assignment
Membership
Ordering
Queues and Stacks
Sets and lists **sets and lists**
Substitution

Procedures and Functions

Remember tables
Time and space
-> Functional Operators
args the sequence of actual arguments passed to a procedure
functions functions
evalapply user definable control over function application
makeproc procedure construction
student/makeproc convert an expression into a Maple procedure
nargs the number of arguments passed to a procedure
options procedure options
parameters parameter passing in procedure invocations
procbody create a "neutralized form" of a procedure
procedures procedures
reading and saving procedures reading and saving procedures from files
procmake create a Maple procedure
procname the name with which a procedure was invoked
protect protect a name from modification
readlib read a library file to define a specified name
unload unload a routine from a Maple session
RETURN explicit return from a procedure
reading and saving procedures from files
unprotect undo name protection

A1.4 System

General

Environment Variables
External Functions
Information
Utilities

Help

? descriptions of syntax, datatypes, and functions
help descriptions of syntax, datatypes, and functions
example provide examples of a particular function
index index of help descriptions
introduction introduction to the Maple language and library
info show a brief description of a function
library functions index of descriptions for standard library functions
misc functions index of descriptions for miscellaneous facilities
packages index of descriptions for packages of library functions
expressions index of descriptions for Maple expressions
procedures index of descriptions for Maple procedures
statements index of descriptions for Maple statemetns
tables index of descriptions for tables and arrays
makehelp convert a text file into a help file
related list topics related to a topic
support Maple Technical Support
usage show calling sequence and parameters for a function

Libraries and Packages

packages index of standard packages
libname the pre-defined variable libname
March Maple Library Archive Manager
share Contributions to the "share" library
readlib read a library file to define a specified name
unload unload a routine from a Maple session
with define the names of functions from a library package

Anexa 2 - Lista structurata a principalelor comenzi Maple V

Nota: Numerele din paranteza reprezinta numele exemplului care descrie sau utilizeaza comanda respectiva.

A2.1 Expresii matematice

Numere

Intregi (2.1)
Rationale (2.2)
Irationale (2.2)
Fractii zecimare (2.3)
Pi, ***e*** - Transcendente (2.2)
I, ***Re***, ***Im***, ***abs***, ***argument***, ***conjugate*** - Complexe (2.4)
infinity - infinit (5.11)
evalf - Evaluare numerica in virgula flotanta (2.2)
Digits - Numar de cifre semnificative (2.3)

Operatii aritmetice

+ - suma
- - diferenta
* - produs
/ - raport
ˆ - ridicare la putere
( ) - paranteze pentru modificarea precedentei operatorilor
Sum, ***sum*** - sume (2.6)
add - genereaza suma (5.11)
mul - genereaza produs (5.11)
Product, ***product*** - produs

Obiecte structurate

a,*b*,... - secvente (2.8)
[***a***,*b*,...] - liste (2.9)
{***a***,*b*,...} - multimi (2.10)
a..***b*** - domenii de variatie (2.12)

array(a..b,c..d) - matrice (2.12)
table([...]) - tablouri (2.13)
seq - genereaza secvente (5.12)
member - testeaza apartenenta la o lista sau multime (2.11)
select - selecteaza elemente din liste si multimi (5.13, 5.15, 5.16)
remove - elimina elemente (5.13, 5.16)
zip - combinarea listelor (5.14)

Functii pentru numere intregi (2.1)

abs - valoarea absoluta a unei expresii
factorial - factorialul unui numar intreg
igcd - cel mai mare divizor comun
ifactor - factorizari intregi
isprime - test de numar prim
iquo - catul unei impartiri cu intregi
irem - restul unei impartiri cu intregi
iroot - radacini ale intregilor
isqrt - radacina patrata a intregilor
max, ***min*** - maximul si minimul unui set de numere
mod - modulo (restul impartirii)

Functii elementare (2.5)

sin, ***cos***, ***tan***, ***cot***, ***sec***, ***csc*** - functii trigonometrice
sinh, ***cosh***, ***tanh***, ***coth***, ***sech***, ***csch*** - functii hiperbolice
arcsin, ***arccos***, ***arctan***, ***arccot***,
arcsec, ***arccsc*** - functii trigonometrice inverse
arcsinh, ***arccosh***, ***arctanh***, ***arccoth***,
arcsech, ***arccsch*** - functii hiperbolice inverse
exp - functia exponentiala
ln - functia logaritm natural
log[10] - functia logaritm in baza 10
sqrt - functia radacina patrata
binomial - functia binomiala

Functii speciale (2.5)

round - rotunjire la cel mai apropiat intreg
trunc - trunchiere la partea intreaga
frac - partea fractionara
BesselI, ***BesselJ***, ***BesselK***, ***BesselY*** - functii Bessel
binomial - functia binomiala
erf, ***erfc*** - functiile eroare si eroare complementara
Heaviside - functia treapta Heaviside
Dirac - functia delta Dirac
MeigerG - functia G a lui Meijer
Zeta - functia Zeta a lui Riemann
LegendreKc, ***LegendreEc***, ***LegendrePic***,
LegendreKc1, ***LegendreEc1***,***LegendrePic1*** - integralele eliptice ale lui Legendre
hypergeom - functia hipergeometrica

Alte functii si operatii

<,<=,>,>=,=,<> - operatori relationali (5.10)
not, ***and***, ***or*** - operatori logici
! - factorial (2.1)
true, ***false*** - constante logice (5.12)
= - operator de ecuatie (2.7)
:= - operator de atribuire (2.7)
-> - operator de functie (2.7)
is( ) - functie conditie (5.15)
mod - operatorul *modulo* (2.4)
signum - functia semn (5.10)
. - operator de concatenare (2.8, 5.23)
cat - concatenare argumente
op - extragerea operanzilor (2.9, 2.23)
nops - numar de operanzi (2.9, 2.23)
[ ] - extragere element (2.9)
intersect - intersectie de multimi (2.10)
union - reuniune de multimi (2.10)
minus - diferenta de multimi (2.11)
map - mapare functie pe elementele unei structuri (2.10, 2.20)
printf - afisare obiect (2.12)
unapply - converteste expresie in functie (6.3)
max, ***min*** - extreme (6.2)
Heaviside - functia treapta unitara (6.9)

Dirac - functia impuls (6.9)
picewise - functii definite pe intervale (4.3, 6.9)

Operatii de analiza matematica

Diff, ***diff*** - derivata unei functii (3.7, 6.1, 6.2, 6.5)
D - operatorul diferential (6.4, 6.5)
Int, ***int*** - integrala unei functii (3.7, 6.3)
Limit, ***limit*** - limita unei functii (3.6, 5.11, 6.1, 6.4)
taylor - dezvoltare in serie *Taylor* (5.17, 6.2)
series, ***Order*** - serii de puteri (2.6, 3.7)
laplace, ***invlaplace*** - transformari integrale *Laplace* (6.6)

A2.2 Manipulari simbolice

Transformarea expresiilor in forme echivalente

simplify - simplifica forma expresiilor (2.14, 5.7)
factor - factorizarea polinoamelor sau simplificarea fractiilor (2.15, 5.3)
Factor - factorizarea in domenii speciale (5.3)
expand - dezvoltarea unei expresii (2.16, 5.1)
convert - conversia formei unei expresii (2.17, 5.18)

Optiuni de conversie:

polynom conversie serie - polinom
exp, ***expln***,***expsincos*** conversie expresie trigonometrica - forma exponentiala
parfrac conversie expresie rationala - forma fractinara partiala
rational conversie numar in virgula mobila - forma rationala
radians, ***degrees*** conversie grade - radiani
set, ***list***, ***listlist*** conversie intre structuri de date

normal - simplificarea fractiilor (2.18, 5.7)
rationalize - rationalizarea expresiilor (5.4)
combine - combina termenii de acelasi fel sau simplifica forma expresiilor (2.18, 5.5)
collect - grupare termeni de acelasi ordin (5.2)

Manipularea subexpresiilor

lsh, ***rsh*** - extrag membru din ecuatie (5.15)
numer, ***denom*** - extrag numarator, numitor (5.15)
op, ***nops*** - extrag operanzii unei expresii (5.15)
subs - substituie subexpresie (2.21, 5.16)
sort - sortarea termenilor, listelor sau expresiilor (5.9, 5.14)
select - selecteaza operanzi din expresie (5.15)
remove - elimina operanzi din expresie (5.15)
has - verifica daca o expresie contine operanzii specificati (5.15)

Tipul expresiilor

type - verifica tipul unei expresii (5.15)
whattype - intoarce tipul expresiei (5.15)
hastype - verifica daca o expresie contine o subexpresie de un anumit tip (5.15)
indets - intoarce subexpresii de tip specificat (5.15)

Manipularea polinoamelor

sort - sortarea termenilor (3.5)
collect - gruparea termenilor (3.5)
rem - restul impartirii (3.5)
quo - catul impartirii (3.5)
divide - testul divizibilitatii (3.5)
degree - gradul polinomului (3.5)
ldegree - gradul cel mai mic al termenilor unui polinom (3.5)
coeff - extrage coeficient (3.5)
tcoeff - extrage termenul liber din polinom (3.5)
coeffs - extrage coeficintii tuturor termenilor din polinom (3.5)
lcoeff - extrage coeficientul termenului de grad cel mai mare (3.5)
gcd - cel mai mare divizor comun (3.5)
lcm - cel mai mic multiplu comun (3.5)
factor - factorizarea unui polinom (3.5)
expand - dezvoltarea unui polinom (3.5)
roots - radacinile unui polinom (3.5)
RootOf - multimea radacinilor unui polinom (3.3)
surd - radacinile reale
radical - converteste *RootOf* in radacini
Eval - evalueaza polinomul pentru valori date

Alte manipulari

assume, ***about***, ***additionally*** - presupuneri asupra proprietatilor (5.10)
map, ***map2*** - aplica o functie sau un operator elementelor unei structuri (5.11)

A2.3 Evaluari si rezolvarea ecuatiilor

Rezolvarea ecuatiilor

solve - rezolva simbolic ecuatii si sisteme de ecuatii (3.1, 3.2)
isolve - solutii intregi
msolve - solutii *modulo m*
rsolve - rezolvarea ecuatiilor recursive
assign - aloca valori variabilelor (3.3)
fsolve - rezolva numeric ecuatii si sisteme de ecuatii (3.4)
dsolve - rezolvarea ecuatiilor si sistemelor de ecuatii diferentiale (6.5, 3.9, 3.10, 6.6, 6.7)
pdesolve - rezolva ecuatii cu derivate partiale (6.10)
allvalues - toate radacinile polinomului (3.3)
root - radacina unei expresii algebrice
RootOf - multimea radacinilor unei ecuatii (3.3)
isolate - separa variabila (6.1)
eliminate - elimina variabile din ecuatie
surd - radacinile reale ale unei ecuatii
linsolve - solutia unui sistem liniar de ecuatii (3.12)

Evaluari

value - evalueaza forma inerta (3.7, 6.3)
eval - evalueaza expresia (5.19, 5.20, 5.22)
evalf - evalueaza numeric aproximativ (2.2, 6.1)
evalb - evaluare binara (6.4)
evalm - evalueaza matrice (2.12)
evalc - evaluare complexa
evalr - evaluare in interval
evaln - evalueaza nume
evalhf - evalueaza expresia folosind coprocesorul matematic
assigned - atribuie valori (5.12)

'a' - intarzie evaluarea (5.22)
assume - presupuneri asupra proprietatilor (5.10)
freeze, ***thaw*** - ingeata/dezgheata expresia
uneval - blocheaza evaluarea

A2.4 Reprezentari grafice

Reprezentari 2D

plot - grafic de functie (4.1, 1.1, 2.7, 3.4, 3.7, 5.18, 6.6, 6.7)
polarplot - grafice in coordonate polare (4.2)
textplot - adnotare grafic (4.7)
implicitplot - grafice de functii implicite (4.7)
logplot - grafic in scara logaritmica (4.8)
semilogplot - grafic in scara semilogaritmica (4.8)
loglogplot - grafic in scara bilogaritmica (4.8)

Reprezentari 3D

plot3d - graficul functiilor de doua variabile (4.4, 1.1, 3.2, 6.1, 6.4, 6.10)
sphereplot - grafic 3D in coordonate sferice (4.4)
cylinderplot - grafic 3D in coordonate cilindrice (4.4)
coords, ***addcoords*** - noi sisteme de coordonate
textplot3d - adnotare grafic 3D (4.7)
implicitplot3d - grafice 3D implicite
spacecurve - curbe spatiale (4.8)
tubeplot - tuburi spatiale (4.8)
surfdata - suprafata 3D

Alte feluri de reprezentari grafice

animate, ***animate3d*** - reprezentari animate (4.5)
display, ***display3d*** - suprapunere de grafice sau animatii (4.6, 6.1)
inequal - reprezentarea grafica a regiunilor (4.8)
coordplot, ***coordplot3d*** - reprezentarea grafica a sistemelor de coordonate
contourplot - grafice cu curbe de nivel (4.8)

densityplot - grafice de densitate (4.8)
conformal, ***complexplot***, ***complexplot3d*** - grafice de functii complexe (4.8)
fieldplot, ***fieldplot3d*** - grafice de campuri vectoriale (4.8)
gradplot, ***gradplot3d*** - gradientul unei functii
odeplot - graficul solutiei unei ecuatii diferentiale (6.8, 6.9)
DEplot, ***DEplot3d*** - rezolvarea grafica a unei ecuatii diferentiale (6.8)
PDEplot - graficul solutiei unei ecuatii cu derivate partiale (6.11)
polygonplot, ***polygonplot3d***, ***polyhedraplot*** - linii poligonale si poliedre
sparsematrixplot - graful unei matrice rare
dfield, ***phaseportrait*** - portrete de faza

A2.5 Citire si scriere

Citirea fisierelor

readdata - citirea datelor (7.1)
read - citirea comenzilor (7.2)
fscanf - citire date formatate

Scrierea fisierelor

writedata - scriere date (7.3)
save - scriere expresii (7.4)
savelib - scrie in biblioteca
fprintf - scrie date formatate
print - afiseaza expresii (2.12)
printf - afiseaza expresii in format dorit

Export informatie

plotsetup - exportul reprezentarilor grafice (7.6)

Alte comenzi

fopen, ***fclose*** - deschide/inchide fisier
fremove - sterge fisier
with - deschide biblioteca (4.2)

A2.6 Comenzi diverse

restart - reinitializeaza sesiunea de lucru (6.2)
quit - inchide sesiunea de lucru
infolevel - vizualizeaza "rationamente" (5.11)
protect, ***unprotect*** - protectie nume
Digits - precizia reprezentarii in virgula flotanta (2.3)
" - ultimul rezultat (2.1)
"" - penultimul rezultat (2.1)
;: - terminatori structuri cu si fara afisare (2.12)
- separator comentariu
\ - caracter de continuare
help, ***example***, ***info***, ***usage*** - asistenta
makehelp - converteste text in help
parse - citeste un sir de caractere ca o expresie Maple V
procedures - citeste/scrie proceduri din/in fisier
cost - evalueaza numarul de operatii
showprofile, ***profile***, ***exprofile*** - profilul calculelor Maple
gc - colectarea resturilor (*garbage collection*)
time - timpul total CPU in sesiunea de lucru

Anexa 3 - Programarea in limbajul Maple V

Maple V permite dezvoltrea unor programe sofisticate folosind propriul limbaj de programare. **Caracteristicile** principale ale acestui limbaj sunt:

- dezvoltarea programelor este relativ simpla, deoarece instructiunile sunt interpretate si nu compilate, in acest fel efectul fiecarei instructiuni este obtinut imediat;

- tipurile de date ale variabilelor sunt recunoscute automat de Maple V, deci nu sunt necesare declaratii explicite ale tipurilor iar alocarea structurilor de date ca si eliberarea memoriei se face dinamic;

- limbajul contine un set redus dar puternic de comenzi pentru controlul executiei, care permit programarea structurata;

- Maple V contine translatoare automate din propriul limbaj in limbajele C si Fortran;

- spre deosebire de limbajele universale de programare, instructiunea de atribuire nu are ca efect evaluarea numerica ci doar memorarea expresiei in forma simbolica, ceea ce permite manipulari simbolice sofisticate (Maple V lucreaza in pricipal cu formule si nu cu numere);

- puterea deosebita a limbajului provine din biblioteca sa de functii, care este extrem de bogata si permite operatii matematice foarte complicate.

A3.1 Formatul comenzilor Maple V

Un program Maple V este alcatuit dintr-o secventa de comenzi, fecare avand sintaxa:

$[instructiune]$ $<[separator]>[\#comentariu]$

Constructiile cuprinse intre [ ] sunt optionale. Separatorul folosit uzual pentru instructiuni este caractrerul "punct si virgula" (;) dar daca se doreste ca rezultatul comenzii sa nu fie afisat se va folosi ca separator caracteru "doua puncte" (:) in loc de "punct si virgula". Textul care urmeaza dupa caracterul "diez" (#) este considerat drept comentariu si nu este interpretat de Maple V. Daca lipseste *instructiune* se spune ca avem o comanda vida. O instructiune poate continua pe mai multe randuri, daca este incheiata pe fiecare rand continuare de caracterul "backslash" (\). Executia are loc dupa introducerea comenzii ca raspuns la promptul sistemului (>) si actionarea tastei ENTER. Rezultatul comenzii depinde de context, deci aceeasi comanda poate avea rezultate diferite, atunci cand se modifica valoarea variabilelor ce o alcatuiesc.

In cazul introducerii eronate se poate reveni asupra comenzii si aceasta poate fi modificata prin editare. Daca o comanda este precedata de caracterul (!), atunci ea va fi adresat sistemului de operare si nu catre Maple V.

Exemple de comenzi

```
> a:=2; # se afiseaza rezultatul
```

$$a := 2$$

```
> a:=2:  # nu se afiseaza rezultatul
```

A3.2 Sintaxa instructiunilor Maple V

Instructinile Maple V se pot casifica in urmatoarele categorii:
- atribuiri;
- decizii;
- cicluri;
- instructiuni de intrare/iesire;
- apeluri de proceduri sau functii;
- reinitializarea si incheierea sesiunii de lucru.

Atribuirea

Instructiunea de atribuire are sintaxa:

[*nume* :=] *expr*

in care *nume* este numele unei variabile (incepe cu un caracter alfabetic) iar *expr* este o expresie Maple V. Daca numele nu este specificat atunci rezultatul este atribuit unor variabile speciale denumite " (ultimul rezultat evaluat), "" (penultimul rezultat evaluat) sau """ (antepenultimul rezultat).

Decizia

Instructiunea de decizie permite executia conditionata a unei secvente de instrtuctiuni. Ea are una din sintaxele:

if *conditie* then *secventa1* [elif *conditie2* then *secventa2*] [else *secventan*] fi

sau

'if'(*conditie, expresia1, expresia2*)

Constructia *conditie* este o expresie de tip logic (construita cu operatori de relatie, operatori sau constate logice). Daca valoarea sa logica este ***true***, atunci se executa *secventa1* de instructiuni, daca este indeplinita *conditia2* se executa *seventa 2,* si asa mai departe, in caz contrar se executa *secventan.* In forma cu *'if'* este returnata *expresia1* daca valoarea *conditiei* este ***true*** si *expresia2*, in caz contrar.

Exemple

```
> a := 3; b := 5;
```

$$a := 3$$

$$b := 5$$

```
> if (a > b) then a else b fi;
```

$$5$$

```
> 5*(Pi + 'if'(a > b,a,b));
```

$$5\,\pi + 25$$

Ciclul

Ciclul permite repetarea unei secvente de instructiuni, si are sintaxa:

[for <*name*>] [from <*expr*>] [by <*expr*>] [to <*expr*>] [while <*expr*>] do <*statement sequence*> *od*;

sau

[for <*name*>] [in <*expr*>] [while <*expr*>] do <*statement sequence*> od;

in care: *name* este numele variabilei index, clauza ***from*** indica valoarea initiala a indexului, ***by*** indica pasul indexului, ***to*** indica valoarea finala a indexului iar clauza ***in*** permite parcurgerea operanzilor unei expresii (determinati cu functia ***op***). Valoarea implicita a clauzelor ***from*** si ***by*** este 1. Secventa de instructiuni din corpul ciclului este repetata de mai multe ori, conform indexului, dar atata timp cat este satisfacuta clauza ***while***. In acest fel se pot implementa cicluri cu contor dar si cicluri cu test initial. Cele doua clauze ***for*** si ***while*** pot coexista. Daca nici o clauza nu este satisfacuta corpul ciclului se repeta infinit. Clauzele sunt evaluate la inceputul fecarei iteratii, cu excceptia clauzelor ***in*** si ***to*** care sunt evaluate doar la inceputul primei iteratii.

Cand in interiorul unui ciclu este evaluata variabila cu nume special ***next***, executia ciclului curent este abandonata si se continua executia cu urmatoarea iteratie, incepand de la prima instructiune care urmeaza dupa ***do,*** precedata de evaluarea clauzelor.

Cand in interiorul unui ciclu este evaluata variabila cu nume special ***break***, executia ciclului curent este abandonata si se continua executia cu urmatoarea instructiune, care urmeaza dupa ***od***. In acest fel pot fi incheiate ciclurile infinite.

Trebuie mentionat ca pentru Maple V numele speciale ***next*** si ***break*** nu sunt cuvine rezervate, deci lor li se pot atribui expresii (ceea ce nu este de loc indicat).

Exemple

1) afiseaza numerele pare de la 6 la 100:

```
> for i from 6 by 2 to 100 do print(i) od;
```

2) determina suma numerelor pare cu doua cifre:

```
>  sum := 0; for i from 11 by 2 while i < 100 do sum := sum + i od;
```

3) aduna elementele unei liste:

```
>  sum:=0; for z in bob do sum:=sum+z od;
```

Instructiuni de intrare/iesire

Pentru **citirea datelor** se foloseste instructiunea de intrare cu sintaxa:

read *filename*

in care *filename* este numele fisierului de intrare. Daca fisierul are extensia .m, atunci se presupune ca ele este scris in formatul intern Maple V iar obiectele continute in ele devin disponibile pentru a fi utilizate. In caz contrar se considera ca formatul este in limbaj Maple V iar continutul este citi si tratat ca si cum ar fi introdus de la tastatura.

Exemple

```
>  read `lib/f.m`; read temp; read `temp.m`;
```

Pentru **scrierea datelor** se foloseste instructiunea de iesire cu sintaxa:

save *filename*

sau

save *name1, name2, ..., namek, filename*

in care *filename* este numele fisierului de iesire. In primul caz toate variabilele care in sesiunea curenta au un nume atrbuit sunt salvate in fisierul de iesire ca o secventa de atribuiri. In al doulea caz sunt salvate doar variabilele ale caror nume sunt mentionate in instructiune. Daca numele fisierului de iesire are extensia .m, atunci scrierea se face in formatul intern Maple V iar in caz contrar salverea se face in limbajul Maple.

Exemple

```
>  save `lib/f.m`:  save temp:  save a, b, c, `temp.m`:
```

Proceduri si functii

Apelul unei functii are sintaxa:

name(expression sequence)

in care *name* este numele functiei iar intre paranteze sunt specificati parametii actuali, ca o secventa de expresii.

Apelul unei proceduri are sintaxa:

proc (*argseq*) **local** *nseq*; **global** *nseq*; **options** *nseq*; **description** *stringseq*; **statseq end**

O procedura este o expresie valida, careia i se poate atribui un nume. Constructia *argseq* din paranteza (care poate fi vida) este o secventa de nume, reprezentand parametrii formali (fiecare nume poate fi urmat de un specificator optional de tip, precedat de caracterele::). Constructiile **local, global si option** pot lipsi si ele indica variabilele locale, globale sau optiunile active. In mod implicit variabilele index si cel din stanga atribuirii sunt locale iar celelalte sunt globale.

Reinitializarea si incheierea sesiunii

Pentru reinitializarea sesiunii de lucru se utilizeaza comanda:

restart

Efectul ei consta in stergerea intregii memorii de lucru, sisemul comportandu-se ca si cu ar fi fost abia lansat.

Pentru incheierea sesiunii de lucru se poate folosi oricare din comenzile:
quit
done
stop
care au efect echivalent.

A3.3 Expresii Maple V

O expresie Maple V reprezinta o constructie alcatuita din opertori si operanzi, care satisface anumite reguli sintactice.

Operatori

Operatorii recunoscuti de Maple se clasifica in functie de numarul de operanzi in trei mari categorii:

- **operatori binari** (cu doi operanzi):

+ addition
- subtraction
* multiplication
/ division
** exponentiation
^ exponentiation **mod** modulo
< less than
<= less than or equal
> greater than

>= greater than or equal = equal <> not equal
$ sequence operator
@ composition
@@ repeated composition
. concatenation and decimal point
.. ellipsis
, expression separator
:= assignment
and logical and
or logical or
union set union
intersect set intersubsection
minus set difference
&<string> neutral operator

- **operatori unari** (cu un operand):

+ unary plus (prefix)
- unary minus (prefix)
! factorial (postfix)
not logical not (prefix)
. decimal point (prefix or postfix)
$ sequence operator (prefix)
&string neutral operator (prefix)

- **operatori nulari** (fara operanzi):

” last expression
”” second last expression
””” third last expression
Dupa efectul lor operatorii se pot clasifica in:

- **aritmetici**:

+ - adunare;
- -scadere sau schimbare de semn;
* - inmultire;
/ - impartire;
ˆ sau ** (cu efect echivalent) - ridicare la putere.

- **pentru numere intregi**:

! - factorial;
mod - clase de echivalenta modulo.

- **logici:**

or - suma logica
and - produs logic;
not - negatie,

- **de relatie:**

< mai mare;
> mai mic;

$<=$ mai mic sau egal;
$>=$ mai mare sau egal;
$<>$ diferit;
$=$ egal.

- **pentru multimi:**

union - reuniune;
intersect - intersectie;
minus - diferenta.

- **diversi alti operatori:**

$ - de formare a secventelor de expresii;
@ - de compunere a functiilor;
. - de concatenare;
-> - de definire a functiilor;
& - definit de utilizator.

Constructiile cu operatorul $ au sintaxa:

expr $ i = m..n

in care *expr, m* si *n* sunt expresii iar *i* este un nume neevaluat. Se recomanda ca *expr* si *i* sa fie incadrate intre caracterele apostrof ', pentru a preveni evaluarea prematura, ca in constructia:

'expr' $ 'i' = m..n

care intoarce o secventa de expresii obtinute prin substituirea lui *i* in *expr* cu valorile *m,m+1, ...,n* (ultima valoare care nu depaseste n).

Exemple

```
> $ 2..5;
```

$$2, 3, 4, 5$$

```
> i^2 $ i = 2/3 .. 8/3;
```

$$\frac{4}{9}, \frac{25}{9}, \frac{64}{9}$$

```
> a[i] $ i = 1..3;
```

$$a_1, a_2, a_3$$

```
> x$4;
```

$$x, x, x, x$$

Constructiile cu operatorul @ au sintaxa:

f @ g
f @@ n

in care f si g sunt functii iar n este un numar intreg. Prima constructie intoarce functia compusa iar a doua intoarce o compunere a functiei f aplicata de n ori.

Exemple

```
> (sin@cos)(x);
```

$$\sin(\cos(x))$$

```
> (sin@arcsin)(x);
```

$$x$$

```
> sin@arcsin;
```

$$\sin@\arcsin$$

```
> simplify(");
```

$$() \to \mathrm{args}$$

```
> sin@@0;
```

$$() \to \mathrm{args}$$

```
> sin@@1;
```

$$\sin$$

```
> (sin@@2)(x);
```

$$(\sin^{(2)})(x)$$

```
> cos@@(-1);
```

$$\arccos$$

```
> (D@@2)(ln);
```

$$a \to -\frac{1}{a^2}$$

Constructiile cu operatorul de concatenare a numelor au sintaxa:

name.integer

sau

name.string, name.(expr)

Exemple

```
> i := 5;
```

$$i := 5$$

```
> p.i;
```

$$p5$$

```
> a.(2*i);
```

$$a10$$

```
> a.(1..3);
```

$$a1,\ a2,\ a3$$

Operatorul functional

Operatorul functional permite definita unei functii, ca o forma speciala a unei proceduri, cu sinaxa:

vars -> result

in care *vars* este o secventa de nume de variabile (sau un singur nume) iar *result* este rezultatul procedurii care actioneaza asupra variabilelor.

Constructia anterioara este ecivalenta semantic cu:

proc(vars) option operator, arrow; result end

De exemplu, x -> x^2 este functia care ridica la patrat argumentul sau. Se pot defini functii de mai multe variabile ca in costructia:

(x,y) -> x^2 + y^2 x -> (2*x, 3*x^4) (x,y,z) -> (x*y, y*z)

Exemple

```
> f := x -> 3*x + 5;
```

$$f := x \to 3\,x + 5$$

```
> f(2);
```

$$11$$

```
> g := (x,y) -> sin(x)*cos(y) + x*y;
```

$$g := (x,\ y) \to \sin(x)\cos(y) + x\,y$$

```
> g(Pi/2, Pi);
```

$$-1 + \frac{1}{2}\pi^2$$

```
> h := x -> (2*x, x^3);
```

$$h := x \to (2\,x,\ x^3)$$

```
> h(3);
```

$$6,\ 27$$

```
> F := (x -> sin(x));
```

$$F := \sin$$

```
> F(t);
```

$$\sin(t)$$

```
> A := (() -> 1);
```

$$A := 1$$

```
> (() -> 1)(x);
```

$$1$$

```
> 1(x);
```

$$1$$

```
> B := (() -> 3.14);
```

$$B := 3.14$$

```
> (() -> 3.14)(x,y);
```

$$3.14$$

```
> 3.14(x,y);
```

$$3.14$$

```
> (x -> x)(t);
```

$$t$$

```
> (a+b)(t);
```

$$\mathrm{a}(t) + \mathrm{b}(t)$$

```
> (a+1)(t);
```

$$\mathrm{a}(t) + 1$$

```
> ( (x -> ln(x)+1)@@2 )(t);
```

$$\ln(\ln(t) + 1) + 1$$

```
> ( (x -> sin(x))@(x -> arcsin(x)) )(t);
```

$$t$$

Precedenta operatorilor este data de lista de prioritati:

. (left associative)

% (non-associative)

&-operators (left associative)

! (left associative)

^, **, @@ (non-associative)

, &, /, @, **intersect** (left associative)

+, -, **union**, **minus** (left associative)

mod (non-associative)

.. (non-associative)

<, <=, >, >=, =, <> (non-associative)

$ (non-associative)

not (right associative)

and (left associative)

or (left associative)

-> (right associative)

, (left associative)

:= (non-associative)

Operatorii ^, **, and @@ sunt definiti ca ne asociativi, deci constructia a^b^c este invalida (pretinde utilizarea parantezelor)

Operanzi

Operanzii unei expresii pot fi:

- constante;
- variabile;
- expresii.

Constante

Constantele utilizate de Maple V sunt de tip

- intreg (de exeplu n:= 2);
- fractionare (de exemplu a:=7/3);
- in virgula mobila (de exemplu w:=-3.56)

Acestea pot fi definite de utilizator. In plus exista urmatoarele constante simbolice:

Pi numarul pi cu valoare aproximativa 3.14159265...

Catalan constanta lui Catalan = sum((-1)^i/(2*i+1)^2,i=0..infinity) cu valoare aproximativa 0.915965594...

gamma constanta lui Euler = limit(sum(1/i,i=1..n) - ln(n), n=infinity) cu valoare aproximativa 0.5772156649...

gamma(n) seria constantelor gamma(n) = limit(sum(ln(k)^n/k, k=1..m) - ln(m)^(n+1)/(n+1), m=infinity) gamma(0) = constanta Euler.

I unitatea imaginara = numarul complex cu proprietatea I^2 = -1. Numele I este aliasul radicalului (-1)^(1/2)

infinity nume pentru infinit utilizat de anumite functii

NULL secventa vida de expresii

true valoarea logica adevarata

false valoarea logica falsa
FAIL constanta logica cu valoare nederminata (cea de a treia valoare logica)
In plus, utilizatorul are acces la urmatoarele setari "de mediu" (environment):
Digits numarul de digiti in virgula mobila (valoare implicita 10)
Order ordinul trunchierii seriilor (valoare implicita 6)
printlevel nivelul de imprimare (valoare implicita 1)
Functiile aplicate unor constante sunt considerate tot constante, de exemplu:

```
> sqrt(2);
```

$$\sqrt{2}$$

```
> exp(1);
```

$$e$$

```
> ln(3);
```

$$\ln(3)$$

```
> Pi;
```

$$\pi$$

```
> Catalan;
```

$$Catalan$$

```
> evalf(");
```

$$.9159655942$$

```
> I;
```

$$I$$

```
> infinity;
```

$$\infty$$

Tipuri de variabile

In Maple V nu sunt necesare declaratii de tip. Pentru reprezentarea interna sunt folosite aproape o suta de tipuri de date diferite:

algebraic algext algfun algnum algnumext anyfunc anything arctrig array boolean complex constant cubic dependent disjcyc equation even evenfunc expanded exprseq facint float fraction freeof function identical indexed indexedfun infinity integer intersect laurent linear list listlist logical mathfunc matrix minus monomial name negative negint nonneg nonnegint nothing numeric odd oddfunc operator point polynom posint positive prime procedure protected quadratic quartic radext radfun radfunext radical radnum radnumext range rational ratpoly realcons relation rgf_seq scalar series set specfunc sqrt square string table taylor trig type uneval union vector.

Dintre acestea cele mai importante sunt:

- boolean sau logic
- sir de caractere (TEXT, string)
- intreg (integer)
- real (float)
- complex
- vector
- matrice (array, matrix)
- tablou (table)
- lista (list)
- multime (set)
- domeniu (range)
- polinom (polynom)
- functie rationala (ratpoly)
- serie (series, laurent, taylor)

In fond, fiecare expresie valida are un tip corespunzator operatorilor de ultim nivel folositi (+, -, * , rational, function, equation etc).

Exemple:

```
> l:= true; # l este o variabila logica
```

$$l := true$$

```
> t:= `acesta este in sir de caractere`;
```

$$t := acesta\ este\ in\ sir\ de\ caractere$$

```
> n := 3; # numar intreg
```

$$n := 3$$

```
> a:= 1.35; # numar real
```

$$a := 1.35$$

```
> z:= a + I*a; # numar complex
```

$$z := 1.35 + 1.35\, I$$

```
> v := array([2,2/3,1]); # vector
```

$$v := \left[2, \frac{2}{3}, 1\right]$$

```
> A := linalg[matrix](2,3,[1,2,3,4,5/2,6]); # matrice
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \frac{5}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

```
> A := array(1..2, 1..2, [[1, 3], [1/2, 5]]); # matrice
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

```
> T:=table([11,red,Pi]); # tablou
```

$$\begin{aligned} &T := \mathrm{table}([\\ &\quad 1 = 11\\ &\quad 2 = \mathit{red}\\ &\quad 3 = \pi\\ &\quad]) \end{aligned}$$

```
> L := [x^4-1, x^2, x+3]; # lista
```

$$L := [x^4 - 1,\ x^2,\ x + 3]$$

```
> S := {1, 2, 3/2, 2}; # multime
```

$$S := \{1,\ 2,\ \frac{3}{2}\}$$

```
> d := 1..3; # domeniu
```

$$d := 1..3$$

```
> p := 2*x^2 + 5.2*x -3; # polinom in variabila x
```

$$p := 2\,x^2 + 5.2\,x - 3$$

```
> q := p/(p+2) ; # functie rationala de polioame
```

$$q := \frac{2\,x^2 + 5.2\,x - 3}{2\,x^2 + 5.2\,x - 1}$$

```
> series(sin(x),x,5); # Serie Taylor
```

$$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \mathrm{O}(x^5)$$

```
> series(ln(x+x^2), x, 3); # Serie Laurent
```

$$\ln(x) + x - \frac{1}{2}\,x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

Functiile **type** si **wattype** permit verificarea si identificarea tipului unei expresii.

Exemple

```
> whattype(x + y);
```

$$+$$

```
> whattype(x - y);
```

$$+$$

```
> whattype(-x);
```

$$*$$

```
> whattype(x^2*f(y));
```

$$*$$

```
> whattype(x/y);
```

$$*$$

```
> whattype(x^y);
```

$$\hat{}$$

```
> whattype(1/x);
```

$$\hat{}$$

```
> whattype(x, y);
```

$$exprseq$$

```
> type( a + b, polynom );
```

$$true$$

```
> type( a + b, `+` );
```

$$true$$

```
> type( a * b, `+` );
```

$$false$$

```
> type( a and b, `and` );
```

$$true$$

Functia **wattype** intoarce unul din tipurile de baza:

* + . .. < <= <> = ^ and exprseq float fraction function indexed integer list not or procedure series set string table uneval

Functii standard si biblioteci

Puterea deosebita a limbajului Maple V este acordata de multimea de functii pusa la dispozitia utilizatorului.

Urmatoarea lista contine functiile standard:

AFactor, AFactors, AiryAi, AiryBi, AngerJ, Berlekamp, BesselI, BesselJ, BesselK, BesselY, Beta, C, Chi, Ci, CompSeq, Content, D, DESol, Det, Diff, Dirac, DistDeg, Divide, Ei, Eigenvals, EllipticCe, EllipticCK, EllipticCPi, EllipticE, EllipticF, EllipticK, EllipticModulus, EllipticNome, EllipticPi, Eval, Expand, FFT, Factor, Factors, FresnelC, FresnelS, Fresnelf, Fresnelg, Frobenius, GAMMA, GaussAGm, Gaussejord, Gausselim, Gcd, Gcdex, HankelH1, HankelH2, Heaviside, Hermite, Im, Indep, Interp, Inverse, Irreduc, Issimilar, JacobiAM, JacobiCD, JacobiCN, JacobiCS, JacobiDC, JacobiDN, JacobiDS, JacobiNC, JacobiND, JacobiNS, JacobiSC, JacobiSD, JacobiSN, JacobiTheta1, JacobiTheta2, JacobiTheta3, JacobiTheta4, JacobiZeta, KelvinBei, KelvinBer, KelvinHei, KelvinHer, KelvinKei, KelvinKer, LambertW, Lcm, Legendree, LegendreEc, LegendreEc1, LegendreF, LegendreKc, LegendreKc1, LegendrePi, LegendrePic, LegendrePic1, Li, Linsolve, MOLS, Maple_floats, MeijerG, Norm, Normal, Nullspace, Power, Powmod, Prem, Primfield, Primitive, Primpart, ProbSplit, Product, Psi, Quo, RESol, Randpoly, Randprime, Ratrecon, Re, Rem, Resultant, RootOf, Roots, SPrem, Searchtext, Shi, Si, Smith, Sqrfree, Ssi, StruveH, StruveL, Sum, Svd, TEXT, Trace, Webere, WeierstrassP, WeierstrassPPrime, WeierstrassSigma, WeierstrassZeta, Zeta, abs, add, addcoords, addressof, algebraic, algsubs, alias, allvalues, anames, antisymm, applyop, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, argument, array, assign, assigned, asspar, assume, asubs, asympt, attribute, bernstein, branches, bspline, cat, ceil, chrem, close, close, coeff, coeffs, coeftayl, collect, combine, commutat, comparray, compoly, conjugate, content, convergs, convert, coords, copy, cos, cosh, cost, cot, coth, csc, csch, csgn, dawson, define, degree, denom, depends, diagonal, diff, dilog, dinterp, disassemble, discont, discrim, dismantle, divide, dsolve, eliminate, ellipsoid, entries, eqn, erf, erfc, eulermac, eval, evala, evalapply, evalb, evalc, evalf, evalfint, evalgf, evalhf, evalm, evaln, evalr, exp, expand, expandoff, expandon, extract, factor, factors, fclose, feof, fflush, filepos, fixdiv, float, floor, fnormal, fopen, forget, fortran, fprintf, frac, freeze, fremove, frontend, fscanf, fsolve, galois, gc, gcd, gcdex, genpoly, harmonic, has, hasfun, hasoption, hastype, heap, history, hypergeom, iFFT, icontent, identity, igcd, igcdex, ilcm, ilog, ilog10, implicitdiff, indets, index, indexed, indices, inifcn, ininame, initialize, insert, int, interface, interp, invfunc, invztrans, iostatus, iperfpow, iquo, iratrecon, irem, iroot, irreduc, iscont, isdifferentiable, isolate, ispoly, isqrfree, isqrt, issqr, latex, lattice, lcm, lcoeff, leadterm, length, lexorder, lhs, limit, ln, lnGAMMa, log, log10, lprint, map, map2, match, matrix, max, maximize, maxnorm, maxorder, member, min, minimize, minpoly, modp, modp1, modp2, modpol, mods, msolve, mtaylor, mul, nextprime, nops, norm, normal, numboccur, numer, op, open, optimize, order, parse, pclose, pclose, pdesolve, piecewise, plot, plot3d, plotsetup, pochhammer, pointto, poisson, polar, polylog, polynom, powmod, prem, prevprime, primpart, print, printf, procbody, procmake, product, proot, property, protect, psqrt, quo, radnormal, radsimp, rand, randomize, randpoly, range, rationalize, ratrecon, readbytes, readdata, readlib, readline, readstat, realroot, recipoly, rem, remove, residue, resultant, rhs, root, roots, round, rsolve, savelib, scanf, searchtext, *sec, sech, select, seq, series, setattribute, shake, showprofile, showtime, sign, signum, simplify, sin, singular, sinh, sinterp, solve, sort, sparse, spline, split, splits, sprem, sprintf, sqrfree, sqrt, sscanf, ssystem, stack, sturm, sturmseq, subs, subsop, substring, sum, surd, symmdiff, symmetric, system, table, tan, tanh, testeq, testfloat, thaw, thiele, time, translate, traperror, trigsubs, trunc, type, typematch, unames, unapply, unassign, unload, unprotect, updatesR4, userinfo, value, vector, verify, whattype, with, writebytes, writedata, writeline, writestat, writeto, zip, ztrans.*

Dar multimea functiilor aflata la dispozitia utilizatorului este mult mai ampla. Functiile suplimentare sunt grupate in pachete cu destinatii distincte. Lista pachetelor disponibile este prezentata in tabelul 2.4 (exemplul 2.22)

Depanarea programelor

Pentru facilitarea depanarii programelor dezvoltate in Maple V sunt disponibile urmatoarele functii:

assert verificarea presupunerilor
debugger depanatorul Maple V
debugopts controlul facilitatilor de depanare
DEBUG puncte de oprire (break points)
ERROR eroarea introdusa de o procedura
lasterror conditia de eroare
maplemint procedura de verificare
mint verificare sintaxa
printlevel nivel de afisare a informatiilor de depanare
showstat afiseaza procedura cu liniile numerotate
showstop afiseaza punctele de oprire
stopat seteaza puncte de oprire
stoperror seteaza punctele de oprire in caz de eroare
stopwhen seteaza un punct de supraveghere a unei variabile
trace trasare procedura
tracelast afiseaza stiva de apeluri
traperror capcana pentru erori
untrace opreste trasarea procedurii

A3.4 Traducerea in limbajul C

Pentru traducerea din limbajul Maple V in limbajul C se poate folosi apelul functiei **C**, ca in constructiile:

C(*expr*)
C(*expr,options*)

in care *expr* este o expresie sau o procedura. Sunt recunoscute urmatoarele optiuni:
filename=nume pentru scrierea rezultatului in fisierul *nume*;

optimized se efectueaza optimizari folosind variabile intermediare;
precision=single variabilele se declara de tip float (implicit ele sunt double);
ansi trducerea se face in ASI-C (implicit ea se face in Kernighan and Ritchie C);
digits $= n$ numarul de digiti pentru constante (implicit 7 pentru single si 16 pentru double);

Exemple

```
> readlib(C): f := 1-2*x+3*x^2-2*x^3+x^4;
```

$$f := 1 - 2\,x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$$

```
> C(f);

      t0 = 1.0-2.0*x+3.0*x*x-2.0*x*x*x+pow(x,4.0);

> C(f,optimized);

      t1 = x*x;
      t3 = t1*t1;
      t4 = 1.0-2.0*x+3.0*t1-2.0*t1*x+t3;

> C(convert(f,horner,x));

      t0 = 1.0+(-2.0+(3.0+(-2.0+x)*x)*x)*x;

> f := Pi*ln(x^2)-sqrt(2)*ln(x^2)^2;
```

$$f := \pi \ln(x^2) - \sqrt{2} \ln(x^2)^2$$

```
> C(f);

      t0 = 0.3141592653589793E1*log(x*x)-sqrt(2.0)*pow(log(x*x),2.0);

> C(f,optimized);

      t1 = x*x;
      t2 = log(t1);
      t4 = sqrt(2.0);
      t5 = t2*t2;
      t7 = 0.3141592653589793E1*t2-t4*t5;

> C([s = x^2, t = ln(s), r = Pi*t-sqrt(2)*s^2 ], precision=double);

      s = x*x;
      t = log(s);
      r = 0.3141592653589793E1*t-sqrt(2.0)*s*s;

> v := array([exp(-x)*x,exp(-x)*x^2,exp(-x)*x^3]);
```

$$v := \left[e^{(-x)}\,x,\; e^{(-x)}\,x^2,\; e^{(-x)}\,x^3\right]$$

```
> C(v,optimized);

      t1 = exp(-x);
      t3 = x*x;
      v[0] = t1*x;
      v[1] = t1*t3;
      v[2] = t1*t3*x;
```

O matrice cu elemente nedefinite

```
> A := array(1..2,1..2,symmetric): A[1,1] := log(x): A[1,2] := 1-log(x):
print(A);
```

$$\begin{bmatrix} \ln(x) & 1-\ln(x) \\ 1-\ln(x) & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

```
> C(A,precision=double);

      A[0][0] = log(x);
      A[0][1] = 1.0-log(x);
      A[1][0] = 1.0-log(x);
      A[1][1] = undefined;
```

```
> C(A,optimized);

      t1 = log(x);
      t2 = 1.0-t1;
      A[0][0] = t1;
      A[0][1] = t2;
      A[1][0] = t2;
      A[1][1] = undefined;
```

```
> f := convert(1-2*x+3*x^2-2*x^3+x^4,horner);
```

$$f := 1 + (-2 + (3 + (-2 + x)\,x)\,x)\,x$$

```
> f := unapply(f,x); # Converteste expresie in procedura
```

$$f := x \to 1 + (-2 + (3 + (-2 + x)\,x)\,x)\,x$$

```
> C(f);

/* The options were    : operatorarrow */
double f(x)
double x;
\{
  return(1+(-2+(3+(-2+x)*x)*x)*x);
\}
```

```
>  C(f,ansi);

/* The options were    : operatorarrow */
double f(double x)
\{
  return(1+(-2+(3+(-2+x)*x)*x)*x);
\}
```

```
>  readlib(C):
```

Calculeaza sin(x)/x in dubla precizie

```
>  f := proc(x) if abs(x) < 1.0e-8 then 1-x^2/6; else sin(x)/x; fi; end:
C(f);

double f(x)
double x;
\{
  if (fabs(x) \TEXTsymbol{<} 0.1E-7)
    return(1-x*x/6);
  else
    return(sin(x)/x);
\}
```

```
>  C(f,ansi,precision=single);

float f(float x)
\{
  if (fabs(x) \TEXTsymbol{<} 0.1E-7)
    return(1-x*x/6);
  else
    return(sin(x)/x);
\}
```

Calculeaza 1+x+x^2/2+...+x^n/n!

```
>  f := proc(x,n) local i,s,t; s := 1; t := 1; for i to n do t := t*x/i;
s := s+t od; s end:  C(f);

double f(x,n)
double x;
double n;
\{
  int i;
  double s;
  double t;
  s = 1;
  t = 1;
  for(i = 1;(i \TEXTsymbol{<}= n);i++)
  \{
    t *= x/i;
    s += t;
  \}
  return(s);
```

```
\}
```

Translatarea unei matrice, scrierea rezultatului si tratarea erorilor

```
>  f := proc(x::numeric) local i, M; global test; M := array(-2..3, sparse,
[(1)=sin(x), (2)=x^3]); for i from -2 to 3 do if test then print(M[i])
else ERROR(`Error message`); fi; od; M; end:  C(f);

void f(x,crea\_par)
double x;
double crea\_par[6];
\{
  int i;
  double M[6];
  extern int test;
  M[0] = 0;
  M[1] = 0;
  M[2] = 0;
  M[3] = sin(x);
  M[4] = x*x*x;
  M[5] = 0;
  for(i = -2;(i \TEXTsymbol{<}= 3);i++)
    if (test)
      printf( "\%e\TEXTsymbol{\}n" ,M[i+2]);
    else
      \{
        fprintf(stderr, "Error message" );
        exit(1);
      \}
\}

>  f := proc(x) sin(x)^2*cos(x) end:  g := D(f); # The derivative of f
```

$$g := \mathbf{proc}(x)\, 2 \times \sin(x) \times \cos(x)^2 - \sin(x)^3 \,\mathbf{end}$$

```
>  C(g,optimized);

double g(x)
double x;
\{
  double t1;
  double t3;
  double t5;
  t1 = sin(x);
  t3 = pow(cos(x),2);
  t5 = t1*t1;
  return(2*t1*t3-t5*t1);
\}
```

O procedura Maple V, care intoarce un tablou

```
>  g := proc(x,y,z) local dt,grd,t; grd := array(1 ..  3); dt := array(1
..  3); dt[3] := 2*z; t := z^2; grd[1] := cos(x)*z-sin(x)*t; grd[2] :=
0; grd[3] := sin(x)+cos(x)*dt[3]-1/t^2*dt[3]; grd end:  C(g);
```

```
void g(x,y,z,crea\_par)
double x;
double y;
double z;
double crea\_par[3];
\{
  double dt[3];
  double grd[3];
  double t;
  dt[2] = 2*z;
  t = z*z;
  grd[0] = cos(x)*z-sin(x)*t;
  grd[1] = 0;
  grd[2] = sin(x)+cos(x)*dt[2]-1/(t*t)*dt[2];
\}
```

```
>  C(g,ansi,optimized);
```

```
void g(double x,double y,double z,double crea\_par[3])
\{
  double grd[3];
  double t7;
  double t1;
  double dt[3];
  double t3;
  double t;
  double t5;
  dt[2] = 2*z;
  t = z*z;
  t1 = cos(x);
  t3 = sin(x);
  grd[0] = t1*z-t3*t;
  grd[1] = 0;
  t5 = dt[2];
  t7 = t*t;
  grd[2] = t3+t1*t5-1/t7*t5;
\}
```

Index

Bibliografie

1. Abell, M., Braselton, J., *Differential Equations with Maple V*, Academic Press, 1994.

2. Abell, M., Braselton, J., *Maple V by Example*, Academic Press, 1994.

3. Abell, M., Braselton, J., *The Maple V Handbook*, Academic Press, 1994.

4. Articolo, G.A., *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Maple V*, Academic Press, 1998.

5. Artino, C., Johnson, J., Kolod, J., *Exploring Calculus with Maple*, New York: Wiley, 1994.

6. Bauldry, W., Johnson, J., *Linear Algebra with Maple*, New York: Wiley, 1995.

7. Burbulla, D.C.M., Dodson, C.T.J., *Self-Tutor for Computer Calculus Using Maple*, Prentice Hall Canada, 1993.

8. Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M., *First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V*, Springer-Verlag, 1992.

9. Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M., *Maple V Language Reference Manual*, Springer-Verlag, 1991.

10. Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Leong, B.L., Monagan, M.B., Watt, S.M., *Maple V Library Reference Manual*, Springer-Verlag, 1991.

11. Cheung, C., Harer, J., *A Guide to Multivariable Calculus with Maple V*, New York: Wiley, 1994.

12. Decker, R., *Calculus and Maple V*, Prentice Hall Canada, 1994.

13. Harris, K., Lopez, R., *Discovering Calculus with Maple*, New York: Wiley, 1995.

14. Heal, K.M., Hansen, M.L., Rickard, K.M., *Maple V - Learning Guide*, Springer-Verlag, 1996.

15. Heck, A., *Introduction to Maple - A Computer Algebra System*, Springer-Verlag, 1993.

16. Holmes, M.H., Ecker, J.G., Boyce, W.E., Siegmann, W.L., *Exploring Calculus with Maple*, Addison-Wesley, 1993.

17. Kreyszig, H.E., *Maple Computer Manual for Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 1994.

18. Monagan, M., eddes, K., Heal, K., Lahn, G., Vorkoetter, S., *Maple V Programming Guide for Release 5*, Springer-Verlag, 1997.

19. Redfern, D., *The Maple Handbook*, Springer-Verlag, 1995.